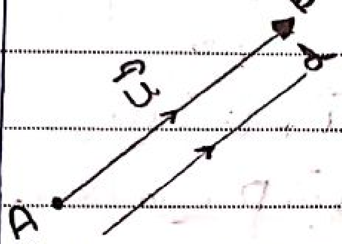
الأشعة

• تعريف الشعاع :

يتعين الشعاع في المستوي والفراغ بنقطتين

$\vec{u}=(A,B)$

مثال :



• عناصر الشعاع :

1. الحامل : هو المستقيم الذي يحمل الشعاع أو أي مستقيم يوازيه (AB) و d
2. الجهة : هي من A إلى B
3. الطويلة (الطول) :

هو المسافة بين البداية والنهاية $\|\vec{u}\|=AB$

• لو كان الشعاع $\vec{u}=\vec{AA}$

⟸ يكون الشعاع الصفري

• تساوي شعاعين :

نقول أن : $\vec{u}=\vec{AB}$ ، $\vec{v}=\vec{CD}$

متساويان إذا كان لهما نفس (الطول و الجهة و الحامل).

$\vec{v}=\vec{u} \Rightarrow CD=AB$

وكذلك : $CD \parallel AB$

وأيضا بنفس الجهة

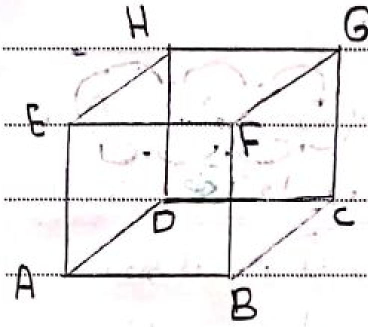
• الشعاع المعاكس :

هو شعاع له نفس الحامل ونفس الطويلة وعكس الجهة ..

$\vec{u}=\vec{AB} \Rightarrow \vec{v}=\vec{BA}$

⟸ متعاكسان

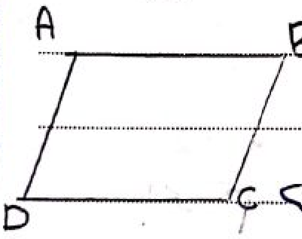
مثال : في الشكل الجانبي :



⟸ $\vec{AB}=\vec{DC}$

و $\vec{AB}$ و $\vec{GH}$ متعاكسان

• خاصية متوازي الأضلاع :



إذا كان $\vec{AB}, \vec{DC}$ متوازي أضلاع

$\Leftrightarrow \vec{AB}=\vec{DC}$

عندما يكون شعاعين لهما نفس المبدأ

• قاعدة متوازي الأضلاع:

عندما يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما نفس المبدأ

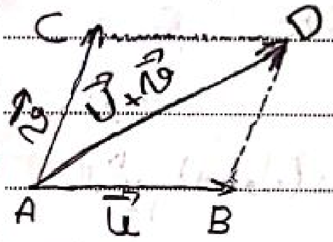
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

فإن $\vec{u} + \vec{v}$ هو $\overrightarrow{AD}$

حيث D يكمل الشكل

ABDC متوازي أضلاع

بالرسم:



• إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعاكسان

فإن: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$

لأن:

هو مهم التعليل

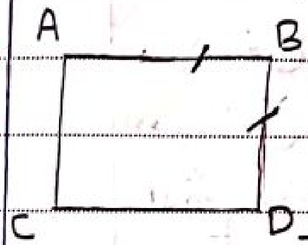
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{v} = \overrightarrow{BA}$

فإن: $\vec{u} + \vec{v} = \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}}$ (شال بشيل)

$= \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

مثال:

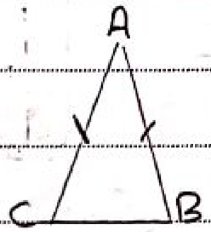


مربع ABCD

يعني:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$ ∝

ولو كان:



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ ∝

• جمع شعاعين $\vec{u}$, $\vec{v}$

قاعدة 1: الشعاعين المتتاليين:

نقول أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متتاليين إذا كان

نهاية الأول بداية الثاني..

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

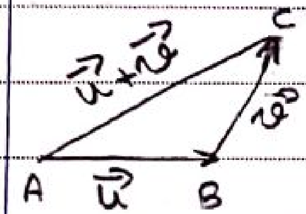
⇐ $\vec{u}$, $\vec{v}$ متتاليين

• قاعدة شال: جمع شعاعين متتاليين

شال بشيل المشتركة

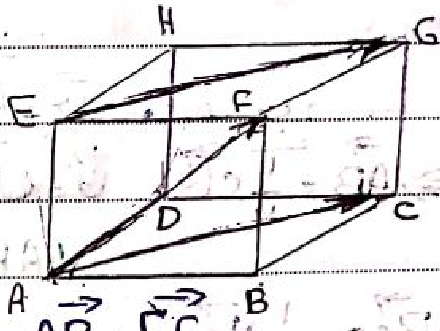
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

