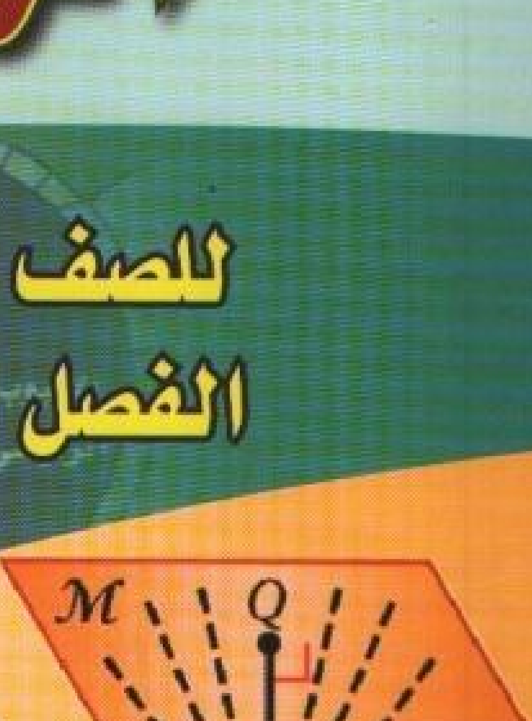
سلسلة سلاح الطالب

طبقاً للمنهج المطور

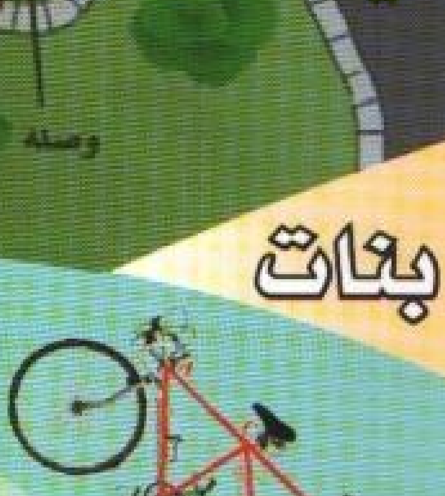
١

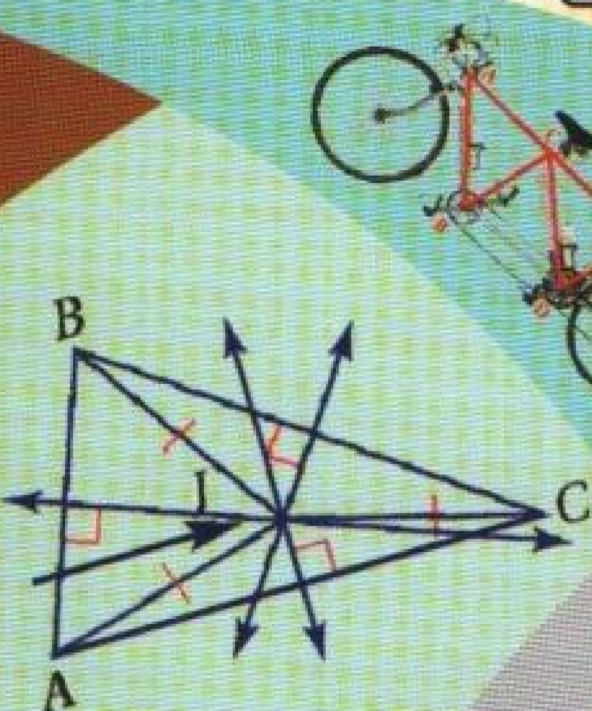
تبسيط الرياضيات

للصف الأول الثانوى
الفصل الدراسي الأول



بنين - بنات





تأليف
أمجد نعيم

الفهرس

الفصل الأول

التبرير والبرهان

- التبرير الاستقرائي والتخمين الرياضي
- المنطق
- العبارات الشرطية
- التبرير الاستنتاجي
- المسلمات والبراهين الحرة
- البرهان الجبري
- إثبات علاقات بين القطع المستقيمة
- إثبات علاقات الزوايا

تهيئة للفصل الأول

عزيزي الطالب/

لنراجع معا الأمثلة التالية وبصورة سريعة والتي تعد مدخل موفق بإذن الله لبداية الفصل الأول من هذا الكتاب.

مثال

أوجد قيمة التعبير التالي:

$n^2 -5n +3$ حيث $n=2$

$n^2 -5n +3$ تبدأ بكتابة التعبير

$=(2)^2 -5(2) +3$ عوض عن قيمة المجهول بالقيمة المعطاة.

$=(4-10) + 3$ أوجد قيمة القوى.

$=-6+3$ قم بتجميع الحدود.

$=-3$ انتهى الحل

للمعرفة

اعلم أن عدد حلول أي معادلة مرهون بدرجة المعادلة نفسها فمعادلة من الدرجة الأولى مثلا لها حل وحيد فقط على الأكثر ومعادلة من الدرجة الثانية لها حلين على الأكثر وهكذا ...

مثال

حل المعادلة: $50x+18 = 20x+24$

$50x+18 = 20x+24$ اكتب المعادلة

لاحظ أنها معادلة من الدرجة الأولى وهذا يعني أن لها حل وحيد على الأكثر.

$30x + 18 = 24$ اطرح $20x$ من كلا الطرفين

$30x = (24-18)$ تخلص من 18 بطرحها من كلا الطرفين

$30x = (6)$ تخلص من معامل x وهو 30

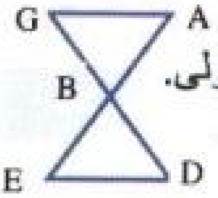
$x = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ بقسمة كلا الطرفين عليه

انتبه:

عند إجراءك عزيزي الطالب لأي عملية حسابية على طرف من أطراف المعادلة فيجب عليك أن تجريها على الطرف الآخر وذلك لتحافظ على إشارة المساواة.

مثال

استعمل الشكل المجاور، إن علمت أن $m\measuredangle ABG = 100$ في المثلث ABG و $m\measuredangle DBE = 4x + 4$ في المثلث DBE أوجد قيمة المتغير x؟



$m\measuredangle DBE = m\measuredangle ABG$ لأنهما متقابلتان بالرأس

$4x+4 = 100$ أصبح لدي معادلة من الدرجة الأولى.

$4x = 96$ اطرح 4 من كلا الطرفين.

$x = 24$ اقسم على معامل x وهو 4.

حلول اختبار سريع

جد الناتج فيما يأتي:

1- $3n - 2 \;;\; n=4$
$= 3(4) - 2$
$= 12 - 2 = 10$

2- $(n+1)+n \;;\; n=6$
$= (6+1)+6$
$= 7 + 6 = 13$

3- $n^2 - 3n \;;\; n=3$
$= (3^2) - 3(3)$
$= 9 - 9 = 0$

4- $180(n-2) \;;\; n=5$
$= 180(5-2)$
$= 180(3) = 540$

5- $n(\frac{n}{2}) \;;\; n=10$
$= 10\left(\frac{10}{2}\right)$
$= 10(5) = 50$

6- $\frac{n(n-3)}{2} \;;\; n=8$
$= \frac{8(5)}{2} = \frac{40}{2}$
$= 20$

7- اكتب التعبير الذي يدل على "أقل بثلاثة من مربع عدد مضاف إليه اثنان".

نفرض أن العدد هو n أقل بثلاثة تعني -3

مربع عدد مضاف إليه اثنان تعني n^2+2

لنركب العبارة ونحولها لتعبير رياضي:

أقل بثلاثة من مربع عدد مضاف إليه اثنان $n^2 + 2 - 3 = n^2 - 1$

8- اكتب التعبير الذي يدل على "أكثر بثلاثة من مربع عدد". $n^2 + 3$

حل كل معادلة من المعادلات التالية:

9- $6x - 42 = 4x$
$2x - 42 = 0$
$2x = 42$
$x = 21$

10 $8 - 3n = -2 + 2n$
$8 - 5n = -2$
$-5n = -10$
$n = 2$

11

$3(y+2)=-12+y$

$3y+6 = -12+y$

$2y = -18$

$y = -9$

12

$12+7x = x-18$

$12 + 6x = -18$

$6x = -30$

$x = -5$

13

$3x+4 = \frac{1}{2}x - 5$

$\frac{5}{2}x + 4 = -5$

$\frac{5}{2}x = -9$

$x = -9 \times \frac{2}{5}$

$x = \frac{-18}{5}$

14

$2-2x = \frac{2}{3}x - 2$

$2 - \frac{6}{3}x - \frac{2}{3}x = -2$

$-\frac{8}{3}x = -4$

$x = -4 \times -\frac{3}{8}$

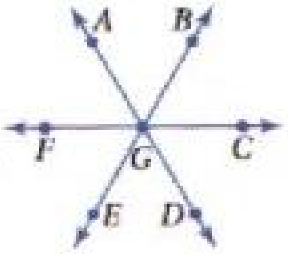
$= \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

15 -اشترى مالك 3 أقراص مدمجة بـ 24 ريالا. اكتب معادلة تمثل متوسط ثمن القرص الواحد وحلها.

