

المتطابقات المثلثية

3-1

اختبر نفسك

الدرس

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

3-2

اختبر نفسك

الدرس

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

3-3

اختبر نفسك

الدرس

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

3-4

اختبر نفسك

الدرس

حل المعادلات المثلثية

3-5

اختبر نفسك

الدرس

أسئلة تحصيلي

المتطابقت

هي معادلت يتساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها .

مثال:

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x

المتطابقت المثلثية

هي متطابقت تحوي دوالا مثلثية .

مثال:

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

متطابقات المقلوب

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

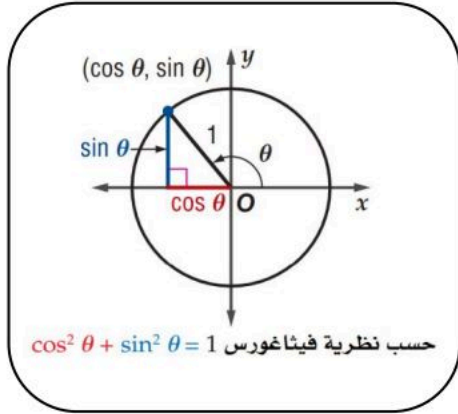
$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \neq 0$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \csc \theta \neq 0$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \sec \theta \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \cot \theta \neq 0$$

متطابقات فيثاغورس

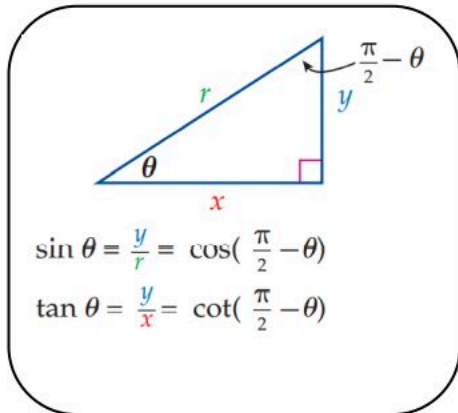


$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

متطابقات الزاويتين المتتامتين

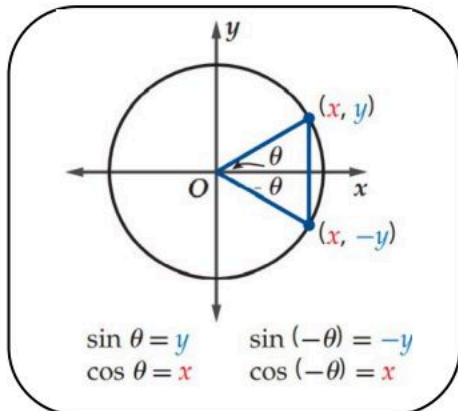


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية

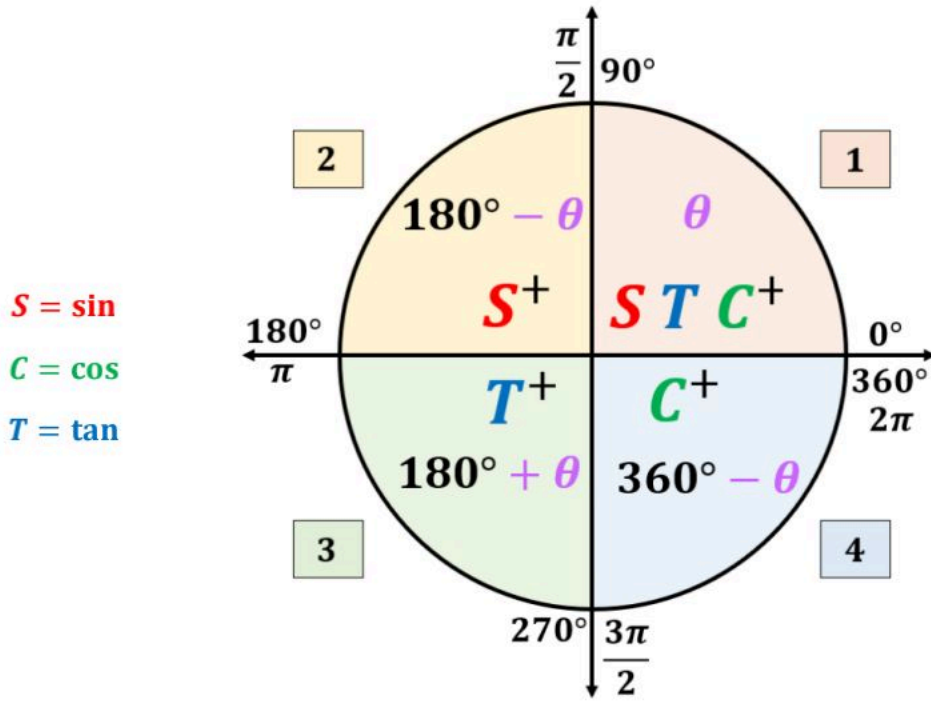


$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

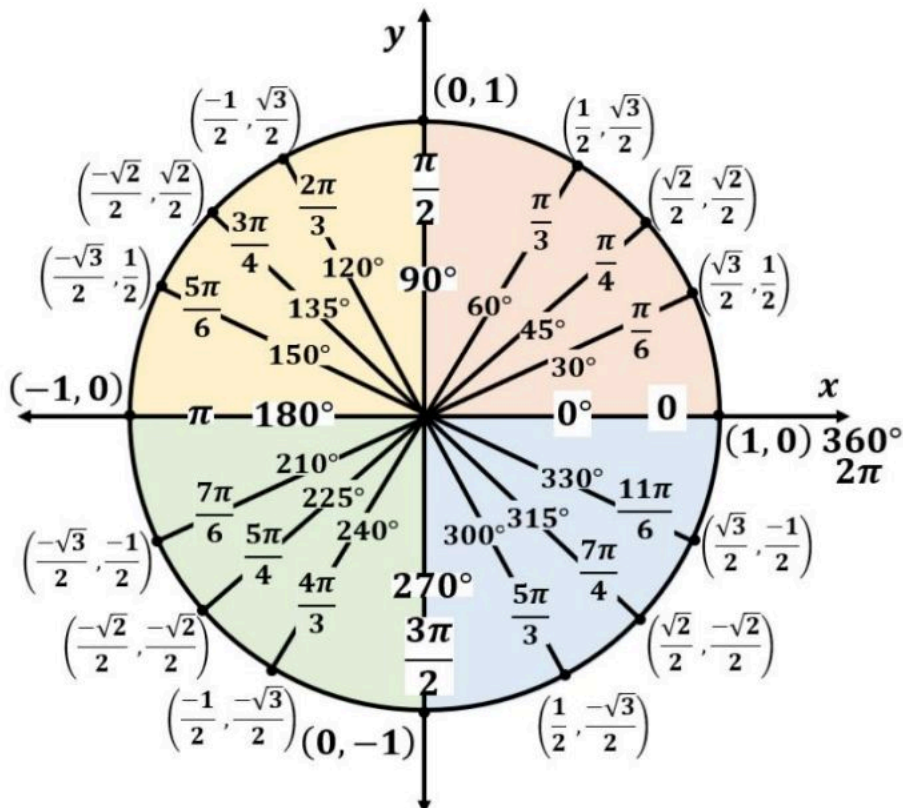
$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

دائرة الوحدة والإشارات والزوايا المرجعية



حساب الدوال المثلثية للزوايا من خلال دائرة الوحدة



حساب الدوال المثلثية للزوايا المشهورة بدون آلة حاسبة

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

	0°	90°
sin	0	1
cos	1	0
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{1}{0} =$ غير معرف

	180°	270°	360°
sin	0	-1	0
cos	-1	0	1
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$	$\frac{0}{-1} = 0$	$\frac{-1}{0} =$ غير معرف	$\frac{0}{1} = 0$

استعمال المتطابقات المثلثية

يمكن استعمال المتطابقات الأساسية لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية .

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \theta$ ، إذا كان $\sin \theta = \frac{4}{5}$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ$$

مثال

الحل :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$$

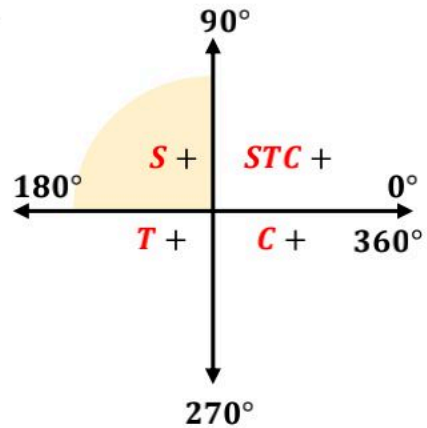
$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}$$

cos سالبة

لأنها في الربع الثاني



تبسيط العبارات المثلثية

يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة ، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط إن أمكن .

بسطة العبارة : $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta}$

مثال

الحل :

$$\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta \cdot \frac{1}{\sin \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$= \frac{\cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \cot^2 \theta$$

من الأسهل عادة أن تكتب حدود العبارة جميعها بدلالة $\cos \theta$ و $\sin \theta$

إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

بسط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين ، وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيداً .

مثال

أثبت صحة المتطابقة : $\cos^2\theta + \tan^2\theta \cos^2\theta = 1$

الحل :

نبدأ من الطرف الأيسر ← $\cos^2\theta + \tan^2\theta \cos^2\theta$

$$= \cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \cos^2\theta$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

ونصل إلى الطرف الأيمن ← $= 1$

إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تحول كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة .

مثال

أثبت صحة المتطابقة : $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta \tan\theta$

الحل :

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= 1$$

$\cot\theta \tan\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= 1$$

بعد فك كل طرف بشكل منفصل نصل إلى نفس النتيجة .

اقتراحات
لإثبات صحة
المتطابقات

- **بسط** العبارة بالإفادة من **المتطابقات المثلثية** الأساسية.
- **حلل** أو **اضرب** كلياً من **البسط والمقام** بالعبارة المثلثية نفسها .
- **اكتب** كل طرف بدلالة كل من **الجيب وجيب التمام فقط** ثم بسط كل طرف قدر المستطاع.
- **لا تنفذ** أي عملية (جمع ، طرح ، ضرب ، قسمة) على **طرفي المعادلة** التي يطلب إثبات أنها **متطابقة** ، لأن **خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات** كما تنطبق على المعادلات.

متطابقات المجموع

1 $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

2 $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 105^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

3 $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 105^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \tan 105^\circ &= \tan(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - (\sqrt{3})(1)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 3 + 1 + \sqrt{3}}{1 - 3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} \\ &= -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

متطابقات الفرق

1 $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(60^\circ - 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

2 $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 15^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

3 $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 120^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \tan 120^\circ &= \tan(180^\circ - 60^\circ) \\ &= \frac{\tan 180^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 180^\circ \tan 60^\circ} \\ &= \frac{0 - \sqrt{3}}{1 + (0)(\sqrt{3})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-\sqrt{3}}{1} \\ &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

قائمة بقياسات بعض الزوايا الناتجة عن جمع أو طرح زاويتين

$(A + B)$	A	B
75°	45°	30°
105°	60°	45°
120°	90°	30°
135°	90°	45°

$(A - B)$	A	B
15°	60°	45°
15°	45°	30°
120°	180°	60°
150°	180°	30°

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضاً في إثبات صحة المتطابقات.

