الوحدة الأولى: النسب المثلثية لزاوية حادة.

أولاً: النسب والتناسب

1. التناسب: هو مساواة بين نسبتين أو اكثر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ حيث الحدود الأربعة غير معدومة.
2. خواص التناسب:
   1. خاصية الضرب التقاطعي أو جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين: تستخدم هذه القاعدة بوجود أحد الحدود الأربعة مجهولاً أو لحساب مجهول موجود في حدين وعلم حدين آخرين.
   2. إذا ثبتنا البسوط وجمعنا أو طرحنا فنحصل على تناسب جيد.
   3. إذا ثبتنا المقامات وضفناها أو طرحناها إلى البسوط فنحصل على تناسب جيد.

شروط تطبيق القاعدة $(2)+(3)$

1) وجود مجهولين في نسبة واحدة.
2) وجود علامة جمع أو طرح بينهما
3) إذا بادلنا بين الوسطين أو بين الطرفين نحصل على نسب متناسبة جديدة.
4) إذا قلبنا النسبتين نحصل على تناسب جديد.

مثال 1: ABC مثلث فيه $\hat{C}$ تساوي $45°$ و $\frac{\hat{A}}{\hat{B}}=\frac{1}{2}$

المطلوب:

1) احسب $\hat{A}+\hat{B}$
2) احسب قياس الزاويتين $\hat{A}$ و $\hat{B}$.

الحل:

1) $\hat{C}=45°$: احسب قانون مجموع زوايا المثلث
$$\hat{A}+\hat{B}=180°-45°=135° \Leftrightarrow 180°$$
2) $\hat{A}+\hat{B}=135 \Leftarrow \frac{\hat{A}}{\hat{B}}=\frac{1}{2}$

نثبت البسوط ونضيفها إلى المقامات

$$\frac{\hat{A}}{\hat{A}+\hat{B}}=\frac{1}{1+2} => \frac{\hat{A}}{135°}=\frac{1}{3}$$
$$\hat{A}=\frac{135°\times 1}{3} => \hat{A}=45°$$
$$\hat{A}+\hat{B}=135°$$
$$\hat{B}=135°-45°=90°$$

مثال2: إذا كان $\frac{b}{3}=\frac{a}{2}$ وكان $a+b=15$ احسب a و b

الحل:

إذا بادلنا بالنسب نجد أن $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$

نثبت المقامات ونضيفها إلى البسوط.

$$\frac{a+b}{b}=\frac{2+3}{3} => \frac{15}{b}=\frac{5}{3}$$
$$b=\frac{3\times 15}{3} => b=9$$

إذاً $a=6$

مثال3: يزيد عمر خالد على عمر أحمد بمقدار 3 سنوات إذا علمت أن نسبة عمريهما $\frac{5}{4}$ احسب عمر كل منهما.

الحل:

نفرض عمر أحمد x إذاً خالد $x+3$

نضرب طرفين بالوسطين $\frac{x+3}{x}=\frac{5}{4}$

$$4(x+3)=5x$$
$$4x+12=5x => -x=-12$$
$$\Rightarrow \underbrace{x=12}_{\text{عمر أحمد}} \Rightarrow \underbrace{x+3=1}_{\text{عمر خالد}}$$

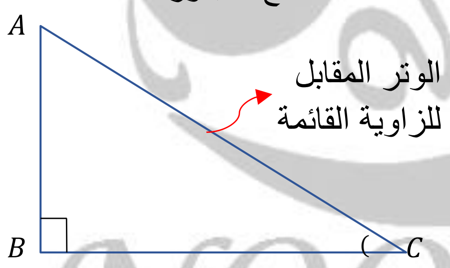
ثانياً: النسب المثلثية

أولاً: النسب المثلثية تستخدم في المثلث القائم ولدينا ثلاثة نسب:

$$\sin(\theta)=\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$$ جيب

$$\cos(\theta)=\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$$ تجيب

$$\tan(\theta)=\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$$ ظل



بالنسبة للزاوية $\hat{C}$ ⇔ يكون AB مقابل ويكون BC مجاور.

❖ تستخدم النسب المثلثية

1) لحساب النسب المثلثية
2) لحساب أطوال أضلاع المثلث القائم.

❖ خواص النسب المثلثة

- دوماً موجبة

- ليس لها واحدة
- $0 < \sin(\theta) < 1$
- $0 < \cos(\theta) < 1$

تتراوح قيم الsin و cos بين الصفر والعدد واحد لأن الزاوية حادة.

- $\sin(90° - \theta) = \cos(\theta)$

ال sin تساوي cos عندما يكون مجموع الزاويتان $90°$ أي متتامتان.

عند طلب حساب ضلع مشترك بين مثلثين قائمين أو عند إثبات علاقة نستخدم تعريف

$\sin(\theta) = \sin(\theta)$ اما

$\cos(\theta) = \cos(\theta)$ أو

$\tan(\theta) = \tan(\theta)$ أو

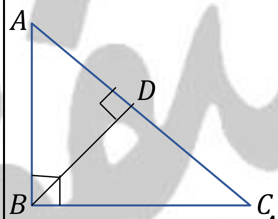
لنفس الزاوية المشتركة بين المثلثين.

مثال1: في الشكل المرسوم جانباً ABC مثلث قائم في B و

$BC \perp AC$, $AB = \sqrt{72}$

$BC = \sqrt{50} + \sqrt{2}$

1) أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين ثم أثبت أن $AC = 12$.
2) احسب $\sin(C\hat{A}B)$من المثلثين القائمين ABC ADB واستنتج طول BD.



الحل:

1) حتى نثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين يجب أن نثبت أن $AB = BC$

$$AB = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{50} + \sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

نجد أن $AB = BC$

إذاً المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

طول AC يحسب حسب مبرهنة فيثاغورث بالمثلث ABC .

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow$$

$$AC^2 = 72 + 72 = 144 \Rightarrow AC = 12\ cm$$

2) $\sin_{ABC}(C\hat{A}B) = \frac{BC}{AC}$

لاستنتاج طول BD $\sin_{ADB}(B\hat{A}D) = \frac{BD}{AB}$

نستخدم تعريف للزاوية $\hat{A}$

$$\sin_{ADB}(B\hat{A}D) = \sin_{ABC}(C\hat{A}B)$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{6\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{12}$$

$$BD = \frac{6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}}{12} = \frac{72}{12} = 6$$

ملاحظة: لإثبات المثلث أن نوعه قائم مع وجود أطوال أضلاعه نستخدم مبرهنة عكس مبرهنة فيثاغورث
دون وجود أضلاع دائرة مارة بروؤسه وأحد أضلاعه قطر فيها.

لحساب أطوال أضلاع المثلث القائم

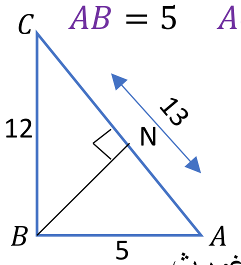
⇦ بوجود ضلعين وثالث مطلوب نستخدم فيثاغورث

⇦ بوجود ضلع ونسبة مثلثية نستخدم تعريف النسب المثلثية.

مثال2: من الشكل المرسوم جانباً ABC مثلث فيه

$AB = 5$ $AC = 13$ $BC = 12$

و $CA \perp BN$ والمطلوب:



1) أثبت أن المثلث ABC قائم.
2) احسب $\sin(C)$ و $\tan(A)$.
3) بالاستفادة من $\sin(\hat{C})$ احسب طول BN.

1) الحل: حسب مبرهنة عكس فيثاغورث

$$AC^2 \stackrel{?}{=} AB^2 + BC^2$$

$$(13)^2 \stackrel{?}{=} (5)^2 + (12)^2 =>$$

$$169 = 25 + 144$$

$$169 = 169$$

محققة فالمثلث قائم في B.

2) $\sin(C) = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$

$$\tan(\hat{A}) = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{5}$$

3) $\sin_{ABC}(C) = \frac{AB}{AC} = \sin_{CNB}(C) = \frac{BN}{BC}$

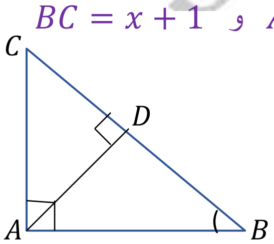
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{BC}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{BN}{12} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}$$

$$BN = \frac{60}{13}$$

مثال3: ABC مثلث قائم في A وفيه $AD \perp CB$

$AB = 5$ و $AC = x$ و $BC = x + 1$



1) احسب قيمة x .
2) احسب $\cos(B)$ من المثلث ABD
3) احسب $\cos(B)$ من المثلث ABC واستنتج أن $AB^2 = CB \times BD$

الحل: حسب مبرهنة فيثاغورث بالمثلث ABC

1) $BC^2 = AC^2 + AB^2$

$$(x+1)^2 = x^2 + 25 \Rightarrow$$
$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 25 \Rightarrow 2x = 24$$
$$x = 12$$

2) $\underset{ABD}{\cos(B)} = \frac{BD}{AB}$

3) $\underset{ABC}{\cos(B)} = \frac{AB}{BC}$

نعلم أن الزاوية $\hat{B}$ مشتركة بين المثلثين ABD و ABC

$$\underset{ABD}{\cos(\hat{B})} = \frac{BD}{AB} = \underset{ABC}{\cos(B)} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB^2 = BD \times CB$$

ثالثاً: (علاقتان مهمتان بالنسب المثلثية)

- العلاقة الأولى:

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

- العلاقة الثانية:

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

من العلاقة الأولى نستنتج أن:

$$\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$$
$$\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$$

من العلاقة الثانية:

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$
$$\sin(\theta) = \tan(\theta)\,.\cos(\theta)$$
$$\cos(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\tan(\theta)}$$

تستخدم هذه العلاقات لإيجاد قيم $\sin$ أو $\cos$ أو $\tan$ بوجود واحدة منهم.

مثال1:

إذا كان $\cos(\hat{A}) = \frac{3}{5}$ **والمطلوب:**

1) احسب $\sin(A)$, $\tan(\theta)$

2) إذا كان المثلث ABC قائم في B وكان $AC = 10$ احسب كلاً من BC و AB

الحل:

1) $\cos(\hat{A}) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos(A) = \frac{9}{25}$

$$\sin^2(A) = 1 - \cos^2(A)$$

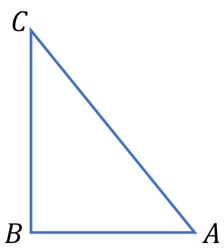
$$= 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\sin(A) = \frac{4}{5}$$

$$\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

---

2) $AC = 10$ وتر المثلث القائم



بالنسبة إلى الزاوية A

$$\sin(\hat{A}) = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{BC}{10} = \frac{4}{5}$$

$$BC = \frac{10 \times 4}{5} = 8$$

$$\cos(\hat{A}) = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{AB}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow AB = \frac{3 \times 10}{5} = 6$$

مثال2: مثلث قائم في A و $\tan(\hat{B}) = \frac{3}{4}$ احسب كلاً من $\sin(B)$ و $\cos(B)$

الحل:

$$\tan^2(\hat{B}) = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \frac{\sin^2(B)}{\cos^2(B)} = \frac{9}{16}$$

نثبت المقامات ونضيفها إلى البسوط.

$$\frac{\sin^2(B) + \cos^2(B)}{\cos^2(B)} = \frac{9+16}{16}$$

$$\frac{1}{\cos^2(B)} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2(B) = \frac{16}{25}$$

$$\cos(B) = \frac{4}{5}$$

$$\sin(B) = \tan(B) + \cos(B)$$

$$\sin(B) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

رابعاً: النسب المثلثية لزوايا شهيرة.

θ	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$

ملاحظات:

☆ الضلع المقابل لزاوية $30°$ يساوي نصف طول الوتر في المثلث القائم.

☆ الوتر يساوي ضعفين الضلع المقابل للزاوية $30°$

☆ المتوسط المتعلق بالوتر في المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر.

☆ تفيد الزوايا الشهيرة في حساب أطوال أضلاع بالمثلث القائم.

☆ طول الارتفاع بالمثلث المتساوي الاضلاع

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}\times a \rightarrow \text{طول ضلع المثلث}$$

☆ طول قطر المربع بوجود طول ضلع

$$\text{طول قطر}=\sqrt{2}\times a \rightarrow \text{طول ضلع}$$

$$\text{طول ضلع المربع}=\frac{\text{طول قطر مربع}}{\sqrt{2}}$$

☆ المتوسط هو نفسه الارتفاع ونفسه المنصف ومحدد بالمثلث المتساوي الاضلاع.

☆ نقطة تلاقي المحاور بالمثلث هي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث.

☆ للمثلث متساوي الاضلاع ثلاثة محاور تناظرية.

☆ لإثبات أن المثلث أنه متساوي الساقين يجب أن نثبت أن زوايا القاعدة متساوية أو ضلعان متساويان.

