الدالة الأسية

نقول بأن الدالة أسية إذا كان الأس «متغير»

مثال: أي الدوال التالية أسية
① $ص = س^٢$ ② $ص = ٢^س$

الحل

① $ص = س^٢$ ليست أسية لأن الأس «عدد»

② $ص = ٢^س$ دالة أسية لأن الأس متغير

③ $ص = ٧^{جاس}$ ④ $ص = هـ^{س^٢}$
⑤ $ص = س^{جاس}$ ⑥ $ص = (جتاس)^{ظاس}$

الحل

الدوال من المثالية ١ ، ٤ ، ٢ أسية ولكن الأس «عدد»

الدوال من المثالية ٥ ، ٦ أسية ولكن الأس «متغير»

∴ يمكن القول بأن الدالة الأسية تنقسم إلى نوعين

① الأساس «عدد»
$ص = ٥^{٧س}$
$ص = ٢^{\sqrt{٣س}}$
$ص = هـ^{س^٢ + ظاس}$

② الأساس «متغير»
$ص = س^{٤س}$
$ص = س^{جاس}$
$ص = (س + ١)^{٧س}$

٢٠١٤م

مثال: إذا كانت $د(س) = لو_هـ(س^٢ + م)$ ، $دَ(٤) = ١$ فإن $م = $ ——

الحل

$دَ(س) = \frac{٢س}{س^٢ + م}$

$∴ دَ(٤) = \frac{٢ \times ٤}{٤^٢ + م}$

$١ = \frac{٨}{١٦ + م}$ ∴ $١٦ + م = ٨$

∴ $م = -٨$

٢٠١٥م

مثال: أكمل العبارات

① إذا كانت $ص = لو_هـ س^٢$ فإن $صَ = $ ——

② $د(س) = هـ^٢ + لو_هـ جاس$ فإن $دَ(\frac{\pi}{٤}) = $ ——

③ $د(س) = لو_هـ \sqrt[٣]{س^٢ + ٥}$ ، $دَ(س) = $ ——

④ إذا كانت $د(س) = لو_هـ هـ ل$ ، $دَ(١) = ١$ فإن $ل = $ ——

ملاحظة: $هـ^{لو هـ} = 1$

$هـ^{2 لو س} = هـ^{لو س^2} = س^2$

مثال: لتكن $ص = هـ^س$ أوجد صَ

الحل

إذا كان الأس ليس له عدد في الدالة الأسية نستخدم الحل :-

صَ = الدالة نفسها × مشتقة الأس × لو الأساس

$صَ = هـ^س \times 1 \times لو هـ$

$صَ = هـ^س$

مثال: $ص = 2^س$

$صَ = 2^س \times 1 \times لو 2$

مثال: إذا كانت $د(س) = 2^{جتا س}$ فإن $دَ(\frac{\pi}{2}) = $ ____

الحل

$دَ(س) = 2^{جتا س} \times - جا س \times لو 2$

$دَ(\frac{\pi}{2}) = 2^{جتا \frac{\pi}{2}} \times - جا \frac{\pi}{2} \times لو 2$

$= 2^{صفر} \times -1 \times لو 2$

$= 1 \times -1 \times لو 2 = - لو 2$

مثال: $ص = هـ^{2 لو \sqrt{س}}$

صَ = ____

الحل

$\because ص = هـ^{لو (\sqrt{س})^2}$

$\therefore ص = هـ^{...}$

$\therefore ص = (\sqrt{س})^2 = س$

$\therefore صَ = 1$

مثال: $ص = هـ^{7س + ظا س}$

صَ = ...