بالرسم



مثال: في الشكل الجانبي:

مكعب ABCDEFGH



أحسب:

1. $\vec{AB} + \vec{FG} =$
2. $\vec{CG} + \vec{EA} =$
3. $\vec{AC} + \vec{DH} =$
4. $\vec{AF} + \vec{AD} =$
5. $\vec{AB} + \vec{FG} + \vec{AE} =$

الحل:

1. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (شال)
2. $\vec{CG} + \vec{EA} = \vec{0}$ (بجهتين متعاكستين)
3. $\vec{AC} + \vec{DH} = \vec{AG}$ (خاصية متوازي الأضلاع)
4. $\vec{AF} + \vec{AD} = AG$
5. $\underbrace{\vec{AB} + \vec{BC}}_{\text{شال}} + \vec{AE} = \vec{AC} + AE = \vec{AG}$

• حالة خاصة: طرح شعاعين لهما نفس المبدأ

$\vec{AC} - \vec{AB}$

$= \vec{AC} - (-\vec{BA}) = \vec{AC} + \vec{BA}$

$= \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}$

موضع التقليل

القاعدة: (الطرح شعاعين لهما نفس المبدأ):

هو شعاع نهايته الثاني نهاية الأول

$\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$

ضرب شعاع $\vec{u}$ غير صفري بعدد حقيقي $K \in R$

$\vec{v} = K\vec{u}$

حيث:

1. منحى $\vec{v}$ هو نفس منحى $\vec{u}$
2. طول (نقيم) $\vec{v}$ هو نقيم $\vec{u}$ مضروب بـ $|K|$ (القيمة المطلقة)

$\|\vec{v}\| = |K| . \|\vec{u}\|$

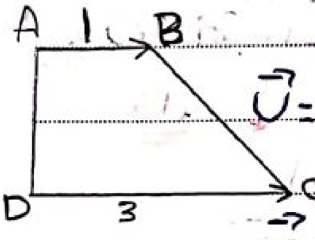
3. الجهة: جهة $\vec{v}$

هناك حالتان:

أ. جهة $\vec{u}$ إذا كان $K > 0$ (عدد موجب)

ب. عكس جهة $\vec{u}$ إذا كان $K < 0$ (عدد سالب)

• مثال: في الشكل الجانبي:



إذا كان: $\vec{u} = \vec{AB}$

ما هو الشعاع $\vec{v} = 3\vec{AB}$

الحل: $\vec{v} = \vec{DC}$

الارتباط الخطي

نقول أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً: إذا كان حامل الأول و الثاني متوازيان

$\vec{v}=\vec{AB}$

$\vec{u}=\vec{CD}$

$\vec{v}$ ، $\vec{u}$ مرتبطين خطياً: $(AB)//(CD)$

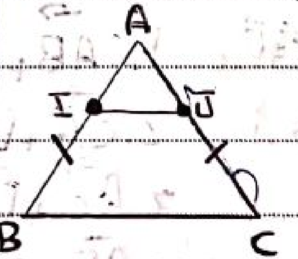
• أي أن أحدهما ناتج عن الآخر بضربه بعدد حقيقي

$\vec{v}=K\vec{u}$

من أجل: $K=1$ يصبح $\vec{v}=\vec{u}$

⇐ الأشعة المتساوية مرتبطة خطياً

مثال: في الشكل الجانبي:



I نقطة تحقق

$\vec{AI}=\frac{1}{3}\vec{AB}$

$\vec{CJ}=\frac{2}{3}\vec{CA}$

المطلوب: أثبت أن $\vec{IJ}$ و $\vec{BC}$ مرتبطان خطياً؟

$\vec{IJ}=K\vec{BC}$

الحل:

$\vec{IJ}=\vec{IA}+\vec{AJ}$

$=\frac{1}{3}\vec{BA}+\frac{1}{3}\vec{AC}$

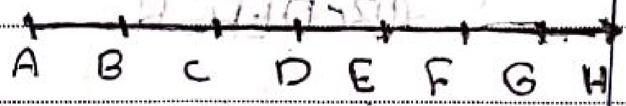
$=\frac{1}{3}(\vec{BA}+\vec{AC})$

$=\frac{1}{3}\vec{BC}$

$\vec{IJ}=\frac{1}{3}\vec{BC}$

⇐ $\vec{IJ}$ و $\vec{BC}$ مرتبطان خطياً

مثال: في الشكل الجانبي:



• أحسب:

1. $\frac{\vec{AB}}{\vec{CG}}=\frac{1}{4} \Rightarrow \vec{AB}=\frac{1}{4}\vec{CG}$

2. $\frac{\vec{BC}}{\vec{HF}}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{BC}=-\frac{1}{2}\vec{HF}$

3. $\frac{\vec{DB}}{\vec{EH}}=-\frac{2}{4} \Rightarrow \vec{DB}=-\frac{2}{4}\vec{EH}$

حالات الارتباط الخطي

• إذا كان: $\vec{u}=\vec{AB}$

$\vec{v}=\vec{CD}$

وكان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً

⇐ هندسياً $(AB)//(CD)$

يفيد الارتباط الخطي بإثبات توازي مستقيمان

• $\vec{u}=\vec{AB}$ ، $\vec{v}=\vec{BC}$

وكان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً و

أيضاً $(AB)//(BC)$

المتقيمان AB ، BC متوازيان

/ /

وبينها نقطة مشتركة أي النقاط :
A ، B ، C على استقامة واحدة.