نفرض أن القرص هو n

$n+n+n = 24 \quad \rightarrow \quad 3n = 24 \quad \rightarrow \quad n=8$

استعمل الشكل المقابل في حل الأسئلة *16-19*:



16 -حدد زاويتين حادتين متقابلتين بالرأس.

$\measuredangle AGF, \measuredangle CGD \qquad \measuredangle EGD, \measuredangle AGB$

17 -حدد زاويتين منفرجتين متجاورتين.

الزاوية المنفرجة > 90

$\measuredangle DGF, \measuredangle FGA, \measuredangle DGB \qquad \measuredangle EGC, \measuredangle EGA, \measuredangle AGC$

18 -إذا كان $m\angle AGB = 4x + 7$, $m\angle EGD = 71$ فأوجد قيمة x.

$m\angle EGD = m\angle AGB$ لأنهما متقابلتين بالرأس

$71 = 4x + 7$ معادلة من الدرجة الأولى.

$64 = 4x$ اطرح 7 من كلا الطرفين

$x = 16$ اقسم على معامل x وهو 4

19 -إذا كان $m\angle CGD = 8x + 4, m\angle BGC = 45, \angle DGE = 15x - 7$ فأوجد قيمة x.

$$\measuredangle BGC + \measuredangle CGD + \measuredangle DGE = 180^\circ$$

لأنه لو رجعنا للرسم وجمعنا الزوايا الثلاث فسوف يعطينا الزاوية BGE وهي زاوية مستقيمة قياسها 180°.

$$45 + 8x + 4 + 15x - 7 = 180^\circ$$

$$(42 + 13x) = 180$$

$$23x = 138$$

$$x = 6$$

1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين الرياضي

التخمين: هو إصدار حكم أو ادعاء عام مبنيا على مجموعة من المقدمات والمعلومات والمعطيات.

التبرير الاستقرائي: هي عبارة عن مجموعة الأسباب والمسوغات التي جعلتني أصدر مثل هذا الادعاء أو التخمين.

مثال

خمن الحد التالي في المتتابعة: $-10 , -2 , 5 , 11 , 16 , 20$

لاحظ: أن المتتابعة تتناقص وأن تناقصها ليس بصورة مقدار ثابت بل على صورة نمط معين.

النمط: $20 \quad 16 \quad 11 \quad 5 \quad -2 \quad -10$

$-4 \quad -5 \quad -6 \quad -7 \quad -8$

التخمين: الحد التالي ينقص بمقدار 9 عن الحد سابقه

$-10 - 9 = -19$

إرشادات:

عند تخمين حد متتابعة معطى فيجب أن نلاحظ في البداية سلوك المتتابعة من حيث:

1 - التزايد والتناقص.

2 - هل تزايدها وتناقصها على صورة مقدار ثابت أم على نمط معين.

مثال

لتكن النقطة G منتصف القطعة $\overline{AB}$ اعمل تخمينا وارسم الشكل الذي يوضح تخمينك؟

في هذا المثال لا يوجد لدي نمط ألاحظ سلوكه لذلك سأحاول أن أستفيد من معطيات السؤال.

المعطيات: النقطة G منتصف القطعة $\overline{AB}$

التخمين: $\overline{AG} = \overline{GB}$

التحقق: ارسم القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ والنقطة G في منتصفها.

للمعرفة

يقال عن ثلاث نقاط A.B.C بالترتيب أنها على استقامة واحدة إذا حققت التالي: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

المثال المضاد: هو مثال يعطى لتوضيح خطأ التخمين ولبيان الإدعاء أو التخمين المعطى غير صحيح ويكفي لنفي التخمين إعطاء مثال مضاد واحد على الأقل.

مثـــال

أعط مثالا مضادا للعبارة التالية:

لو كان x^2 عدد حقيقي أكبر من أو يساوي الصفر فإن x هي أيضا أكبر من أو تساوي الصفر.

التخمين خاطئ: لأن $(-2)^2$ > صفر

ولكن (2- < صفر) مثال مضاد

تدريبات وحلول

خمن الحد التالي في كل من المتتابعتين التاليتين: (ابدأ من اليسار)

1 -

الحد الثالث	الحد الثاني	الحد الأول
3 مربعات، 3 مثلثات، 3 دوائر	مربعين، مثلثين، دائرتين	مربع، مثلث ، دائرة

لاحظ أيضا أن كل الحدود بدأت بدائرة وانتهت بمربع.

الحد الرابع: سيبدأ بأربع دوائر ثم أربع مثلثات ثم أربع مربعات وسيكون على الصورة.

2 - $-8\ ,\ -5\ ,\ -2\ ,\ 1\ ,\ 4$

لاحظ أن المتتابعة تتزايد بمقدار ثابت (3+)

التخمين: الحد المطلوب سيزيد عن سابقه بثلاثة وسيصبح $4+3=7$

اكتب تخمينا بناء على المعلومات المعطاة وارسم شكلا يوضح تخمينك:

3 - $PQ = RS$, $RS = TU$ التخمين: $PQ = TU$

4 - يتقاطع المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ في النقطة P.

التخمين: $\angle CPA = \angle BPD$ لأنهما متقابلتين بالرأس

$\angle DPA = \angle BPC$ أيضا بالتقابل بالرأس

للسؤالين 5 , 6 ارجع إلى الجدول وأوجد مثالا مضادا لكل من العبارات التالية:

5 - النسبة المئوية لعدد السكان أقل من 20% من سكان المملكة العربية السعودية.

التخمين خاطئ لأن النسبة المئوية لعدد سكان الرياض ومكة تزيد عن 20% .

6 - كل منطقة مذكورة في الجدول عدد سكانها أكثر من مليوني نسمة.

التخمين خاطئ لأن عدد سكان المدينة المنورة يقل عن مليوني نسمة.

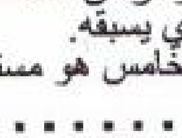
خمن الحد التالي في كل من المتتابعتين التاليتين: (ابدأ من اليسار)

7 -

لاحظ أن طول وعرض المستطيل يزيد كل منهما بمقدار واحد في كل حد مقارنة بالحد الذي يسبقه.

التخمين: **الحد الخامس هو مستطيل طوله 6، وعرضه 5.**

التحقق: بالرسم.



الحد الثالث	الحد الثاني	الحد الاول
أربع مثلثات تتجه لليمين	ثلاث مثلثات تتجه للأعلى	مثلثان يتجهان نحو اليمين

الحد الرابع: سيتكون من خمس مثلثات تتجه نحو الأعلى، على النحو التالي:

8 - $1, 2, 4, 8, 16$

المتتابعة عبارة عن مضاعفات (2)

$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$

$2\times \quad 2\times \quad 2\times \quad 2\times$

التخمين: الحد المطلوب هو

$32 = 16 \times 2$

9 - $4, 6, 9, 13, 18$

المتتابعة تزداد على صورة نمط معين

$4 \quad 6 \quad 9 \quad 13 \quad 18$

$2+ \quad 3+ \quad 4+ \quad 5+$

التخمين: الحد المطلوب= الحد السابق+6

$24 = 18 + 6 =$

10 $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3$

لاحظ أن الحدود تزداد بمقدار $\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3} \quad 1 \quad \frac{5}{3} \quad \frac{7}{3} \quad 3$

$\frac{2}{3}+ \quad \frac{2}{3}+ \quad \frac{2}{3}+ \quad \frac{2}{3}+$

التخمين: الحد المطلوب= الحد السابق+$\frac{2}{3}$

$= \frac{2}{3} + 3 = \frac{2}{3} + \frac{9}{3} = \frac{11}{3}$

11 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

المتتابعة تتناقص بصورة نمط معين

ما هي إلا وجه آخر للمتتابعة التالية:

$\frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}$

التخمين: الحد المطلوب هو $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

12 $2, -6, 18, -54$

لاحظ أن المتتابعة أحيانا تتزايد وفي مرات أخرى تتناقص ولكن تزايدها وتناقصها ليس بصورة عشوائية.