أثبت صحة المتطابقة الآتية :

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

الحل :

الطرف الأيسر $\longrightarrow \sin(90^\circ - \theta)$

$$= \sin 90^\circ \cos \theta - \cos 90^\circ \sin \theta$$

$$= 1 \cos \theta - 0 \sin \theta$$

$$= \cos \theta$$

الطرف الأيمن \longleftarrow

مثال

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$\sin 2\theta$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{-1}{3}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$

مثال

الحل :

θ تقع في الربع الثاني

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ثانياً: نوجد $\sin 2\theta$

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \left(\frac{-1}{3} \right) \\ &= \frac{-4\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

أولاً: نوجد $\sin \theta$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^2$$

$$\sin^2 \theta = \frac{8}{9}$$

$$\sin \theta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\tan 2\theta$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 2\theta$ ، إذا كان $\tan \theta = -3$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$

مثال

الحل :

$$\begin{aligned} \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\ &= \frac{2(-3)}{1 - (-3)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-6}{-8}$$

$$= \frac{3}{4}$$

cos 2θ

1

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$

الحل :

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= \frac{5}{9} - \frac{4}{9}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{9}$$

2

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{-1}{3}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$

الحل :

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$= 2 \left(\frac{1}{9}\right) - 1$$

$$= 2 \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{-7}{9}$$

3

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$

الحل :

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{16}{25}\right)$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= \frac{-7}{25}$$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$
 $270^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} \end{aligned}$$

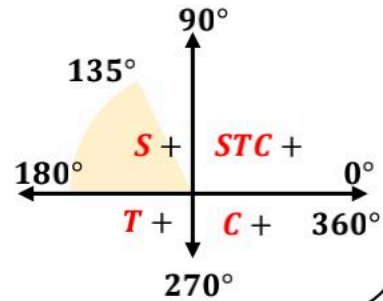
$$\begin{aligned} &= \pm \sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

إنطاق المقام :

$$135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ$$

تقع في الربع الثاني

$\sin \frac{\theta}{2}$ موجبة



$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$
 $270^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} \end{aligned}$$

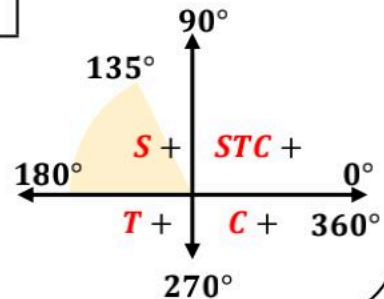
$$\begin{aligned} &= \pm \sqrt{\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

إنطاق المقام :

$$135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ$$

تقع في الربع الثاني

$\cos \frac{\theta}{2}$ سالبة



$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل :

$$135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ$$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$\tan \frac{\theta}{2}$ سالبة

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

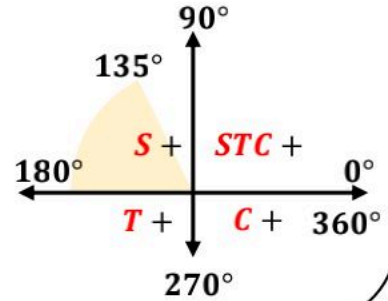
$$= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5}}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{5}}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$



إثبات صحة المتطابقات

نستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما وكذلك المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات .

أثبت صحة المتطابقتين :

$$\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

مثال

الحل :

الطرف الأيمن

$$\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$= \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \theta)}{2 \sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1 - 1 + 2 \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \tan \theta$$

الطرف الأيسر

المعادلات المثلثية

هي معادلات تتضمن دوالاً مثلثية وتكون صحيحة عند قيم محددة للمتغير.

حل المعادلات على فترة معطاة

حل المعادلة :

$$\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 ; 0^\circ \leq \theta \leq 240^\circ$$

مثال

الحل :

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

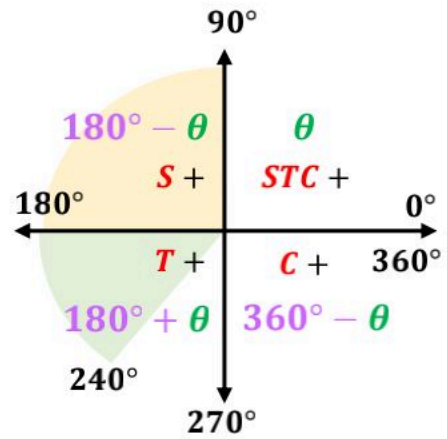
cos سالبة

$$\theta = 30^\circ$$

نوجد الزوايا
في الفترة من خلال
الزوايا المرجعية

الزوايا θ تقع في
الربع الثاني والربع الثالث

نعوض بالزوايا المرجعية
في الفترات المحددة



إذن :

حل المعادلة :

$$150^\circ, 210^\circ$$

الربع الثالث

$$180^\circ + \theta$$

$$180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

الربع الثاني

$$180^\circ - \theta$$

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

المعادلات المثلثية بدون فترة محددة

تحل المعادلات المثلثية عادة ، لقيم المتغير في الفترة $[0, 2\pi]$ بالراديان أو $[0^\circ, 360^\circ]$ بالدرجات . كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة لذلك فالحلول تختلف باختلاف الفترات .

معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حل المعادلة $2 \sin \theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان .

مثال

الحل :

$$\frac{2 \sin \theta}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = 30^\circ$$

نوجد الزوايا في الفترة من خلال الزوايا المرجعية

ولأنها بدون فترة فلها عدد لا نهائي من الحلول وتكتب بالقاعدة :

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\frac{11\pi}{6} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

sin سالبة

إذن الزاوية θ تقع في الربع الثالث و الربع الرابع نعوض بالزوايا المرجعية في الفترات المحددة

الربع الرابع

$$360^\circ - \theta$$

$$360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

نحولها لـ الراديان

$$330^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{11\pi}{6}$$

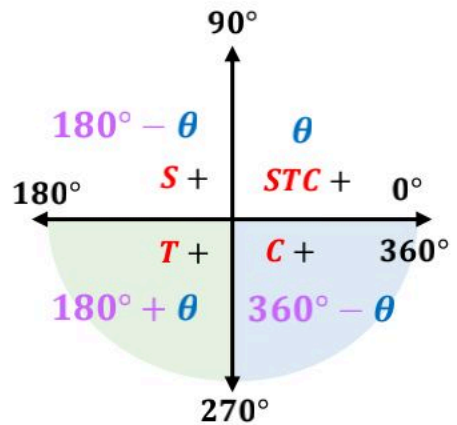
الربع الثالث

$$180^\circ + \theta$$

$$180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

نحولها لـ الراديان

$$210^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6}$$



الحلول الدخيلة

بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل مثل المعادلة: $\cos \theta = 4$ ليس لها حل ، لأن قيم $\cos \theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$.
 كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولاً لا تحقق المعادلة الأصلية ، وتسمى مثل هذه الحلول حلولاً دخيلة .

حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حل المعادلة: $\cos^2 \theta + 3 = 4 - \sin^2 \theta$

الحل :

مثال

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 4 - 3$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

متطابقة

لها عدد لا نهائي من الحلول

لأن جميع قيم θ تمثل حلولاً لها.

حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حل المعادلة لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات

$$\sin \theta \cot \theta - \cos^2 \theta = 0$$

الحل :

مثال

$$\sin \theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \cos^2 \theta = 0$$

$$\cos \theta - \cos^2 \theta = 0$$

$$\cos \theta (1 - \cos \theta) = 0$$

$$1 - \cos \theta = 0 \text{ أو } \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = 0$$

$$\theta = 90^\circ, 270^\circ \text{ إذن}$$

$$1 - \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = 1$$

$$\theta = 0^\circ, 360^\circ \text{ إذن}$$

وكلاهما حلان

دخيلان ، لأن $\cot \theta$

عندها غير معرفة .

حل المعادلة :

$$90^\circ + 180^\circ k$$

القطع المكافئة

4-1

اختبر نفسك

الدرس

القطع الناقصة والدوائر

4-2

اختبر نفسك

الدرس

القطع الزائدة

4-3

اختبر نفسك

الدرس

تحديد أنواع القطع المخروطية

4-4

اختبر نفسك

الدرس

أسئلة تحصيلي

القطع المخروطية

هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين متقابلين بالرأس
 كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس .



القطع الزائد



القطع المكافئ



القطع الناقص



الدائرة

الصورة العامة لمعادلات القطع المخروطية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفاراً.

وتوجد صورة أكثر تحديداً لمعادلت كل قطع مخروطي .

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانياً

المحل الهندسي هو الشكل الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة .

القطع المكافئ هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة (البؤرة) مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل .

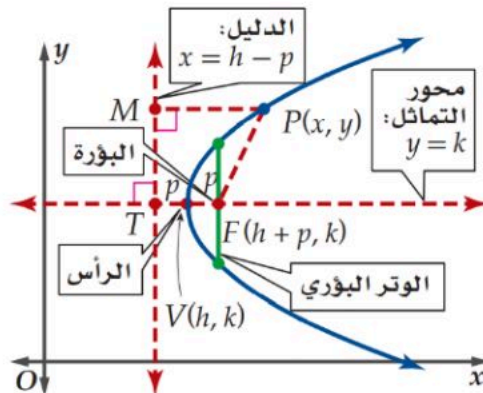
البؤرة هي نقطة ثابتة تقع على محور التماثل للقطع ، وتبعد عن الرأس مسافة $|c|$ وتكون مساوية لبعد الرأس عن مستقيم ثابت يسمى الدليل .

الدليل هو مستقيم عمودي على محور التماثل بحيث يكون بعده عن أي نقطة تقع على القطع مساوياً لبعد هذه النقطة عن البؤرة .

محور التماثل هو المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة .

الرأس هو نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل .

الوتر البؤري هو القطعة المستقيمة المار بالبؤرة والعمودية على محور التماثل ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ ويساوي $|4c|$ حيث c المسافة بين البؤرة والرأس .





خصائص القطوع المكافئة

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	المعادلة	$(x - h)^2 = 4c(y - k)$
<p>$c < 0$ $c > 0$</p>	التمثيل البياني	<p>$c < 0$ $c > 0$</p>
أفقي	الاتجاه	رأسي
(h, k)	الرأس	(h, k)
$(h + c, k)$	البؤرة	$(h, k + c)$
$x = h - c$	معادلة الدليل	$y = k - c$
$y = k$	معادلة محور التماثل	$x = h$
$ 4c $	طول الوتر البؤري	$ 4c $

طريقة مختصرة لتحديد خصائص القطوع المكافئة

$$(x - h)^2 = 4c(y - k)$$

h : معادلة محور التماثل : $x = h$
 الاتجاه : رأسي .. أعلى (حسب الإشارة)
 (+) أعلى ، (-) أسفل
 البؤرة : $(h, k + c)$
 معادلة الدليل : $y = k - c$
 طول الوتر البؤري : $|4c|$
 الرأس : (h, k)

حدد خصائص القطع المكافئ:

$$(x + 1)^2 = -12(y - 6)$$

الحل :

$$h = -1$$

$$c = \frac{-12}{4} = -3 \quad k = 6$$

معادلة محور التماثل :

$$x = -1$$

الاتجاه : رأسي .. أسفل

البؤرة : $(-1, 6 + (-3))$

$$(-1, 3)$$

معادلة الدليل : $y = 6 - (-3)$

$$y = 9$$

الرأس : $(-1, 6)$

طول الوتر البؤري : $|-12| = 12$

مثال

طريقة مختصرة لتحديد خصائص القطوع المكافئة

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

k : معادلة محور التماثل : $y = k$
 الاتجاه : أفقي .. يمين (حسب الإشارة)
 (+) يمين ، (-) يسار
 البؤرة : $(h + c, k)$
 معادلة الدليل : $x = h - c$
 طول الوتر البؤري : $|4c|$
 الرأس : (h, k)