الحل

$صَ = هـ^{7س + ظا س} \times (7 + قا^2 س) \times \overset{1}{لو هـ}$

مثال: ضع علامة ✓ أو ×

① إذا كانت $د(س) = هـ^{لو جا س}$ فإن $دَ(س) = جا س ظتا س$ (   )

② $ص = هـ^{4 لو س}$ ، $صَ = 4س$ (   )

③ إذا كانت $د(س) = هـ^س$ فإن $دَ(لو 2) = 2$ (   )

الحل

①: $د(س) = هـ^{لو جا س}$ $\therefore د(س) = جا س$

$\therefore دَ(س) = جتا س$ #

$\because دَ(س) = جا س \times ظتا س$

$= جا س \times \frac{جتا س}{جا س} = جتا س$

∴ العبارة صحيحة (✓)

حل آخر: $\because د(س) = هـ^{لو جا س}$

$دَ(س) = هـ^{لو جا س} \times \frac{جتا س}{جا س} \times لو هـ$

$= جا س \times ظتا س$

$= جا س ظتا س$ (✓)

② $ص = هـ^{4 لو س} \Leftarrow ص = هـ^{لو س^4}$

$\therefore ص = س^4$ $\therefore صَ = 4س^3$ (×)

⑤ $د(س) = هـ^{س}$

$د'(لو ٢) = هـ^{لو ٢} = ٢$ "درس ١١"

مثال اذا كانت

$ص = هـ^{١ - لو س}$

اثبت أن $ص' = \frac{-هـ}{س^{٢}}$

الحل

اذا كانت "هـ" أس لها حاصل جمع أو طرح مع موجود "لو" في هذه الحالة يمكن توزيع "هـ" لكي نختصر

$هـ^{لو} = ١$

∴ $ص = هـ^{١ - لو س}$ ∴ $ص = هـ^{١} \times هـ^{-لو س}$

$ص = هـ \times هـ^{لو س^{-١}}$

∴ $ص = هـ\, س^{-١}$

$ص' = هـ \times -١\, س^{-٢}$

$ص' = \frac{-هـ}{س^{٢}}$

تدريب $ص = هـ^{س + لو س}$

أوجد $ص'$

مثال $ص = هـ^{س} + س^{هـ}$

$ص' = ...$

الحل

$ص' = هـ^{س} + هـ\, س^{هـ - ١}$

مثال $د(س) = س\, هـ^{س}$

أوجد $د'(٠)$

الحل

$د'(س) = س\, هـ^{س} + هـ^{س} \times ١$

$د'(٠) = صفر \times هـ^{صفر} + هـ^{صفر} = ١$

جاس

تدريب اذا كانت $د(س) = هـ^{جاس}$

فإن $د'(\frac{\pi}{6}) = \_\_\_\_$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، هـ ، $\frac{\sqrt{3}\,هـ}{2}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هـ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$

---

② $د(س) = هـ^{٢ لو س}$ فإن $د'(س) = \_\_\_$

مثال اذا كانت $د(س) = ٢س + هـ^{س}$

وكانت $د'(س) = ١٠$ فإن $س = \_\_\_$

الحل

$د'(س) = ٢ + هـ^{س}$

$١٠ = ٢ + هـ^{س}$ ∴ $هـ^{س} = ٨$

بأخذ "لو" للطرفين لحذف هـ

$لو هـ^{س} = لو ٨$ ∴ $س = لو ٨ = ...$

تدريب ⑥ اذا كانت

$ص = ٥^{س} \times ٢^{س}$

فإن $ص' = \_\_\_$

---

⑥ اذا كانت $ص = هـ^{قا}\pi$

فإن $ص' = \_\_\_$

Scanned by CamScanner

ثانياً عندما الدالة الأسية أسها متغير

مثال إذا كانت $\text{ص} = \text{س}^{\text{جاس}}$

أوجد صَ

الحل

$\text{جاس} \leftarrow$ الأس

$\therefore \text{ص} = \text{س}^{\text{س}}$ ← الأساس

إذا كان الأساس متغير في الدالة الأسية

طريقة الحل:

① نأخذ "لو" للطرفين

② نشتق الطرفين بالنسبة لـ س

③ نضع صَ بمفردها

$\therefore \text{ص} = \text{س}^{\text{جاس}}$ بأخذ "لو"

$\text{لو ص} = \text{لو س}^{\text{جاس}}$

$\text{لو ص} = \text{جاس لو س}$ نشتق الطرفين

$\frac{\text{صَ}}{\text{ص}} = \text{جاس} \times \frac{1}{\text{س}} + \text{لو س} \times \text{جتاس}$