$2 \quad -6 \quad 18 \quad -54$

$-3\times \quad -3\times \quad -3\times$

التخمين: لإيجاد الحد المطلوب سوف نضرب سابقه بـ (-3)

$162 = -54 \times -3$

13 $-5, 25, -125, 625$

المتتابعة في هذا التمرين تشبه المتتابعة في التمرين السابق.

$-5 \quad 25 \quad -125 \quad 625$

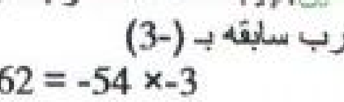
$-5\times \quad -5\times \quad -5\times$

التخمين: الحد المطلوب =

الحد السابق × 5-

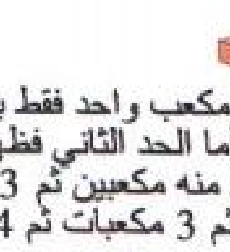
$-3125 = -5 \times 625$

14 -

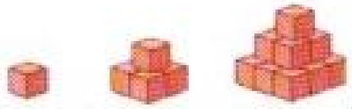


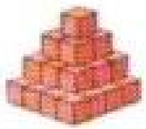
لاحظ أن الحد الأول ظهر فيه مكعب واحد فقط بغض النظر عن المكعبات غير الظاهرة في الحدود الأخرى، أما الحد الثاني فظهر مكعب أسفل منه مكعبين أما الحد الثالث فظهر مكعب أسفل منه مكعبين ثم 3 مكعبات.

التخمين: مكعب تحته مكعبين ثم 3 مكعبات ثم 4 مكعبات كما هو موضح بالرسم.



15 -





لاحظ الحد الأول هو مكعب واحد ناتج من $(1)^2$ ثم الحد الثاني وهو ناتج من $(1)^2+(2)^2 = 5$ ثم الحد الثالث وهو ناتج من $(1)^2+(2)^2+(3)^2 = 14$

التخمين = مكعب تحته 4 مكعبات ثم 9 مكعبات ثم $(4)^2 = 16$ مكعب.

اكتب تخمينا بناء على المعلومات المعطاة وارسم شكلا يوضح تخمينك:

16 - المستقيمان l , m متعامدان. التخمين: الزاوية بينهما قائمة.

17 - $A(-2,-11)$, $B(2,1)$, $C(5,10)$ التخمين: *النقاط تقع على استقامة واحدة.*

18 - الزاويتان $\angle 4$,$\angle 3$ متجاورتان على مستقيم.

زاوية مستقيمة = $\angle 4 + \angle 3$ $\Leftarrow$ $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$

19 - $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$. $\angle ABD = \angle DBC$

20 - الشكل الرباعي $HIJK$ مربع.

التخمين: له 4 أضلاع متساوية و 4 زوايا جميعها قوائم وتنطبق عليه جميع خصائص المربع الأخرى.

21 - الزاوية $\angle B$ في المثلث ABC قائمة.

التخمين: $\angle B = 90^\circ$ ، $\angle A + \angle C = 90^\circ$

ويحقق نظرية فيثاغورس: مربع الوتر = مجموع مربعي الضلعين الآخرين

$|BC|^2 + |AB|^2 = |AC|^2$

للأسئلة التالية، حدد ما إذا كان التخمين صحيحا أو خاطئا، وأعط مثالا مضادا في حالة كونه خاطئا:

22 - الحل: التخمين خاطئ.

23 - الحل: النقاط ليست على استقامة واحدة.

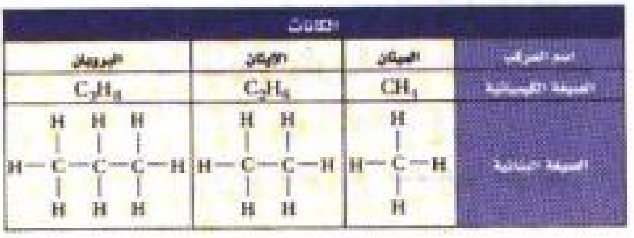
24 - الحل: التخمين صحيح.

25 - الحل: التخمين صحيح.

26 - الحل: التخمين خاطئ، والرسم يوضح ذلك.

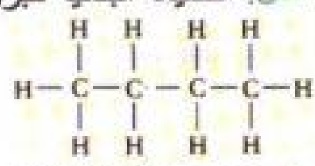
27 - الحل: التخمين : لأن البلدان القريبة من القطب الشمالي أكثر عرضة لتساقط الثلوج والجليد عليها من البلدان في المناطق الحارة ولكي لا يتراكم الجليد والثلوج بنيت أسطحها بشكل مائل.

في التمارين 30-32 استعمل الجدول المقابل:


الألكانات

اسم المركب	الميثان	الإيثان	البروبان
الصيغة الكيميائية	CH_4	C_2H_6	C_3H_8
الصيغة البنائية			

30 - الحل: الصيغة البنائية للبروبان:



31 - الحل: عدد ذرات الكربون = ترتيب الحد في المجموعة.

عدد ذرات الهيدروجين = 2 × عدد ذرات الكربون + 2

32 - الحل: الصيغة الكيميائية لمركب رتبته N: $C_NH_{(2N+2)}$

2-1 المنطق

العبارة المنطقية:

جملة خبرية إما أن تكون صائبة أو خاطئة ويرمز للعبارة بالرمز P أو q ولا تحتمل أي وضع ثالث.

مثال على:

أ - العبارة المنطقية الصحيحة: الرياض عاصمة السعودية.

ب - العبارة المنطقية الخاطئة: الرياض مدينة ساحلية.

سؤال/ ما الفرق بين العبارة والتخمين؟

العبارة إما أن تكون صائبة فقط أو خاطئة فقط، ولا يوجد احتمال ثالث أما التخمين فإما أن يكون صائبا دائما أو خاطئا دائما أو يحتمل أن يكون التخمين نفسه صائبا في حالات وخاطئا في حالات أخرى. والمثال التالي يوضح ذلك:

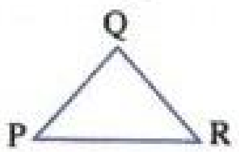
مثال

المعطيات: $|PQ| + |QR| = |PR|$

التخمين: P, Q, R تقع على استقامة واحدة.

التخمين السابق قد يكون صحيح انظر الرسم المجاور.

أو أن يكون خاطئ انظر الرسم المجاور.



قيمة الصواب:

تطلق قيمة الصواب على صحة أو خطأ العبارة المنطقية فقيمة الصواب إما صائبة فقط، أو خاطئة فقط، ولا تحتمل الاثنين معا.

عزيزي الطالب ليتضح لك مفهوم قيمة الصواب انظر الجدول التالي:

العبارة المنطقية	قيمة الصواب لها
1) الرياض عاصمة السعودية.	صائبة
2) مجموع زوايا المثلث 360°.	خاطئة
3) تطبق نظرية فيثاغورس على مثلث متساوي الأضلاع.	خاطئة
4) زوايا المربع جميعها قوائم.	صائبة
5) الرياض مدينة ساحلية.	خاطئة

نفي العبارة:

إذا كانت العبارة المنطقية تمثل بالرمز p فإن ليس p هو نفس العبارة p ويرمز لها بالرمز $\sim p$ وتقرأ ليس p.

العبارة المركبة:

هي عبارة ناتجة عن ربط عبارتين أو أكثر.

مثال/ إذا كانت:

p: خالد يحب القراءة.

q: خالد يحب السباحة.

فإنه يمكننا ربط العبارتين لنحصل على عبارة مركبة هي:

(خالد يحب القراءة والسباحة) وتسمى العبارة المركبة السابقة عبارة وصل لأننا استخدمنا فيها أداة الربط "و".

ومن هنا يمكننا أن نعرف عبارة الوصل بالصورة التالية:

هي عبارة مركبة تربط بين عبارتين أو أكثر بأداة الربط "و" فإن كان لدي عبارتين مركبتين p , q فإننا نرمز لعبارة الوصل $p\wedge q$ وتقرأ q,p.