يفيد الارتباط الخطي في إثبات وقوع أو عدم وقوع النقاط على استقامة واحدة
أي: يفيدني بمعرفة أن النقاط تشكل مستوي أو لا تشكل مستوي.

إذا كانت النقاط A ، B ، C على استقامة واحدة => لا تشكل مستوي

إذا كانت A ، B ، C ليست على استقامة واحدة => تشكل مستوي

إذا كان الشعاع $\vec{u}$ بدايته A ويساوي شعاع آخر $\vec{a}$ فإنه توجد نقطة وحيدة M تحقق: $\vec{a}=\vec{u}=\vec{AM}$

وحيدة

نتذكر: ABC مثلث و G مركز ثقل المثلث

من الصف العاشر

$\Rightarrow \vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

مثال: ص 14

مكعب ABCDEFGH ، I منتصف الحرف [FG]

1 عيّن النقطة M التي تحقق العلاقة (1) الآتية:

$$\vec{AB}+\vec{AE}+\vec{FI}=\vec{AM}$$

الحل: $l_1=\vec{AF}+\vec{FI}=\vec{AI} \Rightarrow \vec{AI}=\vec{AM}$

إذاً النقطة M منطبقة على I

2 أثبت صحة العلاقة (2) الآتية:

$$\vec{AB}+\vec{CF}=\vec{AF}+\vec{CB}$$

$l_1=\vec{AB}+\vec{CF}$
$=\vec{DC}+\vec{CF}$
$=\vec{DF}$

$l_2=\vec{AF}+\vec{CB}$
$=\vec{AF}+\vec{DA}$
$\vec{DA}+\vec{AF}=\vec{DF}$

$\Rightarrow l_1=l_2$

مثال: ص 15

ليكن ABCDIJKL متوازي سطوح وليكن G مركز ثقل المثلث BIK

المطلوب:
أثبت أن النقاط D و G و على استقامة واحدة

الحل في الصفحة الأخرى

/ /

مفتاح الحل:
الأشعة مرتبطة لازم نبدأ من علاقة معروفة وصحيحة ونستخدم شال العكسية

الحل: نُدرج D

$\vec{DG} = \lambda \vec{DJ}$

$\vec{GD} + \vec{GB} + \vec{GK} = 0$

$\vec{GD} + \vec{DI} + \vec{GD} + \vec{DB} + \vec{GD} + \vec{DK} = \vec{0}$

$3\vec{GD} + \vec{DI} + \vec{DB} + \vec{DK} = \vec{0}$

نُدرج J

$3\vec{GD} + \vec{DJ} + \vec{JI} + \vec{DJ} + \vec{JB} + \vec{DK}$

$3\vec{GD} + 2\vec{DJ} + \vec{JI} + \vec{JB} + \vec{DK} = 0$

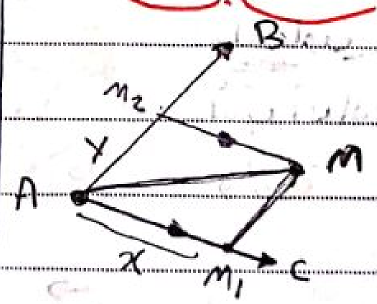
$3\vec{GD} + 2\vec{DJ} + \underbrace{\vec{JA} + \vec{DK}}_{0} = 0$

$3\vec{GD} = -2\vec{DJ}$

$\vec{GD} = -\frac{2}{3}\vec{DJ}$

⇐ النقاط D, G, J على استقامة واحدة

الخاصة المميزة لمستوى في الفراغ.



لتكن لدينا النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة
بسوف تشكل $\vec{AC}, \vec{AB}$ غير مرتبطين خطياً
مهما تكن M من المستوى السابق

$M \in (ABC)$

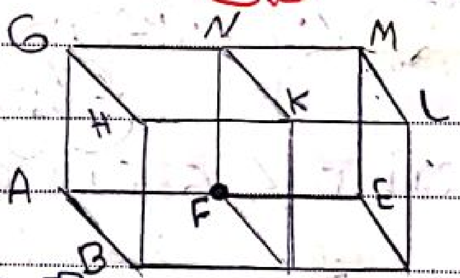
$\Downarrow$

مهما تكن x, y, $\boxed{\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}}$

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

لتكن لدينا $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$
نقول أن الأشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ مرتبطة خطياً إذا وجد نقطة O
حيث: $\vec{u} = \vec{OA}, \vec{v} = \vec{OB}, \vec{w} = \vec{OC}$
حيث كانت النقاط A, B, C, O في نفس المستوى فتكون الأشعة مرتبطة خطياً

