النواس المرن

س1_ استنتج أن محصلة القوى المؤثرة في مركز عطالة الجسم الصلب في النواس المرن هي قوة إرجاع تعطى بالعلاقة $F=-KX$.

الجواب: حالة السكون: يستطيل النابضُ مسافة x_0 بعد تعليق الجسم فيه ثم **يتوازنُ الجسمُ** بتأثير قوتين:

قوة ثقله $\vec{W}$ وقوة توتر النابض $\vec{F}_{S_0}$،

وبما أن **الجسم ساكن:**

$$\sum \vec{F}=\vec{0}$$

$$\vec{W}+\vec{F}_{S_0}=\vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$W-F_{S_0}=0$$

$$W=F_{S_0} \quad ❶$$

تؤثر في **النابض** قوة شد $\vec{F'}_{S_0}$ التي تسببُ له الاستطالة x_0

$$F'_{S_0}=kx_0$$

لكن $F_{S_0}=F'_{S_0}$ (لأنهما قوى داخلية)

بالتعويض بـ ❶ نجد أن: $W=kx_0$

حيث x_0 الاستطالة السكونية للنابض.

1) حالة الحركة: القوى الخارجيّة المؤثرةُ في مركز عطالة الجسم: قوة الثقل $\vec{W}$ و قوّة توتر النابض $\vec{F}_S$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F}=m\vec{a}$$

$$\sum \vec{F}=\vec{W}+\vec{F}_S=m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجّه نحوَ الأسفل:

$$\sum F=W-F_S=ma \quad ❷$$

تؤثرُ في **النابضُ** قوة شد $\vec{F'}_S$ التي تسبب له الاستطالة $x_0+\bar{x}$ إذاً:

$$F'_S=k(x_0+\bar{x})$$

لكن $F_S=F'_S$ (لأنهما قوى داخلية)

بالتعويض بـ ❷ نجد:

$$\sum F=kx_0-k(x_0+\bar{x})=m\bar{a}$$

$$\sum F=kx_0-kx_0-k\bar{x}=m\bar{a}$$

$$F=-k\bar{x}=m\bar{a}$$

نتيجة: إنّ محصّلة القوى الخارجيّة المؤثّرة في مركز عطالة الجسم في كلّ لحظةٍ هي **قوّة إرجاع** لأنّها **تُعيد** الجسمَ إلى **مركز الاهتزاز** دوماً، وهي تتناسب **طرداً** مع المطال x و**تعاكسُه** بالإشارة.

س2_ استنتج الدور الخاص للنواس المرن ثم برهن أن حركة الجسم الصلب المعلق حركة جيبية انسحابية توافقية بسيطة غير المتخامدة.

الجواب: إنّ محصّلة القوى الخارجيّة التي يخضعُ لها مركز عطالة الجسم تُعطى بالعلاقة:

$$\bar{F}=m\bar{a}=-K\bar{x}$$

$$\bar{a}=-\frac{k}{m}\bar{x}$$

$$(\bar{x})''_t=-\frac{k}{m}\bar{x} \quad \ldots\ldots\ldots ❶$$

وهي **معادلةٌ تفاضليّةٌ** من **المرتبة الثانية** تقبل **حلاً جيبيّاً** من الشكل:

$$\bar{x}=X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi}) \ldots\ldots ❷$$

وهو الشكل العام للتابع الزمنيّ للمطال (الموضع) حيث:

$\bar{x}$ المطال أو موضع الجسم في اللحظة t ويقدر بالمتر m .

X_{max} سعة الحركة وتقدّر بالمتر m مقدار ثابت وموجب .

ω_0 النبض الخاص للحركة ويقدر بالـ $rad.s^{-1}$ مقدار ثابت وموجب

$(\omega_0 t+\bar{\varphi})$ طور الحركة في اللحظة t .

$\bar{\varphi}$ الطور الابتدائي في اللحظة t=0 ويقدّر بالـ rad وهو مقدار ثابت

للتحقق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرتين بالنسبة للزمن

$$(x)'_t=\bar{v}=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$
$$(x)''_t=\bar{a}=-\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$
$$(\bar{x})''_t=-\omega_0^2\bar{x} \quad .... ❸$$

بالمقارنة بين (❶) و (❸) نجد أن:

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}$$
$$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}>0}$$

وهذا محقق لأن k,m موجبان .

نتيجة: إن حركة النواس المرن هي هزازة جيبية توافقية انسحابيه بسيطة غير متخامدة.

بما أن: $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ و $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$

بالمساواة نجد: $\frac{2\pi}{T_0}=\sqrt{\frac{k}{m}}$ بالتالي:

$$\boxed{T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

وهي علاقة الدور الخاص للنواس المرن غير المتخامد .

من العلاقة السابقة أستنتج أن الدور الخاص:

1) لا يتعلق بسعة الاهتزاز X_{max} .

2) يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لكتلة الجسم المهتز m .

3) يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض k .

س3_ استنتج تابع المطال بأبسط أشكاله انطلاقاً من الشكل العام للتابع الزمني للمطال .

الجواب: الشكل العام لتابع المطال

$$\bar{x}=X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

لكن بفرض أن الجسم كان في مطاله الأعظمي الموجب $x=+X_{max}$ في اللحظة t=0 بالتالي:

$$X_{max}=X_{max}\cos(\bar{\varphi})$$
$$\cos(\bar{\varphi})=1 \Rightarrow \varphi=0\ rad$$

بالتالي: $\boxed{\bar{x}=X_{max}\cos(\omega_0 t)}$

س4_ استنتج التابع الزمني للسرعة انطلاقاً من تابع المطال .

الجواب: إن تابع السرعة هو المشتق الأول لتابع المطال بالنسبة للزمن .

$$\bar{v}=(\bar{x})'_t$$
$$\boxed{\bar{v}=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t)}$$

س5_ استنتج التابع الزمني للتسارع انطلاقاً من تابع المطال .

الجواب: إن تابع التسارع هو المشتق الأول لتابع السرعة بالنسبة للزمن ، وهو المشتق الثاني لتابع المطال بالنسبة للزمن .

$$\bar{a}=(v)'_t=(x)''_t$$
$$\bar{a}=-\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t)$$
$$\boxed{\bar{a}=-\omega_0^2\bar{x}}$$

س6_ استنتج طاقة النواس المرن في الحركة التوافقية البسيطة .

الجواب: إن الطاقة الميكانيكية للنواس المرن هي مجموع الطاقتين الكامنة والحركية:

$$E_{tot}=E_p+E_k \ ....(1)$$

الطاقة الكامنة المرونية للنابض هي $E_P=\frac{1}{2}Kx^2$

نعوّض تابع المطال: $E_P = \frac{1}{2}kX_{max}^2\cos^2(\omega_0 t+\bar{\varphi})$

الطاقة الحركيّة للجسم هي $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ نعوّض تابع السرعة:

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega_0^2X_{max}^2\sin^2(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

نعوض في (1) :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2\cos^2(\omega_0 t+\bar{\varphi}) + \frac{1}{2}m\omega_0^2X_{max}^2\sin^2(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

لكن: $k = m\omega_0^2$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi) + \frac{1}{2}kX_{max}^2\sin^2(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2[\cos^2(\omega_0 t+\bar{\varphi}) + \sin^2(\omega_0 t+\bar{\varphi})]$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = const$$

نواس الفتل

س1_ انطلاقاً من المعادلة التفاضلية $(\theta)'' = -\frac{k}{I_\Delta}\theta$ برهن أنّ حركة نواس الفتل غير المتخامد هي حركة جيبية دورانية ثم استنتج علاقة الدور الخاص للنواس.

الجواب: $(\bar{\theta})''_t = -\frac{k}{I_\Delta}\bar{\theta}$

المعادلة هي معادلة تفاضليّة من المرتبة الثانية تقبل حلّاً جيبيّاً من الشكل: $\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$

وللتحقّق من صحة الحلّ نشتقّ مرتين بالنسبة بالزمن:

$$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t+\varphi)$$
$$\alpha = (\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\theta_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$
$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\bar{\theta}$$
$$\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta}$$

بموازنة العلاقتين $(\bar{\theta})''_t$ نجد: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} > 0$

وهذا ممكن لأنّ: I_Δ، k موجبان أي أنّ حركة نوّاس الفتل جيبيّة دورانيّة توافقيّة بسيطة تابعها الزمني من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

$\bar{\theta}$: المطال الزاوي في اللحظة t واحدته rad.

θ_{max}: المطال الزاوي الأعظمي (السعة الزاويّة) واحدته rad .

ω_0: النبض الخاصّ بالحركة واحدته $rad.s^{-1}$.

$\bar{\varphi}$: الطور الابتدائي للحركة واحدته rad.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}}$$

استنتج دور نواس الفتل :

- لا يتعلّق بالسعة الزاويّة للحركة θ_{max}.
- يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لعزم عطالة جملة النوّاس حول محور الدوران (سلك الفتل).
- يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت فتل السلك.

س2– انطلاقاً من مصونية الطاقة الميكانيكية برهن أنّ حركة نواس الفتل حركة جيبيه دورانية.

الجواب: $E_{tot} = E_p + E_k = const$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}k\theta^2 + \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2$$

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن:

$$0 = \frac{1}{2}k\,2(\bar{\theta}.\bar{\omega}) + \frac{1}{2}I_\Delta 2(\bar{\omega}.\bar{\alpha})$$

$0 = \omega(k\theta + I_\Delta\bar{\alpha})$ لكن $\omega \neq 0$

$$0 = k(\bar{\theta}) + I_\Delta(\bar{\theta})''_t$$
$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{K}{I_\Delta}(\bar{\theta}) \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

نشتق التابع مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\bar{\theta})'_t = \bar{\omega} = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$
$$(\bar{\theta})''_t = \bar{\alpha} = -\omega_0^2\theta_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$
$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\bar{\theta} \;\ldots\ldots\ldots(2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أنّ: $\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta}$

ومنه: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}$ وهذا محقق لأن k، I_Δ موجبان

ودوره $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$ وبالتالي حركة نواس الفتل حركة جيبية دورانية توافقية بسيطة .

النواس الثقلي

س1_ انطلاقاً من المعادلة التفاضلية $(\theta)'' = -\frac{mdg}{I_\Delta}\,\theta$ من أجل سعات زاوية صغيرة استنتج أن حركة النواس الثقلي المركب غير المتخامد هي حركة جيبية دورانية ثم استنتج علاقة الدور الخاص لهذا النواس المركب مبيناً دلالات الرموز .

الجواب: $(\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\sin\bar{\theta}$

وهي معادلة تفاضليّة من المرتبة الثانية تحوي $\sin\bar{\theta}$ بدلاً من θ فحلها ليس جيبيّاً، ومن ذلك فإنّ حركة النوّاس الثقلي هي حركة اهتزازيّة غير توافقيّة.

و من أجل السّعات الزاوية الصغيرة $(\theta \le 0.24\ rad = 14^0)$

في هذه الحالة يكون $\sin\bar{\theta} \approx \bar{\theta}$.