ويمكن أن نمثل عبارة الوصل بأشكال فن:

على أنها المنطقة المشتركة بين العبارتين والتي نعبر عنها رياضيا بمصطلح تقاطع مجموعتين، انظر الشكل المجاور.

قيمة الصواب لعبارة الوصل:

قيمة الصواب لعبارة الوصل $(p\wedge q)$ دائما خاطئة إلا في حالة واحدة.

عندما تكون قيم الصواب لـ q, p كلاهما صائبة.

مثـــال

أوجد قيمة الصواب لعبارات الوصل التالية:

1 - الرياض عاصمة السعودية وهي مدينة ساحلية.

قيمة الصواب لعبارة الوصل بأكملها خاطئة لأن العبارة الأولى صحيحة لكن الثانية خاطئة.

2 - للمثلث ثلاث زوايا وثلاث أضلاع.

قيمة الصواب لعبارة الوصل صائبة لأن العبارة الأولى والثانية كلاهما صحيحة.

عبارة الفصل:

هي عبارة مركبة ناتجة من ربط عبارتين بأداة الربط "أو" فإذا كانت q, p عبارتين فيرمز لعبارة الفصل بالرمز pVq وتقرأ p أو q.

مثال على عبارة الفصل: خالد يحب السباحة أو القراءة.

ويمكن أن نمثل عبارة الفصل بأشكال فن على أنها المنطقة المشتركة والغير مشتركة بين مجموعتين والتي يعبر عنها رياضيا باتحاد مجموعتين انظر الشكل المجاور.

قيمة الصواب لعبارة الفصل:

قيمة الصواب لعبارة الفصل pVq دائما صحيحة ما عدا في حالة كون العبارتين q, p كلاهما خاطئتين فسوف تكون قيمة الصواب لها خاطئة.

مثال

أوجد قيمة الصواب لعبارات الفصل التالية:

1 - $5 \times 4 = 20$ أو 15 يقبل القسمة على 5.

عبارة الفصل صحيحة لأن العبارتين كلاهما صحيحتين.

2 - $3 + 7 = 10$ أو 35 عدد أولي.

عبارة الفصل صحيحة لأن الأولى صحيحة وهي تكفي لجعل عبارة الفصل بأكملها صحيحة.

3 - 5 عدد زوجي أو 9 عدد أولي.

عبارة الفصل خاطئة لأن العبارتين كلاهما خاطئتين.

للمعرفة

قيمة الصواب لـ (~p) تكون دائما معاكسة لقيمة الصواب للعبارة p، فمثلا إن كانت p صائبة فإن ~p خاطئة وإن كانت p خاطئة فإن ~p صائبة.

جدول الصواب:

هو جدول يتم فيه ترتيب وتنظيم قيم الصواب للعبارات المنطقية لكل عبارة على حدى ثم في الخانة الأخرى نرتب قيم الصواب للعبارة المركبة المراد إيجاد قيمة الصواب لها.

جدول الصواب لعبارة الوصل

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

لاحظ في الخانة الأخيرة من جدول الصواب لعبارة الوصل أن قيم الصواب لها دائما خاطئة إلا عندما تكون مركباتها صحيحتين.

جدول الصواب لعبارة الفصل

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

لاحظ في الخانة الأخيرة من جدول الصواب لعبارة الفصل أن قيم الصواب لها دائما صحيحة إلا عندما تكون مركباتها خاطئتين.

جدول الصواب لنفي العبارة

p	$\sim p$
T	F
F	T

ومن هذه الجداول الثلاث يمكننا عزيزي الطالب من إنشاء جداول صواب لعبارات مركبات أخرى بالاستفادة منها، والأمثلة التالية توضح ذلك

مثـــال

كون جداول صواب لكل من العبارات المركبة التالية:

$pV\sim q$ (a

خطوات الحل:

1 - نحدد عدد الأعمدة والعبارة الموجودة في كل عمود حسب العبارة المعطاة في السؤال ففي هذا المثال سنرسم 4 أعمدة لكل من $p, q, \sim q , pV\sim q$.

2 - نحدد عدد الصفوف المكونة للجدول ويمكننا استخدام القاعدة التالية:

عدد الصفوف = $2^{\text{عدد العبارات}}$

في هذا المثال لدي عبارتين فقط p, q لذلك فإن عدد الصفوف = $2^2 = 4$، ثم نحدد في هذه الصفوف جميع الحالات لقيم الصواب لكلا العبارتين p, q.

p	q	~q	pV~q
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

3 - نكمل الجدول بناء على الجداول المعروفة لدينا سابقا.

$(pVq)^r$ (b

1 - سنرسم 5 أعمدة لكل من

2 - عدد الصفوف = $2^3 = 8$

p	q	r	pVq	(pVq)^r
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

تدريبات وحلول

استعمل العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة لكل عبارة وصل أو فصل مما يلي، ثم أوجد قيم الصواب لها:

p: $9+5 = 14$

q: شهر رمضان 31 يوما.

r: للمربع أربعة أضلاع.

1 - $p\wedge q$: $9+5 = 14$ و شهر رمضان 31 يوما عبارة مركبة خاطئة.

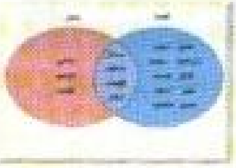
2 - $p\wedge r$: $9+5 = 14$ و للمربع أربعة أضلاع عبارة مركبة صائبة.

3 - $q\wedge r$: شهر رمضان 31 يوما وللمربع أربعة أضلاع عبارة مركبة خاطئة.

4 - $pV\sim p$: $9+5 = 14$ أو $9+5 \neq 14$ عبارة مركبة صائبة.

5 - qVr : شهر رمضان 31 يوما أو للمربع أربعة أضلاع عبارة مركبة صائبة.

6 - $\sim qV\sim r$: $9+5 \neq 14$ أو ليس للمربع أربعة أضلاع عبارة مركبة خاطئة.



للسؤالين 7 ,8 استعمل أشكال فن التي تمثل أسماء الطلاب الذين يكتبون القصة أو يقرضون الشعر:

7 - ما عدد الطلاب الذين يقرضون الشعر؟ 7 طلاب

8 - ما عدد الطلاب الذين يكتبون القصة ويقرضون الشعر؟ 4 طلاب

9 - انسخ الجدول التالي وأكمله:

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

كون جدول صواب لكل عبارة من العبارتين التاليتين:

10 - $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

11 - $\sim p \wedge r$

p	$\sim p$	r	$\sim p \vee r$
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F

استعمل العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة لكل عبارة وصل أو فصل مما يلي، ثم أوجد قيم الصواب لها:

p: $\sqrt{-64} = 8$

q: للمثلث ثلاثة أضلاع.

r: $0 > 0$.

s: الزاوية المنفرجة قياسها أكبر من 90° وأقل من 180°.

12 - $p \wedge q$: $\sqrt{-64} = 8$ وللمثلث ثلاثة أضلاع عبارة وصل خاطئة.

13 - $p \vee q$: $\sqrt{-64} = 8$ أو للمثلث ثلاثة أضلاع عبارة فصل صائبة.

14 - $p \vee s$: $\sqrt{-64} = 8$ أو الزاوية المنفرجة قياسها أكبر من 90° وأقل من 180° عبارة فصل صائبة.

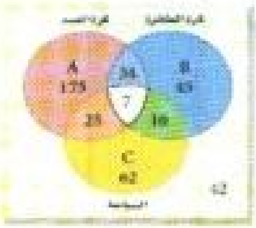
15 - $\sim q \wedge r$: ليس صحيحا أن للمثلث ثلاثة أضلاع و $0>0$ عبارة وصل خاطئة.

16 - $r \vee p$: $0>0$ أو $\sqrt{-64} = 8$ عبارة فصل خاطئة.

17 - $s \vee q$: الزاوية المنفرجة قياسها أكبر من 90° وأقل من 180° أو للمثلث ثلاثة أضلاع عبارة فصل صائبة.

18 - $(\sim p \wedge q) \vee s$: $\sqrt{-64} \neq 8$ وللمثلث ثلاثة أضلاع أو الزاوية المنفرجة قياسها أكبر من 90° وأقل من 180° وهي عبارة مركبة صائبة.