مثال:



هل الأشعة: $\vec{NL}, \vec{FC}, \vec{NH}$ مرتبطة خطياً

الحل: • $\vec{NI} = \vec{FD}$ • $\vec{FC}$ • $\vec{NH} = \vec{FB}$

$\vec{FD}, \vec{FC}, \vec{FB}$

⟸ النقاط B, F, D, C تنتمي لنفس المستوي فالأشعة مرتبطة خطياً

مثال: ص 18:

مكعب $ABCDEFGH$ النقطة I منتصف $[BE]$ و J منتصف $[FG]$

أثبت أن الأشعة $\vec{IJ}$ و $\vec{BG}$ و $\vec{EF}$ مرتبطة خطياً

الحل: $\boxed{\vec{U} = \alpha\vec{V} + \beta\vec{W}}$

$\vec{IJ} = \alpha\vec{EF} + \beta\vec{BG}$

• $\vec{IJ} = \vec{IE} + \vec{EF} + \vec{FJ}$

$\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BG} + \vec{GJ}$ (+)

$2\vec{IJ} = 0 + \vec{EF} + \vec{BG}$

$2\vec{IJ} = \vec{EF} + \vec{BG}$

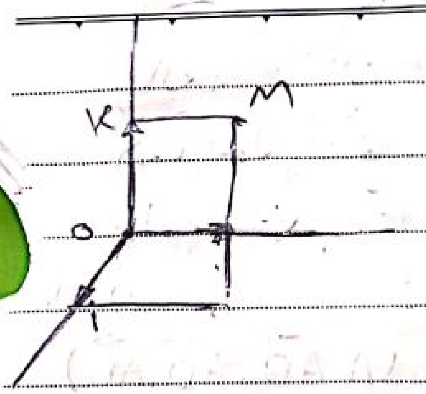
$\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{EF} + \frac{1}{2}\vec{BG}$

⟸ الأشعة مرتبطة خطياً

• **المعلم في الفراغ:**

لتعيين المعلم في الفراغ نحتاج ثلاثة أشعة غير مرتبطة خطياً ونقطة

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



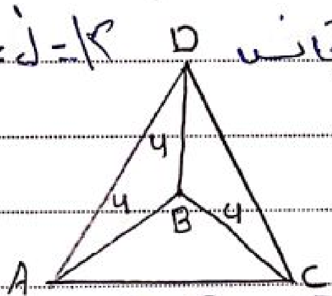
$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ حيث يمكن

إحداثيات M: $M(x, y, z)$

إذا كانت $\vec{i} \perp \vec{j}$ و $\vec{i} \perp \vec{k}$ و $\vec{j} \perp \vec{k}$

⟸ المعلم متجانس $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\|$

مثال:



معلم متجانس $(B, \vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD})$

غير متجانس $(C, \vec{CA}, \vec{CB}, \vec{CD})$

إحداثيات نقطة:

• مبدأ $O(0,0,0)$

• تنتمي لمحور من المحاور الحر على المحور وعلى الباقي أصفار

• تنتمي لمستوي من محورين تركيز على المحورين و الثالث صفر

• تقابل مقر بالجبر تكون على الكل

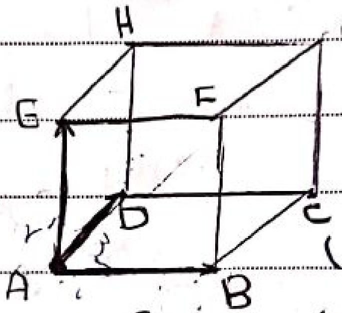
• علاقة شعاعية

/ /

مثال:

مكعب طول ضلعه (4)

ولدينا المعلم: $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$



• أوجد إحداثيات نقاط رؤوس المكعب

الحل:

$A(0,0,0)$

$B(1,0,0)$

$C(1,1,0)$

$D(0,1,0)$

$E(0,0,1)$

$F(1,0,1)$

$H(0,1,1)$

$G(1,1,1)$

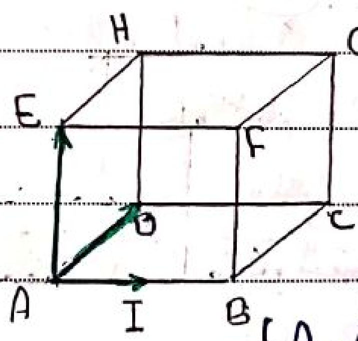
مثال 2:

في الشكل الجانبي

$AB=4$

$AE=2$

$AD=2$



لدينا المعلم: $(A, \vec{AI}, \vec{AD}, \vec{AE})$

• أوجد إحداثيات النقاط الكل: الحل:

$A(0,0,0)$ $H(0,1,1)$

$E(0,0,1)$ $G(0,0,0)$

$D(0,1,0)$ $F(0,0,2)$

$B(1,0,0)$ $C(0,2,0)$

مركبات شعاع في معلم

في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$A(x_A, y_A, z_A)$

$B(x_B, y_B, z_B)$

حساب مركبات شعاع

مركبات $\vec{AB}\begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix}$

مثال: لدينا النقاط:

$A(1,3,5)$

$B(-2,7,3)$

أوجد مركبات الشعاع $\vec{AB}$

$$\vec{AB}\begin{array}{cc} B & A \end{array}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

مثال : لتكن : $A(1,3,5)$

$B(-2,1,1)$ $\quad C(3,2,1)$

[1] أثبت أن النقاط ليست على استقامة واحدة (تشكل مستوي).