نعوّضُ في العلاقة الأولى فنجدُ:

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\,\bar{\theta}$$

وهي معادلة تفاضليّة من المرتبة الثانية تقبل حل جيبيّاً من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقّق من صحة الحل نشتق تابع المطال الزاوي مرّتين بالنسبة للزمن نجدُ:

$$\bar{\alpha} = (\theta)''_t = -\omega_0^2\bar{\theta} \ \dots\dots\dots (3)$$

بالمطابقة بين $(\bar{\theta})''_t$ نجدُ:

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا محققٌ لأنّ المقادير (m, g, d, I_Δ) موجبة، فحركة النوّاس الثقلي من أجل السّعات الزاويّة الصغيرة هي حركة جيبيّة دورانيّة توافقية بسيطة .

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

وهي العلاقة العامّة للدّور الخاصّ للنوّاس الثقلي في حالة الاهتزازات صغيرة السّعة.

T_0 دورُ النوّاس الثقلي الخاص بسعة زاويّة صغيرة، واحدته s

I_Δ عزمُ عطالة الجسم الصُلب، واحدته $Kg.m^2$

d بعدُ محور الدوران عن مركز عطالة الجسم الصُلب واحدته m

س2– انطلاقاً من المعادلة التفاضلية $(\theta)'' = -\frac{g}{l}\,\theta$ من أجل سعات زاوية صغيرة استنتج أن حركة النواس الثقلي البسيط غير المتخامد هي حركة جيبية انسحابية ثم استنتج علاقة الدور الخاص لهذا النواس المركب مبيناً العوامل المؤثرة في دور النواس الثقلي البسيط .

الجواب: $(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\sin\theta$

وهي معادلة تفاضليّة من المرتبة الثانية تحوي $\sin\bar{\theta}$ بدلاً من θ فحلها ليس جيبيّاً، ومن ذلك فإنّ حركة النوّاس الثقلي هي حركة اهتزازيّة غير توافقيّة.

وفي حالة السّعات الزاويّة الصغيرة: $\theta \le 0.24\ rad$ فإن $\sin\theta \approx \theta$

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\,\bar{\theta} \ \dots\dots\dots (1)$$

معادلة تفاضليّة من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبيّاً من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقّق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرّتين بالنسبة للزمن

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\,\bar{\theta} \ \dots\dots\dots (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجدُ

$$\omega_o^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$$

وهذا محقّقٌ لأنّ مقداران l, g موجبان، فحركة النوّاس الثقلي البسيط من أجل السّعات الزاويّة الصغيرة هي حركةٌ جيبيّةٌ توافقية بسيطة .

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

وهي علاقة الدّور الخاصّ للنوّاس الثقلي البسيط في السعات الزاويّة الصغيرة.

استنتج:

1- لا يتعلّقُ دورُ النوّاس البسيط بكتلته، ولا بنوع مادّة كرته .

2- النوسات صغيرة السّعة لها الدورُ نفسُه (متواقتة فيما بينها) .

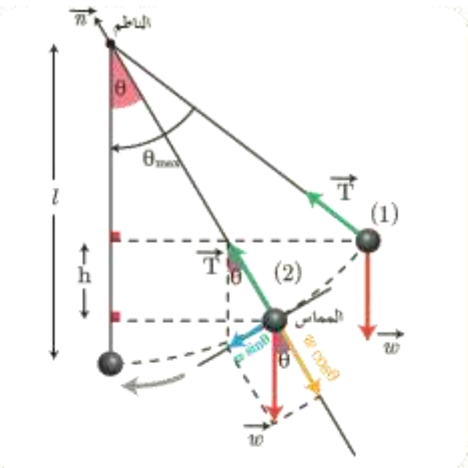
3- يتناسبُ دورُ النوّاس البسيط من أجل السعات الزاويّة الصغيرة:

طرداً مع الجذر التربيعي لطول الخيط .

عكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الجاذبيّة الأرضية .

س3- استنتاجُ العلاقة المحدّدة لسرعة كرة النوّاس الثقلي البسيط في نقطة من مسارها .

الجواب: نزيحُ كرة النوّاس عن موضع توازنها الشاقولي بزاوية θ_{max} ونتركُها



دون سرعة ابتدائيّة: لإيجاد العلاقة المحدّدة لسرعة الكرة في الوضع (2)

القوى الخارجيّة المؤثّرة:

ثقل الكرة $\vec{w}$، توتّر الخيط $\vec{T}$.

نطبّق نظريّة الطاقة الحركيّة بين وضعين:

الأوّل: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ_{max} .

الثاني: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ .

$$\Delta \bar{E}_{K(1\to2)} = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K2} - E_{K1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{T}}$$

$$\bar{W}_{\vec{W}} = mgh$$

$\bar{W}_{\vec{T}} = 0$ لأنّ حامل $\vec{T}$ يعامدُ الانتقال في كلّ لحظة

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0$$

وبملاحظة الشكل نجدُ:

$$h = l\cos\theta - l\cos\theta_{max}$$

$$h = l(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

نعوّض: $\frac{1}{2}mv^2 = mgl(\cos\theta - \cos\theta_{max})$

$$v^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_{max})}$$

حالةٌ خاصّة: عند المرور بالشاقول: $\theta = 0$ تصبحُ:

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_{max})}$$

س4- استنتاجُ العلاقة المحدّدة لتوتّر خيط التعليق للنواس الثقلي البسيط في نقطة من مسارها .

الجواب:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور الناظم الذي له نفس حامل $\vec{T}$ وبجهته:

$$-W\cos\theta + T = ma_c$$

لكن التسارع الناظمي $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg\cos\theta$$
$$T = 2mg(\cos\theta - \cos\theta_{max}) + mg\cos\theta$$
$$T = 2mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max} + mg\cos\theta$$
$$T = 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max}$$
$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$$

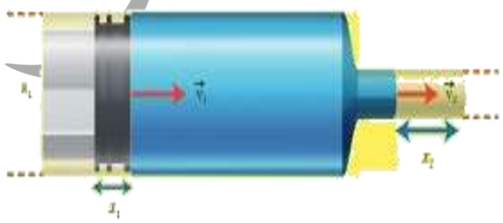
حالة خاصة: عند المرور بالشاقول

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_{max})$$

السوائل المتحركة

س1- استنتج رياضياً معادلة الاستمرارية لمائع يتحرك ضمن انبوب أفقي مساحة طرفيه مختلفين.

الجواب:



لدينا سائل يتحرّك داخل أنبوبٍ مساحة كلٍّ من مقطعَي طرفيهِ تختلفُ عن الأخرى s_1, s_2 .

وبفرض أنّ: v_1 سرعة السائل عبر المقطع s_1

v_2 سرعة السائل عبر المقطع s_2

إنّ حجمَ كميّة السائل التي تعبُرُ المقطع s_1 لمسافة x_1

في الزمن Δt يكون: $V_1 = s_1 x_1$

لكن: $x_1 = v_1\Delta t$ وبالتالي: $V_1 = s_1 v_1 \Delta t$

إنّ حجمَ كميّة السائل التي تعبُرُ المقطع s_2 لمسافة x_2

في الزمن Δt يكون: $V_2 = s_2 x_2$

لكن: $x_2 = v_2\Delta t$ بالتالي: $V_2 = s_2 v_2 \Delta t$

وبما أنّ: حجم كميّة السائل التي عبرت المقطع s_1 تساوي حجم كميّة السائل التي عبرت المقطع s_2 المدّة الزمنيّة نفسها

فإنّ:

$$Q'_1 = Q'_2$$
$$\frac{V_1}{\Delta t} = \frac{V_2}{\Delta t}$$
$$\frac{s_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = \frac{s_2 v_2 \Delta t}{\Delta t}$$
$$s_1 v_1 = s_2 v_2$$
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{s_1}{s_2}$$

أيّ أنّ: سرعة تدفّق السائل تتناسب عكساً مع مساحة مقطع الأنبوب الذي يتدفّق منه السائل.

نتيجة: تزدادُ سرعة تدفّق السائل في أنبوب بنقصان مساحة مقطع الأنبوب.

وبالتالي: $Q' = s_1 v_1 = s_1 v_1 = const$.

س2- استنتج معادلة برنولي انطلاقاً من العلاقة: $W_{total}=\Delta E_k$ لمائع مثالي جريانه مستقر.

الجواب:

$$p_1\Delta V_1 - p_2\Delta V_2 - mg(z_2 - z_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

نقسم الطرفين على ΔV علماً أنّ: $\rho = \frac{m}{\Delta V}$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

معادلة برنولي: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = const$

س3- انطلاقاً من معادلة برنولي استنتج العلاقة المحددة لسرعة تدفق جسيم سائل من فتحة صغيرة تقع قرب قعر خزان واسع جداً على عمق Z من السطح الحر للسائل (معادلة تورشللي).

الجواب: نطبّق معادلة برنولي على جزءٍ صغيرٍ من السائل انتقل من سطح الخزّان بسرعة $v_1 \approx 0$ ليخرج من الفتحة s_2 إلى الوسط الخارجي بسرعة v_2:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

إنّ السّطح المفتوح، والفتحة معرّضتان للضغط الجوي النظامي، ولذلك $p_1 = p_2 = p_0$

$$\rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

$$\frac{1}{2}v_2^2 = g z_1 - g z_2$$

$$v_2^2 = 2g(z_1 - z_2) \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

إنّ سرعة خروج السائل تساوي السرعة التي يسقط بها جسمٌ مائع سقوطاً حرّاً من ارتفاع h.

س4- استنتج علاقة فنتوري.

الجواب: يتألّف أنبوب فنتوري من أنبوب مساحة مقطعه s_1 يجري فيه سائلٌ بسرعة v_1 في منطقةٍ ضغطها P_1، فيصل لاختناق مساحته s_2، ولمعرفة فرق الضغط بين الجذع الرئيس والاختناق نستعمل أنبوب فنتوري.

نطبّق معادلة برنولي بين النقطتين 1,2 اللتين تقعان في المستوي الأفقي نفسه.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

$$z_1 = z_2$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left[(\frac{v_2}{v_1})^2 - 1\right]v_1^2$$

لكن: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{s_1}{s_2}$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left[(\frac{s_1}{s_2})^2 - 1\right]v_1^2$$

النسبية الخاصة

س1- تخيل مراقبين الأول في محطة إطلاق على الأرض والثاني روبوت في مركبة فضائية انطلقت من محطة الفضاء نحو الشمس بسرعة ثابتة بالنسبة للمراقب الأول والمطلوب: استنتج العلاقة التي توضح تقلص الأطوال عند الحركة.

الجواب: تسجّل العدّادات في المحطّة على الأرض الآتي: المسافة بين الأرض والشمس L_0 والزمن الذي استغرقته مركبة الفضاء في رحلتها t وبالتالي: $L_0 = vt$

وتسجّل عدّادات مركبة الفضاء المعطيات الآتية: المسافة المقطوعة بين الأرض والشمس L، وزمن الرحلة t_0:

فيكون: $L = vt_0$

$$\frac{L_0}{L} = \frac{t}{t_0} = \frac{\gamma t_0}{t_0}$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \Rightarrow L < L_0$$

س2- استنتج بالعلاقات المناسبة أنّ الزيادة في الكتلة في الميكانيك النسبي يساوي طاقة الحركة مقسومة على رقم ثابت c^2.