☆ لإثبات أن المثلث متساوي الاضلاع:

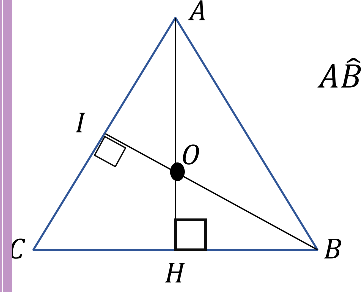
1) نثبت أن زواياه متساوية وتساوي $60°$
2) أطوال أضلاعه متساوية.
3) ضلعان متساويان وإحدى زواياه $60°$.

☆ المثلث القائم ومتساوي الساقين تكون زوايا القاعدة متساوية وتساوي $45°$.

مثال: AH و BI ارتفاعان في المثلث ABC المتساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي 1.

1) ما قياس $A\hat{B}H$ احسب طول AH.
2) استنتج مساحة المثلث ABC.
3) ما قياس الزاوية $O\hat{B}H$ واحسب طول OH .

الحل:



1) قياس الزاوية $A\hat{B}H=60°$

لأن المثلث ABC متساوي الاضلاع.

طول AH زاوية $60°$

زاوية شهيرة ولدينا المثلث AHB قائم في H لأن AH ارتفاع

$$\sin(B)=\frac{AH}{AB}\Rightarrow \sin(60°)=\frac{AH}{1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{AH}{1}\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}}{2}\ cm$$

2) مساحة المثلث ABC

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=S=\frac{\sqrt{3}}{4}\ cm^2$$

3) قياس الزاوية $O\hat{B}H$ تساوي $30°$ لأن IB منصف للزاوية $A\hat{B}C$.

لحساب OH بالمثلث القائم OBH

$HB=\frac{1}{2}$ لأن AH متوسط

$$\tan(O\,\hat{B}H)=\frac{OH}{HB}$$

$$\tan(30°)=\frac{OH}{HB}$$

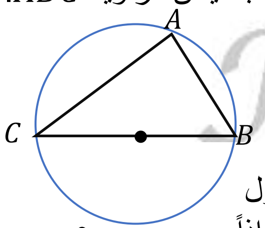
$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{OH}{\frac{1}{2}}\Rightarrow OH=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}$$

$$OH=\frac{1}{2\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{6}\ cm$$

مثال: دائرة أحد أقطارها $[BC]$ طوله 12

1) ما طبيعة المثلث ABC
2) إذا علمت أن BA يساوي 6 أحسب قياس الزاوية $A\hat{B}C$.

الحل:



1) المثلث ABC قائم لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث.
2) الضلع $AB=6$ أي نصف طول الوتر BC أي أن الزاوية $\hat{C}=30$ إذاً حسب مجموع زوايا المثلث $180°$ نجد أن الزاوية $A\hat{B}C=60°$

اختر الإجابة الصحيحة:

1) مربع $ABCD$ طول قطره يساوي $2\sqrt{2}$ فإن طول ضلعه يساوي:

A.	$\sqrt{8}$	**B.**	2	C.	$\sqrt{2}$

2) قيمة المقدار $\sin^2(70)+\cos^2(70) = ...$

A.	2	B.	6	**C.**	1

3) إذا كانت $\sqrt{3}\tan(A) = 1$ فإن قياس $\hat{A}$:

A.	$60°$	**B.**	$30°$	C.	$45°$

4) قيمة x فالتناسب $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}}$ تساوي:

A.	$6\sqrt{2}$	**B.**	6	C.	$3\sqrt{2}$

5) إذا كان $\cos(40) = \sin(\theta)$ فإن θ قياسها:

A.	$50°$	B.	$60°$	C.	$70°$

6) عدد محاور التناظر للمثلث المتساوي الأضلاع:

A.	3	B.	2	C.	1

7) إذا كان ABC مثلث قائم في B و $\hat{A} \neq \hat{C}$:

A.	$\tan(C) = 1$
B.	$\sin(C) = \cos(B)$
C.	$\sin(C) = \cos(A)$

8) إذا كانت x زاوية حادة $\sin(x) = \frac{1}{2}$ فإن $\cos(x)$

A.	$\sqrt{3}$	**B.**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	C.	$\frac{1}{2}$

9) ABC مثلث قائم في A مرسوم في الدائرة نصف قطرها 5 فإن طول الوتر BC يساوي:

A.	10	B.	5	C.	اصغر من 10

10) إذا كانت $\hat{x}$ قياس الزاوية الحادة $\sin(x) = \frac{3}{5}$ فإن:

A.	$\frac{4}{5}$	B.	$\frac{5}{4}$	C.	$\frac{3}{4}$

11) أحد القيم التالية لا تصلح أن تكون قيمة لـsin زاوية حادة:

A.	$\frac{1}{2}$	B.	$\frac{3}{4}$	**C.**	$\frac{4}{3}$

ضع كلمة صح أو كلمة غلط أمام العبارات التالية:

1) قياس زاوية حادة في المثلث القائم ومتساوي الساقين $30°$
2) النسب المثلثية $\sin(50°) = \cos(40°)$
3) إذا كانت الزاوية $\hat{A}$ تحقق $90 > \hat{A} > 0$ فإن $0 < \sin(\hat{A}) < 1$
4) $\cos(80°) = \sin(20°)$
5) قيمة x في التناسب $\frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{x}{\sqrt{2}}$ تساوي 2
6) مساحة دائرة نصف قطرها $3cm$ يساوي $6\pi\ cm^2$
7) إن $\sin(\hat{x}) = \frac{1}{2}$ فإن $x = 30°$
8) إذا كان $\cos(x) = \frac{3}{5}$ فإن $\sin(x) = \frac{4}{5}$
9) إذا كان $\tan(x) = \frac{3}{4}$ وكان $\cos(x) = \frac{4}{5}$ فإن $\sin(x) = \frac{3}{5}$
10) النسب المثلثية موجبة دوماً.
11) النسب المثلثية تتراوح قيمها بين الصفر والواحد
12) $\tan(C) = 1$ فإن قياس $\hat{C} = 45°$
13) مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 2 فإن ارتفاعه $h = \sqrt{3}\ cm$
14) مربع طول ضلعه 3 فإن طول قطره يساوي $3\sqrt{2}$
15) العلاقة $\sin(x) = \tan(x) \times \cos(x)$

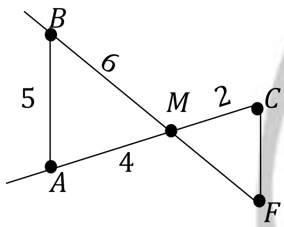
ثانياً: مبرهنة النسب الثلاث

1. مبرهنة النسب الثلاث:

إذا وجد مستقيمان متوازيان ومستقيمان متقاطعان كانت النسب الثلاث.

⇦ تفيد مبرهنة النسب لإيجاد أطوال أضلاع في المثلثات

أمثلة: في الشكل المرسوم جانباً $(CF) \parallel (AB)$ و $BM = 6$ والمطلوب اكتب النسب الثلاث في المثلثين AMB و CMF احسب طول كل من MF و FC



الحل:

1) MAB
MCF

نأخذ النسب الثلاث حسب مبرهنة النسب الثلاث.

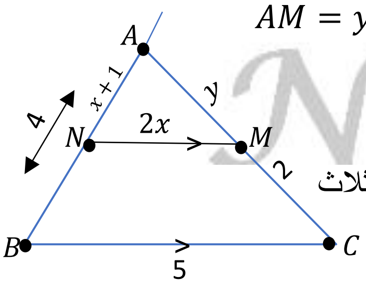
$$\frac{MC}{MA} = \frac{MF}{MB} = \frac{CF}{AB}$$

2) $\frac{2}{4} = \frac{MF}{6} = \frac{CF}{5} \Rightarrow MF = \frac{6\times 2}{4}$

$$MF = 3 \Leftrightarrow CF = \frac{5\times 2}{4} = 2{,}5$$

في الشكل المجاور ABC مثلث فيه النقطة N من AB والنقطة M من AC إذا علمت أن BC و MN في حالة التوازي $AN = x+1$, $BC = 5$, $NM = 2x$, $AM = y$, $MC = 2$, $AB = 4$

1) اكتب النسب الثلاث
2) احسب قيمة x و y.



الحل:

1) حسب مبرهنة النسب الثلاث بالمثلثين $\left.\begin{matrix} ANM \\ ABC \end{matrix}\right]$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{NM}{BC}$$

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y}{y+2} = \frac{2x}{5}$$

2) نعوض النسب:

$$\frac{(x+1)}{4}=\frac{2x}{5}=\frac{y}{y+2}$$

$$5(x+1)=4\times 2x \Rightarrow 5x+5=8x$$

$$3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

$$\frac{2\times\left(\frac{5}{3}\right)}{5}=\frac{y}{y+2} \Rightarrow \frac{\frac{10}{3}}{5}=\frac{y}{y+2}$$

$$\frac{10}{15}=\frac{y}{y+2} \Rightarrow 15y=10y+20$$

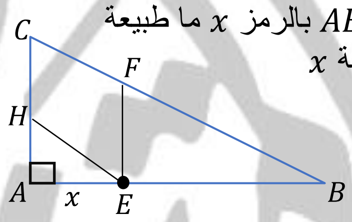
$$15y-10y=20 \Rightarrow 5y=20$$

$$y=4$$

ABC مثلث قائم في A طول ضلعيه القائمتان هما $AC=3,\ AB=4$

1) احسب وتر هذا المثلث.

2) E نقطة على AB و EF يوازي (AC)و(EH) يوازي BC نرمز إلى طول AE بالرمز x ما طبيعة الرباعي $EFCH$ احسب بدلالة x أطوال هذا الرباعي.



الحل:

1) حسب مبرهنة فيثاغورث بالمثلث ABC

$$AC^2+AB^2+BC^2$$

$$(3)^2+(4)^2=BC^2$$

$$25=BC^2$$

$$BC=5$$

2) طبعة الرباعي $EFCH$ متوازي أضلاع كل ضلعين متقابلين متوازيات ومتساويين
حسب مبرهنة النسب الثلاث بالمثلثين

$$\left.\begin{matrix}BEF\\BAC\end{matrix}\right] \quad \frac{BF}{BA}=\frac{EF}{AC}=\frac{BF}{BC}$$

$$\frac{4-x}{4}=\frac{EF}{3}$$

$$EF=\frac{3(4-x)}{4}=\frac{12-3x}{4}$$

$$EF=\frac{12-3x}{4}=HC$$

$$\frac{4-x}{4}=\frac{BF}{5}$$

$$BF=5\,\frac{4-x}{4}$$

$$CF=5-\frac{5(4-x)}{4}$$

$$CF=\frac{20-20+5x}{4}=\frac{5x}{4}$$

$$CF=\frac{5x}{4}=HE$$

---

2. عكس مبرهنة النسب الثلاث:

نص المبرهنة: إذا كان لدينا مستقيمان متقاطعان والنسب الثلاث متساوية كان المستقيمان متوازيان.

⇦ تفيد عكس مبرهنة النسب الثلاث في أثبات أن المستقيان متوازيان

⇦ لدينا مبرهنات أيضاً تفيد في أثبات أن المستقيان متوازيان

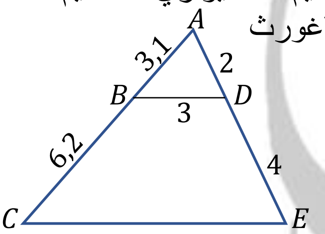
1) العامودان على مستقيم واحد متوازيان.
2) القطعة الواصلة بين منتصفين ضلعين توازي الثالثة وتساوي نصفها.
3) إذا تساوى الزاويتان بالتبادل الداخلي أو الخارجي أو بالتناظر كان المستقيمان متوازيان.

مثال1: في الشكل المجاور المثلث ACE فيه

$AD=2$ و $CB=6{,}2$ و $AB=3{,}1$

و $BD=3$ و $DE=4$ **المطلوب:**

1) احسب نسبتين $\frac{AB}{AC}$ و $\frac{AD}{AF}$ اكتب النسب بشكل كسرين مختزلين واستنتج أن المستقيم BD يوازي المستقيم CE



الحل: حسب مبرهنة عكس فيثاغورث

$$\frac{AB}{AC}=\frac{3{,}1}{9{,}3} \Rightarrow \frac{31}{93}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{AD}{AE}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

نجد أن $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$

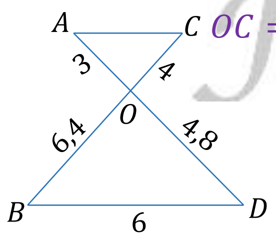
حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث المستقيمان

$$CE \parallel BD$$

مثال2:

في الشكل المجاور $BD=6$ و $OD=6{,}4$

$OC=4$ و $OB=4{,}8$ و $AO=3$



1) أثبت أن $DB \parallel AC$
2) احسب AC

الحل:

1) حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{OC}{OD}\overset{?}{=}\frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{4}{6{,}4}=\frac{3}{4{,}8}$$

نضرب الطرفين بالوسطين إذا كانت محققة يكون المستقيمان متوازيان

$$4\times 4{,}8 \overset{?}{=} 3\times 6{,}4$$

$$19{,}2 = 19{,}2 \Leftrightarrow \text{محققة}$$

إذاً المستقيمان AC و DB متوازيان

2) حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{AC}{DB}=\frac{OA}{OB}\ ,\ \frac{AC}{6}=\frac{3}{4{,}8}$$

$$AC = 3{,}75$$

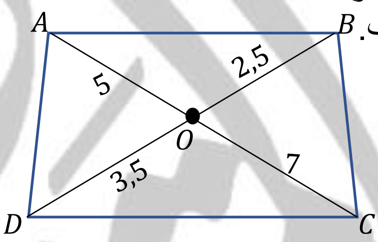
ملاحظة: لإثبات أن الرباعي شبه منحرف يجب أن نثبت قاعدتاه متوازيتان على عكس مبرهنة النسب الثلاث.