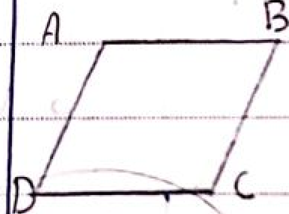
$$\vec{AB}\begin{bmatrix}-2-1\\1-3\\1-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-2\\-4\end{bmatrix}$$

$$\vec{AC}\begin{bmatrix}3-1\\2-3\\1-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\-4\end{bmatrix}$$

$\frac{-3}{2}\neq\frac{-2}{-1}$ المركبات غير متناسبة

فالأشعة غير مرتبطة خطياً فهي تشكل مستوي (ABC).

[2] أوجد إحداثيات D التي تجعل الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع.



بفرض $D(x,y,z)$

$ABCD$ متوازي أضلاع

$$\vec{AB}=\vec{DC}$$

$$\begin{bmatrix}-3\\-2\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-3\\y-2\\z-1\end{bmatrix}$$

$-3=x-3$ ① $\quad x=0$

$-2=y-2$ ② $\quad y=0$

$-4=z-1$ ③ $\quad z=-4+1=-3$

$D(0,0,-3)$

إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة I

$$X_I=\frac{X_A+X_B}{2}$$

$$Y_I=\frac{Y_A+Y_B}{2}$$

$$Z_I=\frac{Z_A+Z_B}{2}$$

مثال : لتكن النقاط :

$A(3,1,5)$, $B(1,5,5)$

أوجد إحداثيات I منتصف $[AB]$

$$X_I=\frac{3+1}{2}=2$$

$$Y_I=\frac{1+5}{2}=3$$

$$Z_I=\frac{5+5}{2}=5$$

(الإرتباط الخطي في معلم)

$\vec{u}\begin{bmatrix}x_u\\y_u\\z_u\end{bmatrix}$ $\quad \vec{v}=\begin{bmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{bmatrix}$

$\vec{u}=k.\vec{v}$

$\begin{bmatrix}x_u\\y_u\\z_u\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}x_v\\x_v\\z_v\end{bmatrix}$ (هو مطلوب للاستنتاج)

$\begin{bmatrix}x_u\\y_u\\z_u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx_v\\ky_v\\kz_v\end{bmatrix}$

$x_u=kx_v \;,\; y_u=ky_v$

$z_u=kz_v$

$$\boxed{\frac{x_u}{x_v}=\frac{y_u}{y_v}=\frac{z_u}{z_v}}$$ (مهم)

(مواصفات حساب الأشعة)

$\vec{u}=(x_u, y_u, z_u)$

$\vec{v}=(x_v, y_v, z_v)$

$\bullet\ \vec{u}+\vec{v}=\begin{bmatrix}x_u\\y_u\\z_u\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}x_u+x_v\\y_u+y_v\\z_u+z_v\end{bmatrix}$

$\bullet\ \lambda\vec{u}=\lambda\begin{bmatrix}x_u\\y_u\\z_u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda x_u\\\lambda y_u\\\lambda z_u\end{bmatrix}$

$\bullet\ \vec{u}=\vec{v}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}x_u\\y_u\\z_u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{bmatrix}$

$\Rightarrow x_u=x_v$

$\Rightarrow y_u=y_v$

$\Rightarrow z_u=z_v$

(احداثيات مركز ثقل المثلث)

$A(x_A, y_A, z_A)$

$B(x_B, y_B, z_B)$

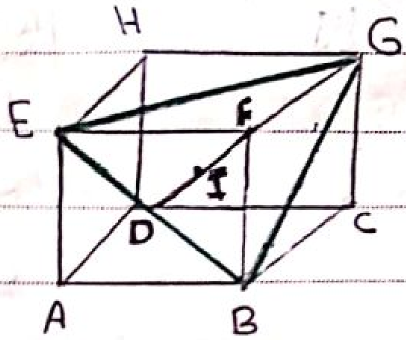
$C(\ _c, y_c, z_c)$

$$X_G=\frac{x_A+x_B+y_c}{3}$$

$$Y_G=\frac{y_A+y_B+y_c}{3}$$

$$Z_G=\frac{z_A+z_B+z_c}{3}$$

مثال :



في الشكل الجانبي لدينا المعلم :

$(D, \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$

أثبت أنّ النقاط F ، I ، D تقع على استقامة واحدة ...