19 - $s \vee (q \wedge \sim r)$: الزاوية المنفرجة قياسها أكبر من 90° وأقل من 180° أو للمثلث ثلاثة أضلاع و $0 \leq 0$ وهي صائبة.



للأسئلة 23-20 استعمل المعلومات التالية:
سئل طلاب مدرسة ما، عددهم 400 عن الرياضة التي يمارسونها من بين كرة القدم والكرة الطائرة والسباحة، وقد مثلت إجاباتهم في أشكال فن عن اليسار.

20 - ما عدد الطلاب الذين لا يمارسون أيا من الرياضات الثلاث؟ **42 طالبا.**

21 - ما عدد الذين يمارسون الرياضات الثلاث؟ **7 طلاب.**

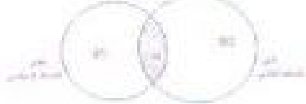
22 - ما عدد الذين يمارسون كرة القدم والسباحة فقط؟ **25 + 7 = 32 طالبا.**

23 - ما عدد الذين يمارسون رياضة واحدة على الأقل.

جميع المناطق الغير مشتركة = 45 +175+62 = 282 طالب.

للأسئلة 26-24 استعمل المعلومات التالية:
عدد طلاب مدرسة 310 منهم 80 طالباً أعضاء في نادي النشاط العلمي، و 115 عضوا في نادي النشاط الرياضي و 20 طالبا يشاركون في الناديين:

24 - ارسم شكل فن الذي يمثل هذه المعلومات؟



25 - ما عدد الطلاب الذين يشاركون في النشاط الرياضي أو العلمي؟

مجموع المناطق المشتركة والغير مشتركة = 60 +20+95 = 175.

26 - ما عدد الطلاب الذين لا يشاركون في أي من النشاطين؟

هم الذين خارج الدائرة = 135 طالب

انسخ جدولي الصواب التاليين وأكملهما:

27 - $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

28 - $\sim p \wedge \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

كون جدول الصواب لكل من العبارات المركبة التالي:

29 - $q \wedge \sim r$

q	r	$\sim r$	$q \wedge \sim r$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

30 - $\sim p \wedge \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

31 - $\sim p \vee (q \wedge \sim r)$

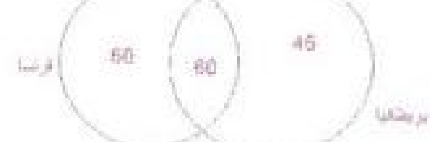
p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$(q \wedge \sim r)$	$\sim p \vee (q \wedge \sim r)$
T	T	T	F	F	F	F
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	F	T

32 - $p \wedge (\sim q \vee \sim r)$

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$(\sim q \vee \sim r)$	$p \wedge (\sim q \vee \sim r)$
T	T	T	F	F	F	F
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	F
F	F	F	T	T	T	F

للأسئلة 33-35 استعمل المعلومات التالية:
سألت وكالة سياحة وسفر زبائنها عن الأماكن التي قاموا بزيارتها فكانت الإجابات كما يلي:
60 منهم زاروا أوروبا، 45 زاروا بريطانيا، 50 زاروا فرنسا.

33 - ارسم شكل فن ليمثل هذه المعلومات.



34 - اكتب عبارة وصل من هذه المعلومات.
عدد زوار بريطانيا وفرنسا (أوروبا) = 60 زائر تمثل المنطقة المشتركة.

35 - اكتب عبارة فصل من هذه المعلومات.
عدد زوار بريطانيا أو فرنسا.
= مجموع المناطق المشتركة والغير مشتركة = 45 + 60 + 50 = 155 زائر.

استعمل الانترنت أو مصدرا آخر لتحديد قيم الصواب للعبارات التالية:

36 - الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية، وهي لا تقع على ساحل البحر الأحمر. **عبارة مركبة صائبة.**

37 - الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية، أو العاصمة اللبنانية بيروت تقع على ساحل البحر الأبيض المتوسط. **عبارة صائبة.**

38 - ليس صحيحا أن مدينة الإسكندرية تقع على ساحل البحر الأبيض المتوسط. **صائبة.**

اكتب عبارة مركبة لكل شرط من الشروط التالية:

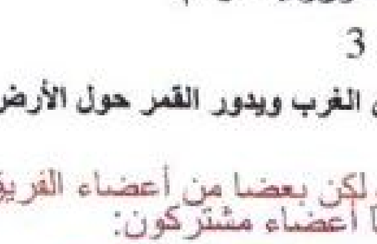
39 - عبارة فصل صحيحة. **أضلاع المربع متساوية وزواياه قوائم.**

40 - عبارة وصل خاطئة. $5+7 = 9$ و $2 > 3$

41 - **عبارة صحيحة تتضمن نفيا. لا تشرق الشمس من الغرب ويدور القمر حول الأرض.**

للسؤالين 42-43 استعمل المعلومات التالية:
جميع أعضاء الفريق A هم أعضاء في الفريق B ولكن بعضا من أعضاء الفريق B هم أعضاء في الفريق C والفريقان C, A ليس بينهما أعضاء مشتركون:

42 - ارسم شكل فن يمثل هذه المعلومات.



43 - أي من العبارات التالية صحيحة؟ برر إجابتك.

p: إذا كان الشخص عضوا في الفريق C فإن هذا الشخص ليس عضوا في الفريق A.
عبارة صائبة لأنه ليس هناك أعضاء مشتركون بين C, A.

q: إذا كان الشخص ليس عضوا في الفريق B فإنه ليس عضوا في الفريق A.
عبارة صائبة لأن جميع أعضاء A هم أعضاء B

r: لا يوجد عضو في الفريق A يمكن أن يكون عضوا في الفريق C.
عبارة صائبة.

45 - الحل:
المثلث ABC مثلث متساوي الساقين قيمة الصواب لـ $AB=BC$ صائبة
$m\angle A = m\angle C$ قيمة الصواب لها صائبة.
لأن الزاويتين المتناظرتين للضلعين المتساويين في مثلث متساوي الساقين متساويتين.

خمن الحد التالي في كل من المتتابعات التالية:

46- $3, 5, 7, 9$

$3 \quad 5 \quad 7 \quad 9$
$2+ \quad 2+ \quad 2+$
الحد المطلوب=الحد السابق+2
$= 2 + 9 = 11$

47- $1, 3, 9, 27$

$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$
$\times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$
الحد المطلوب=الحد السابق×3
$27 = 81\times = 3$

48- $3 , 6 , \frac{3}{2} , \frac{3}{4}$

$3 \quad 6 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3}{4}$
$2+ \quad 2+ \quad 2+$
الحد المطلوب = الحد السابق+2
$\frac{3}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} =$

49 - الحل:
المساحة الجانبية للهرم = مجموع مساحات المثلثات = 4 مساحة المثلث
4 ($\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع) = 4 ($\frac{1}{2}$ × 2 × 2.5) = 10 م^2
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة
مساحة القاعدة = مساحة المربع = (طول الضلع)^2 = 2^2 = 4 م^2
المساحة الكلية = 10 + 4 = 14م^2

52 - زاوية منفرجة.
53 - زاوية حادة.
54 - زاوية قائمة.

55 - الحل:
السياج على صورة مستطيل طوله 75م وعرضه 35م.
عدد الأمتار التي ستشتريها مروة = محيط المستطيل + 5 متر
= 2(الطول + العرض) +5
= 2 (75 + 35) +5 = 2(110) + 5 = 225 متر

أوجد قيمة كل مقدار من القيم المعطاة:

56 - $5a-2b \quad ; b=3, a=4$
$= 5(4) - 2(3)$
$= 20 - 6 = 14$

57 - $4cd+2d \quad ; d=2, c=5$
$= 4(5)(2)+2(2)$
$=40+4 = 44$

58 - $4e+3f \quad ; f=-2, e=-1$
$= 4(-1)+3(-2)$
$= -4 -6 = -10$

59 - $3g^2+h \quad ; h=-8, g=8$
$=3(8)^2 + (-8)$
$= 3(64) - 8 = 184$

3-1 العبارات الشرطية

العبارة الشرطية:

هي عبارة مركبة نستخدم فيها أداة الربط (إذا كان ... فإن ...) على الصورة "إذا كان p فإن q" وتسمي العبارة التي تتبع كلمة إذا الفرض والعبارة التي تتبع كلمة فإن تسمى النتيجة.