الجواب: $m = \gamma m_0$

حيث: m الكتلة عند الحركة، m_0 الكتلة عند السكون.

$$\Delta m = m - m_0 = \gamma m_0 - m_0$$

$$\Delta m = m_0\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right]$$

$$\Delta m = m_0\left[(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{-1}{2}}-1\right]$$

وفق دستور التقريب: $(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$ بشرط $\varepsilon \ll 1$

من أجلِ السّرعات الصغيرة يكونُ: $v<<c \Rightarrow \frac{v^2}{c^2}<<1$

$$\Delta m = m - m_0 = m_0(1+\frac{v^2}{2c^2}-1)$$

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{\frac{1}{2}m_0 v^2}{c^2}$$

$$\Delta m = \frac{E_k}{c^2}$$

س3- انطلاقاً من الميكانيك النسبي استنتج العلاقة المحددة للطاقة الحركية في الميكانيك الكلاسيكي.

الجواب:

$$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2$$

$$E_k = \gamma m_0c^2 - m_0c^2 = (\gamma-1)m_0c^2$$

لكن من أجل السّرعات الصغيرة أمامَ سرعة الضوء في الخلاء أي: $v \ll c$ فإن: $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ ومنه:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{-1}{2}}$$

وحسب دستور التقريب يكون: $\gamma = 1+\frac{v^2}{2c^2}$

نعوّضُ عن γ فنجدُ:

$$E_k = (1+\frac{v^2}{2c^2}-1)m_0c^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$$

المغناطيسية

س1- استنتج شدة الحقل المغناطيسي الناتج عن تيار مار في سلك مستقيم انطلاقاً من العلاقة:

$$B = 4\pi \times 10^{-7}\, k'I$$

الجواب: $K' = \frac{1}{2\pi d}$.

نعوّض:

$$B = 2\times 10^{-7}\frac{I}{d}$$

س2- استنتج شدة الحقل المغناطيسي الناتج عن تيار مار في ملف دائري انطلاقاً من العلاقة:

$$B = 4\pi \times 10^{-7}\, k'I$$

الجواب: $k' = \frac{N}{2r}$ بالتالي:

$$B = 2\pi \times 10^{-7}\frac{NI}{r}$$

س3- استنتج شدة الحقل المغناطيسي الناتج عن تيار مار في ملف حلزوني (وشيعة) انطلاقاً من العلاقة:

$$B = 4\pi \times 10^{-7}\, k'I$$

الجواب: $k' = \frac{N}{l}$ بالتالي:

$$B = 4\pi \times 10^{-7}\frac{NI}{l}$$

فعل الحقل المغناطيسي في التيار الكهربائي

س1- استنتج علاقة نصف قطر المسار الدائري لأحد الالكترونات المتحركة ضمن المنطقة التي يسودها الحقل المغناطيسي المنتظم حيث $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$.

الجواب: يخضعُ الإلكترون لتأثيرِ القوّة المغناطيسيّة فقط بإهمال قوّة ثقله:

$$\sum\vec{F} = m_e\vec{a}$$

$$\vec{F} = m_e\vec{a}$$

$$e\vec{v}\Lambda\vec{B} = m_e\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{e}{m_e}\vec{v}\Lambda\vec{B}$$

وبحسب خواصِ الجداء الشُعاعي فإنّ: $\vec{a}\perp\vec{v}$

وبالتّالي الحركة دائريّة مُنتظَمة:

$$F = F_c$$

$$evB = m_e a_c$$
$$evB = m_e \frac{v^2}{r}$$
$$r = \frac{m_e v}{eB}$$

حيثُ: m_e كتلةُ الإلكترون ، و v سرعةُ الإلكترون ، e القيمةُ المُطلَقة لشحنةِ الإلكترون ، B شدّة شُعاع الحقل المغناطيسي.

س2- استنتج دور الالكترون المتحرك ضمن المنطقة التي يسودها الحقل المغناطيسي المنتظم حيث $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$.

الجواب: $v = \omega . r \Rightarrow v = \frac{2\pi}{T} r \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$

نعوض قيمة r فنجد أن: $T = \frac{2\pi m_e}{eB}$

س3- استنتج شدة القوة الكهرطيسية لسلك طوله L مساحة مقطعه S وعدد الإلكترونات الحرة N .

الجواب: بفرضِ لدينا سلك طوله L ، ومساحة مقطعه S ، والكثافة الحجميّة للإلكتروناتِ الحرّة فيه n فيكون عددُ الإلكتروناتِ الحرّة الكلي $N = nsL$ وعند تطبيق فرق كمون بين طرفي السّلك فإن الإلكتروناتِ الحرّة تتحرّك بسرعةٍ ثابتةٍ $\vec{v}$ (فينشأ تيار) وتؤثر على السلك بحقل مغناطيسي فتخضعُ هذه الإلكترونات إلى تأثيرِ القوة المغناطيسية بينما يخضع السّلك لتأثير قوّة كهرطيسية تساوي مُحصّلة القوى المغناطيسيّة المؤثرة في الشّحناتِ المُتحرّكة (الإلكترونات) داخل السّلك أي تساوي جداءَ عددِ الإلكتروناتِ في القوّة المغناطيسية أي:

$$F = nsLevB \sin\theta$$

لكن: $N = nsl$, $v = \frac{L}{\Delta t}$

$$F = \frac{Ne}{\Delta t}(LB \sin\theta)$$

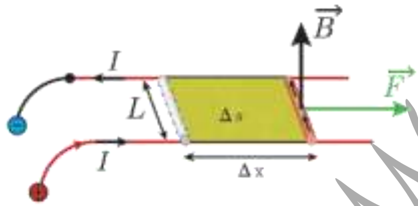
ولكن: $q = Ne$ وبالتالي: $I = \frac{q}{\Delta t}$ ومنه:

$$F = ILB \sin\theta$$

وهي العلاقة المُعبرة عن شدّة القوّة الكهرطيسيّة.

س4- في تجربة السكتين حيث شعاع الحقل المغناطيسي عمودي على المستوي الافقي للسكتين استنتج عمل القوة الكهرطيسية ثم اذكر نص نظرية مكسويل .

الجواب: تنتقل الساق الأفقية موازية لنفسها مسافة Δx ، فتمسح سطحاً $\Delta S = L\Delta x$ ، حيث تنتقل نقطة تأثير القوّة الكهرطيسيّة على حاملها وبجهتها مسافة Δx .



$$W = F\Delta x$$
$$W = ILB\Delta x$$
$$W = IB\Delta S$$

لكن: $\Delta\Phi = B\Delta S > 0$ يمثل تزايدُ التّدفق المغناطيسي

نعوّض فنجدُ: $W = I\Delta\Phi > 0$ والعمل موجب محرك .

نصُّ نظريّة مكسويل:

عندما تنتقل دارةٌ كهربائيّةٌ أو جزءٌ من دارةٍ كهربائيّةٍ في منطقة يسودُها حقلٌ مغناطيسي فإنّ عملَ القوّة الكهرطيسيّة المسبّبِ لذلك الانتقال يساوي جداءَ شدّةِ التيّار المارّ في الدّارة في تزايد التّدفّق المغناطيسي الذي يجتازُها .

س5- استنتجْ عزمَ المُزدوجةِ الكهرطيسيّةِ المُؤثِّرة في إطارٍ طولِ ضلعِه الأفقيّ **d** والشاقوليّ L.

الجواب: $\Gamma_\Delta = d'F$

طول ذراعُ المُزدوَجة الكهرطيسيّة d':

$d' = d\ \sin\alpha$ حيث $\alpha = (\overrightarrow{B},\overrightarrow{n})$

إنّ شدّةُ القوّةِ الكهرطيسيّة من أجلِ N لفة معزولة ومُتماثلة:

$$F = NLB\sin\frac{\pi}{2}$$

نعوض فنجد: $\Gamma_\Delta = NILBd\ \sin\alpha$

لكن: $S = Ld$ مساحة سطح الإطار.

$$\Gamma_\Delta = NISB\sin\alpha$$

وهي عبارةُ عزمِ المزدوَجةِ الكهرطيسيّة.

س6- انطلاقاً من شرط التوازن الدوراني في المقياس الغلفاني وبعد أن يدور الإطار زاوية θ' استنتج العلاقة بين زاوية دوران الإطار θ' والتيار المار فيه I.

الجواب: عند إمرار التيّار الكهربائي المُرادِ قياسُ شدّتِه I في إطارِ المقياس فإنّ الحقلَ المغناطيسي المُنتظَم يؤثِّرُ في الإطار بمُزدوَجة كهرطيسيّة تسبّبُ دورانَ الإطار حول محورِ دورانه فينشأُ في سلك الفتل مُزدوَجة فتلٍ تمانِع استمرارِ الدّوران ويتوازنُ الإطارُ بعدَ أن يدورَ بزاويةٍ صغيرةٍ θ' وعندها يتحقَّقُ شرطُ التّوازنُ الدّوراني:

$$\sum\overline{\Gamma}_\Delta = 0$$

$$\sum\overline{\Gamma}_{\text{كهرطيسية}/\Delta} + \overline{\Gamma}_{\text{فتل}/\Delta} = 0$$

$$NISB\sin\alpha - k\theta' = 0$$

$\alpha + \theta' = \frac{\pi}{2}\ rad$ الزاويتان متتامتان

$$\sin\alpha = \cos\theta'$$

$$NISB\cos\theta' - k\theta' = 0$$

لكن θ' زاوية صغيرة بالتالي: $\cos\theta' \approx 1$

$$\theta' = \frac{NsB}{k}I$$

$$\theta' = GI$$

حيثُ $G = \frac{NSB}{k}$ ثابت المقياس الغلفاني: يعبّرُ عن حساسيّةِ المقياسِ الغلفاني ويقاس بـ $rad.A^{-1}$ وتزدادُ حساسيّةُ المقياسِ الغلفاني كلّما زادَت قيمة G ويتمُّ ذلك عمليّاً باستبدال سلكِ الفتلِ بسلكٍ أرفعَ منه من المادّةِ نفسِها (لتصغيرِ ثابتِ الفتلِ k).

س7- استنتجْ عبارةَ شدّةَ الحقلِ المغناطيسي المُؤثِّرة في شحنةٍ كهربائيّةٍ تتحرّكُ في حقلٍ مغناطيسي مُنتظَمٍ بسرعة تعامِدُ شُعاعَ الحقلِ المغناطيسي ثمّ عرِّف التّسلا T.

الجواب:

جملة المقارنة: خارجية _ الجملة المدروسة: الشحنة الكهربائية المتحركة.

القوى الخارجية المؤثرة: $\vec{F}$ قوة لورنز (بإهمال ثقل الشحنة).

$$\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

$$F = qvB\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow B = \frac{F}{qv}$$

التسلا: شدة حقل مغناطيسي منتظم إذا تحركت ضمنه شحنة كهربائية مقداره كولوم واحد بسرعة $1m.s^{-1}$ تعامد خطوط الحقل تأثرت بقوة مغناطيسية تساوي نيوتن واحد.