لدينا الشكل الرباعي $ABCD$

وأطوال أضلاعه $OB = 2{,}5$ و $OD = 3{,}5$

$OC = 7$ و $OA = 5$

أثبت أن $ABCD$ شبه منحرف.



الحل: حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث.

$$\frac{OB}{OD} \overset{?}{=} \frac{OA}{OC}$$

$$\frac{2{,}5}{3{,}5} \overset{?}{=} \frac{5}{7}$$

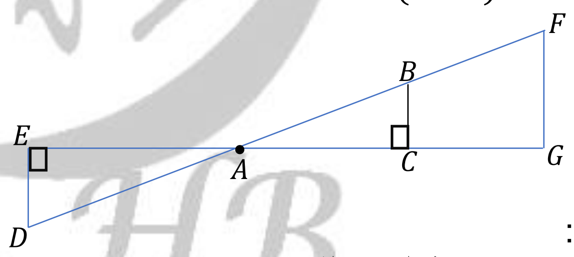
النسبتان متكافئتان إذاً المستقيمان متوازيان $AB \parallel DC$

فالرباعي $ABCD$ شبه منحرف.

مثال3: في الشكل المرافق $AB = 12$ و $AC = 9{,}6$

$AD = 6{,}5$ و $BC = 7{,}2$ و $BF = 10{,}5$ و $AG = 18$

1) احسب AE
2) أثبت أن المستقيمان FG , BC متوازيان
3) احسب $\sin(A\hat{B}C)$



الحل:

1) حسب مبرهنة النسب الثلاث:

لدينا المستقيمان EG و DF متقاطعان

ولدينا المستقيمان BC و DE متوازيان

لأن العمودان على مستقيم واحد متوازيان

$$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{9{,}6}=\frac{6{,}5}{12}$$

$$AE = \frac{9{,}6\times 6{,}5}{12} = 5{,}2$$

2) حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين AGF و ACB

$$\frac{AC}{AG} \overset{?}{=} \frac{AB}{AF} \overset{\text{بالتعويض}}{\Rightarrow} \frac{9{,}6}{18} \overset{?}{=} \frac{12}{22{,}5}$$

نجد أن النسبتين متكافئتين لأن $12\times 18 = 9{,}6\times 22{,}5$

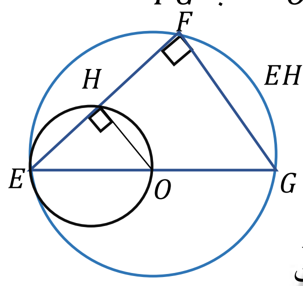
---

3) $\sin(A\hat{B}C) = \frac{AC}{AB} = \frac{9{,}6}{12}$

مثال4: دائرة مركزها O , EG قطر فيها ℓ_2 هي الدائرة الت قطرها OE.

1) هل المستقيمان OH و GF متوازيان علل اجابتك
2) إذا علمت أن $OH = 3\ cm$ احسب FG

الحل:



1) نعم متوازيان لأن المثلث EHO قائم في H لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة التي قطرها EO والمثلث EFG قائم في F لأن المثلث EG قطر في الدائرة المارة برؤوس المثلث

العامودان على مستقيم واحد متوازيان

$$\left.\begin{matrix} OH \perp EF \\ GF \perp EF \end{matrix}\right\} OH // GF$$

2) $OH = 3$: حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين FHO و EFG

$$\frac{EO}{EG}=\frac{HO}{FG} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{3}{FG}$$

$$FG = \frac{3\times 2}{1} = 6cm$$

ثالثاً:

التشابه: إذا تناسب أطوال أضلاع مثلث مع أطوال أضلاع المثلث ثاني كان المثلثان متشابهان ويكون إحداهما أكبر أو أصغر أو مطابقة للثاني.

نسبة التشابه K

$K > 1$	$K < 1$	$K = 1$
نسبة تكبير	نسبة تصغير	نسبة تطابق

يفيد التشابه: في حساب أطوال أضلاع ومحيطات ومساحات وحجوم اشكال متشابهة.

⇦ **لحساب طول ضلع:**

طول ضلع صغير $\times K_{\text{تكبير}} =$ طول ضلع كبير

طول ضلع كبير $\times K_{\text{تصغير}} =$ طول ضلع صغير

K ⇐ تحسب من نسبة ضلعين من شكلين متشابهين

$$K_{\text{تصغير}} = \frac{\text{ضلع صغير}}{\text{ضلع كبير}}$$

$$K_{\text{تكبير}} = \frac{\text{ضلع كبير}}{\text{ضلع صغير}}$$

⇦ لحساب محيط شكل متشابه:

$$P_{\text{صغير}} = K_{\text{تصغير}} \times P_{\text{محيط كبير}} \Rightarrow cm$$

$$P_{\text{تكبير}} = K_{\text{تصغير}} \times P_{\text{محيط صغير}} \Rightarrow cm$$

⇦ لحساب مساحة شكل مشابه:

$$S_{\text{صغير}} = K^2_{\text{تصغير}} \times S_{\text{كبير}}$$

$$S_{\text{كبير}} = K^2_{\text{تكبير}} \times S_{\text{صغير}}$$

⇦ لحساب حجوم اشكال متشابهة:

$$V_{\text{كبير}} = K^3_{\text{تكبير}} \times V_{\text{صغير}}$$

$$V_{\text{صغير}} = K^3_{\text{تصغير}} \times V_{\text{كبير}}$$

⇦ لحساب K بوجود مساحتين أو محيطين أو حجمين

بوجود محيطين $\Rightarrow K = \frac{P'}{P}$

بوجود مساحتين $\Rightarrow K^2 = \frac{S'}{S}$

نجذر الطرفين جذر تربيعي

نجذر الطرفين جذر تكعيبي $K^3 = \frac{V'}{V}$

ملاحظة: حجم هرم أو مخروط يعطى بالعلاقة

$$V = \frac{1}{3}.S.h$$

الارتفاع

مساحة القاعدة

مثال: مخروطيان دورانيان متقابلان بالرأس S مركز قاعدتهما I , K ونصف قطريهما IB و KA

والمستقيمان IB و KI متوازيان نعلم أن

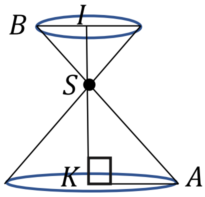
$$SI = 4cm\ , KS = 6cm, KA = 4,5\ cm$$

1) احسب طول IB ثم طول SA

2) المخروط الذي مركز قاعدته I تصغير للمخروط الذي مركز قاعدته K وحجمهما على التوالي V_I و V_k

1) ما معامل التصغير

2) احسب V_k ثم استنتج V_I



الحل:

1) المستقيمان KA و BI متوازيان و IK و BA متقاطعان في S حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين

$$\left.\begin{matrix} SIB \\ SKA \end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{SI}{SK} = \frac{SB}{SA} = \frac{IB}{KA}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{IB}{4,5} = IB = \frac{4,5 \times 4}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

لحساب SA حسب مبرهنة فيثاغورث بالمثلث SKA القائم في K

$$SK^2 + KA^2 = SA^2$$
$$36 + 20,25 = 56,25$$
$$SA = 7,5$$

2) معامل التصغير:

$$K_{\text{تصغير}} = \frac{SI}{SK} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$V_K = \frac{1}{3}.S.h$$

$$V_K = \frac{1}{3}.\pi.r^2 \times SK$$

$$V_K = \frac{1}{3}.\pi(4,5)^2 \times 6 = 40,5\pi\ cm^3$$

$$V_I = K^3_{\text{تصغير}} \times V_{K\,\text{كبير}}$$

$$V_I = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 40,5\pi$$

$$V_I = \frac{8}{27} \times 40,5\pi = 12\pi\ cm^3$$

في الشكل المجاور $[AH]$ ارتفاع في المثلث ABC والنقطة E منتصف $[AB]$ والنقطة F منتصف BC

وإذا كان $BC = 6$ و $AB = 2\sqrt{3}$ وقياس الزاوية $A\hat{B}C = 60°$ والمطلوب:

1) أثبت أن $EF//AC$

2) إذا كان المثلث BFE تصغير للمثلث BCA استنتج معامل التصغير.

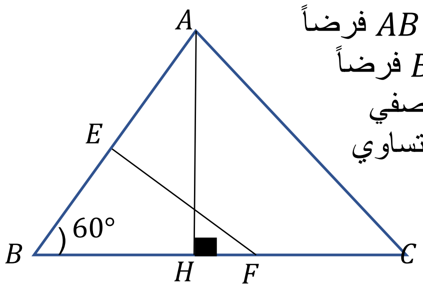
3) إذا علمت أن مساحة المثلث ABC تعطى بالعلاقة :

$$S = \frac{1}{2}[AB] \times [BC].\sin(\hat{B})$$

احسب S مساحة المثلث ABC واستنتج طول ارتفاع AH واحسب مساحة المثلث BEF

الحل:

1) النقطة E منتصف AB فرضاً
والنقطة F منتصف BC فرضاً
النقطة الواصلة بين منتصفي ضلعين توازي الثالثة وتساوي نصفها.



$(EF) \parallel (AC)$

2) معامل التصغير:

$$K_{تصغير} = \frac{BE}{BA} = \frac{1}{2}$$

لأن E منتصف AB

3) $S = \frac{1}{2}(2\sqrt{3}) \times (6) \times \sin(60°)$

$$S = 6\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\ cm^2$$

نعلم أن $S = 9 \Rightarrow 9 = \frac{(ارتفاع \times القاعدة)}{2}$

$$9 = \frac{6}{2} \times h \Rightarrow h = 3cm$$

$$K_{تصغير} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{BEF} = K^2 \times S_{ABC}$$

$$S_{BEF} = \frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4} cm^2$$

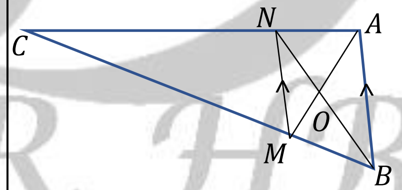
تمرين:

AN و BM متقاطعان في C و $AB \parallel MN$

بحيث $AB = 3 , MB = 2,1 , BC = 7$

1) احسب MN واستنتج نوع المثلث MNB
2) بفرض أن O نقطة تقاطع AM و NB أثبت أن المثلث OMN تصغير للمثلث OAB واوجد معامل التصغير.

الحل: حسب مبرهنة النسب الثلاث بالمثلثين



CMN, CBA $\Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{MN}{AB}$

$$\frac{4,9}{7} = \frac{MN}{3} \Rightarrow MN = \frac{(3 \times 4,9)}{7}$$

نوع المثلث $MN = 2,1 \Rightarrow$

MNB متساوي الساقين

2) المستقيمان AM و NB متقاطعين في O والمستقيمان $AB \parallel MN$ متوازيان حسب مبرهنة تالس في المثلثين في حالة تناسب إذا المثلثين متشابهين OMN , OAB

$$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{MN}{AB}$$

بنسبة تصغير

$$K = \frac{2,1}{3} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10} = 0,7$$

$$K_{تصغير} = 0,7$$

اختر الإجابة الصحيحة:

1) أسطوانة بحجم $1000m^3$ حجم نموذج مصغر لها حجم $8m^3$ فيكون معامل التصغير يساوي

.A	$\frac{1}{125}$	.B	$\frac{1}{2}$	.C	$\frac{2}{100}$

2) المثلث EFD تصغير للمثلث ABC فنسبة تصغير K تكون:

.A	$K = 1$	.B	$K > 1$	.C	$K < 1$

3) مثلثان متشابهان مساحة الأول 25 ومساحة الثاني 100 فنسبة التكبير هي:

.A	4	.B	75	.C	2

4) المثلث ABC تكبير للمثلث $\acute{A}\acute{B}\acute{C}$ فنسبة التكبير هي نفسها حل المعادلة:

.A	$2x + 3 = 4$	.B	$2x + 3 = 5$	.C	$2x + 3 = 6$

5) مربع مساحته 9 حجم نموذجاً مكبراً له مساحته 36 فإن معامل التكبير يساوي:

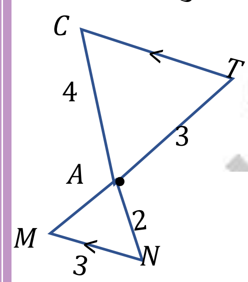
.A	4	.B	3	.C	2

6) مكعب حجمه $27m^3$ حجم نموذجاً مكبر له حجمه $125m^3$ فإن معامل التكبير يساوي:

.A	$\frac{3}{5}$	.B	$\frac{5}{3}$	.C	$\frac{125}{27}$

ضع كلمة صح أو كلمة خطأ:

في الشكل المجاور MI و NC مستقيمان متقاطعان في A والمستقيمان NM و CT متوازيان $AC = 4$ و $AN = 2$ يكون $MN = TA = 3$:



1. $AM = \frac{3}{2}$ صح
2. $CT = 4$ خطأ
3. $\frac{MN}{TC} = \frac{1}{2}$ صح
4. $\frac{NAM_{مساحة}}{TCA_{مساحة}} = \frac{2}{3}$ خطأ
5. إذا كانت $0 < K < 1$ تؤول نسبة K إلى نسبة تكبير. خطأ
6. قياسات الزوايا بالتشابه تتغير.
7. إذا تساوت النسب يكون المستقيمان متوازيان

ثالثاً: زوايا والمضلعات في الدائرة

1. زوايا المحيطية ومماسية في الدائرة:

قواعد: الدائرة هي مجموعة نقاط من المستوي لها مركز ونصف قطر.