الهدف الأول/ تحديد الفرض والنتيجة:

مثال

حدد الفرض والنتيجة في كل عبارة:

العبارة	الفرض	النتيجة
1- إذا نجحت في الامتحان فسوف أقدم لك هدية.	نجحت في الامتحان	سوف أقدم لك هدية
2- إذا لم يكن لدي وقت كاف فإنني لن أضاعف دخلي.	لم يكن لدي وقت كاف	لن أضاعف دخلي
3- إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإنه متساوي الزوايا.	المثلث متساوي الأضلاع	متساوي الزوايا

الهدف الثاني/ كتابة عبارة شرطية على صورة (إذا كان ... فإن ...):

مثال

العبارات التالية شرطية ولكنها ليست على صورة إذا كان ... فإن حاول أن تصفها على تلك الصورة.

أ) الزاوية التي تتشكل من مستقيمين متعامدين هي زاوية قائمة.

الحل: إذا حضرت زاوية بين مستقيمين متعامدين فإنها ستكون زاوية قائمة.

ب) للفهد مخالب فإنه لا يستطيع اخفاؤها.

الحل: إذا كان للفهد مخالب فإنه لا يستطيع إخفاؤها.

الهدف الثالث/ معرفة (قيم الصواب) جدول الصواب للعبارة ($p \to q$):

p	q	$(p \to q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

الهدف الرابع/ معرفة العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية: "العبارات الشرطية المرتبطة"

ويمكن إيضاح العبارات الشرطية المرتبطة من خلال الجدول التالي

العبارة	مكونة من	بالرموز	مثال
الشرطية	فرض ثم نتيجة	$p \to q$	إذا كان الشكل رباعي فإن مجموع زواياه يساوي 360°
العكس	تبديل الفرض بالنتيجة	$q \to p$	إذا كان مجموع شكل 360° فإن الشكل رباعي
المعكوس	نفي الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية	$\sim p \to \sim q$	إذا لم يكن الشكل رباعي فإن مجموع زواياه لا يساوي 360°
المعاكس الإيجابي	نفي الفرض والنتيجة في العكس	$\sim q \to \sim p$	إذا كان مجموع زوايا شكل لا يساوي 360° فإن الشكل ليس رباعي

التكافؤ المنطقي:

تكون العبارتان المركبتان متكافئتين إذا كان لهما نفس قيم الصواب لجميع الإمكانات المتناظرة لمركباتهما.

ويرمز للتكافؤ المنطقي بالرمز ($\equiv$).

للمعرفة

1) العبارة الشرطية $\equiv$ المعاكس الإيجابي

بالرموز: $\sim q \to \sim p \equiv p \to q$

2) العكس $\equiv$ المعكوس

$\sim p \to \sim q \equiv q \to p$

ويمكننا أن نثبت ذلك باستخدام جدول الصواب التالي:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$q \to p$	$\sim p \to \sim q$	$\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

نلاحظ من الجدول السابق أن:

1 - قيم الصواب للعبارة الشرطية هي نفسها قيم الصواب للمعاكس الإيجابي ولذلك فإن $\sim q \to \sim p \equiv p \to q$

2 - قيم الصواب لعكس العبارة الشرطية هي نفسها قيم الصواب لمعكوس العبارة الشرطية ولذلك فإن $\sim p \to \sim q \equiv q \to p$

مثال

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة التالية وحدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أو خاطئة:

"الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان"

العبارة الشرطية: **إذا كانت الزاويتان متقابلتان بالرأس فإنهما متطابقتان وهي عبارة صحيحة.**

عكس العبارة الشرطية: **إذا كانت الزاويتان متطابقتان فإنهما متقابلتان بالرأس وهي عبارة خاطئة فمثلا زوايا مثلث متساوي الأضلاع جميعها متطابقة ولكنها ليست متقابلة بالرأس.**

معكوس العبارة الشرطية: **إذا كانت الزاويتان غير متقابلتين بالرأس فإنهما غير متطابقتين وهذه العبارة خاطئة.**

المعاكس الإيجابي: **إذا لم تكن الزاويتين متطابقتين فإنهما غير متقابلتين بالرأس وهي عبارة صحيحة.**

تدريبات وحلول

حدد الفرض والنتيجة لكل عبارة من العبارتين التاليتين:

1 - إذا أمطرت يوم الاثنين فإنني سأبقى في المنزل.

الفرض: أمطرت يوم الاثنين. النتيجة: سأبقى في المنزل.

2 - إذا كان $x-3=7$ فإن $x=10$.

الفرض: $x-3=7$. **النتيجة:** $x=10$.

3 - اكتب العبارة التالية على صورة (إذا كان ...فإن...):

مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين هو 180°.

إذا كان مجموع قياسي زاويتين هو 180° فإنهما متكاملتين.

4 - **تشتهر بعض الدول العربية بنوع من الأشجار المثمرة، اكتب العبارات الثلاث التالية على صورة** (إذا كان ...فإن...):

تغطي أشجار البرتقال في فلسطين معظم مناطق الساحل.

إن كان البرتقال من فلسطين فإنه يزرع في المناطق الساحلية.

تغطي أشجار التفاح في لبنان المناطق الجبلية.

إن كان التفاح من لبنان فإنه يزرع في المناطق الجبلية.

تنتشر أشجار الزيتون في الأردن في المناطق الشمالية والغربية.

إن كان الزيتون من الأردن فإنه يزرع في المناطق الشمالية والغربية.

حدد قيمة الصواب للعبارة التالية وفقا للشروط المعطاة:

"إذا كانت سرعتك تتجاوز 100كلم/ ساعة فإنك ستحصل على مخالفة سرعة"

5 - كانت سرعتك 100كلم/ ساعة وتلقيت مخالفة سرعة. **العبارة صائبة.**

6 - كانت سرعتك 90كلم/ ساعة ولم تتسلم مخالفة سرعة. **العبارة صائبة.**

7 - كانت سرعتك 105كلم/ ساعة ولم تتسلم مخالفة سرعة. **العبارة خاطئة.**

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكل عبارة شرطية، وحدد صحة أو خطأ كل عبارة مرتبطة، وفي حالة خطأ العبارة المرتبطة أعط مثالا مضادا:

8 - إذا رويت المزروعات بالماء فإنها ستنمو.

العبارة الشرطية: **إذا رويت المزروعات بالماء فإنها ستنمو. عبارة خاطئة.**

العكس: **إذا نمت المزروعات فإنك رويتها بالماء. عبارة صحيحة.**

المعكوس: **إذا لم ترو المزروعات بالماء فإنها لن تنمو (صحيحة).**

المعاكس الإيجابي: **إذا لم تنمو المزروعات فإنك لم تروها بالماء. عبارة خاطئة.**

9 - السفر بالطائرة أكثر أمانا من السفر بالسيارة.

العبارة الشرطية : **إذا كان السفر بالطائرة فإنه أكثر أمانا من السفر بالسيارة. عبارة صحيحة.**

العكس: **إذا كان السفر بالسيارة فإنه أكثر أمانا من السفر بالطائرة. عبارة خاطئة.**

المعكوس: إذا لم يكن السفر بالطائرة فإنه ليس أكثر أمانا من السفر بالسيارة (خاطئة).
المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن السفر بالطائرة فإنه ليس أكثر أمانا من السفر بالسيارة. عبارة صحيحة.

حدد الفرض والنتيجة لكل عبارة من العبارتين التاليتين:

10 - إذا كنت طالبا في المرحلة الثانوية فإن عمرك على الأقل 14 سنة.
الفرض: طالبا في المرحلة الثانوية. النتيجة: عمرك على الأقل 14 سنة.

11 - إذا كان $2x+6=10$ فإن $2=x$.
الفرض: $2x+6=10$. النتيجة: $x=2$.

12 - إذا كانت ثلاث نقاط على مستقيم فإنها تسمى نقاطا مستقيمة.
الفرض: هناك ثلاث نقاط على مستقيم. النتيجة: هي نقاطا مستقيمة.

13 - إذا كان قياس الزاوية بين 0 و 90 فإنها حادة.
الفرض: قياس الزاوية بين 0 و 90. النتيجة: زاوية حادة.