التحريض الكهرطيسي

س1- ساق نحاسية طولها L تستند إلى سكتين نحاسيتين أفقيتين متوازيتين نربط بين طرفي السكتين مقياس ميكروأمبير ونضع الجملة في منطقة يسودها حقل مغناطيسي منتظم ناظمي على $\vec{B}$ مستوي

السكتين ثم نحرك الساق بسرعة ثابتة $\vec{v}$ بحيث تبقى على تماس مع السكتين استنتج العلاقة المحددة لشدة التيار المتحرض بافتراض المقاومة الكلية ثابتة.

الجواب: عندَ تحريكِ السّاق بسرعةٍ ثابتةٍ $\vec{v}$ عموديّة على شُعاعِ الحقلِ المغناطيسي المُنتظم $\vec{B}$ خلالَ فاصلٍ زمنيٍ Δt تنتقل الساق مسافة: $\Delta x = v\Delta t$ فيتغيّرُ السّطحُ بالمقدار:

$$\Delta S = L\Delta x = \text{L}v\Delta t$$

فيتغيّرُ التّدفّقُ المغناطيسي بالمقدار:

$$\Delta\Phi = \text{B}\Delta S = BLv\Delta t$$

فتتولّدُ قوّةٌ مُحرّكةٌ كهربائيّةٌ مُتحرّضة قيمتُها المطلقة:

$$\varepsilon = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{BLv\Delta t}{\Delta t} = BLv$$

وبما أنّ الدّارةَ مُغلقةٌ يمرُّ تيّارٌ كهربائي مُتحرّضٌ شدّتُه:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BLv}{R}$$

س2- استنتج بالعلاقات المناسبة أن الطاقة الميكانيكية تحولت إلى طاقة كهربائية مساوية لها بالقيمة في المولد.

الجواب: عندَ تحريكِ السّاق بسرعةٍ ثابتةٍ $\vec{v}$ عموديّة على شُعاعِ الحقلِ المغناطيسي المُنتظم $\vec{B}$ خلالَ فاصلٍ زمنيٍ Δt تنتقل الساق مسافة: $\Delta x = v\Delta t$ فيتغيّرُ السّطحُ بالمقدار:

$$\Delta S = L\Delta x = \text{L}v\Delta t$$

فيتغيّرُ التّدفّقُ المغناطيسي بالمقدار:

$$\Delta\Phi = \text{B}\Delta S = BLv\Delta t$$

فتتولّدُ قوّةٌ مُحرّكةٌ كهربائيّةٌ مُتحرّضة قيمتُها المطلقة:

$$\varepsilon = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{BLv\Delta t}{\Delta t} = BLv$$

وبما أنّ الدّارةَ مُغلقةٌ يمرُّ تيّارٌ كهربائي مُتحرّضٌ شدّتُه:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BLv}{R}$$

فتكونُ الاستطاعةُ الكهربائيّة النّاتجة:

$$P = \varepsilon i$$

$$P = (BLv) \times (\frac{BLv}{R})$$

$$P = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

ولكن عندَ تحريكِ السّاق بسرعةٍ $\vec{v}$ تنشأُ قوّةٌ كهرطيسيّةٌ، جهتّها بعكسِ جهةِ حركةِ السّاق المُسبّبة لنشوءِ التّيار المُتحرّض، ولاستمرارِ تولّدِ التّيار يجبُ التّغلّبُ على هذه القوّة الكهرطيسيّة بصرف استطاعةٍ ميكانيكيّة p'.

$$P' = Fv$$

لكن: $F = iLB\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow F = iLB$

والتّيار المتحرض: $i = \frac{BLv}{R}$

نعوّض: $P' = \text{F}v = iLBv = \frac{BLv}{R}LBv$

$$P' = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

وبموازنةِ العلاقتين نجدُ أنّ: $P' = P$.

وبهذا تكونُ قد تحوّلت الطّاقة الميكانيكيّة إلى طاقةٍ كهربائيّة.

س3- استنتج العلاقة المحددة للقوة المحركة الكهربائية المتحرضة في مولد التيار المتناوب الجيبي.

الجواب: بفرضِ أنّه في لحظةٍ ما أثناءَ الدّوران كان النّاظم على مُستوي الإطار يصنعُ مع شعاعِ الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ زاوية قدرها α، فيكونُ التّدفّقُ المغناطيسي Φ الذي يجتاز سطح الإطار: $\bar{\Phi} = NBs\cos\alpha$

فإذا كانت السّرعة الزّاوية لدوران الإطار ω ثابتة، فإنّ الزّاوية

α التي يدورها الملفّ في زمن قدره t:

$$\alpha = \theta' = \omega t$$

نعوّض فنجد: $\bar{\Phi} = NBS\cos\omega t$

وتكون القوّة المحرّكة الكهربائيّة المتحرّضة ε:

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{d\bar{\Phi}}{dt}$$

$$\bar{\varepsilon} = NSB\omega \sin\omega t$$

تكون ε عظمى عندما: $\sin\omega t = 1$

نعوض: $\varepsilon_{max} = NSB\omega$ فنجد أنّ:

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{max}\sin\omega t$$

س4- استنتج بالعلاقات المناسبة أنّ الطاقة الكهربائية تحولت إلى طاقة ميكانيكية مساوية لها بالقيمة في المحرك.

الجواب: عند مرور التيار الكهربائي في السّاق الخاضعة لتأثير الحقل المغناطيسي المنتظم $\vec{B}$، فإنها تتأثر بقوّة كهرطيسيّة شدتها:

$$F = ILB$$

تعمل القوّة الكهرطيسيّة على تحريك السّاق بسرعة ثابتة $\vec{v}$،

وتكون الاستطاعة الميكانيكية الناتجة: $P' = Fv$

$$P' = ILBv$$

لكن عند انتقال السّاق مسافة Δx، فإنّ التّدفّق المغناطيسي يتغيّر بالمقدار: $\Delta\Phi = BLv\Delta t$

فتتولّد في الساق قوّة محرّكة كهربائيّة متحرّضة عكسيّة تعاكس مرور تيار المولّد فيها تعطى قيمتها المطلقة بالعلاقة:

$$\varepsilon' = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = BLv$$

ولاستمرار مرور تيار المولّد يجب تقديم استطاعة كهربائيّة:

$$P = \varepsilon' I$$

$$P = BLvI$$

بالموازنة نجد: $P' = P$

وبهذا الشّكل تتحوّل الطّاقة الكهربائيّة إلى طاقة ميكانيكيّة.

س5- استنتج علاقة ذاتية وشيعة يجتازها تيار كهربائي شدته i.

الجواب: تعطى شدّة الحقل المغناطيسي المتولّد عن مرور تيار في الوشيعة بالعلاقة:

$$B = 4\pi\times 10^{-7}\frac{Ni}{\ell}$$

ويكون تدفّق هذا الحقل من خلال الوشيعة ذاتها:

$$\bar{\Phi} = NSB$$

$$\bar{\Phi} = NS(4\pi\times 10^{-7}\frac{Ni}{\ell})$$

$$\bar{\Phi} = 4\pi\times 10^{-7}\frac{N^2S}{\ell}i$$

نلاحظ أنّ أمثال شدّة التيّار مقدار ثابت يميّز الوشيعة، يدعى ذاتيّة الوشيعة L واحدة قياسها هي الهنري H .

$$L = 4\pi\times 10^{-7}\frac{N^2S}{\ell}$$

س6- استنتج علاقة الطاقة الكهرطيسية المختزنة في الوشيعة.

الجواب: بحسب قانون كيرشوف الثاني:

$$\sum\bar{E} = Ri$$

$$\bar{E} + \bar{\varepsilon} = Ri$$

$$\bar{E} - L\frac{di}{dt} = Ri$$

$$\bar{E} = Ri + L\frac{di}{dt}$$

نضرب طرفي العلاقة ب idt فنجد:

$$Eidt = Ri^2dt + Lidi$$

يمثِّلُ المقدار $Eidt$ الطّاقة التي يقدِّمُها المولِّد خلال الزَّمن dt،

وهذه الطّاقة تنقسمُ إلى قسمين:

القسمُ الأول: Ri^2dt يمثِّلُ الطّاقة الضّائعة حراريًا بفعلِ جول في المُقاومة خلالَ الزّمن dt.

القسمُ الثّاني: $Lidi$ يمثِّلُ الطّاقة الكهرطيسيّة المُختزَنة في الوشيعةِ خلالَ الزّمن dt.

وتختزنُ الوشيعةُ طاقةً كهرطيسية E_L في لحظة t عندما تزدادُ شدّةُ التّيار المارّةِ في الدّارة من الصّفر إلى قيمتها النهائية I.

$$E_L = \int_0^I Lidi$$

$$E_L = \frac{1}{2}LI^2$$

وهي العلاقةُ المُحدِّدة للطّاقة الكهرطيسيّة المُختزَنة في الوشيعة

ويمكنُ أن تُكتبَ بالشّكل:

$$\Phi = LI \Rightarrow L = \frac{\Phi}{I} \Rightarrow$$

$$E_L = \frac{1}{2}\Phi I$$

س7- استنتجْ العلاقةَ المُحدِّدة للقيمةِ الجبريّة للقوّةِ المُحرِّكة الكهربائيّة المُتحرّضة الآنيّة الذّاتيّة المُتحرِّضة فيها.

الجواب: $\bar{\Phi} = NSB$

$$\Phi = N\left(4\pi \times 10^{-7}\frac{N}{\ell}I\right)S$$

$$\Phi = N\left(4\pi \times 10^{-7}\frac{N^2}{\ell}S\right)I$$

$$\Phi = LI$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

الدارات المهتزة والتيارات عالية التواتر

س1- انطلاقاً من المعادلة التفاضلية $\bar{q}''_t = -\frac{1}{LC}\bar{q}$ استنتج عبارة الدور الخاص للاهتزازات الكهربائية الحرة غير المتخامدة (علاقة تومسون) في دارة مهتزة تحوي على التسلسل مكثفة مشحونة سعتها C ووشيعة مهملة المقاومة ذاتيتها L.

الجواب: $(\bar{q})''_t = -\frac{1}{Lc}\bar{q}$

وهي مُعادلة تفاضليّة من المرتبة الثّانية بالنّسبة لـ q تقبل حلًّا جيبيًّا من الشّكل:

$$\bar{q} = q_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

حيثُ: q_{max}: الشحنة العظمى للمكثّفة.

ω_0: النبض الخاص.

$\bar{\varphi}$: الطّورُ الابتدائيُّ في اللّحظة $t = 0$.

$(\omega_0 t + \bar{\varphi})$: طور الحركة في اللحظة t.

عبارةُ الدّورِ الخاصّ للاهتزازاتِ الحرَّة غير المُتخامِدة:

نشتقُّ تابعَ الشّحنةِ مرّتين بالنسبة للزّمن نجدُ:

$$(\bar{q})'_t = -\omega_0\, q_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$
$$(\bar{q})''_t = -\omega_0^2\, q_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$
$$(\bar{q})''_t = -\omega_0^2\bar{q}$$

بالموازنة مع المعادلة (1):

$$(\bar{q})''_t = -\frac{1}{Lc}\bar{q}$$

نجد: $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} > 0$

وذلك لأنّ: L , C موجبان دوماً.