حدد خصائص القطع المكافئ:

$$(y - 4)^2 = 20(x + 2)$$

مثال

الحل :

$$k = 4$$

$$c = \frac{20}{4} = 5$$

$$h = -2$$

معادلة محور التماثل :

$$y = 4$$

الاتجاه : أفقي .. يمين

البؤرة : $(-2 + 5, 4)$

$(3, 4)$

معادلة الدليل : $x = -2 - 5$

$$x = -7$$

الرأس : $(-2, 4)$

طول الوتر البؤري : $|20| = 20$

كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

اكتب المعادلة على الصورة القياسية للقطع المكافئ:

$$x^2 - 4y + 3 = 7$$

مثال

الحل :

$$x^2 = 7 + 4y - 3$$

$$x^2 = 4y + 4$$

$$x^2 = 4(y + 1)$$

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

معطى البؤرة والرأس

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

مثال

الحل :

$$(x - h)^2 = 4c (y - k)$$

$$(x + 6)^2 = 12 (y + 1)$$

البؤرة $(-6, 2)$

الاختلاف بين الرأس والبؤرة في y

إذن المنحنى مفتوح رأسيًا

نوجد c

الرأس $(-6, -1)$

$$k + c = 2$$

$$(h, k) \quad -1 + c = 2 \rightarrow c = 3 \rightarrow 4c = 12$$

معطى الرأس والدليل

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

الرأس $(9, -2)$ والدليل $x = 12$

الحل :

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

$$(y + 2)^2 = -12(x - 9)$$

الدليل $x = 12$

الدليل رأسي

إذن المنحنى مفتوح أفقياً

نوجد c

الرأس $(9, -2)$

$x = 12$

(h, k)

$$h - c = 12$$

$$9 - c = 12 \rightarrow c = 9 - 12 = -3$$

معطى البؤرة واتجاه المنحنى ويمر بنقطة

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

البؤرة $(-3, -4)$ والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$

الحل :

$$(x - h)^2 = 4c(y - k)$$

$$(x + 3)^2 = -8(y + 2)$$

ولأن المنحنى مفتوح

لأسفل إذن :

$$c = -2$$

$$4c = -8$$

$$k = -4 + 2$$

$$k = -2$$

لايجاد c من الصورة القياسية للقطع :

$$(x - h)^2 = 4c(y - k)$$

نعوض عن

$$x = 5, y = -10, h = -3, k = -4 - c$$

$$(5 + 3)^2 = 4c(-10 - (-4 - c))$$

$$64 = 4c(-6 + c)$$

$$64 = -24c + 4c^2$$

$$4c^2 - 24c - 64 = 0$$

$$c^2 - 6c - 16 = 0$$

$$(c - 8)(c + 2) = 0 \rightarrow c = 8, c = -2$$

المنحنى مفتوح إلى أسفل

إذن الاتجاه رأسي، وعليه

التغير في y

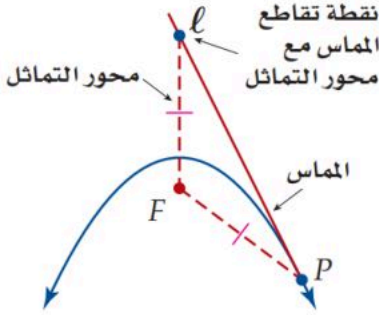
البؤرة $(-3, -4)$

$$k + c = -4$$

الرأس $(-3, -4 - c)$

(h, k)

مماس منحنى القطع المكافئ



مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون :

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين .
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني .

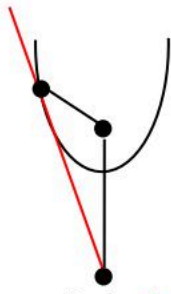
كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

معادلة مماس منحنى القطع المكافئ عند الرأس

- إذا كان المنحنى مفتوحاً أفقياً ، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $x = h$
- إذا كان المنحنى مفتوحاً رأسياً ، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $y = k$

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $y = 4x^2 + 4$

عند النقطة $(-1, 8)$



رابعاً: نوجد الميل ونعوض في معادلة المستقيم

$$m = \frac{8 - 0}{-1 - 0} = -8$$

معادلة المستقيم المار بـ $(0, 0)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -8(x - 0)$$

$$y = -8x$$

ثانياً: نوجد d المسافة بين البؤرة والنقطة المعطاة

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1 - 0)^2 + (8 - 4.06)^2}$$

$$d = 4.06$$

ثالثاً: نوجد إحداثيات النقطة

وذلك بطرح المسافة من أحد

إحداثي البؤرة ولأن القطع رأسياً

نطرح من y فتصبح

$$(0, 0)$$

الحل :

أولاً: نوجد إحداثيات البؤرة

المنحنى مفتوح رأسياً

الصورة القياسية

$$x^2 = \frac{1}{4}(y - 4)$$

$$4c = \frac{1}{4}$$

$$c = \frac{1}{16} = 0.0625$$

الرأس $(0, 4)$

البؤرة $(0, 4.06)$

مثال

تحليل القطع الناقص وتمثيله بيانياً

القطع الناقص هو **المحل الهندسي** لمجموعة نقاط المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً وهو $2a$ حيث a هي البعد بين الرأس والمركز.

البؤرتان هما نقطتان تقعان على المحور الأكبر والمسافة بينهما $2c$ وهو طول البعد البؤري ويكون مجموع بعديهما عن أي نقطة على منحنى القطع الناقص يساوي مقداراً ثابتاً ، حيث c هي البعد بين إحدى البؤرتين والمركز .

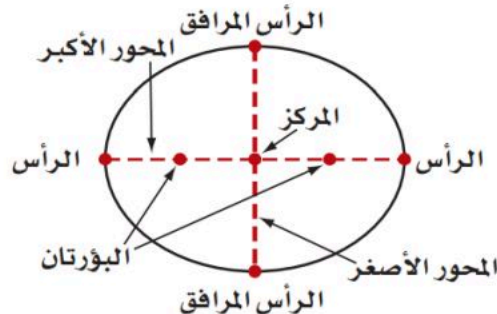
المحور الأكبر هو محور تماثل للقطع الناقص وهو القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين وتقع نهايتها على منحنى القطع الناقص ، وطوله $2a$ حيث a البعد بين المركز وأحد الرأسين .

المحور الأصغر هو القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز والمتعامدة مع المحور الأكبر ، وتقع نهايتها على منحنى القطع الناقص ، وطوله $2b$ ، حيث b هي البعد بين المركز وأحد الرأسين المرافقين .

المركز هو نقطة المنتصف للمحورين الأكبر والأصغر والبؤرتين .

الرأسان هما نقطتا نهايتي المحور الأكبر .

الرأسان المرافقان هما نقطتا نهايتي المحور الأصغر .





خصائص القطع الناقص

القطع الناقص		نوع القطع
		التمثيل البياني
$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المعادلة
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$		إيجاد c "البعد بين المركز والبؤرة"
هو العدد الأكبر		a^2
حسب اللي فوق العدد الأكبر a^2		تحديد الاتجاه
أفقي " x " فوق الـ a^2	رأسي " y " فوق الـ a^2	
طول المحور الأكبر		$2a$
طول المحور الأصغر		$2b$
طول البعد البؤري		$2c$
(h, k)		المركز
الأكبر $x = h$	الأكبر $y = k$	معادلة المحور
الأصغر $y = k$	الأصغر $x = h$	
$(h, k \pm a)$	$(h \pm a, k)$	الرأسان " a "
$(h, k \pm c)$	$(h \pm c, k)$	البؤرتان " c "
$(h \pm b, k)$	$(h, k \pm b)$	الرأسان المرافقان " b "
.....		خطا التقارب

تحديد خصائص القطع الناقص

الاتجاه : رأسي

حدد خصائص القطع الناقص $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$

مثال

الحل :

$h = -2, k = 0, a = 7, b = 3, c = \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40}$

معادلة المحور الأصغر $y = 0$ → المركز $(-2, 0)$ ← معادلة المحور الأكبر $x = -2$

الرأسان المرافقان

$b = 3$

$(1, 0)$

$(-5, 0)$

طول المحور الأصغر

$2b = 6$

البؤرتان

$c = \sqrt{40}$

$(-2, \sqrt{40})$

$(-2, -\sqrt{40})$

طول البعد البؤري

$2c = 2\sqrt{40}$

الرأسان

$a = 7$

$(-2, 7)$

$(-2, -7)$

طول المحور الأكبر

$2a = 14$

تحديد خصائص القطع الناقص

الاتجاه : أفقي

حدد خصائص القطع الناقص $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

مثال

الحل :

$h = -4, k = -3, a = 3, b = 2, c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

معادلة المحور الأكبر $y = -3$ → المركز $(-4, -3)$ ← معادلة المحور الأصغر $x = -4$

الرأسان

$a = 3$

$(-1, -3)$

$(-7, -3)$

طول المحور الأكبر

$2a = 6$

البؤرتان

$c = \sqrt{5}$

$(-4 + \sqrt{5}, -3)$

$(-4 - \sqrt{5}, -3)$

طول البعد البؤري

$2c = 2\sqrt{5}$

الرأسان المرافقان

$b = 2$

$(-4, -1)$

$(-4, -5)$

طول المحور الأصغر

$2b = 4$

كتابة معادلة القطع الناقص بمعلومية بعض خصائصه

معطى الرأسان والرأسان المرافقان

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-6, 2)$ ، $(-6, -8)$ ، والرأسان المرافقان $(-9, -3)$ ، $(-3, -3)$

الحل :

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

$$(h, k) = \left(\frac{-6 - 6}{2}, \frac{2 + (-8)}{2} \right) \\ = (-6, -3)$$

وبما أن الإحداثيين x في المحور الأكبر

متساويان فهو رأسي المعادلة هي :

$$\frac{(y + 3)^2}{25} + \frac{(x + 6)^2}{9} = 1$$

نستعمل المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a = \sqrt{(-6 + 6)^2 + (2 + 8)^2} = 10 \\ a = 5 \rightarrow a^2 = 25$$

نستعمل المحور الأصغر لتحديد b من الرأسين

المرافقين

$$2b = \sqrt{(-3 + 9)^2 + (-3 + 3)^2} = 6 \\ b = 3 \rightarrow b^2 = 9$$

معطى الرأسان والبؤرتان

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(6, 4)$ ، $(-4, 4)$ ، والبؤرتان $(4, 4)$ ، $(-2, 4)$

الحل :

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

$$(h, k) = \left(\frac{-4 + 6}{2}, \frac{4 + 4}{2} \right) \\ = (1, 4)$$

وبما أن الإحداثيين y في المحور الأكبر

متساويان فهو أفقي المعادلة هي :

$$\frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y - 4)^2}{16} = 1$$

طول المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a = \sqrt{(-4 - 6)^2 + (4 - 4)^2} = 10 \\ a = 5 \rightarrow a^2 = 25$$

المسافة بين البؤرتين هي $2c$

$$2c = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (4 - 4)^2} = 6 \\ c = 3$$

نوجد b^2

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$3^2 = 5^2 - b^2$$

$$b^2 = 25 - 9$$

$$b^2 = 16$$

معطى البؤرتان وطول المحور الأكبر

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:
البؤرتان $(-7, 3)$ ، $(19, 3)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة

الحل :

مركز القطع هو نقطة منتصف البؤرتين

$$(h, k) = \left(\frac{19 - 7}{2}, \frac{3 + 3}{2} \right) = (6, 3)$$

وبما أن الإحداثيين y في المحور الأكبر متساويان فهو أفقي المعادلة هي :

$$\frac{(x - 6)^2}{225} + \frac{(y - 3)^2}{56} = 1$$

المسافة بين البؤرتين هي $2c$

$$2c = \sqrt{(19 + 7)^2 + (3 - 3)^2} = 26$$

$$c = 13$$

طول المحور الأكبر $2a = 30$

$$a = 15 \rightarrow a^2 = 225$$

نوجد b^2

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$13^2 = 15^2 - b^2$$

$$b^2 = 225 - 169$$

$$b^2 = 56$$

معطى البؤرتان وطول المحور الأصغر

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:
الرأسان $(-2, 8)$ ، $(-2, -4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة

الحل :

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

$$(h, k) = \left(\frac{-2 - 2}{2}, \frac{-4 + 8}{2} \right) = (-2, 2)$$

وبما أن الإحداثيين x في المحور الأكبر متساويان فهو رأسي المعادلة هي :

$$\frac{(x + 2)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{36} = 1$$

نستعمل المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a = \sqrt{(-2 + 2)^2 + (-4 - 8)^2} = 12$$

$$a = 6$$

$$a^2 = 36$$

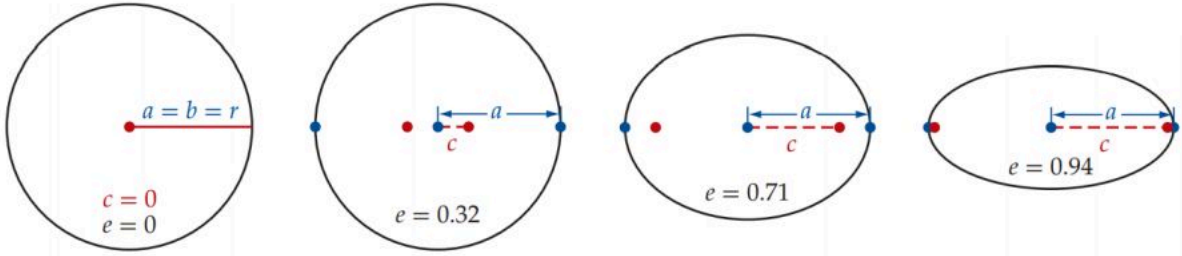
طول المحور الأصغر $2b = 10$

$$b = 5$$

$$b^2 = 25$$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص

هو نسبة c إلى a وتقع هذه القيمة دائماً بين 0 و 1، وتحدد مدى دائرية أو اتساع القطع الناقص.



الاختلاف المركزي

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{أو} \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يعطي بالصيغة $e = \frac{c}{a}$

$$0 < e < 1$$

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص:

$$\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$$

الحل:

$$a^2 = 19, a = \sqrt{19}$$

ثانياً: نستعمل قيمتي a, c لإيجاد

قيمة الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$$

$$e \approx 0.32$$

أولاً: نحدد قيمة c

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{19 - 17}$$

$$c = \sqrt{2}$$

مثال

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة



الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

كتابة معادلة الدائرة



طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة

إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$, $(3, -3)$

نوجد المركز (h, k) باستخدام قانون نقطتين

المنتصف

الحل :

$$(h, k) = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{-3+5}{2} \right)$$

$$(h, k) = (2, 1)$$

نوجد طول نصف القطر باستخدام قانون

المسافة بين نقطتين

(بين المركز وأحدى نقاط طرفا القطر)

$$r = \sqrt{(2-3)^2 + (1+3)^2}$$

$$r = \sqrt{17}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{17})^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 17$$

مثال

مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي

مركزها $(0, 0)$ ونصف قطرها 3

الحل :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانياً

القطع الزائد هو **المحل الهندسي لجمع النقاط** الواقعة في المستوى والتي يكون **الفرق المطلق** (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين (تسميان **البؤرتين**) يساوي مقداراً ثابتاً هو $2a$ ، حيث a البعد بين **المركز** وأحد **الرأسين** .

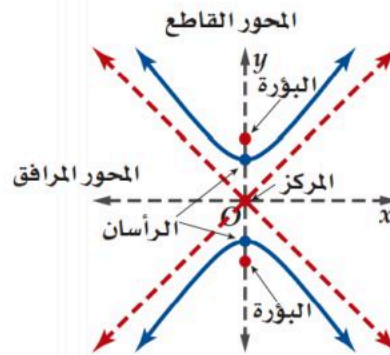
البؤرتان هما **نقطتان** تقعان على **المحور القاطع** و المسافة بينهما $2c$ وهو طول البعد البؤري **والفرق المطلق** بين بعديهما عن أي **نقطة** من نقاط منحنى القطع الزائد يساوي مقداراً ثابتاً.

المركز هو **نقطة** منتصف المسافة بين **البؤرتين** و **الرأسين** .

الرأسان هما **نقطتان** تقاطع **القطعة المستقيمة** الواصلة بين **البؤرتين** مع كل من فرعي المنحنى .

المحور القاطع هو أحد **محوري تماثل** القطع الزائد وهو **القطعة المستقيمة** الواصلة بين **الرأسين** ويمر **بالمركز** .

المحور المرافق هو أحد **محوري تماثل** القطع الزائد وهو **القطعة المستقيمة العمودية** على **المحور القاطع** ويمر **بالمركز** .





خصائص القطع الزائد

القطع الزائد		نوع القطع
		التمثيل البياني
$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	المعادلة
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$		إيجاد c "البعد بين المركز والبؤرة"
هو العدد الأول		a^2
حسب اللي فوق العدد الأول a^2		تحديد الاتجاه
أفقي " x " فوق الـ a^2	رأسي " y " فوق الـ a^2	
طول المحور القاطع		$2a$
طول المحور المرافق		$2b$
طول البعد البؤري		$2c$
(h, k)		المركز
القاطع $x = h$	القاطع $y = k$	معادلة المحور
المرافق $y = k$	المرافق $x = h$	
$(h, k \pm a)$	$(h \pm a, k)$	الرأسان " a "
$(h, k \pm c)$	$(h \pm c, k)$	البؤرتان " c "
.....		الرأسان المرافقان " b "
$(y - k) = \pm \frac{a}{b}(x - h)$	$(y - k) = \pm \frac{b}{a}(x - h)$	خطا التقارب

تحديد خصائص القطع الزائد

الاتجاه : رأسي

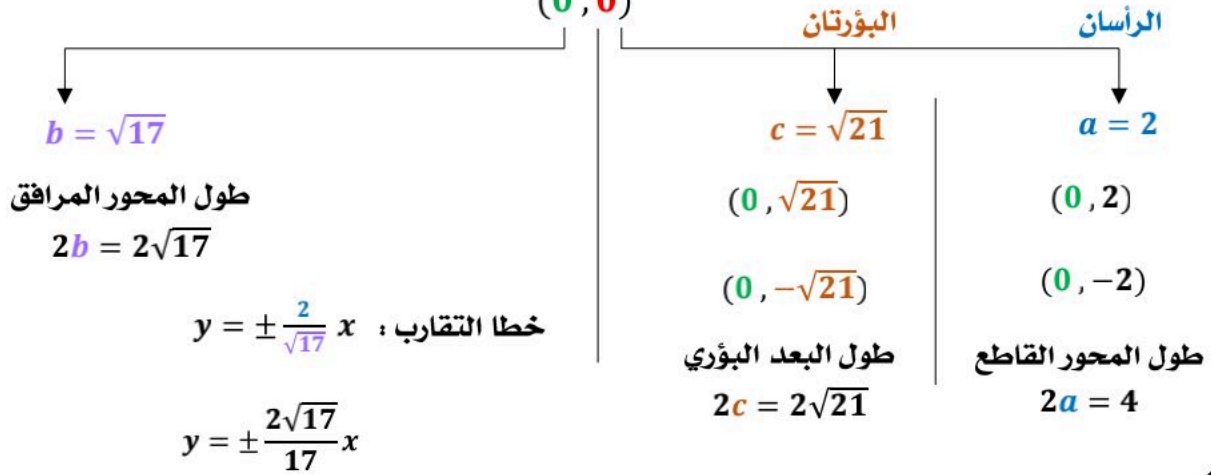
$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$$

الحل :

مثال

$$h = 0, k = 0, a = 2, b = \sqrt{17}, c = \sqrt{4 + 17} = \sqrt{21}$$

معادلة المحور المرافق $y = 0$ → المركز $(0, 0)$ ← معادلة المحور القاطع $x = 0$



تحديد خصائص القطع الزائد

الاتجاه : أفقي

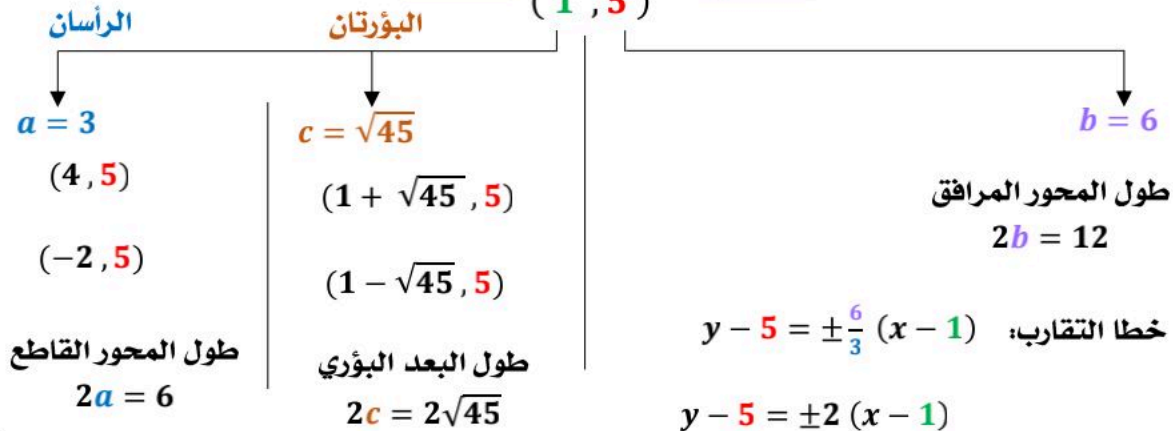
$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$$

الحل :

مثال

$$h = 1, k = 5, a = 3, b = 6, c = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

معادلة المحور القاطع $y = 5$ → المركز $(1, 5)$ ← معادلة المحور المرافق $x = 1$



كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

اكتب المعادلة على الصورة القياسية للقطع الزائد:

$$4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68$$

الحل:

مثال

$$(4y^2 - 8y) + (-9x^2 - 36x) = 68 \quad \leftarrow \text{تجميع المتشابهات}$$

$$4(y^2 - 2y) - 9(x^2 + 4x) = 68 \quad \leftarrow \text{أخذ عوامل مشتركة}$$

$$4(y^2 - 2y + \square) - 9(x^2 + 4x + \square) = 68 + 4(\square) - 9(\square) \quad \leftarrow \text{اكتمال المربع}$$

$$4(y^2 - 2y + 1) - 9(x^2 + 4x + 4) = 68 + 4(1) - 9(4)$$

$$4(y - 1)^2 - 9(x + 2)^2 = 36 \quad \leftarrow \text{تبسيط}$$

$$\frac{4(y - 1)^2}{36} - \frac{9(x + 2)^2}{36} = \frac{36}{36} \quad \leftarrow \text{بالقسمة والتبسيط}$$

$$\frac{(y - 1)^2}{9} - \frac{(x + 2)^2}{4} = 1$$

كتابة معادلة القطع الزائد بمعلومية بعض خصائصه

معطى الرأسان والبؤرتان

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-3, 2)$, $(-3, -6)$ والبؤرتان $(-3, 3)$, $(-3, -7)$

مثال

الحل:

نوجد b^2 من القانون

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = 25 - 16 = 9$$

المحور القاطع رأسي فإن a^2 يرتبط بالحد y^2

$$\frac{(y + 2)^2}{16} - \frac{(x + 3)^2}{9} = 1$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$= \sqrt{(-3 + 3)^2 + (-6 + 2)^2}$$

$$a = 4 \rightarrow a^2 = 16$$

نوجد c وهي المسافة بين أي من البؤرتين والمركز

$$= \sqrt{(-3 + 3)^2 + (3 + 2)^2}$$

$$c = 5 \rightarrow c^2 = 25$$

في الرأسين إحداثيي x متساويان فإن المحور القاطع رأسي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{-3 - 3}{2}, \frac{-6 + 2}{2} \right)$$

$$(h, k) = (-3, -2)$$

معطى الرأسان وخطا التقارب

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-3, 0)$, $(-9, 0)$ وخطا التقارب $y = 2x - 12$, $y = -2x + 12$

الحل :

المحور القاطع أفقي فإن a^2

يرتبط بالحد x^2

$$\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$= \sqrt{(-3+6)^2 + (0-0)^2}$$

$$a = 3 \rightarrow a^2 = 9$$

ميل خطي التقارب $\pm \frac{b}{a}$ نستخدم

الميل الموجب لإيجاد b

$$\frac{b}{a} = 2 \rightarrow \frac{b}{3} = 2 \rightarrow b = 6$$

$$b^2 = 36$$

في الرأسين إحداثيي y متساويان فإن المحور القاطع أفقي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{-3-9}{2}, \frac{0+0}{2} \right)$$

$$(h, k) = (-6, 0)$$

معطى الرأسان وطول المحور المرافق

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(3, 2)$, $(3, 6)$ وطول المحور المرافق 10 وحدات

الحل :

المحور القاطع رأسي فإن a^2

يرتبط بالحد y^2

$$\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$= \sqrt{(3-3)^2 + (2-4)^2}$$

$$a = 2 \rightarrow a^2 = 4$$

طول المحور المرافق $2b = 10$

$$b = 5$$

$$b^2 = 25$$

في الرأسين إحداثيي x متساويان فإن المحور القاطع رأسي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{3+3}{2}, \frac{2+6}{2} \right)$$

$$(h, k) = (3, 4)$$

الاختلاف المركزي للقطع الزائد

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{أو} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{لأي قطع زائد}$$

حيث $c^2 = a^2 + b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يعطي بالصيغة $e = \frac{c}{a}$

$$e > 1$$

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد :

$$\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$$

مثال

الحل :

$$a^2 = 64, a = 8$$

ثانياً: نستعمل قيمتي a, c لإيجاد
قيمة الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{12}{8}$$

$$e = \frac{3}{2} = 1.5$$

أولاً: نحدد قيمة c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{64 + 80}$$

$$c = \sqrt{144} = 12$$

الاختلاف المركزي للقطوع :

القطع الناقص $0 < e < 1$

القطع الزائد $e > 1$

الدائرة $e = 0$

ملاحظة

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية

يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

على أن لا تساوي A, B, C جميعها أصفاراً . ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصورة القياسية

باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$

مثال

اكتب المعادلة على الصورة القياسية

$$4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$$

ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله .

الحل :

$$4(x^2 - 4x) + y^2 + 8y = 4 \quad \leftarrow \text{تجميع المتشابهات مع أخذ عوامل}$$

$$4(x^2 - 4x + \square) + (y^2 + 8y + \square) = 4 + 4(\square) + \square \quad \leftarrow \text{اكمال المربع}$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = 4 + 4(4) + 16$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = 36 \quad \leftarrow \text{تبسيط}$$

$$4(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36 \quad \leftarrow \text{تبسيط}$$

$$\frac{4(x - 2)^2}{36} + \frac{(y + 4)^2}{36} = \frac{36}{36} \quad \leftarrow \text{قسمة وتبسيط}$$

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 4)^2}{36} = 1$$

نوع القطع المخروطي : قطع ناقص

قطع ناقص

$$B^2 - 4AC < 0, A \neq C \text{ أو } B \neq 0$$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :
 $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

الحل :

$$A = 1, B = 0, C = 4$$

$$B^2 - 4AC$$

$$(0)^2 - 4(1)(4) = -16$$

قطع ناقص

قطع مكافئ

$$B^2 - 4AC = 0$$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :
 $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

الحل :

$$A = 0, B = 0, C = 6$$

$$B^2 - 4AC$$

$$(0)^2 - 4(0)(6) = 0$$

قطع مكافئ

تحديد أنواع القطوع المخروطية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

باستعمال المميز

$$B^2 - 4AC$$

قطع زائد

$$B^2 - 4AC > 0$$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :
 $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

الحل :

$$A = 4, B = 3, C = 0$$

$$B^2 - 4AC$$

$$(3)^2 - 4(4)(0) = 9$$

قطع زائد

دائرة

$$B^2 - 4AC < 0, B = 0 \text{ و } A = C$$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :
 $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$

الحل :

$$A = 8, B = 0, C = 8$$

$$B^2 - 4AC$$

$$(0)^2 - 4(8)(8) = -256$$

دائرة

مقدمة في المتجهات

1-1

اختبر نفسك

الدرس

المتجهات في المستوى الإحداثي

1-2

اختبر نفسك

الدرس

الضرب الداخلي

1-3

اختبر نفسك

الدرس

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

1-4

اختبر نفسك

الدرس

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

1-5

اختبر نفسك

الدرس

أسئلة تحصيلي

الكميات الفيزيائية

كمية متجهة

هي كمية لها مقدار واتجاه .

يسير قارب بسرعة 15 m/h في اتجاه الجنوب الغربي .

كمية قياسية (عددية)

هي كمية لها مقدار فقط وليس لها اتجاه .

طول قطعة مستقيمة 5 cm

المتجهات

نقطة النهاية

a

B

قطعة مستقيمة لها اتجاه أو سهم لها نقطة بداية A ولها نقطة نهاية B
يرمز للمتجه بالرمز \vec{AB} أو \vec{a} أو \vec{a}

المتجه:

طول المتجه:

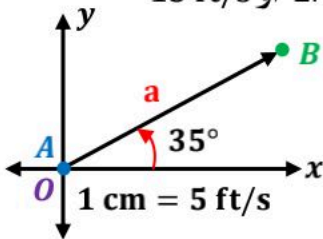
نقطة البداية A

طول القطعة المستقيمة التي تمثله ويرمز لطول المتجه a بالرمز $|\vec{a}|$ مثلاً: إذا كان مقياس الرسم $1 \text{ cm} = 5 \text{ ft/s}$ فإن الطول يساوي 2.6×5 أو 13 ft/s

الوضع القياسي للمتجه:

إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل.

اتجاه المتجه:



- الاتجاه الأفقي .
- الاتجاه الربعي .
- الاتجاه الحقيقي .

تمثيل المتجه هندسياً

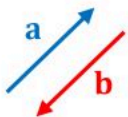
النوع	خصائصه	الرسم
الاتجاه الأفقي	يستعمل المحور الأفقي الزاوية التي يصنعها مع محور x الموجب ويكون عكس عقارب الساعة . مثال : \vec{a} بزاوية قياسها 60° مع الاتجاه الأفقي	
الاتجاه الرباعي (فاي) φ	يستعمل المحور الرأسى y إما شمالاً N أو جنوباً S يكون قياس الزاوية بين 0° و 90° شرق أو غرب المحور الرأسى وتكتب الزاوية بين حرفين مثال : \vec{a} باتجاه $N 40^\circ E$ \vec{v} باتجاه $S 50^\circ W$	
الاتجاه الحقيقي	يبدأ من الشمال N ويكون مع عقارب الساعة وتكتب الزاوية بثلاثة أرقام مثال : \vec{m} باتجاه 030° \vec{z} باتجاه 140° إذا كان قياس الزاوية ثلاث أرقام تكتب كما هي .	

أنواع المتجهات

المتجهان المتعاكسان

$$a = -b$$

لهما الطول نفسه واتجاهان متعاكسان.



المتجهان المتساويان

$$a = b$$

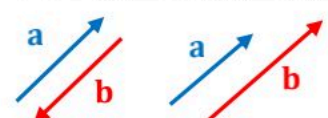
لها الاتجاه نفسه والطول نفسه .



المتجهان المتوازيان

$$a \parallel b$$

لها الاتجاه نفسه أو اتجاهان متعاكسان وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه.



المحصلة: هي المتجه الناتج من جمع متجهين أو أكثر.

محصلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه

هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات ، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه .

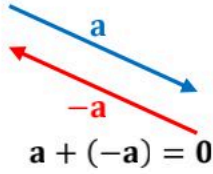


محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين

هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولاً .



محصلة ناتج جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه



هو المتجه الصفري ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\vec{0}$ وطوله صفر وليس له اتجاه .

إيجاد المحصلة هندسياً

قاعدة المثلث

طريقته:

- تلتقي نقطة نهاية المتجه a مع نقطة بداية المتجه b
- المحصلة هي المتجه المرسوم من نقطة بداية المتجه a إلى نهاية المتجه b

قاعدة متوازي الأضلاع

طريقته:

- تلتقي نقطة بداية المتجه a مع نقطة بداية المتجه b
- نكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعا a, b
- المحصلة هي المتجه الذي يمثل قطر متوازي الأضلاع الذي بدايته نقطة التقاء بدايتي المتجهين.

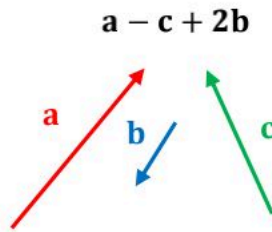
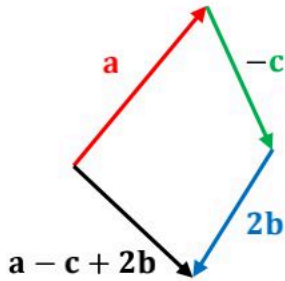
العمليات على المتجهات

$|k|$ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k

$|v|$ طول المتجه v

ضرب متجه في عدد حقيقي
إذا ضرب المتجه v في عدد حقيقي k ، فإن طول المتجه kv هو $|k| |v|$ ، ويتحدد اتجاهه بإشارة k
إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه kv هو اتجاه v نفسه.
إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه kv هو عكس اتجاه v .

ارسم المتجه التالي :



مثال

المركبات المتعامدة



هي مركبتان متعامدتان واحدة أفقية والأخرى رأسية .

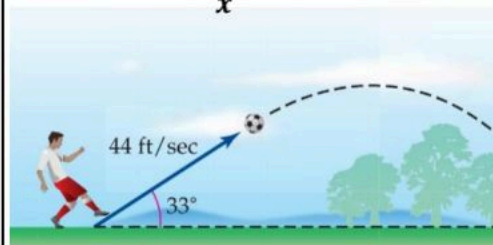
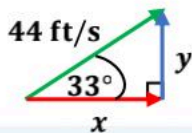
مقدار المركبة الأفقية $|x| = r \cos \theta$

مقدار المركبة الرأسية $|y| = r \sin \theta$

المركبة الأفقية

المركبة الرأسية

يركل لاعب كرة قدم من سطح الأرض بسرعة مقدارها 44 ft/s ، وبزاوية 33° مع سطح الأرض.