14 - إذا كانت أضلاع الشكل الرباعي متطابقة فإنه مربع
الفرض: أضلاع الشكل الرباعي متطابقة النتيجة: الشكل مربع.

اكتب كل عبارة من العبارات التالية على صورة (إذا كان ...فإن...):

15 - يفضل مدرسو الرياضيات حل المسائل.
إذا كان المعلم متخصص في الرياضيات فإنه سيفضل حل المسائل

16 - أنا أفكر فأنا موجود.
إذا كنت أفكر فإنني أثبت وجودي.

17 - الزاويتان المتجاورتان بينهما ضلع مشترك.
إذا كانت لدي زاويتان متجاورتان فإنه يوجد ضلع مشترك بينهما.

18 - المثلث المتطابق الزوايا يكون متطابق الأضلاع.
إذا كان المثلث متساوي الزوايا فإنه متساوي الأضلاع.

حدد قيمة الصواب للعبارة التالية وفقا للشروط المعطاة:
"إذا تجاوز عمرك 18 عاما فإنه يحق لك استخراج رخصة قيادة"

19 - عمرك 19 سنة واستخرجت رخصة قيادة. عبارة صحيحة.

20 - عمرك 21 سنة ولا يحق لك استخراج رخصة قيادة. عبارة خاطئة.

21 - عمرك 17 سنة واستخرجت رخصة قيادة. عبارة صائبة.

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكل عبارة شرطية، وحدد صحة أو خطأ كل عبارة مرتبطة، وفي حالة خطأ العبارة المرتبطة أعط مثالا مضادا:

28 - مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين 90°.
العبارة الشرطية: إذا كان مجموع زاويتين 90° فإنهما متتامتان. عبارة صحيحة.
العكس: إذا كان لدي زاويتين متتامتين فإن مجموعهما 90°. عبارة صحيحة.
المعكوس: إذا لم يكن مجموع زاويتين 90° فإنهما غير متتامتين. صحيحة.
المعاكس الإيجابي: إذا لم تكن الزاويتين متتامتين فإن مجموعهما ليس 90°. صحيحة.

29 - جميع المستطيلات أشكال رباعية.
العبارة الشرطية: إذا كان الشكل مستطيل فهو شكل رباعي. عبارة صحيحة.

العكس: إذا كان الشكل رباعي فهو مستطيل. خاطئة (مثال شبه المنحرف).
المعكوس: إذا لم يكن الشكل مستطيل فهو ليس رباعي (خاطئة مثل المربع).
المعاكس الإيجابي: إذا الشكل ليس رباعي فهو ليس مستطيل. عبارة صحيحة.

30 -كل زاوية حادة قياسها أقل من 90°.
العبارة الشرطية: إذا كانت الزاوية حادة فإن قياسها أقل من 90°. عبارة صحيحة.
العكس: إذا كانت الزاوية أصغر من 90° فهي حادة. عبارة صحيحة.
المعكوس: إذا الزاوية ليست حادة فهي ليست أقل من 90° صحيحة.
المعاكس الإيجابي: إذا الزاوية ليست أقل من 90° فهي ليست حادة. صحيحة.

37 -الحل: إذا كانت الزاويتان متتامتين فإن مجموع قياسيهما 90°.

38 -الحل: $B = \frac{10a^2-15ab}{4a^2-9b^2} = \frac{5a(2a-3b)}{(2a-3b)(2a+3b)} = \frac{5a}{2a+3b}$

39 -الحل: أبو بكر الصديق أول الخلفاء الراشدين والشكل السداسي مكون من خمسة أضلاع (عبارة خاطئة).

40 -الحل: الشكل السداسي مكون من خمسة أضلاع أو $3\times 60 = 8$ (عبارة خاطئة)

41 -الحل: أبو بكر الصديق أول الخلفاء الراشدين والشكل السداسي لا يتكون من خمسة أضلاع (عبارة صحيحة)

42 -الحل: أبو بكر الصديق ليس أول الخلفاء الراشدين و (عبارة خاطئة)

46 -الحل: محيط المستطيل = (الطول+العرض) × 2
$= (2.5 + 4.5) \times 2 = (7 \times 2) = 14$ سم.

47 -الحل: مساحة المستطيل = الطول × العرض = $4.5 \times 2.5 = 11.25$ سم2

48 -الحل: المحيط سيتضاعف.

49 -الحل: المساحة سوف تزداد.

55 -الحل: قمنا بإضافة (-4) للطرفين.

56 -الحل: ضربنا الطرفين بالعدد (2) أو قسمنا الطرفين على $\frac{1}{2}$.

57 -الحل: قمنا بالتخلص من معامل المجهول p وهي 8 بالقسمة عليه لكلا الطرفين.

4-1 التبرير الاستنتاجي

التبرير الاستنتاجي: هو استنتاج يستعمل حقائق أو قواعد أو تعارف أو خصائص للوصول إلى نتائج منطقية.

أشكال التبرير الاستنتاجي:

1 - قانون الفصل المنطقي:

يستعمل للحصول على النتائج من عبارات شرطية صحيحة فإذا كانت العبارة الشرطية صحيحة $p \to q$ والفرض p صحيح فإن q تكون صحيحة أي أن:

$$[(p \to q) \wedge p] \to q$$

انتبه عند تطبيق قانون الفصل المنطقي تأكد من صحة العبارة الشرطية قبل أن تختبر صحة النتيجة.

مثال

إذا توازت قطعتان مستقيمتان فإنهما لا تتقاطعان.

المعطيات: $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

النتيجة: $\overline{CD}$ و $\overline{AB}$ لا يتقاطعان.

بما أن العبارة الشرطية المعطاة صحيحة والفرض الذي ينص على أن $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ صحيح فلا بد أن تكون النتيجة صحيحة من خلال قانون الفصل المنطقي.

2 - قانون القياس المنطقي:

وهو طريقة أخرى للحصول على النتائج من عبارتين شرطيتين صحيحتين أي أنه إذا كانت العبارتان الشرطيتان $q \to r \quad , \quad p \to q$ صحيحتين فإن العبارة $p \to r$ تكون صحيحة أي:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

لاحظ عزيزي الطالب:

1) عند استخدام قانون القياس المنطقي تكون النتيجة في العبارة الشرطية الأولى هي نفسها الفرض في العبارة الشرطية الثانية.

2) نلجأ لاستخدام قانون القياس المنطقي عندما يكون لدي عبارتين شرطيتين بينما نستخدم قانون الفصل المنطقي إذا كان لدي عبارة شرطية واحدة فقط.

مثــــال

استعمل قانون القياس المنطقي لتحديد ما إذا كان ممكنا الوصول إلى نتيجة صحيحة من كل مجموعة من العبارات التالية:

a) (1) إذا وقفت في الصف فيمكنك تجربة السيارة الجديدة.
(2) إذا كنت تملك رخصة قيادة فيمكنك تجربة السيارة الجديدة.
لا يوجد نتائج لأن النتيجة في العبارة الشرطية الأولى ليست فرض في العبارة الشرطية الثانية.

b)(1) إذا كان للمضلع ستة أضلاع متطابقة فهو شكل سداسي منتظم.
(2) إذا كان طول ضلع الشكل السداسي المنتظم A فإن محيطه $6A$.
النتيجة: إذا كان للمضلع ستة أضلاع متطابقة فإن محيطه $6A$.

مثــــال

بين ما إذا كانت العبارة (3) نتيجة للعبارتين (1) و (2) من قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي، وإذا كانت كذلك فاكتب أي قانون استعمل؟ أما إذا لم تكن ناتجة عن أي من القانونين المذكورين فاكتب: "ليس صحيحا".

(1) طول ضلع المربع (A) يساوي طول ضلع المربع B.
(2) إذا كانت أطوال أضلاع مربعين متساوية فإن لهما المحيط نفسه.
(3) المربع A والمربع B لهما المحيط نفسه.

المعطى: طول ضلع المربع A يساوي طول ضلع المربع B.
الفرض: أطوال أضلاع مربعين متساوية ← لهما المحيط نفسه.
النتيجة: المربع A والمربع B لهما المحيط نفسه.
النتيجة صحيحة على حسب قانون الفصل المنطقي.