ولكن: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ نعوض فنجد: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

وهي عبارةُ الدّورِ الخاصّ للاهتزازاتِ الكهربائيّةِ الحرّةِ غيرِ المُتخامِدة

وتُسمّى علاقة طومسون حيثُ:

T_0 دورُ الاهتزازاتِ الكهربائيّةِ ويقدَّر بالثانية S.

L ذاتيّةُ الوشيعة وتقدّرُ بوحدةِ الهنري H .

C سعةُ المُكثّفة وحدتُها في الجملةِ الدّوليّة الفاراد F .

س2– دارة مهتزّة تحوي على التسلسل مكثّفة مشحونة ووشيعة مهملة المقاومة يعطى التابع الزمني للشحنة بشكله المختزل بالعلاقة $q=q_{max}\cos\omega_0 t$ والمطلوب استنتج التابع الزمني لشدة التيار في هذه الدارة.

الجواب: يعطى تابعُ الشّحنة بالعلاقة:

$$\bar{q} = q_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

بما أنّ مبدأَ الزّمن لحظة إغلاقِ الدّارة فإنّ: $\bar{\varphi} = 0$

وبالتالي: $$\bar{q} = q_{max}\cos(\omega_0 t)$$

وهو تابعُ الشّحنةِ بشكلِه المُختزَل.

إنّ تابعَ الشّدّةَ هو مُشتقّ تابع الشّحنة بالنسبة للزّمن،

أي: $$i = (\bar{q})'_t$$

$$i = -\omega_0\, q_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$i = \omega_0\, q_{max}\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$

$$i = I_{max}\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$

س3– استنتج علاقة الطاقة الكلية في دارة مهتزة تحوي وعلى التسلسل مكثّفة مشحونة سعتها C ووشيعة مهملة المقاومة ذاتيتها L .

الجواب: الطّاقةُ الكلّيّة في دارةٍ مُهتزّةٍ هي مجموعُ طاقةِ المُكثّفة وطاقةِ الوشيعة.

$E_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ الطّاقةُ الكهربائيّة المُختزَنة في المُكثّفة.

$E_L = \frac{1}{2}Li^2$ الطّاقةُ الكهربائيّة المُختزَنة في الوشيعة.

الطّاقةُ الكلّيّة في الدّارة المُهتزّة:

$$E = E_C + E_L$$

نعوّض: $$E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$$

ولكن: $$\bar{q} = q_{max}\cos(\omega_0 t)$$

بالتالي: $$i = (\bar{q})'_t = -\omega_0\, q_{max}\sin(\omega_0 t)$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{q_{max}^2}{C}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}L\omega_0^2 q_{max}^2\sin^2(\omega_0 t)$$

ولكن: $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ بالتالي:

$$E = \frac{1}{2}\frac{q_{max}^2}{C}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2C}q_{max}^2\sin^2(\omega_0 t)$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{q_{max}^2}{C}[\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)]$$

بالتالي: $$E = \frac{1}{2}\frac{q_{max}^2}{C} = \text{const}$$

وبالطريقةِ نفسِها نصلُ إلى العلاقة: $E = \frac{1}{2}LI_{max}^2$.

الطّاقةُ الكلّيّة لدارةٍ تحتوي مُكثّفةً وذاتيّةً صرفة (ليس لها مُقاومَة) ثابتةٌ وتساوي الطاقةَ العظمى للمُكثّفةِ المشحونةِ أو تساوي الطاقةَ العُظمى للوشيعة أي أنه في دارةٍ مُهتزّةٍ في أثناء التّفريغ تتحوّلُ الطّاقةُ بشكلٍ دوريٍّ من طاقةٍ كهربائيّةٍ في المُكثّفة إلى طاقةٍ كهرطيسيّةٍ في الوشيعة وبالعكس، ولكنّ المجموعَ يبقى ثابتاً.

التيار المتناوب الجيبي

س1– دارة تيار متناوب تحوي مقاومة أومية نطبق بين طرفيها توترا لحظيا u فيمر فيها تيار كهربائي تعطى شدته اللحظية وفق التابع الزمني: $i=I_{max}\cos\omega t$ والمطلوب:

a) استنتج التابع الزمني للتوتر اللحظي بين طرفي المقاومة ثم استنتج العلاقة التي تربط بين الشدة المنتجة والتوتر المنتج في هذه الدارة.

b) اكتب علاقة الاستطاعة المتوسطة المستهلكة ثم بين كيف تؤول تلك العلاقة في حالة المقاومة الصرفة.

الجواب: نطبّق توتراً لحظيّاً u على مُقاومَة أومية صرفة R في دارة تيّار مُتناوب جيبي مُغلَقة، فيمرُّ تيّار تابعُ شدّته اللّحظيّة

$$i = I_{max}\cos\omega t$$

إن تابع التّوتر اللّحظي بين طرفي المُقاوَمة:

$$U = Ri$$

نعوّضُ فنجدُ: $u = RI_{max}\cos\omega t$

لكن: $X_R = R$ تدعى بممانعة المُقاوَمة

حيث: $U_{max} = RI_{max}$ ....(1)

إذاً يكون تابعُ التّوتر بين طرفي المُقاوَمة الصّرف:

$$\bar{u} = U_{max}\cos\omega t$$

بالمُقارنة بين تابعي الشّدّة والتّوتر نجدُ أن: $\bar{\varphi} = 0$

أي أنّ المُقاوَمة تجعل التّوتّر المُطبّق بين طرفيها على توافق بالطور مع الشّدّة.

للحصول على القيم المُنتجة نقسّمُ طرفي العلاقة (1) على $\sqrt{2}$:

$$\frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = X_R\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$U_{eff} = RI_{eff}$$

ويمثل التوتر المنتج بين طرفي المقاومة بواسطة شعاع فرينل:

تُعطى الاستطاعة المُتوسّطة المُستهلَكة بالعلاقة:

$$P_{avg} = U_{eff}I_{eff}\cos\varphi$$

لكن في حالة المُقاومة الصّرف:

$$\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow$$
$$P_{avg} = U_{eff}I_{eff}$$

لكن: $U_{eff} = R\,I_{eff}$ بالتالي:

$$P_{avg} = R\,I_{eff}^2$$

وهذا يدل على أنّ الطاقة تصرف في المُقاوَمة حراريّاً بفعل جول.

س2- دارة تيار متناوب تحوي وشيعة ذاتيتها L مقاومتها الأومية مهملة نطبق بين طرفيها توتراً لحظياً u فيمر فيها تيار كهربائي تعطى شدته اللحظية وفق التابع الزمني: $i=I_{max}\cos\omega t$

والمطلوب:

a) استنتج التابع الزمني للتوتر اللحظي بين طرفي الوشيعة ثم استنتج العلاقة التي تربط بين الشدة المنتجة والتوتر المنتج في هذه الدارة.

b) استنتج قيمة الاستطاعة المتوسطة في الذاتية مع التعليل.

الجواب: نطبّقُ توتراً لحظيّاً u على وشيعة ذاتيتها L ومقاومتها الأوميّة مُهملَة في دارة تيّار مُتناوب جيبي مُغلَقة، فيمرُّ تيّار تابعُ شدّته اللّحظيّة:

$$i = I_{max}\cos\omega t$$

تابعُ التّوتر اللّحظي بين طرفي الوشيعة:

$$u = L\frac{di}{dt} \quad ...(1)$$

لكن: $\frac{di}{dt} = -\omega I_{max}\sin\omega t$

أي: $\frac{di}{dt} = \omega I_{max}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

نعوض بـ(1): $u = \omega L I_{max}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

نسمّي المقدار $X_L = \omega L$ بمُمانعة الوشيعة مُهملَة المُقاوَمة وتُسمّى ردّية الوشيعة.

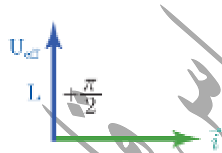
فتصبح العلاقة: $u = X_L I_{max}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

بالتالي: $U_{max_L} = X_L I_{max}$

يصبحُ تابعُ التّوتّر بين طرفي الوشيعة:

$$\bar{u}_L = U_{max_L}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

بالمُقارنة بين تابعي الشّدّة والتّوتر نجدُ أنّ الوشيعة مهملة المُقاومة تجعلُ التّوتّرَ اللّحظي يتقدّم بالطّور على الشّدّة اللّحظيّة بمقدار $\frac{\pi}{2}$ (ترابع متقدم).



للحصول على القيم المُنتجة نقسّم طرفي العلاقة (2) على $\sqrt{2}$:

$$\frac{U_{max_L}}{\sqrt{2}} = X_L\frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow U_{eff_L} = X_L I_{eff_L}$$

تعطى الاستطاعة المُتوسّطة المُستهلكة:

$$P_{avg} = U_{eff} I_{eff}\cos\varphi$$

لكن في حالة الوشيعة مُهملة المُقاومة تكونُ:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi_L = 0 \Rightarrow P_{avg_L} = 0$$

أي أنّ الاستطاعة المُتوسّطة في الوشيعة مُهملة المُقاومة معدومة، التعليل: الوشيعة مُهملة المُقاومة تختزنُ طاقة كهرطيسيّة خلال ربع دور لتعيدها كهربائيًا إلى الدّارة الخارجيّة خلال ربع الدّور الذي يليه، أي أنّ الوشيعة لا تستهلكُ طاقة.

س3- دارة تيار متناوب تحوي مكثفة سعتها C نطبق بين طرفيها توتراً لحظياً u فيمر فيها تيار كهربائي تعطى شدته اللحظية وفق التابع الزمني: $i=I_{max}\cos\omega t$ والمطلوب:

a) استنتج التابع الزمني للتوتر اللحظي بين طرفي الوشيعة ثم استنتج العلاقة التي تربط بين الشدة المنتجة والتوتر المنتج في هذه الدارة.

b) استنتج قيمة الاستطاعة المتوسطة في المكثفة معدومة مع التعليل.

الجواب: نطبّقُ توتراً لحظيًا $\bar{u}$ على مُكثّفةٍ غير مشحونة C فيمرّ تيّارٌ تابعُ شدّته اللّحظيّة: $i = I_{max}\cos\omega t$

التّوتّرُ اللّحظي بين لبوسي المُكثّفة يُعطى بالعلاقة:

$$\bar{u} = \frac{\bar{q}}{C}$$

باعتبار أنّ C سعة المُكثّفة ثابتة $\bar{q}$ شحنتها المُتغيّرة مع الزّمن فإنّه خلال فاصل زمني dt تتغيّرُ شحنة المُكثّفة بمقدار dq

ولدينا: $d\bar{q} = i\,dt$

ولحساب شحنة المُكثّفة في اللّحظة t نكامل فنجد:

$$\bar{q} = \int i\,dt = \int I_{max}\cos(\omega t)\,dt$$

$$\bar{q} = \frac{1}{\omega}I_{max}\sin\omega t$$

نعوّض بـ $\bar{u}$ فنجد: $\bar{u} = \frac{1}{\omega C}I_{max}\sin\omega t$

$$\bar{u} = \frac{1}{\omega C}I_{max}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

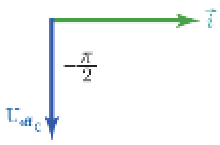
ندعو المقدار $X_C = \frac{1}{\omega C}$ بمُمانعة المُكثّفة وتسمّى اتساعيّة المُكثّفة وتقدّرُ بوحدة الأوم في الجملة الدّوليّة.

$$\bar{u} = X_C I_{max}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$U_{max} = X_C I_{max}$$

إذاً: $\bar{u}_C = U_{max_C}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

بمُقارنة تابع التّوتر مع تابع الشّدّة نجد أنّ التّوتّر يتأخّر عن التّيار بمقدار $\frac{\pi}{2}rad$ (ترابع مُتأخّر).