$D(0,0,0)$

$F(1,1,1)$ $\quad I(x,y,z)$

$E(1,0,1)$ $\quad B(1,1,0)$

$G(0,1,1)$

$I(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5})$

$\vec{DI}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $\vec{DF}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

الأشعة متجانسة $\frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{\frac{2}{3}}{1}$

$\Leftarrow$ الأشعة مرتبطة خطياً ومنها تقع على استقامة واحدة

تدريب ص16 :

السؤال الأول

$ABCDEFGH$ مكعب I منتصف $[EF]$ ، J منتصف $[FG]$

1 بيّن إذا كانت النقطة M المعرفة بالمساواة الشعاعية المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب، وعلل إجابتك ...

① $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{DH}$

$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AE}$

$\vec{AM} = \vec{AF}$

$\Leftarrow$ M تنطبق على F

② $\vec{AM} = \vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$

$\vec{AM} = \vec{AE} + \vec{EF} + \vec{FG}$ / $\vec{AF} + \vec{FG}$

$= \vec{AE} + \vec{EG}$

$\vec{AM} = \vec{AG}$

$\Leftarrow$ M تنطبق على G

③ $\vec{AM} = \vec{FE} + \vec{DG}$

$\vec{AM} = \vec{FE} + \vec{AF}$

حيث $\vec{DG} = \vec{AF}$

$\vec{AM} = \vec{AE}$

$\Leftarrow$ M تنطبق على E

عندما نجمع شعاعين لهما نفس البداية فالناتج هو قطر متوازي الأضلاع الذي يبدأ بالحرف المشترك بينهما أو ضعفي نصف القطر

② $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HJ}$

$\overrightarrow{AN}=\underbrace{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}}_{\text{متوازي أضلاع}}+\overrightarrow{HJ}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HJ}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AJ}$

⇐ N تنطبق على J

③ $\overrightarrow{AN}=\underbrace{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}}_{\text{سلسال}}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EI}$

$\overrightarrow{AN}=\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}}_{\text{سلسال}}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EI}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AF}+\underbrace{\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EI}}_{\text{سلسال}}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FI}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AI}$

⇐ N تنطبق على I

[3] في كل من الحالات الآتية عبر عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاع واحد (قد يكون مضروباً بعدد) وذلك باستخدام نقاط من الشكل حصراً

① $\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{BJ}$

② $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}$

③ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AI}$ قطر متوازي أضلاع

④ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AK}$

⇐ حيث K يجعل الشكل $AEKG$ متوازي أضلاع وبالتالي M لا تقع على أحد رؤوس المكعب.

⑤ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\underset{B}{\underset{\downarrow}{\overrightarrow{AG}}}+\underset{A}{\underset{\downarrow}{\overrightarrow{HB}}})$

$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB}$

$2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HA}$

$2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$

⇐ M تنطبق على B

[2] في كل من الحالات الآتية حدد موقع النقطة N المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة

① $\overrightarrow{AN}=\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}}_{\text{متوازي أضلاع}}+\overrightarrow{FG}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FJ}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AJ}$

⇐ N تنطبق على J

السؤال الثاني:

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح

1) أثبت صحة المساواة الشعاعية في كل من الحالات الآتية:

① $\vec{EA}+\vec{EF}+\vec{BE}=\vec{0}$

$l_1=\underbrace{\vec{EA}+\vec{EF}}_{\text{متوازي أضلاع}}+\vec{BF}$

$=\vec{EB}+\vec{BF}=\vec{0}=l_2$

② $\vec{ED}+\vec{CF}=\vec{0}$

$l_1=\vec{ED}+\vec{CF}=\vec{FC}+\vec{CF}=\vec{0}=l_2$

③ $\vec{CD}+\vec{CG}+\vec{EB}=\vec{0}$

$l_1=\vec{CD}+\vec{CG}+\vec{EB}$

$=\vec{CH}+\vec{EB}=\vec{BE}+\vec{EB}=\vec{0}=l_2$

④ $\vec{FE}+\vec{FB}+\vec{FG}=\vec{FD}$

2) وضع النقاط P و Q و R بحيث يكون:

① $\vec{AP}=\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AD}+\frac{1}{2}\vec{AE}$

$\vec{AP}=\vec{AB}+\frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{AE})$

$\vec{AP}=\vec{AB}+\frac{1}{2}(\vec{AH})$

$\vec{AP}=\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BG}$

$\Leftarrow P$ منتصف BG

② $\vec{AQ}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AD}+\vec{AE}$

$\vec{AQ}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AD})+\vec{AE}$

$\vec{AQ}=\frac{1}{2}(\vec{AC})+\vec{AE}$

$\vec{AQ}=\vec{AE}+\frac{1}{2}\vec{AC}$

$\vec{AQ}=\vec{AE}+\frac{1}{2}\vec{EG}$

$\Leftarrow Q$ منتصف EG

③ $\vec{CR}=\frac{1}{2}\vec{AE}-\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{AD}$