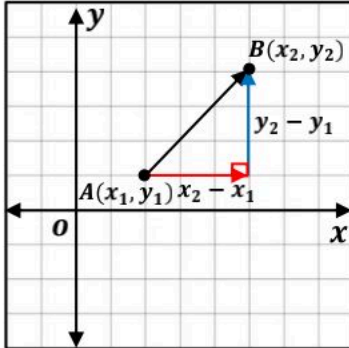
مقدار المركبة الأفقية للسرعة $|x| = r \cos \theta$

$|x| = 44 \cos 33^\circ \approx 36.9 \text{ ft/s}$

مقدار المركبة الرأسية للسرعة $|y| = r \sin \theta$

$|y| = 44 \sin 33^\circ \approx 23.96 \text{ ft/s}$

الصورة الإحداثية لمتجه



الصورة الإحداثية لـ \overline{AB} الذي نقطته بدايته $A(x_1, y_1)$

ونقطته نهايته $B(x_2, y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

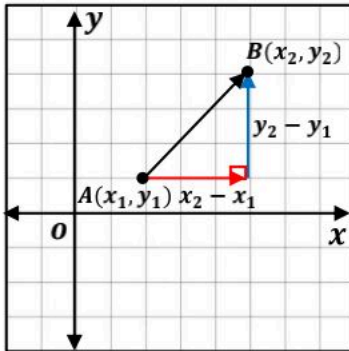
مثال :

الصورة الإحداثية لـ \overline{AB} الذي نقطته بدايته $A(-2, -7)$

ونقطته نهايته $B(6, 1)$ هي:

$$\begin{aligned} &= \langle 6 - (-2), 1 - (-7) \rangle \\ &= \langle 8, 8 \rangle \end{aligned}$$

طول المتجه



طول \overline{AB} الذي نقطته بدايته $A(x_1, y_1)$

ونقطته نهايته $B(x_2, y_2)$ هو:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال :

طول \overline{AB} الذي نقطته بدايته $A(-2, -7)$

ونقطته نهايته $B(6, 1)$ هو:

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| &= \sqrt{(6 - (-2))^2 + (1 - (-7))^2} \\ &= \sqrt{128} \approx 11.3 \end{aligned}$$

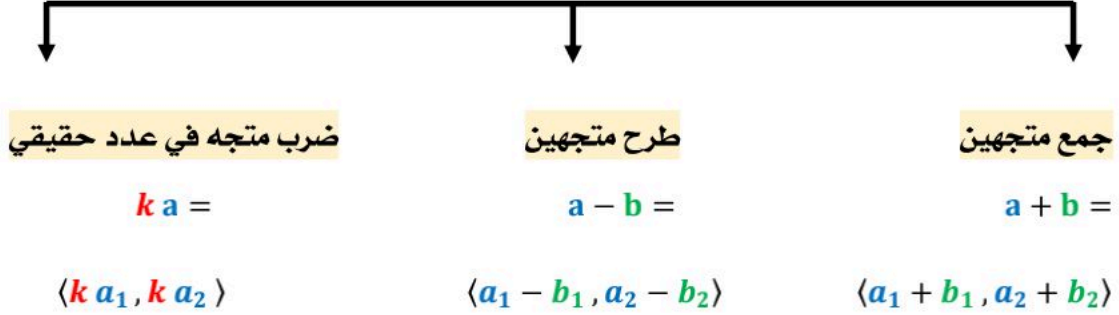
إذا كانت الصورة الإحداثية للمتجه هي $\langle a, b \rangle$ فإن طوله $= \sqrt{a^2 + b^2}$

من مثال : الصورة الإحداثية لـ \overline{AB} هي $\langle 8, 8 \rangle$ فإن طوله هو:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(8)^2 + (8)^2} = \sqrt{128} \approx 11.3$$

العمليات على المتجهات

إذا كان $a = \langle a_1, a_2 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين و k عدد حقيقي، فإن :



مثال

إذا كان : $a = \langle 2, 5 \rangle$, $b = \langle -3, 0 \rangle$, $c = \langle -4, 1 \rangle$

$$\begin{aligned} & 2c + 4a - b \\ &= 2\langle -4, 1 \rangle + 4\langle 2, 5 \rangle - \langle -3, 0 \rangle \\ &= \langle -8, 2 \rangle + \langle 8, 20 \rangle + \langle 3, 0 \rangle \\ &= \langle 3, 22 \rangle \end{aligned}$$

متجه طوله 1 ويرمز له بالرمز u

طريقة إيجادها : قسمه المتجهة على طوله . $u = \frac{v}{|v|}$

متجه الوحدة

u

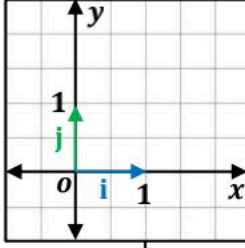
مثال

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه $w = \langle 6, -2 \rangle$

$$\begin{aligned} u &= \frac{w}{|w|} \\ &= \frac{\langle 6, -2 \rangle}{|\langle 6, -2 \rangle|} \\ &= \frac{\langle 6, -2 \rangle}{\sqrt{6^2 + (-2)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\langle 6, -2 \rangle}{\sqrt{40}} \\ &= \left\langle \frac{6}{\sqrt{40}}, \frac{-2}{\sqrt{40}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{6\sqrt{40}}{40}, \frac{-2\sqrt{40}}{40} \right\rangle \quad \leftarrow \text{انطاق المقام} \\ &= \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle \quad \leftarrow \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

متجها الوحدة القياسيان

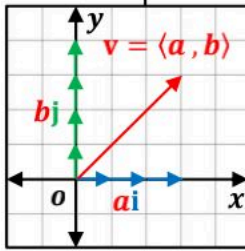


هما متجها الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x والاتجاه الموجب لمحور y

$$\text{ويرمز لهما بالرمزين } i = \langle 1, 0 \rangle, j = \langle 0, 1 \rangle$$

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $v = \langle a, b \rangle$

$$\text{بالصورة: } v = ai + bj$$



التوافق الخطي

ملاحظة

i عدد تخيلي
متجه الوحدة i

يقصد به كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة j, i
تسمى الصورة $ai + bj$ توافق خطي لمتجهي الوحدة.

مثال

اكتب المتجه \overline{DE} على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة j, i

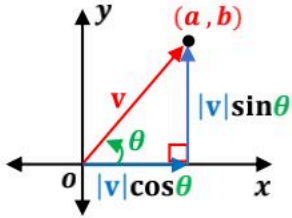
$$D(-6, 0), E(2, 5)$$

أولاً: نكتب المتجه بالصورة الإحداثية $\overline{DE} = \langle 2 - (-6), 5 - 0 \rangle = \langle 8, 5 \rangle$

ثانياً: نعيد كتابتها كتوافق خطي $\overline{DE} = \langle 8, 5 \rangle = 8i + 5j$

إيجاد الصورة الإحداثية

الصورة الإحداثية لمتجه معطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي



طول المتجه $|v|$ و الزاوية θ

$$v = \langle |v| \cos \theta, |v| \sin \theta \rangle$$

ويمكن كتابتها كتوافق خطي

$$v = |v| (\cos \theta) \mathbf{i} + |v| (\sin \theta) \mathbf{j}$$

مثال

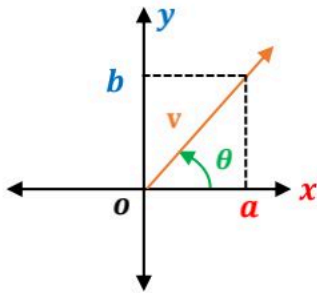
أوجد الصورة الإحداثية للمتجه v المعطى

طوله $|v| = 8$ وزاوية الاتجاه مع الأفقي $\theta = 45^\circ$

$$v = \langle |v| \cos \theta, |v| \sin \theta \rangle$$

$$v = \langle 8 \cos 45^\circ, 8 \sin 45^\circ \rangle = \langle 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2} \rangle$$

زوايا الاتجاه للمتجهات



زاوية اتجاه المتجه مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x)

إذا كان المتجه $v = \langle a, b \rangle$ وذلك بحل المعادلتين: $\tan \theta = \frac{b}{a}$

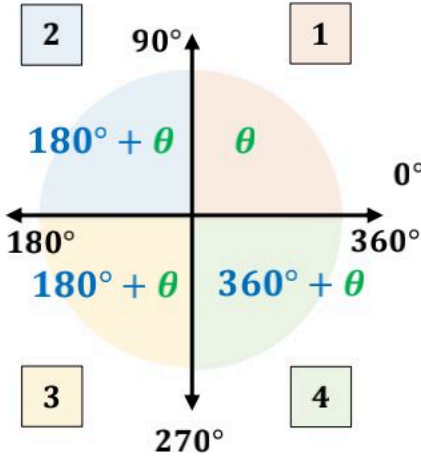
$$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

لايجاد الزاوية

1 نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية :

- إذا كانت $\tan \theta$ موجبة فإن الزاوية θ تقع في الربع الأول أو الربع الثالث.
 - إذا كانت $\tan \theta$ سالبة فإن الزاوية θ تقع في الربع الثاني أو الربع الرابع.
- لتحديد الربع بشكل أدق نستعمل قيمتي a و b حيث تؤخذ a من محور x وتؤخذ b من محور y .

2 نحدد قيمة الزاوية θ وذلك عن طريق $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$



الزاوية المطلوبة مع الاتجاه الأفقي

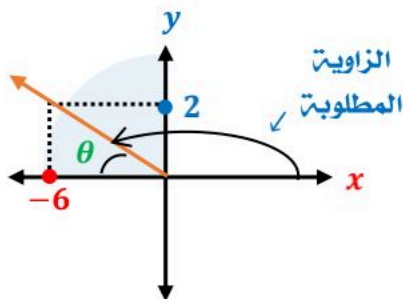
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الأول تبقى كما هي (موجبة)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثاني تكون (سالبة) ولايجادها نضيف 180° (لأنها ستكون أقل من 180°)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثالث تكون (موجبة) ولايجادها نضيف 180° (لأنها ستكون أكبر من 180°)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الرابع تكون (سالبة) ولايجادها نضيف 360° (لأنها ستكون أقل من 360°)

أوجد زاوية المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور x :

مثال

$$-6i + 2j$$

$$a = -6, b = 2$$



$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan \theta = \frac{2}{-6}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2}{-6}$$