للحصولِ على القيمِ المُنتجة (الفعّالة) نقسّمُ طرفَي علاقة التوتر الأعظمي على $\sqrt{2}$:

$$\frac{U_{max_C}}{\sqrt{2}} = X_C \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow U_{eff_C} = X_C I_{eff_L}$$

وهذا هو قانونُ أوم في دارة المُكثّفة.

تُعطى الاستطاعةُ المصروفة بالعلاقة:

$$P_{avg} = U_{eff} I_{eff} \cos\bar{\varphi}$$

ولكن من أجلِ المُكثّفة:

$$\bar{\varphi}_C = -\frac{\pi}{2} rad \Rightarrow \cos\bar{\varphi}_C = 0$$

$$\Rightarrow P_{avg_C} = 0$$

الاستطاعةُ المُتوسّطة في المُكثّفة معدومةٌ، التعليل: فالمُكثّفةُ لا تستهلكُ أيّةَ طاقةٍ، لأنّها تختزنُ الطّاقة كهربائيًا خلال ربعِ دور، وتعيدُها كهربائيًا في ربعِ الدّور الذي يليه.

س4- استنتج علاقة الدور من أجل حالة الطنين الكهربائي.

الجواب: في حالةِ الطّنين الكهربائيّ $X_L = X_C$ بالتالي:

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} \Rightarrow \omega_r^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{2\pi}{T_r} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow T_r = 2\pi\sqrt{LC}$$

س5- استنتج علاقة التوتر المنتج لدارةِ تيّارٍ مُتناوبٍ تحوي على التّسلسلِ مُقاومةً وذاتيةً صرفةً ومُكثّفةً ثم احسب قيمة عامل الاستطاعة.

الجواب: نؤلّفُ دارةً تحوي على التّسلسلِ الأجهزةَ الآتية: مُقاومةً أومية R، وشيعةً ذاتيتُها L مُقاومتُها الأومية مُهملة، ومُكثّفةً سعتُها C، ويمرُّ في هذه الدّارة تيّارٌ مُتناوبٌ جيبيٌ تابعٌ، شدّته اللّحظيّة تُعطى بالعلاقة: $i = I_{max}\cos\omega t$

عندما نطبّقُ بين طرفَي الدّارة توترًا مُتناوبًا جيبيًا، تابعه اللّحظي: $\bar{u} = U_{max}\cos(\omega t + \bar{\varphi})$

إنّ توابعَ التّوتراتِ اللّحظيّة الجزئيّة مُختلفةٌ في الطور، أي:

$$\bar{u} = \bar{u}_R + \bar{u}_L + \bar{u}_C$$

بينما التّوتراتُ المُنتجة تجمعُ هندسيًا:

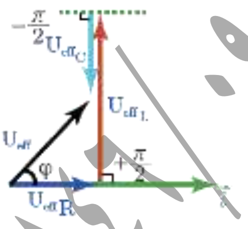
$$\overrightarrow{U_{eff}} = \overrightarrow{U_{eff_R}} + \overrightarrow{U_{eff_L}} + \overrightarrow{U_{eff_C}}$$

ونعلمُ أنّ:

$$\bar{\varphi}_C = -\frac{\pi}{2} rad, \bar{\varphi}_L = +\frac{\pi}{2} rad, \bar{\varphi}_R = 0 rad$$

باستخدامِ إنشاءِ فرينل يمكنُنا حساب $\bar{\varphi}$، U_{eff}:

من الرّسمِ بحسبِ فيثاغورث:



بفرض $I_{eff_L} > I_{eff_C}$ نجد: $U_{eff_L} > U_{eff_C}$:

$$U_{eff}^2 = U_{eff_R}^2 + (U_{eff_L} - U_{eff_C})^2$$

$$U_{eff}^2 = R^2 I_{eff}^2 + (X_L - X_C)^2 I_{eff}^2$$

$$U_{eff} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\, I_{eff}$$

$$U_{eff} = Z I_{eff}$$

وهو قانونُ أوم في الحالةِ العامّة.

ومنه تكونُ مُمانَعةُ الدّارة: $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$

ولحساب $\bar{\varphi}$ من الشكل نجد:

$$\cos\bar{\varphi} = \frac{U_{eff_R}}{U_{eff}} = \frac{RI_{eff}}{ZI_{eff}}$$

$$\cos\bar{\varphi} = \frac{R}{Z}$$

س6– استنتج قيمة الشدة المنتجة الكلية لدارة تحوي على التفرع مقاومة وذاتية ومكثفة.

الجواب: إنّ تابع الشدّة اللحظيّة للتيار في الدّارة الكلّيّة:

$$i = I_{max}\cos(\omega t + \bar{\varphi})$$

الشدّاتُ اللّحظيّة تجمع جبريًا: $i = i_1 + i_2 + i_3$

في فرعِ المُقاومة، الشّدّة على توافُق بالطّور مع التّوتر المُطبّق

$\bar{\varphi}_R = 0\, rad$.

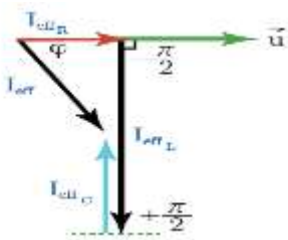
في فرعِ الوشيعة مُهمَلة المُقاومة، الشّدّة على ترابعٍ مُتأخرٍ بالطّور عن التّوتر المُطبّق $\bar{\varphi}_L = -\frac{\pi}{2}\, rad$.

في فرعِ المكثّفة الشدّة على ترابعٍ متقدّمٍ بالطّور على التّوتر المُطبّق $\bar{\varphi}_L = \frac{\pi}{2}\, rad$.

الشّدّة المُنتجة تجمع هندسيًا:

$$\overrightarrow{I_{eff}} = \overrightarrow{I_{eff_R}} + \overrightarrow{I_{eff_L}} + \overrightarrow{I_{eff_C}}$$

بإنشاء تمثيل فرينل: $I_{eff_L} > I_{eff_C}$ نجد:

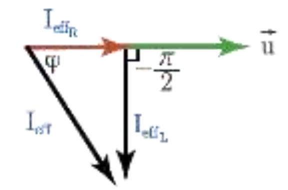


$$I_{eff}^2 = I_{eff_R}^2 + (I_{eff_L} - I_{eff_C})^2$$

س7– استنتج قيمة الشدة المنتجة الكلية لدارة تحوي على التفرع مقاومة ووشيعة مهملة المقاومة.

الجواب:

$$\overrightarrow{I_{eff}} = \overrightarrow{I_{eff_R}} + \overrightarrow{I_{eff_L}}$$



في فرعِ المُقاوَمةِ، الشّدّةُ على توافق بالطّور معَ التّوترِ المُطبّق:

$$\bar{\varphi}_R = 0\, rad$$

في فرعِ الذّاتيّة، الشّدّة على ترابع مُتأخّر بالطّور عن التّوترِ المُطبّق: $\bar{\varphi}_L = -\frac{\pi}{2}\, rad$

بالتّربيع نجد: $I_{eff}^2 = I_{eff_R}^2 + I_{eff_L}^2$

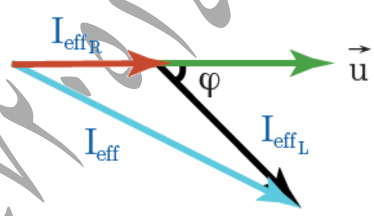
س8– استنتج قيمة الشدة المنتجة الكلية لدارة تحوي على التفرع مقاومة ووشيعة لها مقاومة.

الجواب: في فرعِ المُقاومة، الشّدّة على توافق بالطور مع التّوتر المُطبّق

$$\bar{\varphi}_R = 0\, rad$$

في فرعِ الوشيعة، الشّدّةُ مُتأخِرةٌ بالطّورِ عن التّوترِ المُطبّق بمقدارِ: $\bar{\varphi}_L$

$$\overrightarrow{I_{eff}} = \overrightarrow{I_{eff_R}} + \overrightarrow{I_{eff_L}}$$



بالتّربيع نجد:

$$I_{eff}^2 = I_{eff_R}^2 + I_{eff_L}^2 + 2I_{eff_R}I_{eeff_L}\cos(\bar{\varphi}_L - \bar{\varphi}_R)$$

س9- استنتج قيمة الشدة المنتجة الكلية لدارة تحوي على التفرع وشيعة مهملة المقاومة ومكثفة.

الجواب:

في فرعِ المُكثّفة، الشّدّةُ متقدمة بالطّورِ عن التّوتر المُطبّق:

$$\bar{\varphi}_C = +\frac{\pi}{2}\ rad$$

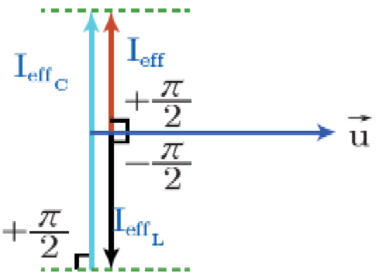
في فرع الوشيعة مُهملة المقاومة الشّدّة على ترابعٍ مُتأخّرٍ بالطّور عن التّوتر المُطبّق: $\bar{\varphi}_L = -\frac{\pi}{2} rad$

$$\overrightarrow{I_{eff}} = \overrightarrow{I_{eff_C}} + \overrightarrow{I_{eff_L}}$$

نميّزُ الحالاتِ الآتية:

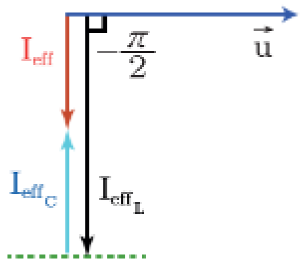
1) إذا كان $X_C < X_L$ فإن $I_{eff_C} > I_{eff_L}$

وبالتالي: $I_{eff} = I_{eff_C} - I_{eff_L}$



2) إذا كان $X_L < X_C$ فإن $I_{eff_L} > I_{eff_C}$

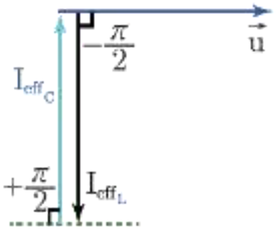
وبالتالي: $I_{eff} = I_{eff_L} - I_{eff_C}$



3) إذا كان $X_L = X_C$ فإن $I_{eff_L} = I_{eff_C}$

وبالتالي: $I_{eff} = I_{eff_L} - I_{eff_C}$

$$I_{eff} = 0$$



وتنعدمُ الشّدّةُ في الدّارةِ الخارجيّة، وتُسمّى الدّارة في هذه الحالة بالدّارةِ الخانقة للتّيار.