$\vec{CR}=\frac{1}{2}(\vec{AE}-\vec{AD})-\vec{AB}$

$\vec{CR}=\frac{1}{2}(\vec{AE}+\vec{DA})-\vec{AB}$

$\vec{CR}=\frac{1}{2}(\vec{DA}+\vec{AE})-\vec{AB}$

$\vec{CR}=\frac{1}{2}(\vec{DE})-\vec{AB}$

$\vec{CR}=\frac{1}{2}\vec{DE}+\vec{BA}$

$\vec{CR}=\vec{CD}+\frac{1}{2}\vec{DE}$

$\Leftarrow R$ منتصف DE

3) عيّن شعاعاً يساوي $\vec{DC}+\vec{BD}+\vec{BF}$ وأثبت أن هذا الشعاع يرتبط خطياً بالشعاع $\vec{AH}$

$\vec{DC}+\vec{BD}+\vec{BF}$

$=\vec{BD}+\vec{DC}+\vec{BF}$

$=\vec{BC}+\vec{BF}$

$\vec{BG}=\vec{AH}$

بما أن الشعاع $\vec{AH}$ و $\vec{BG}$ متساويان فإنهما مرتبطان خطياً

إذا كان المثلث معلوم الأضلاع وطلب إثبات أنه قائم نستخدم عكس فيثاغورث

4. أوجد شعاعاً يساوي $\vec{FE}+\vec{FG}+\vec{FB}$ وأثبت أن هذا الشعاع مرتبط خطياً بالشعاع $\vec{DF}$

$\vec{FE}+\vec{FG}+\vec{FB}$

$=\vec{FH}+\vec{FB}$

$=\vec{FH}+\vec{HD}=\vec{FD}=-\vec{DF}$

فالشعاعان مرتبطان خطياً

نظيم شعاع والمسافة بين نقطتين في معلم متجانس

ليكن $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متجانس

مركبات $\vec{U}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

إحداثيات

$A(x_A,y_A,z_A)$

$B(x_B,y_B,z_B)$

قانون النظيم

$$\|\vec{U}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

• المسافة بين B , A

هي نظيم $\|\vec{AB}\|$

$$\vec{AB}\begin{bmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{bmatrix}$$

$$\|\vec{AB}\|=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B+y_A)^2+(z_B+z_A)^2}$$

مثال:

في معلم متجانس:

$\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

$A(4,-1,3)$ $\quad$ $B(2,3,2)$

المطلوب:

أحسب النظيم الـ $\|\vec{U}\|$

والمسافة بين AB

الحل:

$u\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}$

$$\|\vec{U}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$=\sqrt{9+4+1}$$
$$=\sqrt{14}$$

$$\vec{AB}=\begin{bmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-4\\3+1\\2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\\-1\end{bmatrix}$$

$$\|\vec{AB}\|=AB=\sqrt{4+16+1}=\sqrt{21}$$

معادلة الكرة

هي مجموعة من النقاط $M(x,y,z)$ في الفراغ تبعد عن نقطة $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ بعد ثابت r نصف قطر

$M\Omega = r \Rightarrow M\Omega^2 = r^2$

معادلة الكرة

$$\boxed{w = (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = r^2}$$

مثال: أكتب معادلة كرة مركزها $\Omega(2,-1,5)$ ونصف القطر $r = 4$

الحل: $M(x, y, z)$

$w = (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 16$

أحيانا ما يعطينا المركز ونصف القطر علينا حساب

مثال: أكتب معادلة الكرة التي قطرها AB

$A(1,3,2)$ $B(2,5,1)$

الحل:

$\Omega = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

$\Omega = \left(\frac{3}{2}, 4, \frac{3}{2}\right)$

$r = \frac{AB}{2}$

$r = \sqrt{\frac{1+4+1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ نربع

$w = (x - \frac{3}{2})^2 + (y-4)^2 + (z - \frac{3}{2})^2 = \frac{6}{4}$

المستوي المحوري

هو مجموعة نقاط من الفراغ $M(x,y,z)$ تحقق

$MA = MB \Rightarrow MA^2 = MB^2$

مثال: أكتب معادلة المستوى المحوري

$A(1,3,2)$

$B(1,7,5)$

الحل: هو مجموعة $M(x,y,z)$

$AM = BM \Rightarrow AM^2 = BM^2$

$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = (x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-3)^2$

$\cancel{x^2} \cancel{-2x} \cancel{+1} + \cancel{y^2} - 6y + 9 + \cancel{z^2} - 4z + 4$

$= \cancel{x^2} \cancel{-2x} \cancel{+1} + \cancel{y^2} - 14y + 49$

$+ \cancel{z^2} - 6z + 9$

معادلة المستوي المحوري $8y + 2z - 45 = 0$

مركز الأبعاد المتناسبة

تعريف: نقول أن G م.أ.م لـ: (A,α) و (B,β) و (C,γ)

إذا تحقق: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

$\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}+\gamma\vec{GC}$

قانون مركز الأبعاد

مثال: حيث α, β, γ

ليكون G م.أ.م لـ:

$(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)$

$3\vec{GB}+2\vec{AG}=0$

الحل: لازم نوصله لـ:

$\alpha GA+\beta GB+\gamma GC=0$

$3AG+3GB+2AG=0$

$5AG+3GB+0GC=0$

$-5GA+3GB+0GC=0$

$(A,-5), (B,3), (C,0)$

• خواص مركز الأبعاد

$\boxed{1}$ إذا كانت G م.أ.م لـ $(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)$

$\Rightarrow \alpha GA+\beta GB+\gamma GC=0$

$\forall M\in R^3$ نقرأ مهما يكن M من المستوي

$\Rightarrow \alpha MA+\beta MB+\gamma MC=(\alpha+\beta+\gamma)MG$

$\boxed{2}$ مركز الأبعاد كخاصية التجانس

إذا كان G م.أ.م لـ: $(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)$

$\Rightarrow$ G م.أ.م لـ: $(A,k\alpha)$ $(B,k\beta)$ $(C,k\gamma)$

$\boxed{3}$ إذا كان $AG=\alpha AB$

G م.أ.م لـ: (B,α) $(A,1-\alpha)$

مثال: إذا كان $\vec{AB} = 5\vec{AC}$

فإن G م.أ.م لـ:

الحل: $(C,5)(A,-4)$

مثال 2: إذا كان $AC = \frac{3}{5} AF$

فإن G م.أ.م لـ:

الحل: $(F,3)(A,2)$

تمرين $\frac{2}{31}$

عيّن مركز ثقل المثلث ABC

لـ:

$A(-4,-1,2)$

$B(-2,1,0)$

$C(6,3,-5)$

الحل:

$X_G = \frac{0}{3} = 0$

$Y_G = \frac{3}{3} = 1$

$Z_G = \frac{-3}{3} = -1$

$G(0,1,-1)$

الخاصية التجميعية: هامة

• إذا كان G م.أ.م لـ:

$(B,\beta), (A,\alpha)$

$(D,\delta), (C,\gamma)$

• وكان I م.أ.م لـ:

$(B,\beta), (A,\alpha)$

• وكان J م.أ.م لـ:

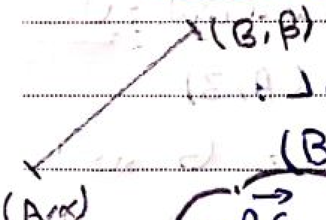
$(D,\delta), (C,\gamma)$

⇐ فإن G م.أ.م لـ:

$(I, \alpha+\beta)$

$(J, \gamma+\delta)$

علاقة إنشاء مركز الأبعاد



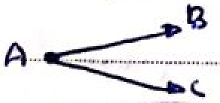
• إذا كان G م.أ.م لـ:

$(B,\beta), (A,\alpha)$

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$$

• إذا كان G م.أ.م لـ:

$(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)$



$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AC}$$

3. إذا كانت G م.أ.م

لـ: $A(x_A, y_A, z_A)$ (A,α)

$B(x_B, y_B, z_B)$ (B,β)

$C(x_C, y_C, z_C)$ (C,γ)

⇐ إحداثيات G: $G(x_G, y_G, z_G)$

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

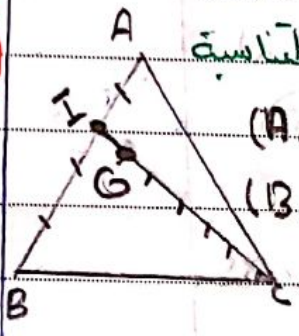
$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

مثال: ليكن المثلث ABC فيه:

$(C,1)$ $(B,2)$ $(A,3)$

أنشئ G مركز الأبعاد المتناسبة



الحل: I م.أ.م لـ: $(A,3)$ $(B,2)$

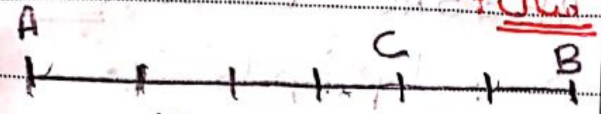
$$AI = \frac{2}{5} AB$$

$(I,5)$

G م.أ.م لـ: $(I,5)$, $(C,1)$

$$IG = \frac{1}{6} IC$$

مثال:



عيّن (A,α) , (B,β) ليكون G مركز أبعاد متناسبة

الحل: $\alpha \vec{CA} + \beta \vec{CB} = \vec{0}$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{-4}{2}$$

$$2\vec{CA} + 4\vec{CB} = \vec{0}$$

C م.أ.م لـ: $(A,2)$ $(B,4)$

G م.أ.م لـ: $(A,1)$ $(B,2)$

مثال ص 30 حلول في الكتاب

مكعب ABCDEFGH، أثبت أن النقطة K المعرفة بالعلاقة:

$$2\vec{AK} = \vec{CB} + \vec{CA} + 3\vec{AG}$$

تقع في المستوي (BCG)