$C\ (O, r)$

اسم الدائرة — مركز الدائرة — نصف قطر الدائرة

- أضلاع أساسية في الدائرة: قطر الدائرة هو مستقيم يقطع محيط الدائرة من منطقتين مختلفتين ويمر من المركز الدائرة ويرمز له $\mathcal{R}$
- مماس في الدائرة: هو مستقيم يشترك مع الدائرة بنقطة واحد وعامودي على نفس قطر الدائرة
- وتر الدائرة: مستقيم يقطع محيط الدائرة من نقطتين مختلفتين دون المرور بالمركز.

مبرهنات:

- الوتران المتساويان يحصران قوسان متساويان والقوسان المتساويان يحصران وتران متساويان.
- المستقيم الذي يمر من المركز يعامد وتر يكون يعامده في منتصف الوتر
- المستقيم الذي يمر من مركز ويمر من منتصف وتر يكون مستقيم والوتر في حالة تعامد
- زاوية المحيطية: زاوية يقع رأسها على محيط الدائرة وقياسها يساوي نصف القوس التي تحصره.
- الزاوية المركزية: زاوية يقع رأسها على مركز الدائرة وقياسها يساوي قياس القوس الذي تحصره.
- الزاوية المماسية: لها حالتين:

1) إذا أضلاعها ⇦ 1 مماس 2 وتر دائرة تعامل معاملة المحيطية.
2) إذا أضلاعها⇦ 1 مماس 2 نصف قطر تكون زاوية قياسها $90°$ درجة.

✓ إذا اشتركتا زاويتان محيطية ومركزية بنفس القوس يكون محقق عندئذٍ

المركزية = ضعفين محيطيه

محيطة = تساوي نصف مركزية

✓ زاويتان محيطيتان مشتركتان بنفس القوس متساويتان
✓ قياس زاوية دورة كاملة $360°$
✓ قياس زاوية نصف دورة $180°$
✓ قياس زاوية ربع دورة $90°$
✓ زاوية المستقيم دوماً $180°$
✓ الدائرتين متماستان خارجياً يكون

$OO` = R + R`$

بعد بين المركزين — نصف قطر الدائرة الأولى — نصف قطر الدائرة الثانية

✓ الدائرتان متماستين داخلياً

$OO` = R - R`$

✓ الدائرتين المتباعدتين خارجياً

$OO` > R + R`$

✓ الدائرتين المتباعدتين داخلياً

$OO` < R - R`$

✓ الدائرتين المتقاطعتين

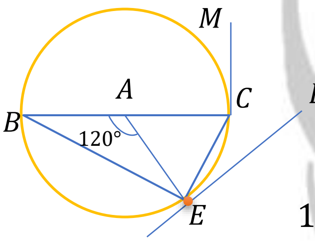
$R - R` < OO` < R + R`$

- بعد مركز الدائرة عن المماس يساوي نصف طول الوتر
- في نقطة M خارج الدائرة يمكن رسم مماس وتكون المسافتين بين M وكل من نقطتين التماس متساويتين
- الزاوية الداخلية قياسها يساوي مجموع قياس زاويتين مركزيتين متقابلتين محصورتين بين أضلاع زاوية داخلية

مثال1:

BC قطر من الدائرة R مركزها A , E نقطة من هذه الدائرة تحقق $B\hat{A}E = 120°$ و ED , CM مماسات للدائرة R

1. احسب قياسات زوايا الآتية
$C\hat{B}E\ ,\ E\hat{C}B\ ,\ C\hat{A}E$
2. احسب قياس الزاوية المماسية
$B\hat{C}M$ وقياس $C\hat{E}D$



الحل:

$C\hat{B}E_{\text{محيطه}} = \frac{1}{2}\widehat{EC}$

أولاً الزاوية $E\hat{A}B$ تساوي $120°$

إذاً الزاوية $C\hat{A}E$ تساوي $60°$ لأن

زاوية المستقيم CAB إذاً الزاوية $C\hat{A}E = 60°$

$E\hat{C}B = 60°$ و $C\hat{B}E = 30°$

لأن المثلث CAE متساوي الأضلاع

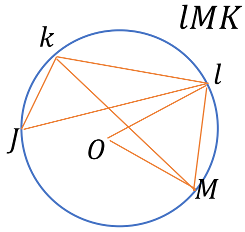
2. $C\hat{E}D = \frac{1}{2}\widehat{CE} = 30°$

$B\hat{C}M = 90°$

مثال2: J و K و l و M نقاط من دائرة مركزها O

$$K\hat{J}l = l\hat{O}M = 52°$$

احسب قياسات زوايا المثلث lMK



الحل:

بما أن قياس الزاوية

$l\hat{O}M = 52°$

إذاً قياس القوس $lM = 52°$ لأنه يقابل زاوية مركزية

وبما أن قياس الزاوية $K\hat{J}l$ يساوي $52°$ وفي محيطه

إذاً $\widehat{Kl} = 104°$ إذاً قياس الزاوية $K\hat{M}l$ يساوي $52°$

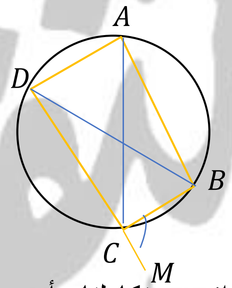
وقياس الزاوية $l\hat{K}M = 26°$ حسب مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$ تكون الزاوية $M\hat{I}K$ تساوي

$$M\hat{I}K = 180° - 52° - 26° = 102°$$

---

2. الرباعي الدائري : هو مضلع رباعي وقعت رؤوسه الأربعة على دائرة واحدة

خواص الرباعي الدائري:



- ❖ الزاويتان المتقابلتان بالرباعي الدائري متكاملتان أي مجموعها يساوي $180°$
- ❖ الزاوية الخارجية في رباعي دائري تساوي المقابلة لمجاورتها $B\hat{C}M = C\hat{A}B$.
- ❖ زاويتان محيطيتان باتجاه واحد بالنسبة إلى مستقيم متساويان $B\hat{D}C = C\hat{A}B$

سؤال امتحاني:

أثبت أن الرباعي $ABCD$ رباعي دائري

أثبت أن النقاط A و B و C و D تقع على دائرة واحدة

نثبت بأحد الخواص الآتية:

1. إذا كان مجموع زاويتان في رباعي $180°$ متقابلتان كان الرباعي دائري
2. إذا تساوت زاوية خارجية مع المقابلة لمجاورتها كان الرباعي دائري
3. إذا تساوى زاويتان باتجاه واحد بالنسبة إلى مستقيم في رباعي كان رباعي دائري

- ✓ لتعيين مركز الدائرة المارة برؤوس رباعي دائري تكون في منتصف الوتر المشترك بالمثلثين القائمين
- ✓ نصف قطر الدائرة المارة برؤوس الرباعي

$$r = \frac{\text{وتر مشترك}}{2}$$

مسألة 100 علامة

مسألة رقم 1

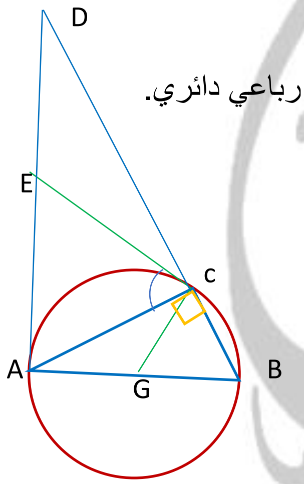
1) ABC مثلث قائم في C ومرسوم في الدائرة ℓ فيه AB =12 و $B\hat{A}C = 30°$ مماس الدائرة ℓ في النقطة A يتقاطع مع المستقيم BC في النقطة D.

1) احسب مساحة المثلث ACD

2) لتكن E منتصف القطعة AD و G مركز الدائرة ℓ أثبت أن المستقيم CE مماس للدائرة ℓ

3) أثبت أن الرباعي AGCE رباعي دائري.

الحل:



المثلث ACD قائم لأن المثلث ABC قائم في $\hat{C}$

$$S_{ACD} = \frac{AC \times DC}{2}$$

نحسب طول الضلع AC أولاً ومن ثم DC. AC ضلع في المثلث ABC القائم بحيث الزاوية $B\hat{A}C = 30°$ بحساب AC نستخدم تعريف النسبة المثلثية $\cos(30°) = \frac{AC}{AB}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{Ac}{12} \Rightarrow AC = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ cm$$

نعلم أن قياس الزاوية $D\hat{A}B$ تساوي $90°$ لأن AD مماس الدائرة في النقطة A ونعلم أيضاً $C\hat{A}B = 30°$ إذاً الزاوية

$D\hat{A}C = 60°$ نستعمل تعريف tan في المثلث ACD

$$\tan(D\hat{A}C) = \frac{DC}{AC}$$

$$\tan(60°) = \frac{DC}{6\sqrt{3}} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{DC}{6\sqrt{3}}$$

DC=18 cm

إذاً

$$S_{ACD} = \frac{6\sqrt{3} \times 18}{2} = 54\sqrt{3}cm^2$$

2) لإثبات أن CB مماس في الدائرة يجب أن يكون $CE \perp CG$ النقطة تأتي في منتصف AD والمتوسط المتعلق في الوتر يساوي نصف طول الوتر إذاً $EC = AE$ ولدينا الزاوية $E\hat{A}C = 60°$ إذاً المثلث ACE متساوي الأضلاع

إذاً الزاوية $E\hat{A}C = 60°$

ولدينا المثلث AGC متساوي الساقين إذاً زوايا القاعدة متساوية $G\hat{C}A = 30°$ إذاً الزاوية $E\hat{C}G = 90°$ إذاً CE مماس للدائرة ℓ في النقطة C

3) الزاوية $E\hat{A}G = 90°$ و زاوية $G\hat{C}E = 90°$ الرباعي AGCE فيه كل زاويتان متقابلتان متكاملتان إذاً الرباعي AGCE رباعي دائري.

مسألة 2

في الشكل المرسوم جانباً C دائرة مركزها M ، AB قطراً فيها ونصف قطرها يساوي 3 =(FB) و FN مماسان لها و BF=4 والمطلوب:

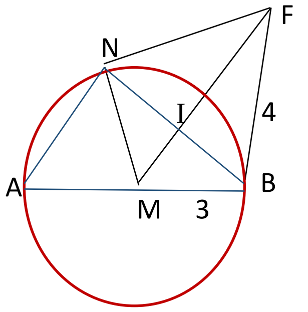
1) أثبت أن المثلثين FBM و ANB قائمين.

2) أثبت أن $F\hat{B}N = N\hat{A}B$

3) أثبت أن الرباعي BFNM رباعي دائري وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه واحسب طول نصف قطرها.

4) أثبت أن FM منصف للزاوية $N\hat{F}B$ ثم استنتج أن $AN//FM$

الحل:



المثلث FBM قائم لأن BF مماس للدائرة والمماس عامودي على نصف القطر إذاً FBM مثلث قائم في B

المثلث ANB قائم لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة المارة برؤوسه.

2) الزاويتان $F\hat{B}N = N\hat{A}B$ متساويتان لأن كلا زاويتان يحصران نفس القوس وهو $\widehat{NB}$

3) لدينا $M\hat{B}F$ مثلث قائم في B ولدينا المثلث FNM قائم في N إذاً لدينا في الرباعي $BFNM$ زاويتان متقابلتان متكاملتان إذاً الرباعي BFNM رباعي دائري مركز الدائرة في منتصف MF : نحسب MF ثم نقسمه على 2 نستخرج نصف قطر $r = \frac{MF}{2}$.