بالضرب $\times$ ص لكي نضع صَ بمفردها

$\therefore \text{صَ} = \text{ص}\left(\frac{\text{جاس}}{\text{س}} + \text{جتاس لو س}\right)$

$= \text{س}^{\text{جاس}}\left(\frac{\text{جاس}}{\text{س}} + \text{جتاس لو س}\right)$

حل آخر

عملية تحويل الدالة الأسية التي أسها متغير إلى دالة أسية أساسها هـ

كالتالي: الأس لو الأساس

$\text{ص} = \text{هـ}$

ثم نشتق

جاس لو س

$\therefore \text{ص} = \text{هـ}$

$\text{صَ} = \text{هـ}^{\text{جاس لو س}} \times \left(\text{جاس} \times \frac{1}{\text{س}} + \text{لو س} \times \text{جتاس}\right)$

مثال $\text{ص} = \text{س}^{\text{٥س}}$ أوجد صَ

الحل

$\text{لو ص} = \text{٥س لو س}$

$\frac{\text{صَ}}{\text{ص}} = \text{٥س} \times \frac{1}{\text{س}} + \text{لو س} \times ٥$

$\therefore \text{صَ} = \text{ص}\,(٥ + ٥\,\text{لو س})$.

تدريب $\text{ص} = (\text{ظاس})^{\text{جتاس}}$

أوجد صَ

مثال لتكن $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{م س}}$

حيث $\text{صً} - ٥\,\text{صَ} + ٦\,\text{ص} = ٠$

أوجد قيم م

الحل

$\text{صَ} = \text{هـ}^{\text{مس}} \times \text{م}$

$\text{صً} = \text{هـ}^{\text{مس}} \times \text{م} \times \text{م} = \text{هـ}^{\text{مس}} \times \text{م}^2$

نعوض بالطرف الأيمن

$\text{صً} - ٥\,\text{صَ} + ٦\,\text{ص} = ٠$

$\text{هـ}^{\text{مس}} \times \text{م}^2 - ٥\,\text{هـ}^{\text{مس}} \times \text{م} + ٦\,\text{هـ}^{\text{مس}} = ٠$

عامل مشترك

$\text{هـ}^{\text{مس}}(\text{م}^2 - ٥\text{م} + ٦) = ٠$

$\text{هـ}^{\text{مس}}(\text{م} - ٣)(\text{م} - ٢) = ٠$

إما $\text{هـ}^{\text{س}} \neq ٠$ لأن الدالة الأسية $\neq$

$\therefore (\text{م} - ٣)(\text{م} - ٢) = ٠$

$\text{م} = ٣ \,/\, \text{م} = ٢$

مثال إذا كانت

$\text{د(س)} = ٣\text{س} - \text{هـ}^{٢\text{س}}$

فأوجد $\text{د}(\text{لو}٢) =$ ——

تدريب إذا كانت $ص = ٢ هـ^{٣س} - ٣س$
أوجد قيم $س$ التي تجعل $ص'' =$

---

⑤ إذا كانت $هـ^{ص} = (جا س)^{٣}$
أثبت أن $ص' = ٣ ظتا س$

تمارين

① إذا كانت $ص = جا س جتا س$
أثبت أن $ص'' + ٤ص = ٠$

الحل

مثل هذه التمارين نشتق مرتين ونعوض بالطرف الأيمن لكي نحصل على الطرف الأيسر

$\because ص = جا س جتا س$ « قانون »
$\therefore ص = \frac{١}{٢} جا ٢س$
$ص' = \frac{١}{٢} جتا ٢س \times ٢$
$\therefore ص' = جتا ٢س$
$ص'' = - جا ٢س \times ٢ = -٢ جا ٢س$

نعوض بالطرف الأيمن عن $ص''$ ، $ص$

$ص'' + ٤ص = -٢ جا ٢س + ٤ \times \frac{١}{٢} جا ٢س$
$= -٢ جا ٢س + ٢ جا ٢س = صفر$

تدريب إذا علمت أن $ص = جتا س + جا س$
أثبت أن $ص'^{٢} + ص^{٢} = ٢$

---

④ إذا كانت $ص = س + \frac{١}{س}$
أثبت أن $س^{٢} ص'' + س ص' = ص$.