$$\theta = -18.4^\circ$$

θ تقع في الربع الثاني

$$180^\circ + \theta$$

$$= 180 - 18.4$$

$$= 161.6^\circ$$

تطبيقات العمليات على المتجهات

إيجاد محصلة سرعة الحركة

1 نوجد متجه السرعة الأول وغالباً يكون متجه أفقي $v_1 = \langle a, 0 \rangle$

2 نوجد الصورة الإحداثية لمتجه السرعة الثاني والذي مقداره v_2 وزاوية اتجاهه θ

$$v_2 = \langle |v_2| \cos \theta, |v_2| \sin \theta \rangle$$

3 نوجد مجموع المتجهين $v = v_1 + v_2 = \langle a, b \rangle$

4 نوجد محصلة السرعتين باستخدام قانون طول المتجه

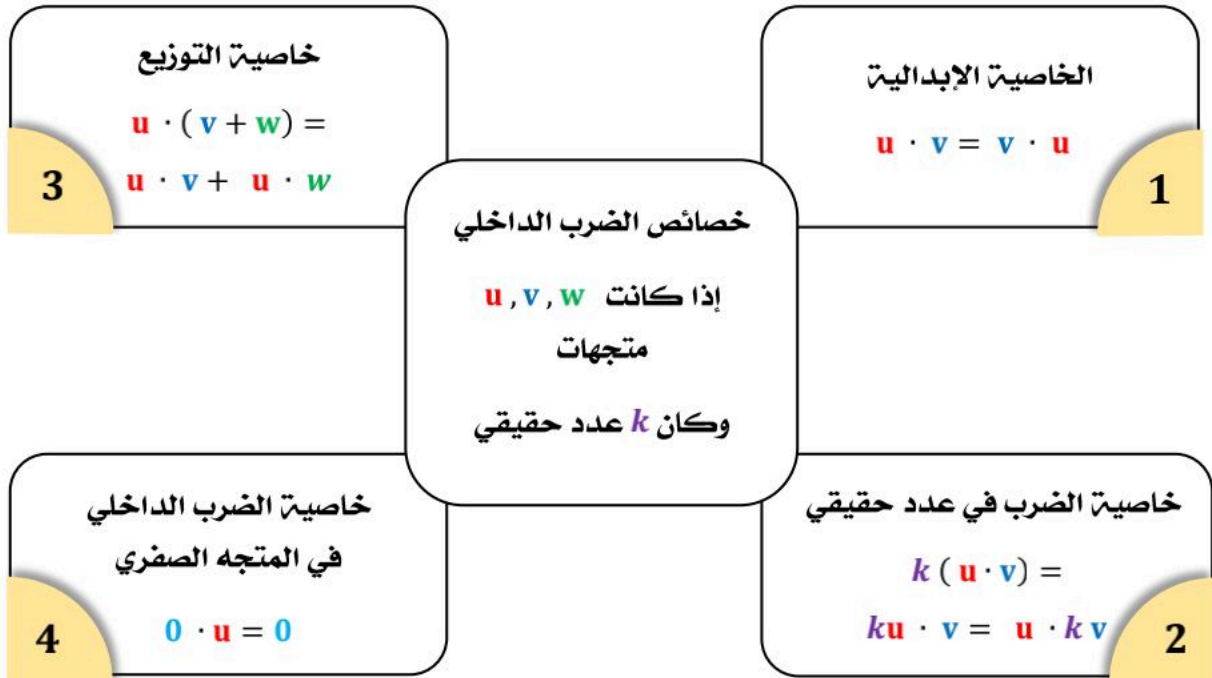
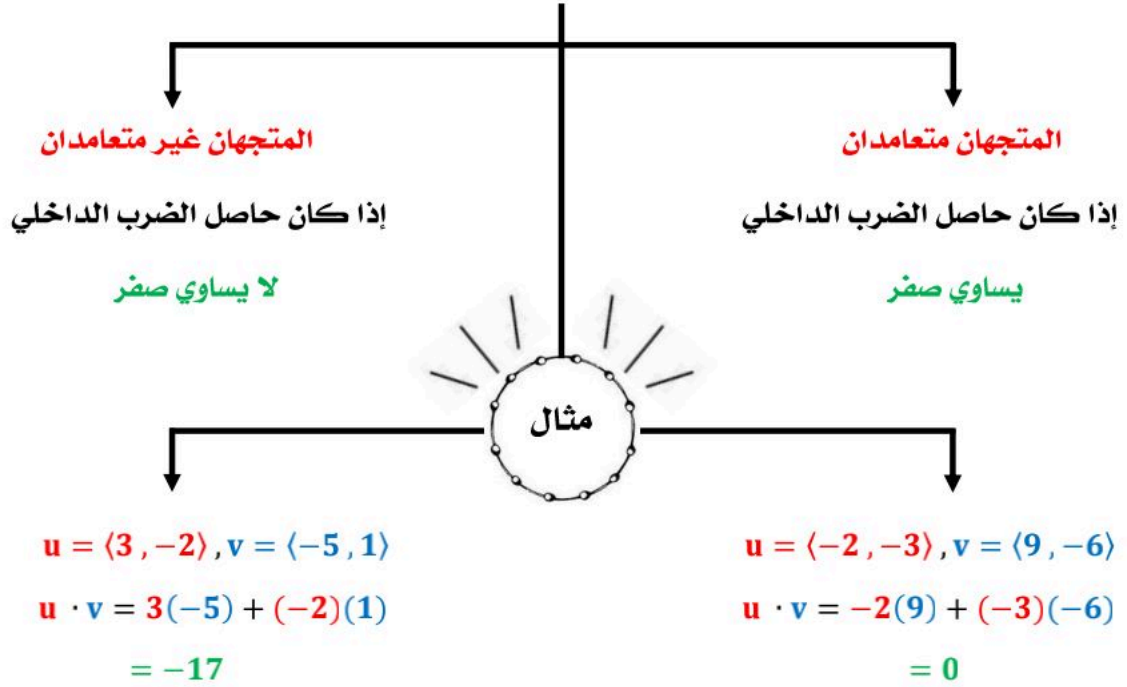
$$v = \sqrt{a^2 + b^2}$$

إيجاد اتجاه الحركة

1 بعد إيجاد مجموع المتجهين $v = v_1 + v_2 = \langle a, b \rangle$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

الضرب الداخلي لمتجهين $a = \langle a_1, a_2 \rangle, b = \langle b_1, b_2 \rangle$ الناتج يكون عدداً وليس متجهاً $\rightarrow a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$ 

العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$$

5

مثال

استعمل الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه $\mathbf{c} = \langle -1, -7 \rangle$

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}} \quad \text{فإن} \quad |\mathbf{c}|^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$$

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{(-1, -7) \cdot (-1, -7)}$$

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50} = 7.07$$

الزاوية بين المتجهين

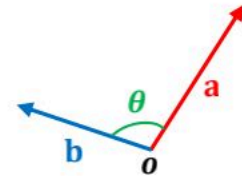
إذا كانت الزاوية بين المتجهين 90° فإنهما متعامدان .

إذا كانت الزاوية بين المتجهين

 0° أو 180° فإنهما متوازيان .إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين \mathbf{a}, \mathbf{b} فإن :

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$



مثال

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين \mathbf{u}, \mathbf{v} :

$$\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-5(4) + (-2)4}{\sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} \sqrt{4^2 + 4^2}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-28}{\sqrt{29} \sqrt{32}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-28}{4\sqrt{58}} = 156.8^\circ$$

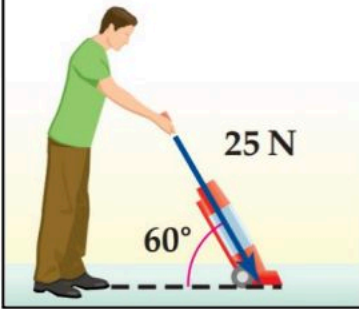
الشغل



مقدار القوة المؤثرة في جسم لتحريكه مضروباً في المسافة المتجهة التي تحركها .

$$W = |F| |\overline{AB}|$$

مثال



يدفع إبراهيم مكنته كهربائية بقوة مقدارها 25 N ، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنته و سطح الأرض 60° ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنته مسافة 6 m

$$W = F \cdot \overline{AB}$$

2 الصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي :

$$\overline{AB} = \langle 6, 0 \rangle$$

1 الصورة الإحداثية للقوة المتجه F

بدلالة مقدار القوة ، و زاوية الاتجاه هي :

$$F = \langle 25 \cos 60^\circ, 25 \sin 60^\circ \rangle$$

$$F = \langle 12.5, 21.6 \rangle$$

$$W = F \cdot \overline{AB} \quad 3$$

$$W = \langle 12.5, 21.6 \rangle \cdot \langle 6, 0 \rangle$$

$$W = 75 + 0 = 75 \text{ J}$$

وحدات الشغل
في النظام
المتري
نيوتن- متر
أوجول

طريقة أخرى مختصرة

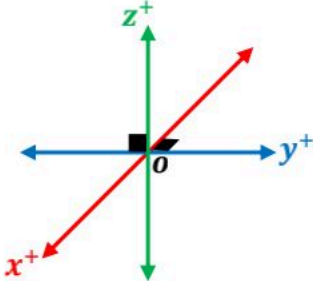
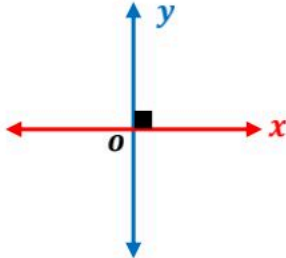
$$W = d \cdot F \cdot \cos \theta$$

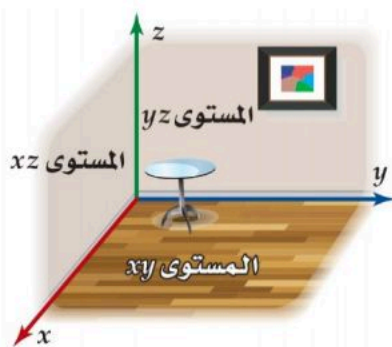
$$d = 6, \quad F = 25, \quad \theta = 60^\circ$$

$$W = 6 (25) \cos 60^\circ$$

$$W = 75 \text{ J}$$

الفرق بين نظام المستوى الإحداثي ونظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد

المستوى الثلاثي الأبعاد	نوع النظام	المستوى الإحداثي
3	عدد المحاور	2
يتشكل بواسطة ثلاثة خطوط متعامدة هي المحور x والمحور y والمحور z	المحاور	يتشكل بواسطة خطي أعداد متعامدين هما المحور x والمحور y
تتقاطع في نقطة تسمى نقطة الأصل $(0, 0, 0)$	نقطة التقاطع	يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل $(0, 0)$
ثلاث مستويات تقسم الفضاء إلى ثماني مناطق يسمى كل منها الثمن .	شكلها	مستويان تقسم المستوى إلى أربع مناطق يسمى كل منها الربع .
تحديد وتعيين نقاط في الفضاء.	يسمح هذا النظام بـ	تحديد وتعيين نقاط في المستوى .
(x, y, z)	الإحداثيات	(x, y)
	التمثيل البياني	



الثمان

الشكل المجاور يمثل الثمن في الفضاء الثلاثي الأبعاد وهو الجزء الظاهر من الغرفة .

الثلاثي المرتب

وهو شكل كتابة النقطة في الفضاء (x, y, z) حيث أنها أعداد حقيقية .

مثال : $(2, 4, -6)$

تعيين نقطة في الفضاء

لتكن النقطة (x, y, z)

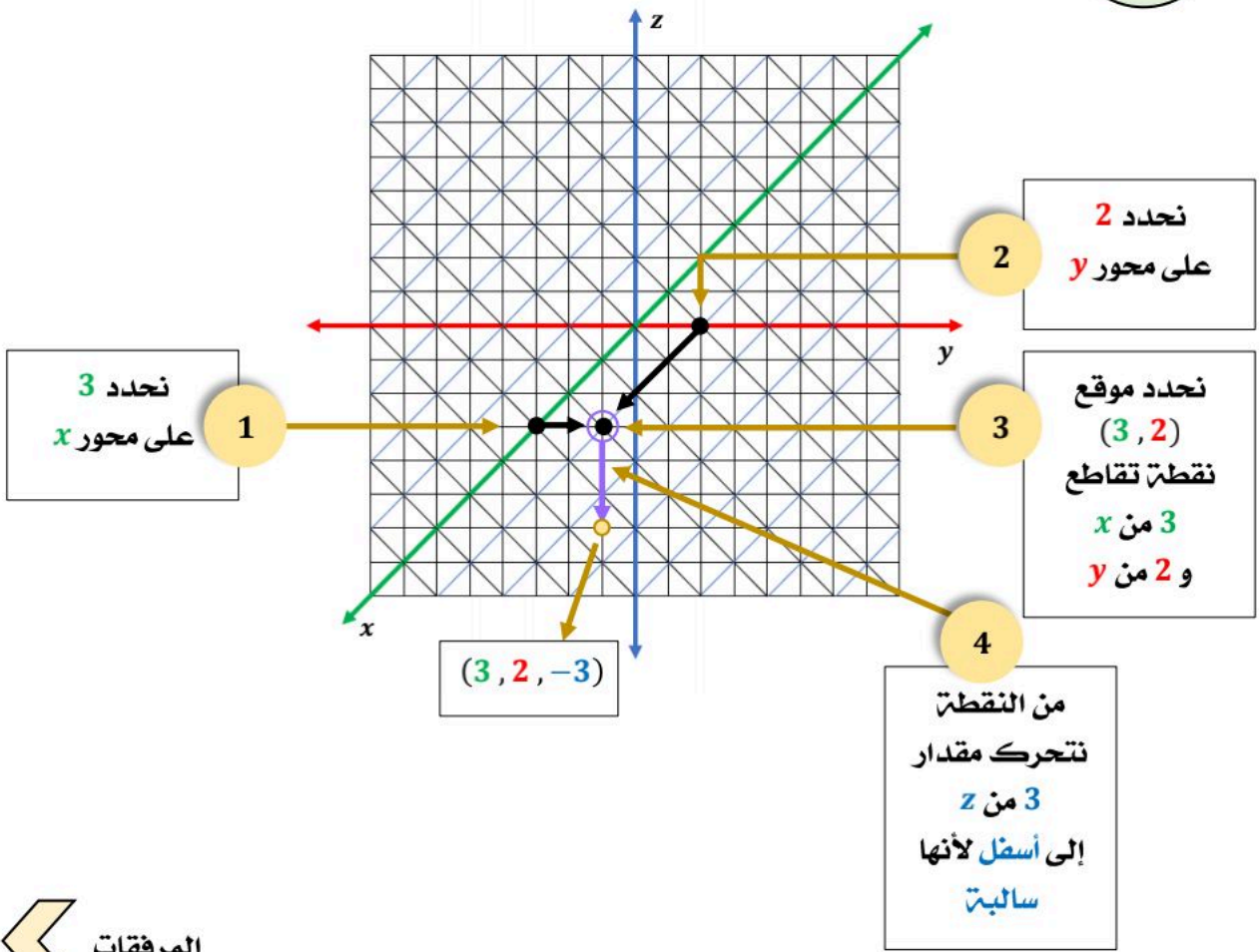
1 عين النقطة (x, y) في المستوى xy

2 تحرك لأعلى إذا كانت قيمة z موجبة أو إلى أسفل إذا كانت قيمة z سالبة

باتجاه موازي لمحور z

عين النقطة $(3, 2, -3)$ في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :

مثال



المرفقات

المسافة بين نقطتين في الفضاء

يشبه قانون
المسافة بين نقطتين
في المستوى
الإحداثي

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

نقطة المنتصف في الفضاء

يشبه قانون
نقطة المنتصف
في المستوى
الإحداثي

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$$

نقطة المنتصف M \overline{AB}

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

المتجهات في الفضاء

تشبه المتجهات في
المستوى الإحداثي

المتجه في الوضع القياسي $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

المتجه الصفري $0 = \langle 0, 0, 0 \rangle$

متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية:

$$i = \langle 1, 0, 0 \rangle, j = \langle 0, 1, 0 \rangle, k = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

يمكن التعبير عن المتجه v على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة i, j, k :

$$v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

تعيين متجه في الفضاء

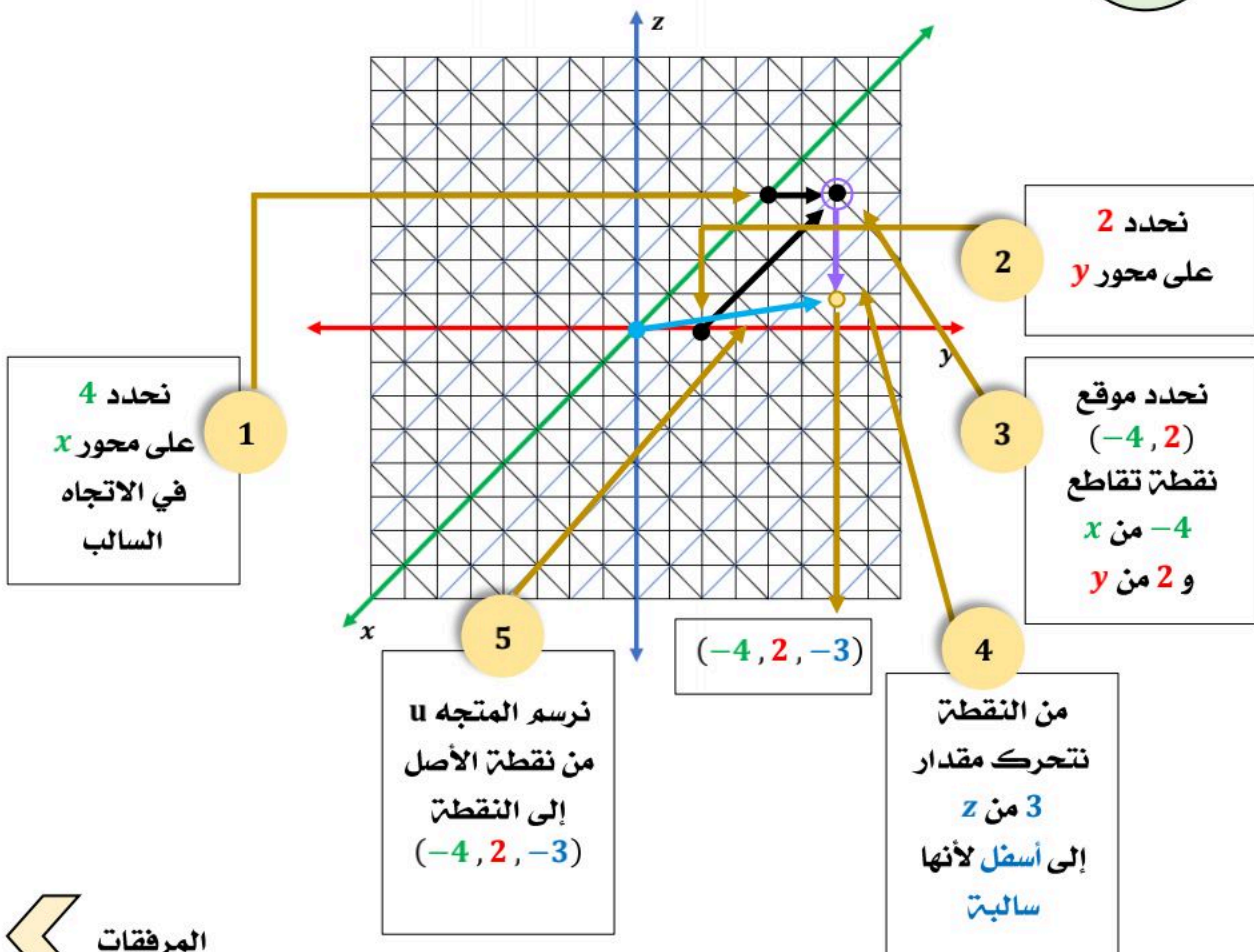
ليكن المتجه $v = \langle x, y, z \rangle$

1 عين النقطة (x, y, z) بالطريقة السابقة.

2 المتجه v بيانياً وذلك بأن تكون نقطة الأصل هي نقطة البداية والنقطة (x, y, z) هي نقطة النهاية.

عين المتجه $u = \langle -4, 2, -3 \rangle$ في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :

مثال



المرفقات

العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين و k عدد حقيقياً، فإن :

جمع متجهين $a + b = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $a - b = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجه في عدد حقيقي $ka = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

الصورة الإحداثية لمتجه في الفضاء

الصورة الإحداثية لـ \overline{AB} الذي نقطته بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطته نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$

التعبير عن المتجهات في الفضاء يشبه المستوى الإحداثي

طول المتجه في الفضاء

طول \overline{AB} الذي نقطته بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطته نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ هو: $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

متجه الوحدة في الفضاء

متجه الوحدة u باتجاه \overline{AB} هو: $u = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}$

الضرب الداخلي في الفضاء

الضرب الداخلي للمتجهين $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ الناتج يكون عدداً وليس متجهاً $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

المتجهان غير متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

لا يساوي صفر

$$u = \langle 4, -2, -3 \rangle, v = \langle 1, 3, -2 \rangle$$

$$u \cdot v = 4(1) + (-2)(3) + (-3)(-2)$$

$$= 4$$

المتجهان متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

يساوي صفر

$$u = \langle 3, -5, 4 \rangle, v = \langle 5, 7, 5 \rangle$$

$$u \cdot v = 3(5) + (-5)(7) + 4(5)$$

$$= 0$$

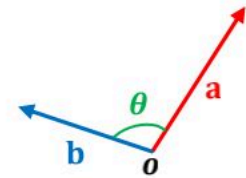
مثال

الزاوية بين المتجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين a, b فإن :

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v :

$$u = \langle -4, 2, 1 \rangle, v = \langle 4, 0, 3 \rangle$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{u \cdot v}{|u| |v|}$$

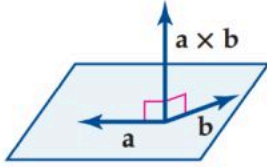
$$\theta = \cos^{-1} \frac{-4(4) + 2(0) + 1(3)}{\sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (1)^2} \sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (3)^2}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-13}{\sqrt{21} \sqrt{25}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-13}{5\sqrt{21}} = 124.6^\circ$$

مثال

الضرب الاتجاهي



الضرب الاتجاهي لمتجهين a, b هو متجه وليس عدداً

ويرمز له بالرمز $a \times b$ (\times تقرأ cross)

ويكون المتجه الناتج عمودياً على المستوى الذي يحوي المتجهين a, b

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في النظام ثلاثي الأبعاد فقط.

الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان : $a = a_1i + a_2j + a_3k$, $b = b_1i + b_2j + b_3k$

فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين a, b هو المتجه :

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

يكون الضرب الاتجاهي

$$u \times v$$

عمودياً على كلا من

المتجهين

$$u, v$$

إذا كان حاصل

الضرب الداخلي لـ $u \times v$

مع كلا من المتجهين

يساوي صفراً.

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u, v : $u = \langle 4, 2, -1 \rangle$, $v = \langle 5, 1, 4 \rangle$

مثال

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

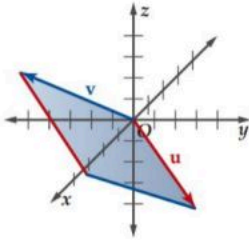
$$u \times v = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} k$$

$$u \times v = (2(4) - (-1)(1))i - (4(4) - (-1)(5))j + (4(1) - 2(5))k$$

$$u \times v = (8 + 1)i - (16 + 5)j + (4 - 10)k$$

$$u \times v = 9i - 21j - 6k$$

تطبيقات هندسية للضرب الاتجاهي



مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه u, v ضلعان متجاوران

هو طول $u \times v$ أي مقدار المتجه $|u \times v|$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه :

$u = -6i - 2j + 3k$, $v = 4i + 3j + k$ ضلعان متجاوران.

مثال

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

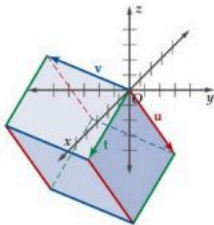
$$u \times v = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} k$$

$$u \times v = -11i + 18j - 10k$$

$$|u \times v| = \sqrt{(-11)^2 + (18)^2 + (-10)^2}$$

مساحة متوازي الأضلاع تساوي 23.3 وحدة مربعة

$$|u \times v| = \sqrt{545} = 23.3$$



متوازي السطوح : هو مجسم ثلاثي الأبعاد في الفضاء ، له ستة أوجه ، كل منها على شكل متوازي أضلاع .

حجم متوازي السطوح : هو القيمة المطلقة للضرب القياسي الثلاثي .

إذا كان : $t = t_1i + t_2j + t_3k$, $u = u_1i + u_2j + u_3k$, $v = v_1i + v_2j + v_3k$

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} : \text{ الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات } t, u, v$$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه :

$t = 2j - 5k$, $u = -6i - 2j + 3k$, $v = 4i + 3j + k$ أحرف متجاورة .

مثال

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} (0) - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} (2) + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} (-5)$$

$$t \cdot (u \times v) = -10(0) + 18(2) + (-10)(-5)$$

حجم متوازي السطوح يساوي 86 وحدة مكعبة

$$t \cdot (u \times v) = 36 + 50 = 86$$