لحساب MF حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم FBM

$$BF^2 + MB^2 = MF^2$$

$$16 + 9 = MF^2 = 25$$

$MF = 5 \qquad \frac{MF}{2} = 2.5 \qquad r = 2.5$

4) لدينا المثلثين القائمين MNF , MBF طبوقين لأنهما مشتركان بوتر وهو MF وكلا المثلثين قائمين إذاً

$M\hat{F}N = M\hat{F}B$ ومنه MF منصف الزاوية $B\hat{F}N$

الزاويتان $N\hat{A}M$ و $N\hat{M}B$ اشتركتان بنفس القوس

نعلم أن المحيطية تساوي نصف المركزية

$$N\hat{A}M = \frac{1}{2}N\hat{M}B$$

وبما أن MF منصف $F\hat{M}B = F\hat{M}N$

إذاً نصف الزاوية $\frac{N\hat{M}B}{2} = F\hat{M}B$

إذاً $N\hat{A}M = F\hat{M}B$

إذاً تساوى زاويتان بوضع التناظر كان المستقيمان متوازيان $AN//FM$

مسألة هامة لدورة (2023):

في الشكل المجاور $C(O.r)$ $C'(O'.r)$ دائرتان طبوقتان ومتقاطعتان النقطة I منتصف OO' المطلوب:

1) أثبت أن المثلث AOO' متساوي الأضلاع.

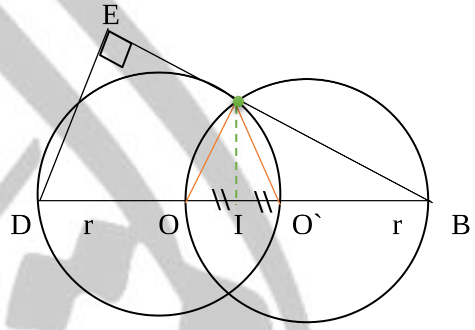
2) أثبت أن AB مماس للدائرة C.

3) أوجد قياس الزاوية $A\hat{B}O$ وقياس القوس $\widehat{AB}$.

4) أثبت أن الرباعي $EDIA$ رباعي دائري.

5) أثبت أن $DE//OA$ ثم اكتب مبرهنة النسب الثلاث للمثلثين EBD . ABO واستنتج أن $BA = \frac{2}{3}EB$

الحل:



1) بما أن الدائرتان طبوقتان لهما نفس نصف القطر

$$OO' = AO' = AO = R$$

فالمثلث AOO' متساوي الأضلاع لتساوي أضلاعه.

2) AB *مماس لدائرة* C لأنه يشترك مع هذه الدائرة بنقطة واحدة ولدينا المثلث OAB قائم في A لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة.

إذاً AB مماس لأنه يشترك مع الدائرة بنقطة واحدة وعامودي على نصف القطر.

3) قياس الزاوية $A\hat{B}O = 30°$ لأن زاوية $A\hat{O}B$ تساوي $60°$ وقياس القوس $AB = 120°$ لأنه يقابل زاوية محيطية تساوي $60°$.

4) لدينا الزاوية $D\hat{E}A = 90°$ فرضاً ولدينا المثلث AOO' متساوي الأضلاع AI متوسط إذاً هو ارتفاع إذاً $A\hat{I}D$ تساوي أيضاً $90°$ إذاً الرباعي فيه كل زاويتان متقابلتان متكاملتان فالرباعي $EDIA$ رباعي دائري.

5) لدينا الزاوية $E\hat{D}B = 60°$ لأن المثلث $E\hat{D}B$ قائم و زاوية $B = 30°$ ولدينا الزاوية $A\hat{O}B$ تساوي أيضاً $60°$ تساوى زاويتان بوضع إذاً المستقيمان AO و DE متوازيان.

نطبق مبرهنة النسب الثلاث على المثلثين EBD و ABO.

$$\frac{BA}{BE} = \frac{BO'}{BD} = \frac{AO}{ED}$$

لدينا $r = r'$ ولدينا $IO = IO'$

$$BA = \frac{2}{3}BE \qquad \frac{BA}{BE} = \frac{2\cancel{r}}{3\cancel{r}}$$

في الشكل المجاور نصف دائرة مركزها O طول قطرها 8 وفيها $\widehat{AN} = 2\widehat{NB}$ ، $AB = AM = 8$ ، AM يعامد AB I منتصف MB والمطلوب:

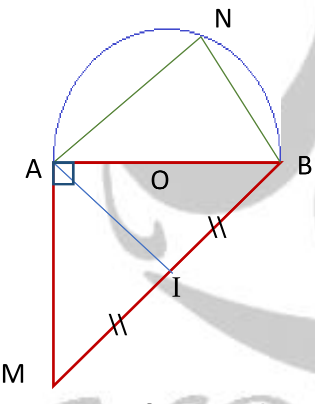
1) احسب قياس القوس $\widehat{NB}$ ثم أثبت أن قياس الزاوية $N\hat{A}B = 30°$

2) أحسب طول كل من NB و NA.

3) أثبت أن رباعي $BNAI$ رباعي دائري.

4) احسب مساحة الشكل $BNAM$.

الحل:



1) قياس القوس $\widehat{AN} = 2\widehat{NB}$ قياس القوس

$$\widehat{AB} = 180°$$

$$\widehat{AN} = 2\widehat{NB}$$

$$\widehat{AB} = \widehat{AN} + \widehat{NB}$$

$$180° = 2\widehat{NB} + \widehat{NB}$$

$$180° = 3\widehat{NB}$$

$$\widehat{NB} = \frac{180°}{3} \Longrightarrow \widehat{NB} = 60°$$

الزاوية $N\hat{A}B = 30°$ لأن زاوية $N\hat{A}B$ محيطية وتساوي نصف القوس المقابل لها $N\hat{A}B = \frac{1}{2}\widehat{NB} = 30°$

2) الضلع المقابل لزاوية $30°$ في المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر

$$NB = \frac{1}{2}AB \qquad NB = 4cm$$

لحساب $AN \Longrightarrow \cos(A) = \frac{AN}{8}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AN}{8}$$

$$AN = 4\sqrt{3}$$

3) لدينا $A\hat{N}B$ تساوي $90°$ لأن المثلث ANB قائم لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة.

ولدينا المثلث AMB قائم ومتساوي الساقين والمتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر وهو أيضاً ارتفاع في المثلث القائم إذاً لدينا الزاوية $A\hat{I}B = 90°$.

فالرباعي $AIBN$ رباعي دائري لوجود زاويتان متقابلتان متكاملتان.

4) مساحة الشكل $BNAM$ هي مؤلفة من مساحتين مثلثين قائمين.

$$S_{BNAM} = S_{ABM} + S_{ABN}$$

$$S_{BNAM} = \frac{AB \times AM}{2} + \frac{AN \times BN}{2}$$

$$S_{BNAM} = \frac{8 \times 8}{2} + \frac{4\sqrt{3} \times 4}{2}$$

$$S_{BNAM} = 32 + 8\sqrt{3}\ cm^2$$

مسألة:

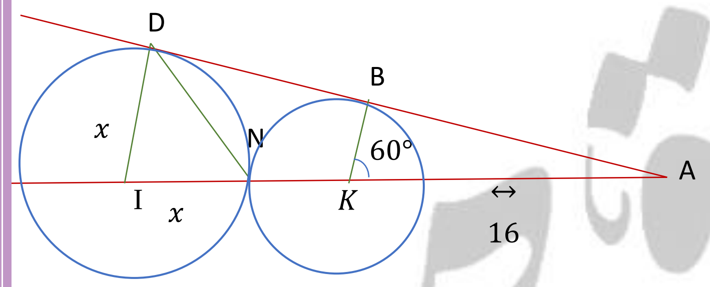
في الشكل المرسوم جانباً C_1 دائرة مركزها I و C_2 دائرة مركزها K وهما متماستان خارجياً في النقطة N ولدينا $AK = 10$ وقياس الزاوية $A\hat{K}B = 60°$ والمستقيم (AB) يمس كلاً من الدائرة C_1 في النقطة D والدائرة C_2 في B ونفرض أن $DI = x$.

1) أحسب قياس كل من الزاويتان $A\hat{D}I$ و $A\hat{B}K$ وبين أن المستقيمان BK و ID متوازيان.

2) احسب قياس كل من الزاويتان $A\hat{D}N$ و $D\hat{I}A$.

3) في المثلث القائم KBA احسب الطول BK.

4) احسب طول AN ثم احسب قيمة x.



الحل:

قياس الزاوية $A\hat{B}K = 90°$ لأن AB مماس على دائرة C_2 في النقطة B إذاً المثلث ABK قائم.

ولدينا الزاوية $A\hat{D}I = 90°$ لأن AB مماس على الدائرة C_1 في النقطة D.

بما أن $KB \perp AB$ و $AB \perp ID$ العامودان على مستقيم واحد متوازيان إذاً المستقيمان BK و ID متوازيان.

2) بما أن المستقيمان BK و ID متوازيان نجد بالتناظر أن الزاوية $B\hat{K}A$ تساوي $60°$ إذاً حسب تناظر $A\hat{I}D$ تساوي $60°$ أيضاً.

قياس الزاوية $A\hat{D}N$ نجد أن الزاوية $I\hat{D}A = 90°$ ولدينا المثلث IDNمتساوي الأضلاع لأن أضلاعه أنصاف أقطار دائرة وأحد زواياه تساوي $60°$ إذاً الزاوية $I\hat{D}N = 60°$ ، إذاً الزاوية $A\hat{D}N = 30°$.

ط$_2$- لحساب قياس الزاوية $A\hat{D}N$ بما أن قياس الزاوية $D\hat{I}A = 60°$ إذاً القوس $\widehat{DN} = 60°$ لأن الزاوية DIA مركزية وتساوي القوس المقابل لها الزاوية ADN مماسية وتساوي نصف القوس المقابل لها $\widehat{DN}$ إذاً الزاوية

$$B\hat{A}K = 30°$$

3) لحساب BK طول وتر AK=10 ولدينا الزاوية

$B\widehat{K}A = 60°$ إذاً الزاوية $B\hat{A}K = 30°$

الضلع المقابل للزاوية $30°$ تساوي نصف طول الوتر إذاً $BK = 5$.

4) $AN = Ak + KN$

$$AN = 10 + KN = 5$$

$$AN = 10 + 5 = 15\ cm$$

فنجد أن المثلث DIN مثلث متساوي الأضلاع $IN = DN$
ونجد أن المثلث DNA من الساقين لأن زوايا القاعدة متساوية

$$AN = DN = 15 \quad \Rightarrow \quad DN = 15$$

ونجد أن $IN = DN = 15$

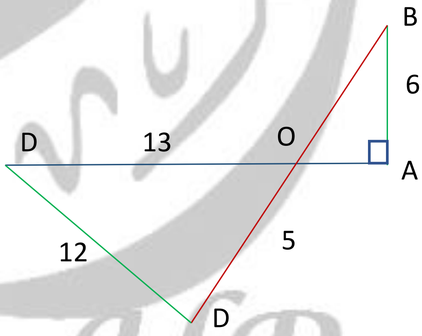
إذاً $x = 15$ $\qquad N = x = 15$

تمرينات $60°$:

نتأمل الشكل المرسوم جانباً OAB مثلث قائم
$OC = 5$ و $DC = 12$ و $DO = 13$ و $AB = 6$
و**المطلوب:**

1) أثبت أن DOC مثلث قائم.
2) أثبت أن النقاط B و A و C و D تنتمي إلى دائرة واحدة عين مركزها.
3) أحسب $\sin(C\hat{O}D)$ واستنتج الطول OB

الحل:



1) حسب مبرهنة عكس فيثاغورث

$$OC^2 + CD^2 \overset{?}{=} DC^2$$

$$25 + 144 \overset{?}{=} 169$$

$$169 = 169$$

محققة إذاً المثلث OCD قائم في C.

2) لدينا الزاويتان باتجاه واحد متساويتان $B\hat{A}O = O\hat{C}D$ إذاً الرباعي $ABCD$ رباعي دائري مركز الدائرة في منتصف [BD]

3) $\sin(C\hat{O}D) = \frac{DC}{OD} = \frac{12}{13}$

$$\sin(C\hat{O}D) = \sin(B\hat{O}A)$$

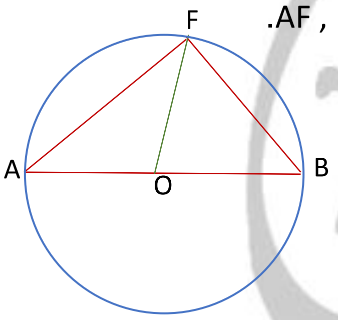
$$\frac{12}{13} = \frac{AB}{OB}$$

$$OB = \frac{13 \times 6}{12} = \frac{13}{2} \qquad OD = 6.5\ cm$$

في الشكل المجاور دائرة مركزها O و AB قطر فيها بحيث $AB = 6$ و $\widehat{AF} = 120°$ والمطلوب:

1) احسب قياس الزاوية $F\hat{O}B$.
2) احسب قياس زوايا المثلث ABF.
3) احسب طول كلاً من AF , BF.