الحل

$ص' = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، $ص'' = \frac{٢}{س^{٣}}$

نعوض

$س^{٢} ص'' + س ص' = س^{٢} \times \frac{٢}{س^{٣}} + س \times (١ - \frac{١}{س^{٢}})$
$= \frac{٢}{س} + س - \frac{١}{س} = \underbrace{\frac{١}{س} + س}_{ص}$
$\therefore س^{٢} ص'' + س ص' = ص$

---

⑤ لتكن $ص = هـ^{١ - لو س}$ أثبت أن
$س^{٢} ص'' + ٢س ص' + ص = ٠$

---

⑤ إذا علمت أن $ص = هـ^{أس + س}$
وكانت $ص' = ٠$ أوجد أ

---

⑥ إذا كانت $ص = جا(لو س)$
أثبت أن $س^{٢} ص'' + س ص' + ص = ٠$

مشتقة تركيب دالتين

إذا كان لدينا الدالتين

د(س) ، هـ(س)

فإن

(1) $(د \circ هـ)'(س) = د'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

تقرأ تركيب

طريقة الحل

(2) أي أننا نبدأ باشتقاق الدالة "د" ثم نعوض بدل كل س بالدالة الأخرى

(3) نشتق الدالة الثانية هـ(س) بدون تعويض

توضيح

$د'(س) = ---$ ، $هـ'(س) = ---$

نشتق ثم نعوض بدل كل س

$د'(هـ(س)) = ---$

$\therefore (د \circ هـ)'(س) =$ حاصل ضربهما

مثال: لتكن $د(س) = س^2$ ، $هـ(س) = جاس$

أوجد

(1) $(د \circ هـ)'(س)$

(2) $(د \circ هـ)'(\frac{\pi}{2})$

الحل

$\therefore (د \circ هـ)'(س) = د'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$د'(س) = 2س$ نعوض بالدالة الأخرى

$د'(هـ(س)) = 2 جاس$

$هـ'(س) = جتاس$

$= 2 جاس جتاس$

(2) $(د \circ هـ)'(\frac{\pi}{2}) = 2 جا\frac{\pi}{2} جتا\frac{\pi}{2}$

$= 2 \times 1 \times صفر = صفر$

ملاحظة

$(هـ \circ د)'(س) = هـ'(د(س)) \times د'(س)$

الحل الفارغ:

$(ث \circ ل)'(س) = ---$

مثال: لتكن $هـ(س) = 3س$

$ق(س) = س^2 + 1$

فإن $(هـ \circ ق)'(-2) = ---$

الحل

$(هـ \circ ق)'(س) = هـ'(ق(س)) \times ق'(س)$

نشتق ثم نعوض

$هـ'(س) = 3$

$هـ'(ق(س)) = 3$

نشتق بدون تعويض

$ق'(س) = 2س$

$\therefore (هـ \circ ق)'(س) = 3 \times 2س$

$(هـ \circ ق)'(-2) = 6 \times -2 = -12$

مثال: $ل'(س) = \frac{1}{1+س^2}$ ، $ق(س) = ظاس$

فإن $(ل \circ ق)'(س) =$ ---

الحل

$(ل \circ ق)'(س) = ل'(ق(س)) \times ق'(س)$

$\therefore ل'(س) = \frac{1}{1+س^2}$

نعوض

$ل'(ق(س)) = \frac{1}{1+ظا^2س}$

$ق'(س) = 1 + ظا^2س$

$\therefore (ل \circ ق)'(س) = \frac{1}{1+ظا^2س} \times 1 + ظا^2س$

$= 1$

تدريب إذا كانت $د'(س) = ٥$
$ل'(س) = ١ + س^٢$
فإن $(د \circ ل)'(١) = ...$

مثال ٢٠١٥م اختر الإجابة الصحيحة
إذا كانت $د(س) = هـ^{س}$ ، $ر(س) = لو_{هـ} س$
فإن $(د \circ ر)''(س) = ...$
(١ ، صفر ، -١ ، ٢)