المحولة الكهربائية

س1- استنتج قانون مردود نقل الطاقة الكهربائية في المحولة ثم بين كيف يمكن أن يقترب المردود من الواحد.

الجواب: يُعطى مردودُ النّقل بالعلاقة: $\eta = \frac{P-P'}{P}$

حيث P: الاستطاعة المُتولدة من منبعِ التّيارِ المُتناوِب (المنوّبة).

P': الاستطاعة الضّائعة حراريّاً في أسلاكِ النّقل بفعلِ جول.

$$\eta = 1 - \frac{P'}{P}$$

وباعتبارِ عاملِ الاستطاعة قريباً جداً من الواحِد فإن:

$$P = U_{eff} I_{eff}$$

حيث U_{eff} التّوتر المنتج بين طرفي المنبع.

$$P' = R I_{eff}^2$$

حيث R مقاومة أسلاك الناقل.

نعوّضُ في علاقةِ المردود:

$$\eta = 1 - \frac{R I_{eff}^2}{U_{eff} I_{eff}}$$

$$\eta = 1 - R\frac{I_{eff}}{U_{eff}}$$

لكي يقتربَ المردودُ من الواحد ينبغي تصغيرُ مُقاوَمة أسلاك النّقل R أو تكبيرُ U_{eff} يتمُّ ذلكَ باستعمال مُحوّلاتٍ رافعة للتّوتر عندَ مركزِ توليد التّيار ثمّ خفضِه على مراحل عندَ الاستخدام.

الأمواج المستقرة العرضية والطولية

س1- استنتجُ المطال المُحصّل لاهتزاز النقطة n التي تخضعُ لتأثير الموجتين الواردة والمُنعكسة معاً في وتر مرن يتصل طرفه الأول برنانة كهربائية وطرفه الثاني يمر على بكرة تنتهي بثقل مناسب.

الجواب: $\bar{y}_{n(t)} = \bar{y}_{1(t)} + \bar{y}_{2(t)}$

$$\bar{y}_{n(t)} = Y_{max}\left[\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\bar{x}) + \cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}\bar{x} + \varphi')\right]$$

وبما أن: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

نجد وبعد تطبيق القانون السابق:

$$\bar{y}_{n(t)} = 2Y_{max}\left[\cos(\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x} + \frac{\varphi'}{2}) + \cos(\omega t + \frac{\varphi'}{2})\right]$$

في الانعكاس على نهايةٍ مُقيّدةٍ يكونُ فرق الطور: نعوّض $\varphi' = \pi\ rad$

$$\bar{y}_{n(t)} = 2Y_{max}\left[\cos(\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x} + \frac{\pi}{2}) + \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})\right]$$

وبما أن: $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$ تصبح العلاقة:

$$\bar{y}_{n(t)} = 2Y_{max}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x}\,.\sin\omega t$$

س2- في جملة أمواج مستقرة عرضية تعطى سعة اهتزاز نقطة n من حبل مرن تبعد مسافة x عن نهايته المقيدة بالعلاقة: $Y_{max/n}=2Y_{max}|\sin\frac{2\pi}{\lambda}x|$ استنتج العلاقة المحددة لكل من أبعاد عقد وبطون الاهتزاز عن النهاية المقيدة.

الجواب: $Y_{max/n} = 2Y_{max}\left|\sin(\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x})\right|$

عقد الاهتزاز N: نقاط سعةِ اهتزازها معدومةٌ دوماً، تحدّدُ أبعادها $\bar{x}$ عن النّهايةِ المُقيّدة بالعلاقة:

$$Y_{max/n} = 0 \Rightarrow \sin\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x} = 0$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x} = n\pi \Rightarrow$$

$$x = n\frac{\lambda}{2}$$

حيثُ: $n = 0,1,2,3 \ldots$

أي أنّ النقاطَ التي تبعدُ عن النّهاية المُقيّدة (التي يحصل عندها انعكاسٌ وحيدٌ) أعدادٌ صحيحةٌ موجبةٌ من نصفِ طولِ الموجة، يصلها اهتزازٌ واردٌ واهتزازٌ مُنعكِسٌ على تعاكسٍ دائمٍ، فتكونُ ساكنةً دوماً، وتؤلّفُ عُقَدَ اهتزاز N وتكونُ المسافة بين كلّ عقدتين مُتتاليتين $\frac{\lambda}{2}$.

بطون الاهتزاز A: نقاط سعة اهتزازها عُظمى دوماً، تحدّدُ أبعادُها $\bar{x}$ عن النّهاية المُقيّدة بالعلاقة:

$$Y_{max/n} = 2Y_{max} \Rightarrow \left|\sin(\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x})\right| = 1$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}}$$

حيثُ: $n = 0,1,2,3 \ldots$

أي أنّ النقاطَ التي تبعدُ عن النّهاية المُقيّدة (التي يحصل عندها انعكاسٌ وحيدٌ) أعدادٌ فرديّة من ربع طول الموجة، يصلها اهتزازٌ واردٌ واهتزازٌ مُنعكِسٌ على توافقٍ دائم، فتكونُ سعةُ الاهتزاز فيها عُظمى دوماً، وتؤلّفُ بطون اهتزاز A وتكونُ المسافة بين كلّ بطنين مُتتاليتين $\frac{\lambda}{2}$ والمسافة بين كلّ عقدةٍ وبطنٍ يليه $\frac{\lambda}{4}$.

س3- استنتج طول وتواتر الوتر على نهاية مقيدة في تجربة ملد

الجواب: $L = n\frac{\lambda}{2}$ لكن $\lambda = \frac{v}{f}$ بالتالي:

$$L = n\frac{v}{2f}$$

0988440574
0947205146

حيثُ: n عدد صحيح موجب $n = 1,2,3,4 \dots \dots$

يُسمَّى أوّل تواتر يولِّد مِزلاً واحداً بالتّواتر الأساسي

$n = 1 \Rightarrow f_1 = \frac{v}{2L}$ المدروج الأوّل (الأساسي).

وتُسمّى بقيّة التّواتُرات من أجل $n = 1,2,3,4 \dots \dots$

تواترات المدروجات $f = n\frac{v}{2L} = nf_1$

س4- استنتج طول وتواتر الوتر ذو نهاية حرة في تجربة ملد.

الجواب: تحدّدُ المدروجات انطلاقاً من العلاقةِ المُحدَّدة لطول

الوتر: $L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$

$L = (2n-1)\frac{v}{4f}$

تُحدّدُ التّوَاتُرات الخاصّة من العلاقة: $f = (2n-1)\frac{v}{4L}$

حيث n عدد صحيح موجب $n = 1,2,3,4 \dots \dots$ ويُمثل

$(2n-1)$ مدروج الصوت الصادر.

س5- استنتج الشكل الآخر لعلاقة الكتلة الخطية.

الجواب:

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{\rho . V}{L} = \frac{\rho . S . L}{L} \Rightarrow \mu = \rho \pi r^2$$

س6- استنتج العلاقة المحددة لتواتر الصوت البسيط الذي يصدره مزمار ذو فم نهايته مفتوحة وكيف نجعل مزماراً ذا لسان متشابه الطرفين من الناحية الاهتزازية؟

الجواب: طول المزمار L يساوي تقريباً:

$\frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, \dots \dots$ أي: $L = n\frac{\lambda}{2}$

حيث: $n = 1,2,3 \dots \dots$ حيث n عددٌ صحيحٌ موجبٌ.

ولكن: $\lambda = \frac{v}{f}$ نعوض فنجد: $L = n\frac{v}{2f}$

$f = n\frac{v}{2L}$

f: تواترُ الصَّوتِ البسيطِ الصّادر عن المِزمار (HZ).

L: طولُ المِزمار (m).

v: سرعةُ انتشارِ الصَّوت في غاز المزمار $(m.s^{-1})$.

n: عددٌ صحيحٌ موجبٌ يمثِّلُ رتبةَ صوتِ المزمار (مدروجات الصَّوت).

س7- استنتج العلاقة المحددة لتواتر الصوت البسيط الذي يصدره مزمار مختلف الطرفين بدلالة طوله وكيف نجعل مزماراً ذا فم مختلف الطرفين من الناحية الاهتزازية؟

الجواب: طول المزمار L يساوي تقريباً:

$\frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4}, \dots \dots$ أي: $L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$

حيث: $n = 1,2,3 \dots \dots \dots$ عدد صحيح موجب.

ولكن: $\lambda = \frac{v}{f}$ نعوض فنجد: $L = (2n-1)\frac{v}{4f}$

$f = (2n-1)\frac{v}{4L}$

f: تواترُ الصَّوتِ البسيطِ الصّادر عن المِزمار (HZ).

L: طولُ المِزمار (m).

v: سرعةُ انتشارِ الصَّوت في غاز المزمار $(m.s^{-1})$.

$(2n-1)$ يمثِّلُ رتبةَ صوتِ المزمار (مدروجات الصَّوت).

س8- نُثبّتُ بإحدى شعبتَي رنّانةٍ كهربائيّة تواترُها f طرفَ وترٍ له طولٌ مُناسِب ومشدود بثقلٍ مُناسِب كتلته m لتتكوَّن أمواجٌ مُستقرّةٌ عرضيّةٌ بثلاثة مغازل، ولكي نحصلَ على مِغزلَين نُجري التّجربتَين الآتيتَين:

0947205146
0988440574

a) نستبدلُ الرّنّانةَ السّابقة برنانةٍ أُخرى $f^{\prime}$ مع الكتلةِ السّابقة نفسِها

m استنتج العلاقة بين التّواتُرَين $f, f^{\prime}$.

لكن $f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$ بما أن المقادير (F_T, L, μ) ثابتة

فعدد المغازل يتناسب طرداً مع تواتر الرنانة .

$$f = const\ n \qquad f^{\prime} = \text{const}\ n^{\prime}$$

$$\frac{f}{f^{\prime}} = \frac{n}{n^{\prime}} = \frac{3}{2} \Rightarrow f^{\prime} = \frac{2}{3}f$$

b) نستبدلُ الكتلةَ السَّابقة m بكتلة أخرى $m^{\prime}$ مع الرّنّانة السّابقة نفسِها استنتج العلاقة بين الكتلتين f . $m, m^{\prime}$

لكن $f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$ بما أن المقادير (f, L, μ) ثابتة

فعدد المغازل يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لقوة شد الوتر .

$$n\sqrt{F_T} = const \qquad n^{\prime}\sqrt{F_T^{\prime}} = const$$

$$\frac{n}{n^{\prime}} = \frac{\sqrt{F_T^{\prime}}}{\sqrt{F_T}} = \frac{\sqrt{m^{\prime}g}}{\sqrt{mg}}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{m^{\prime}}}{\sqrt{m}} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{m^{\prime}}{m} \Rightarrow m^{\prime} = \frac{9}{4}m$$

الالكترونيات والجسم الصلب

س1- انطلاقاً من فرضية بور الأولى استنتج الطاقة الميكانيكية لإلكترون ذرة الهيدروجين في مداره.