الحل:



1) لدينا قياس القوس $\widehat{AF} = 120°$

إذاً نستنتج أن $\widehat{FB} = 60°$ لأن قياس القوس $\widehat{AB} = 180°$

إذاً الزاوية $F\hat{O}B = 60°$ لأنها مركزية تساوي قياس القوس المقابل لها

2) $A\hat{F}B = 90°$ لأن المثلث قائم في F لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة المارة برؤوسه. لدينا الزاوية $F\hat{A}B$ تساوي $30°$ لأنها تساوي نصف القوس المقابل لها ولدينا الزاوية $F\hat{B}A = 60°$ لأنها محيطية وتساوي نصف القوس المقابل لها.

3) BF=3 لأنه ضلع مقابل لزاوية $30°$ في المثبث القائم ABF

ونأخذ أيضاً

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AF}{AB}$$

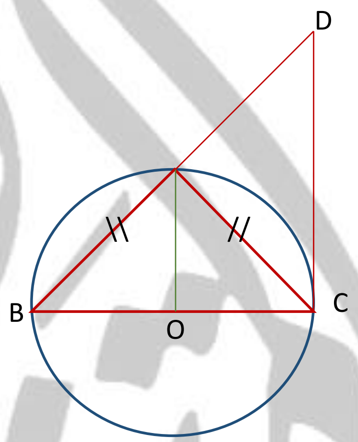
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AF}{6} = 3\sqrt{3} \qquad AF = 3\sqrt{3}\ cm$$

نتأمل في الشكل المجاور ABC مثلث متساوي الساقين مرسوم في دائرة قطرها $BC = 3\sqrt{2}$ و CD مماس للدائرة في C

1) أثبت أن AB=3.

2) احسب قياس القوس $\widehat{AB}$.

3) أثبت أن $CD//AO$ واكتب النسب الثلاث للمثلثين AOB و BCD واستنتج CD.



الحل:

1) بما أن المثلث ABC متساوي الساقين وهو قاطع لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة المارة برؤوسه إذاً زوايا القاعدة متساوية وتساوي $45°$

$$\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{3\sqrt{2}} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2}$$

$$AB = 3$$

2) قياس القوس $\widehat{AB} = 90°$ لأن الزاوية $A\hat{C}B = 45°$ وهي محيطية والقوس المقابل لها يساوي ضعفها بالقياس.

3) DC مماس للدائرة إذاً هو عامودي على نصف القطر OC ولدينا AO هو ارتفاع للمثلث القائم ومتساوي الساقين لأن

المتوسط المتعلق بالوتر في المثلث القائم ومتساوي الساقين أيضاً هو ارتفاع.

أي أنه أصبح $AO \perp OC$ إذاً AO و DC متوازيان لأن العمودان على مستقيم واحد متوازيان.

حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{BO}{BC} = \frac{BA}{BD} = \frac{AO}{DC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{DC} \Longrightarrow DC = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} \times 2}{1}$$

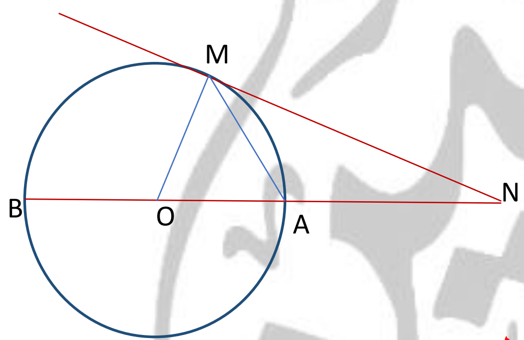
$$DC = 3\sqrt{2}$$

في الشكل المجاور MN مماس للدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها OA=4 وقياس القوس $\widehat{AM}$ يحقق

$\widehat{AM} = \frac{1}{3}\widehat{AB}$ والمطلوب:

1) أثبت أن $\widehat{AM} = 60°$ ثم احسب قياسات المثلث NOM.

2) أثبت أن A منتصف ON واحسب MN.



الحل:

لدينا أن $\qquad \widehat{AM} = \frac{1}{3}\widehat{AB}$

$$\widehat{AB} = \widehat{BM} + \widehat{AM} \Longrightarrow \widehat{AB} = \widehat{BM} + \frac{1}{3}\widehat{AB}$$

$$\widehat{AB} - \frac{1}{3}\widehat{AB} = \widehat{BM}$$

$$\widehat{BM} = \frac{2}{3}\widehat{AB}$$

$$\widehat{BM} = \frac{2}{3} \times 180° = 120°$$

القوس $\widehat{AB} = 180°$ لأنه نصف دورة

إذاً:

$$\widehat{AM} = 60°$$

بما أن MN مماس لدائرة $O\widehat{M}N = 90°$ ولدينا الزاوية $M\widehat{O}N = 60°$ لأنها مركزية وتحصر قياس القوس $\widehat{AM}$

وحسب مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$ نجد أن الزاوية $O\widehat{N}M = 30°$

---

2) المثلث OMA متساوي الأضلاع لأن أضلاعه أنصاف أقطار الدائرة وإحدى زواياه $60°$ إذاً AM يساوي OA إن الزاوية $O\widehat{M}A = 60°$ إذاً $A\widehat{M}N = 30°$ المثلث AMN متساوي الساقين

$$\mathrm{AM} = \mathrm{AN}$$

$$AM = AO = AN$$

إذاً A في منتصف AN

نستخدم لحساب MN حسب $\tan\,(M\widehat{O}N)$

$$\tan(60) = \sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; \frac{MN}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$MN = \frac{\sqrt{3}\times 4}{1} = 4\sqrt{3}\;\; cm$$

المضلعات المنتظمة:

نقول عن مضلع أنه منتظم إذا تساوت قياس زواياه وقياس أطواله أضلاع.

خواص المضلع المنتظم:

1) يمكن للمضلع المنتظم أن يرسم داخل دائرة مركز الدائرة هو نفسه مركز الضلع المنتظم.

2) لحساب قياس زاوية المركز المضلع المنتظم

$$\text{قياس زاوية مركز مضلع منتظم} = \frac{360°}{\underset{\text{عدد أضلاع المضلع المنتظم}}{n}}$$

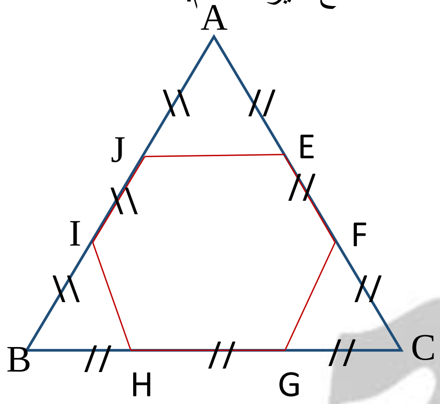
$$\text{زاوية محيطية لمضلع منتظم} = \frac{180°(n-2)}{n}$$

لإثبات أن المضلع مضلع منتظم يجب أن نثبت أن أطوال أضلاع متساوية و زواياه متساوية.

أمثلة: ABC مثلث متساوي الأضلاع و $EFGHIJ$ مسدس مشار إليه في الشكل المرافق هل المسدس $EFGHIJ$ منتظم اشرح.

الحل:

يجب أن نثبت أطوال أضلاعه متساوية وزواياه متساوية وإن لم يتم الإثبات أذاً المضلع غير منتظم.



نجد أن $HG = EF = JI$ فرضاً

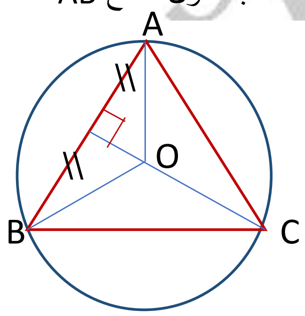
المثلث ABC متساوي الأضلاع وزواياه متساوية وتساوي $60°$ ونجد أن المثلث AJE متساوي الأضلاع لتساوي ضلعين وإحدى زواياه تساوي $60°$ نجد أن $EF = JE$

ومن المثلث EGC و BIH بالمثلث نجد أن GF و HI و JE تساوي الأضلاع IJ و HG و EF إذاً أطوال الأضلاع متساوية.

نجد أن زاوية المستقيم $180°$ الزاوية AEJ تساوي $60°$ إذاً الزاوية JEF تساوي $120°$ وبالمثل باقي الزوايا نجد أن زوايا المضلع متساوية إذاً أطوال أضلاعه متساوية و زواياه متساوية إذاً المضلع منتظم.

كيف نحسب طول مضلع المنتظم في المثلث متساوي الأضلاع.

مثال: ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة مركزها O ونصف قطرها 2 أحسب طول ضلع AB



الحل:

نسقط من O على AB ارتفاع ونسميه OH.

نعلم أن CH ارتفاع ومتوسط ومنصف أي AH = BH نعلم أن طول نصف قطر الدائرة يساوي 2 ونعلم أن ABC مضلع منتظم قياس زاوية المركز $120°$ و زاوية المحيطية $60°$

ونعلم أن المتوسط نفسه متوسط ونفسه ارتفاع بالمثلث متساوي الأضلاع لدينا الزاوية HAO تساوي $30°$ نأخذ ال COS.

$$\cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \frac{AH}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AH = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

إذاً: $AB = 2AH \Longrightarrow AB = 2\sqrt{3}$

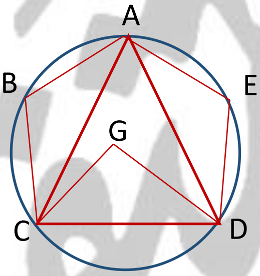
مثال هام: في الشكل المجاور ABCDE مخمس منتظم مرسوم في دائرة مركزها G وطول ضلع AE = 3.

1) احسب قياس الزاوية CGD

واستنتج قياس الزاوية CDG

2) احسب قياس الزاوية CAD.

3) احسب محيطه.



الحل:

1) قياس زاوية

$$CGD = \frac{360}{5} = 72°$$

المثلث CGD متساوي الساقين رأسه $72°$ إذاً قياس الزاوية $C\hat{D}G = 54°$ لأن زوايا القاعدة متساوية.

2) $C\hat{A}D = \frac{1}{2} C\hat{G}D$

لأنها محيطية تساوي نصف المركزية المشتركة بنفس القوس.

$$C\hat{A}D = \frac{1}{2}(72°) = 36°$$

3) $P = 5 \times 3 = 15\ cm$

أختر الإجابة الصحيحة:

1) **ABCD** رباعي دائري فيه قياس $B\hat{C}D = 115°$ فإن قياس الزاوية المقابلة لها $B\hat{A}D$ يساوي

A) $115°$ B) $25°$ C) $65°$

2) AB ضلع في المخمس المنتظم ABCE والذي مركزه O فإن قياس $A\hat{O}B$ يساوي:

A) $72°$ B) $75°$ C) $60°$

3) المستقيم D يمس الدائرة C الذي مركزها O ونصف قطرها R ويساوي 6 فإن بعد مركز الدائرة عن المستقيم b ، A = 6

A) يساوي 6 B) أقل من 6 C) أكثر من 6

4) في رباعي الدائري مجموع زاويتان متقابلتان يساوي

A) 100 B) 180 C) 90

5) مسدس مرسوم في دائرة مركزها O فإن قياس زاوية المركز $A\hat{o}B$

A) $60°$ B) $90°$ C) $72°$

6) دائرة مركزها O ، $\widehat{BC}$ قوس فيها قياسه $40°$ فإن قياس الزاوية المركزية BOC يساوي.

A) 20 B) 40 C) 80

ضع كلمة صح أو كلمة خطأ:

1) إذا كان ABCDEF مسدس منتظم فإن قياس الزاوية $C\hat{D}E$ يساوي $120°$. صح

2) إذا كان قياس $\hat{A} = 100°$ في رباعي دائري ABCD فإن قياس الزاوية المقابلة لها $\hat{C} = 80$. صح

3) تقاس قياس الزاوية المحيطية في دائرة بمقاس القوس المقابل لها. غلط

4) الزاوية المماسية تقاس بنصف القوس المقابل لها. صح

5) المماس يبعد عن مركز الدائرة بمقدار نصف القطر غلط

المجسمات

أولاً: أنواع مجسمات الفراغية

1) موشور ثلاثي

2) موشور رباعي إما مكعب أو متوازي المستطيلات.