الحل
$\because (د \circ ر)'(س) = د'(ر(س)) \times ر'(س)$
$د'(س) = هـ^{س}$
$\therefore د'(ر(س)) = هـ^{لو_{هـ} س} = س$ | $ر'(س) = \frac{١}{س}$
$\therefore (د \circ ر)'(س) = س \times \frac{١}{س}$
$(د \circ ر)'(س) = ١$
$\therefore (د \circ ر)''(س) = صفر$

تدريب $ر(س) = لو_{هـ} س$ ، $د(س) = هـ^{س^٢}$
فإن $(د \circ ر)'(\frac{١}{٢}) = ...$

مثال لتكن $ر(س) = لو_{هـ} س$ ، $د(س) = جا س$
فإن $(د \circ ر)'(١) = ...$

مثال $د(س) = ٢\sqrt{س}$
$ل(س) = لو قا س$
أوجد $(د \circ ل)'(\frac{\pi}{٣})$

قاعدة التسلسل

إن قاعدة التسلسل تحتاج إلى توفر دالتين على الأقل مثل

$ص = ع^٢$ ، $ع = (س^٣ + ٥س)$

ولكن نحن نطلب $\frac{دص}{دس} = حت$
هناك طريقتين

(١) قاعدة التسلسل — (٢) التعويض

التعويض
أي تحويل الدالتين إلى دالة واحدة عن طريق التعويض عن قيمة ع

(١) قاعدة التسلسل

$$\frac{دص}{دس} = \boxed{\frac{دص}{دع}} \times \frac{دع}{دس}$$

وكذلك "ع"

قبل أن نشتق الدالة الأولى علينا التأكد من أن "ص" وحدها وأسها ١

دص/دع = ٢ع | دع/دس = ٢س + ٥

∴ دص/دس = ٢ع × (٢س + ٥)

نعوض عن ع

= ٢(س² + ٥س) (٢س + ٥)

حل أخر :-

∵ ص = ع² ، ع = س² + ٥س

نعوض عن قيمة ع

∴ ص = (س² + ٥س)²

∴ دص/دس = ٢(س² + ٥س) × (٢س + ٥)

مثال إذا كانت ص = قاع ، ع = س²

أوجد دص/دس

الحل

∵ ص = قاع ، ع = س²

نعوض

∴ ص = قاس²

∴ دص/دس = قاس² ظاس² × ٢س

حل أخر :-

دص/دس = دص/دع × دع/دس

دص/دع = قاع ظاع | دع/دس = ٢س

∴ دص/دس = قاع ظاع × ٢س

= قاس² ظاس² × ٢س

مثال ص = ع لوع ، ع = س²

أوجد دص/دس

الحل

دص/دس = دص/دع × دع/دس

دص/دع = ع × ١/ع + لوع | دع/دس = ٢س

دص/دع = ١ + لوع

∴ دص/دس = (لوع + ١) × ٢س

= (لوس² + ١) × ٢س

مثال أوجد دص/دس حيث

ص² = ع ، لوع = س²

الحل

دص/دس = دص/دع × دع/دس

∵ ص² = ع بأخذ الجذر

ص = √ع

∴ دص/دع = ١/(٢√ع)