الجواب: حركةُ الإلكترون حول النّواة دائريّة مُنتظَمة، أي:

$$F_E = F_C$$

$$k\frac{e^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = k\frac{e^2}{m_e r}$$

الطّاقة الميكانيكيّة (الكلّيّة) للإلكترون:

$$E = E_K + E_P$$

حيثُ: E_P الطّاقة الكامنة الكهربائية: $E_P = -k\frac{e^2}{r}$

E_K الطاقة الحركية: $E_k = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{1}{2}k\frac{e^2}{r}$

بالتّعويضِ والإصلاح نجدُ: $E = -\frac{1}{2}k\frac{e^2}{r}$

وهي علاقةُ الطّاقةِ الميكانيكيّة لإلكترون ذرّة الهدروجين في مداره.

س2- انطلاقاً من فرضية بور الثانية استنتج نصف قطر كل مدار و الطاقة الميكانيكية لإلكترون ذرة الهيدروجين في كل مدار .

الجواب: $m_e v r = n\frac{h}{2\pi}$

$$v^2 = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 m_e^2 r^2}$$

بالتّعويض في علاقة الطاقة الحركية نجدُ:

$$\frac{1}{2}m_e\frac{n^2h^2}{4\pi^2 m_e^2 r^2} = \frac{1}{2}k\frac{e^2}{r}$$

نستنتجُ: $r_n = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 m_e k e^2}$

أي: $r = n^2 r_0$ مع: $r_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 m_e k e^2}$

وهو نصفُ قطر بور الذي نحصل عليه عندما $n = 1$.

بالتّعويض في علاقة الطاقة الكلية (5) نجد:

$$E_n = -\frac{2\pi^2 e^4 k^2 m_e}{n^2 h^2}$$

و طاقةُ الحالةِ الأساسيَّة للهيدروجين $(n = 1)$:

$$E_0 = -\frac{2\pi^2 e^4 k^2 m_e}{h^2} = -13.6\ eV$$

وبالتّالي: $E_n = \frac{E_0}{n^2} = \frac{-13.6}{n^2}$

س3- استنتج مع الشرح العلاقة المحددة لطاقة انتزاع الكترون حر من سطح معدن.

الجواب: لانتزاع إلكترون حرّ من سطح معدن ونقله مسافة غيرة dl خارج المعدن يجب تقديم طاقة أكبر من عمل القوّة الكهربائية التي تجذب الإلكترون نحو داخل المعدن.

وبالتالي: $W_S = F.dl$ لكن: $F = e.E$

نعوّض فنجد: $W_S = e.E.dl$ لكن: $E.dl = U_S$

وبالتالي يكون: $\boxed{E_s = W_s = eU_s}$

E_s: طاقة الانتزاع. W_s: عمل الانتزاع.

U_s: فرق كمون الانتزاع بين سطح المعدن والسّطح الخارجي

E: الحقل الكهربائي المتولّد عن الأيونات الموجبة عند سطح المعدن.

س4- نطبق فرقاً في الكمون بين اللبوسين الشاقوليين لمكثفة مستوية ثم ندخل الكتروناً ساكناً في نافذة في اللبوس السالب استنتج بالرموز العلاقة المحددة لسرعة وتسارع هذا الالكترون عندما يخرج من نافذة في اللبوس الموجب

الجواب: جملة المقارنة: خارجيّة

الجملة المدروسة: الإلكترون داخل منطقة الحقل الكهربائي.

القوى الخارجية المؤثرة: $\vec{F}$ القوّة الكهربائيّة حيث لها حامل $\vec{E}$ وتعاكسه بالجهة وشدّتها ثابتة $\boxed{F = eE}$ (ثقل الالكترون مهمل)

لكن: $\boxed{E = \frac{U}{d}}$ نعوض: $F = e\frac{U}{d}$

بحسب قانون نيوتن الثّاني: $F = m_e a$

بمساواة العلاقتين السّابقتين:

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{eU}{m_e d} = const$$

فالحركة مستقيمة متسارعة بانتظام نعوّض في القانون:

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

$$v^2 - 0 = 2\frac{eU}{m_e d}d \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

س5- استنتج معادلة حامل المسار بالنسبة لمراقب خارجي لإلكترون يدخل منطقة الحقل الكهربائي المنتظم بسرعة عمودية على خطوط الحقل.

الجواب: جملة المقارنة: خارجيّة.

الجملة المدروسة: الإلكترون داخل منطقة الحقل الكهربائي المنتظم بإهمال ثقله.

القوى الخارجيّة المؤثرة: $\vec{F}$ القوّة الكهربائيّة حيث $\vec{F} = e\vec{E}$

$\vec{F}$ لها حامل $\vec{E}$ وتعاكسه بالجهة وشدّتها ثابتة.

$$\sum \vec{F} = m_e\vec{a}$$

نطبّق العلاقة الأساسيّة في التّحريك الانسحابي:

$$\vec{F} = e\vec{E} = m_e\vec{a}$$

باعتبار مبدأ الفواصل: نقطة دخول الإلكترون منطقة الحقل الكهربائي المنتظّم.

مبدأ الزّمن: لحظة دخول الإلكترون منطقة الحقل الكهربائي المنتظم.

بالإسقاط على محورين متعامدين $\overrightarrow{x'x}$ أفقياً و $\overrightarrow{y'y}$ شاقوليّاً موجّهاً نحو الأعلى:

$$F_x = 0 \Rightarrow a_x = 0 \Rightarrow v_x = const$$

إنّ حركة المسقط على $\overrightarrow{x'x}$ هي:

حركةٌ مُستقيمةٌ مُنتظَمةٌ: $x = v_x t + x_0$

لكن $x_0 = 0$:

$$x = vt \dots\dots (1)$$

$$\overrightarrow{oy}\begin{cases} v_{o_y} = 0 \\ F_y = F \Rightarrow m_e a_y = e\dfrac{U}{d} \\ \Rightarrow a_y = \dfrac{eU}{m_e d} = const \end{cases}$$

حركة المسقط على $\overrightarrow{y'y}$ هي:

حركةٌ مُستقيمةٌ مُتسارِعةٌ بانتظام

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{o_y} t + y_0$$

$$y_0 = 0 \Rightarrow y = \frac{eU}{2m_e d}t^2 \dots\dots (2)$$

استنتاج مُعادَلة حامل المَسار: من (1): $t = \frac{x}{v}$

نعوّضُ في (2): $y = \dfrac{eU}{2m_e dv^2}x^2$

المسارُ محمولٌ على جزءٍ من قطعٍ مُكافِئ.

س6- استنتج العلاقة الرياضية لكمية حركة الفوتون بدلالة طول الموجة الكهرطيسية التي يواكبها.

الجواب: كمّية حركة $P = m.c$ لكن: $E = m.c^2$

ومنه: $m = \frac{E}{c^2}$ بالتالي:

$$P = \frac{E}{c^2}c = \frac{E}{c} = \frac{hf}{\lambda f} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

س7- استنتج علاقة الطاقة الحركية للإلكترون المنتزع بتأثير الفعل الكهرضوئي.

الجواب: $E_k = h.f - E_s = h.f - hf_s$

$$E_k = hc.(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_s})$$

س8- استنتج أقصر طول موجة λ_{min} يمكن أن تنطلق بها فوتونات الأشعة السينية وعلى ماذا يتوقف.

الجواب: طاقة الفوتونات تساوي بقيمها العظمى الطاقة الحركية للإلكترونات المسرعة، التي تسبب إصدارها أي:

$$E = E_k \Rightarrow hf_{max} = eU_{AC}$$

$$h\frac{c}{\lambda_{min}} = eU_{AC} \Rightarrow$$

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU_{AC}}$$

وهي علاقة طول المَوجة الأصغري للأشعة السّينيّة.

حيث U_{AC} فرق الكمون الكهربائي المُطبّق بين طرفي الأنبوب، c سرعة انتشار الضوء في الخلاء.

يتوقف أقصر طول موجة لفوتونات الأشعة السينية على التوتر المطبق بين المصعد والمهبط.

الفيزياء الفلكية

س1- استنتج بالعلاقات المناسبة أن طيف المجرات ينزاح نحو الطيف الأحمر عندما تبتعد المجرات عنا.

الجواب: عندما يكون المنبع ساكناً بالنسبة للمراقب تشغل الموجة مسافة λ. $\lambda = \frac{v}{f}$

عندما يتحرك المنبع مُبتعِداً عن المُراقب بسرعة v' تشغل المَوجة مسافة λ':

$$\lambda' = \frac{v + v'}{f} = \frac{v + v'}{\frac{v}{\lambda}}$$

$$\lambda' = (1 + \frac{v'}{v})\lambda$$

هذا يعني أن λ' أكبر من λ.

0988440574
0947205146

أستنتج: عندمَا يبتعدُ منبعٌ مَوجي عن مُراقب فإنَّ الطولَ المَوجي يَزدادُ، وبما أن الضوءَ ذا الطّول المَوجي الأكبر هو الأحمرُ، فعندمَا يبتعدُ المنبعُ الضوئي عن المُراقبِ ينزاحُ الطّيفُ نحوَ الأحمر.

س2- إذا علمت أن السرعة الكونية الأولى هي السرعة المدارية (مماسية للمسار الدائري حول الأرض) التي تجعل قوة العطالة النابذة للجسم تساوي قوة جذب الأرض له وأن السرعة الكونية الثانية هي السرعة التي تجعل الطاقة الحركية للجسم المبتعد عن الأرض تساوي طاقة الجذب الكامنة فاستنتج العلاقة بين السرعة الكونية الثانية والسرعة الكونية الأولى.

الجواب: استنتاج علاقة السرعة الكونية الأولى: وهي السرعة المدارية التي تجعل الجسم يدور ضمن مدار حول الجسم الجاذب بحركة دائرية منتظمة.

$$E_c = E_E$$

$$ma_c = G\frac{mM}{r^2}$$

$$m\,\frac{v_1^2}{r} = G\,\frac{mM}{r^2}$$

$$v_1 = \sqrt{G\,\frac{M}{r}}$$

استنتاج علاقة السرعة الكونية الثانية:

$$E_k = E_p$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = F_c r$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = G\frac{mM}{r^2}r$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

العلاقة بين السرعتين الكونيتين الأولى والثانية:

$$v_2 = \sqrt{2}v_1$$

س3- استنتج بالعلاقات المناسبة أن طيف المجرات ينزاح نحو الطيف الأزرق عندما تقترب المجرات عنا.

الجواب: $\acute{\lambda} = \frac{v-\acute{v}}{f} = \frac{v-\acute{v}}{v} = (1-\frac{\acute{v}}{v})\lambda$

أي أن $\acute{\lambda}$ أصغر من λ لذلك تسمّى هذه الظاهرة الانزياح نحو الأزرق.

ندعوكم للانضمام إلى قناتنا على التّيلغرام:

قناة فراس قلعه جي للفيزياء والكيمياء