3) الأسطوانة

4) هرم

5) مخروط

6) كرة

تذكرة بالقوانين:

أولاً: مساحات

مساحة المتوازي الأضلاع

$$S = \text{قاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

مساحة المستطيل:

$$S = \text{طول} \times \text{عرض}$$

مساحة معين:

$$S = \frac{\text{جداء قطريه}}{2}$$

مساحة مربع:

$$S = (\text{طول ضلع})^2$$

مساحة الدائرة:

$$S = \pi \cdot r^2$$

مساحة المثلث المتساوي الأضلاع:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

المثلث القائم:

$$S = \frac{\text{جداء ضلعين القائمتين}}{2}$$

مساحة المثلث:

$$S = \frac{\text{قاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$$

مساحة الشبه منحرف:

$$S = \text{قاعدة الوسطى} \times h$$

تذكرة بالقوانين:

ثانياً محيطات

محيط شكل رباعي

$$P = \text{مجموع أطوال أضلاعه}$$

محيط مستطيل

$$P = 2(\text{طول} + \text{عرض})$$

محيط مثلث

$$P = \text{مجموع أطوال أضلاعه}$$

محيط الدائرة:

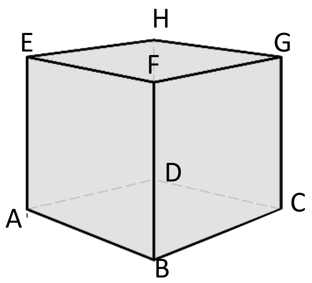
$$P = 2\pi \cdot r$$

أولاً مجسمات الفراغية

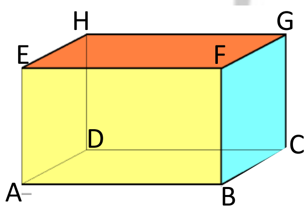
موشور القائم ثلاثي أو رباعي:

هو مجسم قاعدتاه طبوقتان ومتوازيتان وأوجه الجانبية مستطيلات أو مربعات ارتفاع الموشور هو المسافة بين القاعدتين.

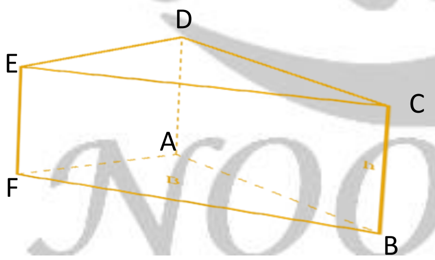
المكعب:



متوازي المستطيلات:



الموشور الثلاثي:



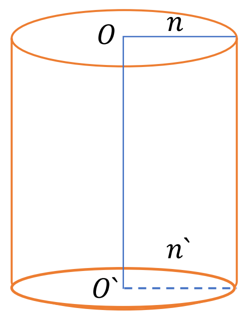
الأسطوانة الدورانية القائمة:

هو مجسم ناتج عن دوران مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة.

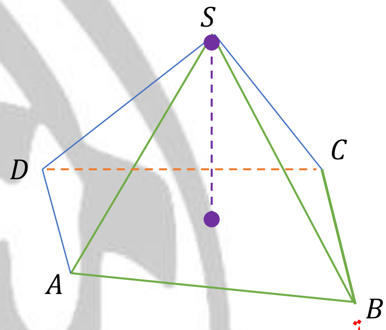
ارتفاع الأسطوانة هو مسافة بين مركزي قاعدتين

القاعدتين هما دائرتان طبوقتان ومتوازيتان.

الأسطوانة الدورانية:

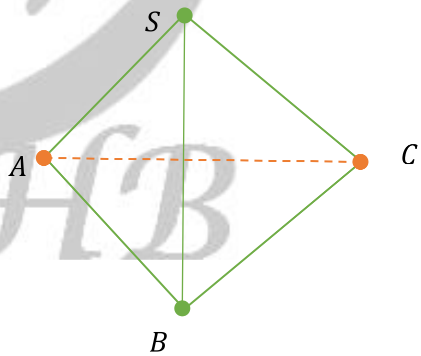


هرم: هو جسم مؤلف من مضلع يدعى القاعدة القاعدة ونقطة لا تنتمي إلى هذه القاعدة تدعى رأس الهرم أوجه جانبية عبارة عن مثلثات بعدد أضلاع القاعدة ارتفاع الهرم هو العامود النازل من الرأس على مستوي القاعدة



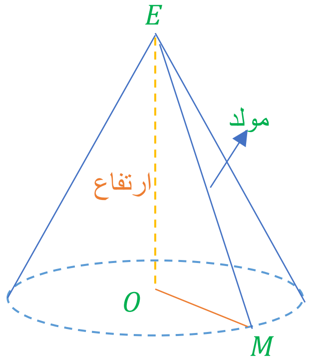
حالات خاصة :

1. الهرم المنتظم: هو هرم قاعدته مضلع منتظم ارتفاعه هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسه ومركز قاعدته
2. رباعي الوجوه المنتظم هو هرم قاعدته مثلث متساوي الأضلاع ويصح أن يكون قاعدة له



مخروط دوراني :

هو المخروط الذي يتولد من دوران مثلث قائم حول نفسه دورة كاملة القرص المتولد عن الدورات هو قاعدة مخروط ارتفاع المخروط هو المسافة بين رأس ومركز القاعدة



الكرة المجوف

السطح الكروي: هو مجموعة نقاط من الفراغ ذو مركزه O ونصف قطره R

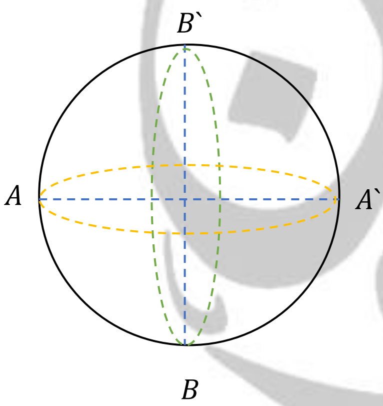
$$OM = R$$

كرة مليئ

مجسم كروي هو مجموع نقاط الفراغ مركزه O ونصف قطره R والذي يحقق $OM \leq R$

قطر الكرة : هو قطعة مستقيمة منتصفها مركز الكرة O وطرفاها نقطتان من الكرة

الدائرة الكبرى: قطرها يساوي قطر الكرة ومركزها هو مركز الكرة

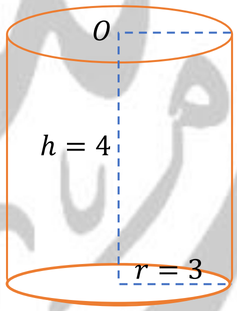


شكل الهندسي الفراغي	مساحة جانبية S_ℓ	مساحة الكلية أو مساحة السطح	حجم
الموشور القائم	$S_\ell = P \times h$	$S_T = S_\ell + 2s_b$	$V = S_b \times h$
متوازي مستطيلات	$S_\ell = P \times h$	$S_T = S_\ell + 2s_b$	$V = x.g.z$ جداء أبعاده الثلاث
مكعب	$S_\ell = 4x^2$	$S_T = 6x^2$	$V = x^3$
الأسطوانة	$S_\ell = 2\pi R \times h$	$S_T = S_\ell + 2\pi R^2$	$V = \pi R^2 \times h$
الهرم	---------	-----------	$V = \frac{1}{3} S_b \times h$
مخروط	-------	--------	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \times h$
الكرة	-----	$S = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

أمثلة شاملة

في الشكل المجاور أسطوانه دورانية نصف قطرها $r = 3$ وارتفاعها $h = 4$ **ومطلوب**:

1. احسب محيط قاعدته الأسطوانة ومساحتها جانبية
2. احسب مساحة قاعدة الأسطوانة ثم احسب حجمها
3. احسب $\tan\theta$



الحل:

1. $P = 2\pi r$

$$P = 2\pi \times 3$$
$$P = 6\pi \ \ cm$$
$$S_\ell = P \times h = 6\pi \times 4$$
$$S_\ell = 24\pi \ \ cm$$

2. $S_b = \pi . r^2 \Rightarrow \pi(3)^2 = 9\pi \ \ cm^2$

$$V = S_b \times h = 9\pi \ cm^2$$

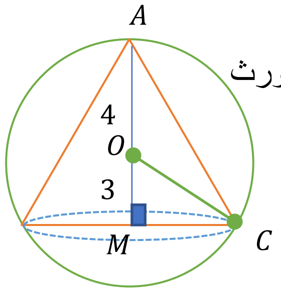
3. $\tan(\theta) = \frac{3}{4}$

مثال2: في الشكل المجاور كرة مركزها O ونصف قطرها $OA = 4$ بداخلها مخروط دوراني رأسه A وقاعدته دائرة مركزها M تبعد عن مركز الكرة مسافة $OM = 2$

والمطلوب:

1. احسب كلاً من MC و AC
2. احسب $\sin(O\hat{C}M)$ واستنتج قياس الزاوية $O\hat{C}M$
3. احسب إذا علمت أن حجم المخروط يعطى بالعلاقة $V = \frac{3}{4}R^2 h$ احسب V

الحل:



1. لحساب MC نطبق فيثاغورث

في المثلث OMC

$$OM^2 + MC^2 = OC^2$$
$$4 + MC^2 = 16$$
$$MC^2 = 16 - 4$$
$$MC^2 = 12 \ \Longrightarrow MC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

لحساب حسب مبرهنة فيثاغورث بالمثلث AMC

$$AM^2 + MC^2 = AC^2$$
$$AC^2 = 36 + 12 = AC^2 = 48$$
$$AC = 4\sqrt{3}$$

2. $\sin(O\hat{C}M) = \frac{OM}{OC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\sin(O\hat{C}M) = \frac{1}{2}$$

نستنتج أن

$$O\hat{C}M = 30°$$

3. $V = \frac{\pi}{3} . R^2 . h = \frac{\pi}{3} \times \left(2\sqrt{3}\right)^2 \times 6$

$$V = \frac{\pi}{3} \times 12 \times 6 = 24\pi \ cm^3$$

4. طلب إضافي احسب حجم الكرة واحسب مساحة السطح للكرة

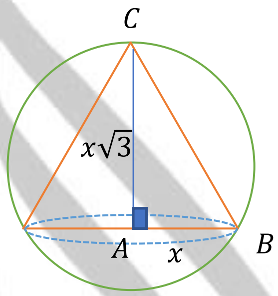
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \times 64$$
$$V = \frac{256}{3}\pi \ cm^3$$
$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 16 = 64\pi \ cm^2$$

مثال3: في الشكل المجاور مخروط دوراني ارتفاعه

المطلوب: $AC = x.\sqrt{3}$

1. أوجد $\tan(A\hat{C}B)$ واستنتج قياس الزاوية ACB
2. احسب طول CB بدلالة x
3. إذا علمت مساحة المثلث ABC تساوي $18\sqrt{3}$ أثبت أن $x = 6$
4. احسب حجم المخروط عندما $x = 6$

الحل: .1



$$\tan(A\hat{C}B) = \frac{x}{x\sqrt{3}}$$

$$\tan(A\hat{C}B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

إذاً قياس الزاوية $A\hat{C}B = 30°$

2. حسب مبرهنة الفيثاغورث بالمثلث ACB

$$AC^2 + AB^2 = BC^2$$
$$BC^2 = 3x^2 + x^2 = BC^2 = 4x^2$$
$$BC = 2x$$

$$S_{ABC} = \frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2} = \frac{AC \times AB}{2}$$

$$\frac{18\sqrt{3}}{1} = \frac{x\sqrt{3} \times x}{2}$$

طرفين بالوسطين

$$x^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$
$$x^2 = 36 \qquad x = 6$$

.4

$$V = \frac{1}{3}.S.h$$

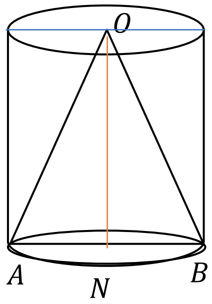
$$V = \frac{1}{3}\pi.12^2 \times h = \frac{1}{3} \times \pi.(6)^2 \times 6\sqrt{3}$$

$$V = 72\pi\sqrt{3}cm^2$$

مثال 4:

في الشكل المجاور أسطوانة دورانية ارتفاعها $h = ON$ ونصف قطر قاعدتها $r = NB = 2\sqrt{3}$ ومخروط دوراني رأسه O يشترك معهما في القاعدة وحجمه $V = 40\pi$ فإذا علمت أن حجم مخروط يعطى بالعلاقة $V = \frac{\pi}{3}r^2.h$ والمطلوب

1. أثبت أن ارتفاع الأسطوانة $h = 10$ واحسب حجمها $V`$
2. احسب حجم جزء المحصور في الأسطوانة والمخروط