نوجد لوع = س² بأخذ "هـ" للطرفين

∴ ع = هـ^س²

∴ دع/دس = هـ^س² × ٢س

∴ دص/دس = ١/(٢√ع) × هـ^س² × ٢س

= ١/√(هـ^س²) × هـ^س² × س

مثال ص = لوقاع ، ع = هـ^س

أوجد دص/دس

مثال $ع = هـ^{ص}$ ، $ص = س^{٢} + ٢س$

أوجد $\frac{دع}{دس}$

الحل

$\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دص} \times \frac{دص}{دس}$

$\frac{دع}{دص} = هـ^{ص}$ ، $\frac{دص}{دس} = ٢س + ٢$

$\therefore \frac{دع}{دس} = هـ^{ص} \times (٢س + ٢)$

$= هـ^{س^{٢} + ٢س} \times (٢س + ٢)$

تمرين $ص = لوع$ ، $س = \frac{١}{ع}$

أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س}$

تمارين ① $ص = جاع^{٢}$ ، $ع - س = ١$

أوجد $\frac{دص}{دس}$

② $ص = هـ^{٤ع}$ ، $ع = جتا ٥س$

أوجد $\frac{دص}{دس}$

③ $ص = لو \underline{قاع}$ ، $لوع = -لوس$

أوجد $\frac{دص}{دس}$

مثال لتكن $ص = \frac{١}{ع}$ ، $س = ع$

أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س^{٢}}$

الحل

علينا أن نستخدم التعويض

$\because ص = \frac{١}{ع}$ ، $س = ع$

$\therefore ص = \frac{١}{س}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س^{٢}}$

مثال إذا كانت $ص = \frac{ع^{٢} + ١}{ع}$ ، $س = \frac{ع}{ع^{٢} + ١}$

أثبت أن

$\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س^{٢}}$

مثال إذا كانت $م ص = ع$ ، $ع = س^{٢} + ٤س$

، $\frac{دع}{دس} = ٣٢$ أوجد قيمة $م$ عندما $س = ٢$

الحل

$\because \frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دص} \times \frac{دص}{دس}$

$٣٢ = م \times (٢س + ٤)$ نضع $س = ٢$

$٣٢ = م \times ٨$

$\therefore م = ٤$

تمرين إذا كانت

$ص = ع^{٢} + م ع$ ، $ع = لوس$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{٥}{م}$

أوجد قيمة $م$ عندما $ع = ١$

مثال: إذا كان لوص = لوع

$ع = \sqrt{جتا س}$ أوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

∵ لوص = لوع ∴ ص = ع ∴ $\frac{دص}{دع} = 1$

$\sqrt{ع} = جتا س$

$ع = جتا^2 س$

$\frac{دع}{دس} = 2 جتا س \times -جا س$

$\frac{دص}{دس} = -2 جتا س جا س$

تمارين

① إذا كانت ص = جا ع ، س = جتا ع أوجد $\frac{دص}{دس}$ عندما $ع = \frac{\pi}{2}$

② إذا كانت $ص = س^2 + 1$ ، $ع = \sqrt{س^2 - 1}$ أثبت أن $\frac{دص}{دع} = 2ع$

③ لتكن $ص = \sqrt{ع^2 - 1}$ ، س = ع أوجد $\frac{دص}{دس}$

④ لتكن $هـ^{ص+س} = ع^2 - 1$ لوع - 1 = س أوجد $\frac{دص}{دس}$

⑤ إذا كانت $\frac{دص}{دس} = 6$ ، س = 1 وكانت $\frac{دص}{دع} = 2ع - 1$ ، $ع = أس^2 + 2$ أوجد قيم أ «أ = 2 ، أ = 1»

ملاحظة: من بعض التمارين تعطى لنا دالة واحدة والمطلوب أن نستخدم قاعدة التسلسل :-

طريقة الحل :-

① نضع ع = ما داخل القوس

أو

② نضع ع = الزاوية من النسب المثلثية

أو

① نضع ع = ما تحت الجذر
أو
② نضع ع = الطرف الأيسر

مثال إذا كانت $ص = جا^{8} ٦س$
أوجد $\frac{دص}{دس}$ بالتسلسل
الحل
$\because ص = جا^{8} ٦س$ دالة واحدة
$\therefore$ نضع $ع = ٦س$
$\therefore ص = جا^{8} ع$
$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$
$= ٨ جا^{7} ع \times جتاع \times ٦$
$= ٤٨ جا^{7} ٦س جتا ٦س$

مثال $ص = (١ + ظاس)^{٥}$
أوجد $\frac{دص}{دس}$ بالتسلسل
الحل
نضع ع = ما داخل القوس
$\therefore ع = ١ + ظاس$
$ص = ع^{٥}$
$\therefore \frac{دص}{دس} = ٥ع^{٤} \times قا^{2}س$
$= ٥(١ + ظاس)^{٤} \times قا^{2}س$

تمارين ① $ص = \sqrt{٥ + ٦س^{٣} + ٢}$
أوجد $\frac{دص}{دس}$ بالتسلسل