الحل: .1

$$V = \frac{\pi}{3}r^2.h$$

$$40\pi = \frac{\pi}{3}.12 \times h$$

$$40\pi = 4\pi \times h$$

$$h = 10$$

$$V`_{\text{حجم الاسطوانة}} = S_b \times h = \pi.r^2 \times h$$

$$V` = 12\pi \times 10 = 120\pi\ cm^2$$

2. $V_{\text{الجزء المحصور}} = V`_{\text{اسطوانة}} - V_{\text{مخروط}}$

$$V_{\text{الجزء محصور}} = 120\pi - 40\pi = 80\pi\ cm^3$$

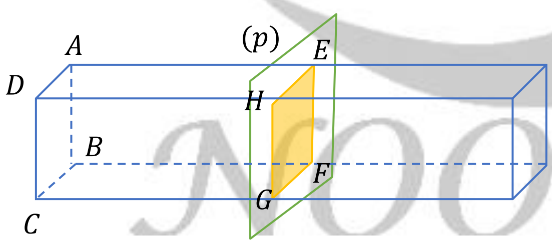
ثانياً: مقاطع المجسمات

1. المكعب :عند قطع مكعب بمستوي يوازي وجه فينتج الشكل مربع طبوق على وجه
   - عند قطع مكعب بمستوي يوازي أحد أحرفه فينتج مستطيل

ثالثاً: مقاطع المجسمات

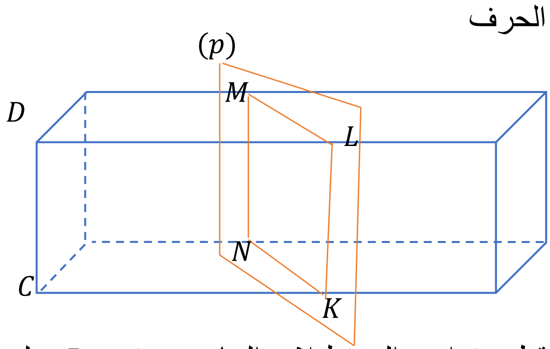
مقطع متوازي مستطيلات

بمستوي يوازي أحد الأوجه المقطع الناتج هو مستطيل يطابق ذلك الوجه



أن مقطع متوازي المستطيلات السابق بمستوي P يوازي الوجه $ABCD$ هو مستطيل $EFGH$ طبوق على المستطيل $ABCD$

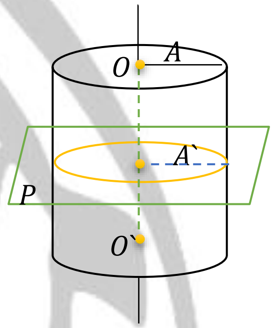
بمستوي يوازي أحد الأحرف هو مستطيل أحد بعديه يساوي ذلك الحرف



إن مقطع متوازي المستطيلات السابق بمستوي P يوازي الحرف CD هو مستطيل $MNKL$ فيه $KL = NM = CD$

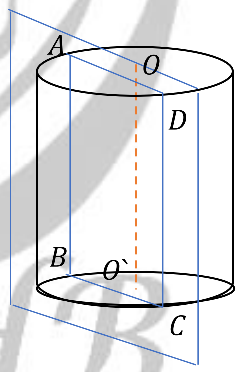
مقطع أسطوانة

مقطع أسطوانة بمستوي يوازي قاعدتها أو يعامد محورها هو دائرة تطابق القاعدة



إن مقطع الإسطوانة المجاور بمستوي يوازي قاعدتها هي دائرة طبوقة على القاعدة

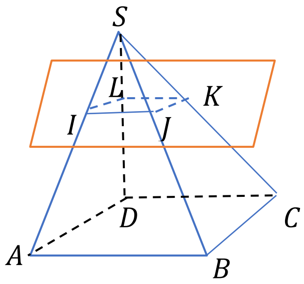
بمستوي يوازي هو محورها مستطيل أحد بعديه يساوي ارتفاع الأسطوانة



إن مقطعالاسطوانة المجاورة بمستوي يوازي المحور هو مستطيل $ABCD$ فيه $AB = CD = OO`$

مقطع هرم

إن مقطع هرم بمستوي يوازي قاعدته هو مضلع مصغر عن القاعدة



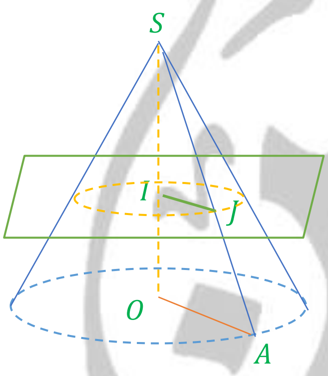
المقاطع $IJKL$ مصغر عن القاعدة $ABCD$ ونسبة التصغير

$$K = \frac{\text{ارتفاع هرم صغير}}{\text{ارتفاع هرم كبير}}$$

الجزء المحصور بين المقطع والقاعدة يدعى جذع الهرم

مقطع مخروط دوراني

إن مقطع مخروط دوراني بمستوي يوازي قاعدته هو دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة



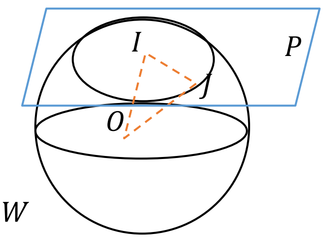
الدائرة التي نصف قطرها IJ هي تصغير عن قاعدة المخروط ونسبة التصغير

$$K = \frac{SI}{SO} = \frac{IG}{OA} = \frac{SG}{SA}$$

الجزء المحصور بين المقطع القاعدة يدعى جذع المخروط
يمكننا استخدام مبرهنة النسب الثلاث لكتابة تناسب

مقطع كرة

إن مقطع كرة بمستوي هو دائرة إن مقطع مجسم كروي بمستوي هو قرص دائري
عندما يمر المستوي القاطع بمركز الكرة فالمقطع هو دائرة كبرى أما إذا كان مماس الكرة فالمقطع هو نقطة

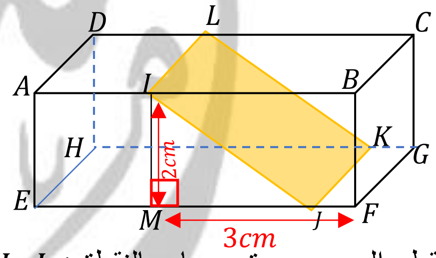


IJ هو نصف قطر دائرة المقطع OJ هو نصف قطر الكرة
المثلث IOJ قائم في I مركز الدائرة

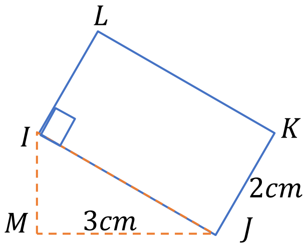
$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات و
$GC = 2cm, FG = 2.5\ cm\ , EF = 5cm$
و I نقطة تحقق $AI = 1.5\ cm$
و J نقطة تحقق $FI = 0.5\ cm$
قطع هذا المجسم بمستو مار بالنقطتين I و J وموازي للحرف $[BC]$

1. ماطبيعة المقطع ؟
2. ارسم المقطع بأبعاده التامة

الحل:

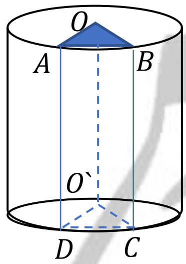


1. مقطع المجسم بمستوي مار بالنقطتين I و J مواز للحرف $[BC]$ هو مستطيل $IJKL$ ويكون:
$IL = BC = FG = 2.5cm$
2. نرمز الى المسقط I على $[EF]$ بالرمز M
فيكون$[IJ]$ وتراً في المثلث IMJ القائم في M
لدينا:
$IA = AE = 2cm$
و
$MJ = EF - (EM + JF)$
$= 5 - (1.5 + 0.5) = 3cm$
*نرسم المثلث IMJ القائم في M ثم نرسم على وتره وخارجه المستطيل $IJKL$ بحيث يكون طول $[JK]$ مساوياً $2.5\ cm$.

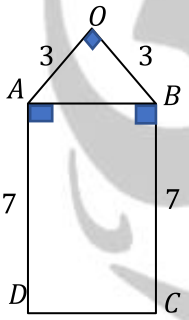


الشكل المرافق يمثل أسطوانة دورانية ارتفاعها $3\ cm$ ونصف قطر قاعدتها $3\ cm$
$ABCD$ هو مقطع هذه الأسطوانة بمستو يوازي محورها $OO`$

1. ما طبيعة هذا المقطع؟
2. نعلم أن $A\hat{O}B = 90°$ ارسم هذا المقطع بأبعاده الثمانية
3. احسب طول AB .



1. المقطع $ABCD$ هو مستطيل
2. المثلث AOB قائم في O ومتساوي الساقين نرسمه ثم نرسم على وتره المستطيل $ABCD$ حيث
$AB = OO` = 7$

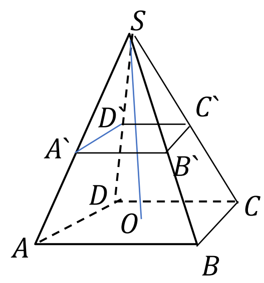


3. حساب AB حسب مبرهنة فيثاغورث من المثلث القائم AOB فيكون
$AB = 3\sqrt{2}cm$

$SABCD$ هرم منتظم رأسه S وقاعدته $ABCD$ مربع طول ضلعه $12cm$ و $SO = 6cm$ و $SG = 9cm$
مقطع الهرم بالمستوي المار بالنقطة G موازياً القاعدة هو المربع $\grave{A}\grave{B}\grave{C}\grave{D}$.

1. احسب V_1 حجم الهرم $SACD$

2. احسب V_2 حجم الهرم $SA`B`C`D`$ ثم استنتج حجم جذع الهرم



الحل:

1. $V_1 = \frac{1}{3}S.h$

$$h = SO = 12$$
$$S = AB^2 = 36$$

ومنه

$$V_1 = \frac{1}{3} \times 36 \times 12$$
$$= 144\ cm^2$$

2. هرم $SA`B`C`D`$ هو تصغير للهرم $SABCD$ بنسبة $K =$

$$\frac{SG}{SO} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

ومنه $V_2 = K^3 \times V_1$

أي

$$V_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 144$$
$$= 60.75\ cm^3$$

حجم جذع الهرم هو الفرق بين حجمي الهرم $SABCD$ و $SA`B`C`D`$ أي

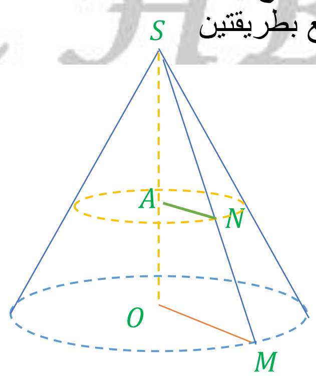
$$V = V_1 - V_2$$
$$144 - 60.75 = 83.25\ cm^3$$

مخروط دوراني رأسه s وقاعدته قرص دائري مركزه O وارتفاعه $10\ cm$ ونصف قطر قاعدته $4\ cm$

A نقطة من SO تحقق $SA = 6\ cm$

إن مقطع مخروط بمستوي يوازي القاعدة في الدائرة التي نصف قطرها AM

1. احسب نصف قطر المقطع
2. احسب مساحة المقطع بطريقتين



الحل:

1.

$$\frac{SA}{SO} = \frac{AN}{OM}$$
$$\frac{6}{10} = \frac{AN}{4} \Longrightarrow AN = \frac{24}{10} = 2.4cm$$

2. المقطع هو تصغير عن قاعدة المخروط ونسبة تصغيره

$$K = \frac{SA}{SO} = \frac{6}{10}$$
$$S = \pi(OM)^2$$
$$= 16\pi\ cm^2$$

ومنه

$$S` = K^2 \times S$$

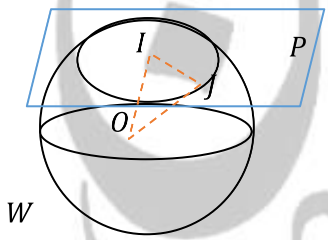
إذا

$$S` = \left(\frac{6}{10}\right)^2 \times 16\pi$$
$$= 5.76\ cm^2$$

لدينا سطح كروي مركزه O ونصف قطره $3\ cm$، I نقطة تحقق $OI = 2\ cm$ وليكن (P) مستوياً يمر بالنقطة I ويعامد المستقيم (OI)

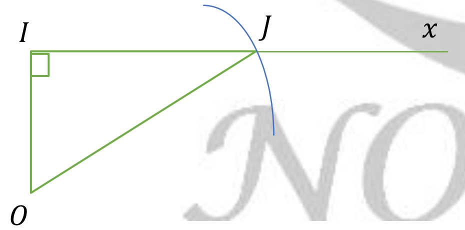
ولتكن J نقطةمشتركة بين المستوي (P) والسطح W

1. ارسم المثلث OIJ بقيم تامة الأطوال
2. ارسم المقطع بأبعاده التامة
3. احسب نصف قطر المقطع



الحل:

نرسم ضلعين قائمين في I ثم نعين $IO = 2cm$ على أحدهما



1. نفتح الفرجار $3\ cm$ ونثبته في O ونرسم قوس يقطع الضلع القائمة الأخرى في J
2. نرسم دائرة نصف قطرها IJ
3. حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم في OIJ نجد أن I

$$IJ = \sqrt{5}$$