تدريبات وحلول

بين ما إذا كانت النتيجة المعطاة صحيحة اعتمادا على المعلومات المعطاة، وإن لم تكن "غير صحيح" مبررا إجابتك:

"إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس فهما متطابقتان"

1 - الحل: بما أن العبارة الشرطية المعطاة صحيحة والفرض الذي ينص على أن $>A$ و $>B$ متقابلتان بالرأس صحيحة فلا بد أن تكون النتيجة صحيحة وفقا لقانون الفصل المنطقي.

2 - الحل: العبارة الشرطية صحيحة ولكن النتيجة غير صحيحة دائما فمن الممكن أن تكون الزاويتين متطابقتين ولكنهما غير متقابلتين بالرأس (ممكن أن تكونان قائمتان).

استعمل قانون القياس المنطقي لبيان ما إذا كان من الممكن الحصول على نتيجة من العبارات المعطاة وإلا فاكتب النتائج:

3 - الحل: لتكن العبارة الشرطية الأولى p (الفرض) و q (النتيجة).
العبارة الشرطية الثانية q (الفرض) لا يوجد نتيجة.
إذا لا يمكننا الحصول على نتيجة من العبارتين.

4 - الحل: يمكن الحصول على نتيجة طبقا لقانون القياس المنطقي وهي:
نقطة المنتصف تقسم القطعة المستقيمة إلى قطعتين طوليهما متساويان.

بين ما إذا كانت العبارة (3) نتيجة للعبارتين (1) و (2) من قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي، وإن لم تكن فاكتب: "ليس صحيحا"

5 - الحل: العبارة (3) نتيجة صحيحة للعبارتين (1) و (2) تبعا لقانون القياس المنطقي.

6 - الحل: بما أن العبارة الشرطية الأولى صحيحة والفرض $\angle Y \cong \angle X$ متطابقتان لكن ليس بالضرورة أن تكونا قائمتان فمن الممكن أن يكونا متقابلتان بالرأس.

	عرض صباحي	عرض مسائي
أطفال دون العاشرة	10 ريالات	12 ريال
نساء	15 ريال	25 ريال
ذكور من 10-15 سنة	15 ريال	20 ريال
رجال	18 ريال	30 ريال

في مدينة الرياض أعلن عن أسعار التذاكر لحضور احتفالات العيد حسب القائمة التالية:

7 - إذا كان عمر سناء ثماني سنوات وأرادت حضور العرض المسائي فما ثمن تذكرتها؟
بما أن سناء عمرها ثماني سنوات وستحضر العرض المسائي فثمن تذكرتها 12 ريالا.

8 - مع والد وسام تذاكر ثمنها 15ريالا، هل يمكن أن نستنتج أن عمر وسام بين 15 - 10سنة؟ وضح إجابتك.
بما أن وسام ذكر فهو إما طفل دون العاشرة أو من فئة ذكر *10-15* سنة.
إذا كان وسام طفل دون العاشرة فإن ثمن تذكرته إما 10 أو 12 ريالا (نتيجة غير صحيحة)
إذا كان وسام ذكر من *10-15* سنة فإن ثمن تذكرته إما 15 أو 20 ريالا وبما أن والد وسام معه تذكرة ثمنها 15 ريالا فإن وسام ذكر من *10-15*سنة وسيحضر العرض الصباحي.

للأسئلة *9-13* حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم خاطئة بناء على المعلومات المعطاة، مع إعطاء تبرير لإجابتك:

"إذا كان العددان فرديين فإن مجموعهما عدد زوجي"

9 - الحل: العبارة الشرطية المعطاة صحيحة والفرض مجموع عددين هو 22 صحيح ولكن النتيجة غير صحيحة دائما فالعددان يمكن أن يكونا 2 و 20 وهما عددان زوجيان وليس فرديان.

10 - الحل: بما أن العبارة الشرطية المعطاة صحيحة والفرض العددان 5 و 7 صحيح ومجموعهما 12=5+7 عدد زوجي إذا العبارة صحيحة والنتيجة صحيحة طبقا بقانون الفصل المنطقي.

"إذا كانت ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة فإن النقاط الثلاث تحدد مستوى وحيدا".

11 - الحل: بما أن العبارة الشرطية المعطاة صحيحة والفرض A,B,C نقاط ليست على استقامة واحدة فطبقا لقانون الفصل المنطقي النتيجة صحيحة دائما حيث تحدد هذه النقاط مستوى وحيد.

12 - الحل: العبارة الشرطية صحيحة والفرض النقاط F,E,G تقع في المستوى M ولكن ليس بالضرورة أن تكون هذه النقاط ليست على استقامة واحدة فقط تكون هذه النقاط تقع على مستقيم واحد واقع في المستوى إذا فالنتيجة غير صحيحة دائما.

13 - الحل: بما أن العبارة الشرطية صحيحة والمعطى نقاط مثلث X,Y,Z فهي ليست على استقامة واحدة فالنتيجة صحيحة حيث أن نقاط المثلث تكون أو تحدد مستوى واحد.

استعمل قانون القياس المنطقي لبيان ما إذا كان من الممكن الحصول على نتيجة من العبارات المعطاة، وإذا كان ممكنا الحصول على نتيجة صحيحة فاكتبها، وإلا فاكتب "لا نتائج":

14-الحل: الفرض في العبارة الشرطية الأولى الذهاب لمقابلة عمل والنتيجة لبس ثوب جديد أما في العبارة الثانية فهو نفس الفرض في العبارة الأولى وهذا لا يحقق شرط قانون القياس المنطقي وهو أن يكون النتيجة في العبارة الأولى نفس الفرض في العبارة الثانية ⇐ لا يوجد نتيجة.

15- الحل: النتيجة تبعا لقانون القياس المنطقي: إذا كان قياس زاوية أقل من 90° فإنها ليست منفرجة.

16- الحل: النتيجة تبعا لقانون القياس المنطقي: إذا كانت النقطة X منتصف YZ فإن القطعتين XY, XZ متطابقتان.

بين ما إذا كانت العبارة (3) نتيجة للعبارتين (1) و (2) من قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي، وإذا كانت كذلك فاكتب أي قانون استعمل، وإذا لم تكن ناتجة عن أي منهما فاكتب: "ليس صحيحا".

17- الحل: العبارة (3) ناتجة من العبارتين (1) و (2) من خلال قانون القياس المنطقي.

18- الحل: العبارة الشرطية (3) ليست ناتجة من أي من العبارتين وهي ليست صحيحة دائما فمن الممكن أن تكون متطابقتان ولكن غير متقابلتان بالرأس بل قائمتان.

19- الحل: العبارة (1) عبارة شرطية صحيحة والعبارة (2) فرض صحيح $\angle A$ منفرجة فالنتيجة صحيحة مطلقا $\angle A$ لا يمكن أن تكون حادة طبقا لقانون الفصل المنطقي.

20- الحل: العبارة (3) غير ناتجة عن أي من العبارتين (1) و (2).

21- الحل: العبارة حسب قانون القياس المنطقي: إذا وصل هادي صوعان خط النهاية بعد صاحب المركز الأول مباشرة فسيحصل على الميدالية الفضية.

22- اكتب مثالا يوضح الاستعمال الصحيح لقانون الفصل المنطقي.

"العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين يقسم القاعدة إلى نصفين متساويين"

المعطى: $BD \perp AC$ النتيجة: $DC = BC$

بما أن العبارة الشرطية صحيحة والفرض صحيح حيث $BC \perp AC$ فالنتيجة طبقا لقانون الفصل المنطقي صحيحة $DC = BC$.

23- وضح كيف تتشابه خاصية التعدي للمساواة مع قانون القياس المنطقي.

في خاصية التعدي للمساواة يوجد ثلاث حدود يجب أن تتساوى فيها الحد الأول مع الحد الثاني والحد الثاني مع الحد الثالث أي: $ab=bc$.

$bc = cd$

ثم نحصل على النتيجة وهي $ab = cd$ أي يتساوى الأول مع الثالث.

كذلك في قانون القياس المنطقي يوجد ثلاث عبارات الأولى تتكون من فرض ونتيجة والثانية من فرض هو نفسه النتيجة في العبارة الأولى أي:

$p \to q \qquad q \to r$

ومن ثم نحصل على النتيجة وهي $p \to r$ أي فرض العبارة الأولى مع نتيجة العبارة الثانية.

24- الحل: فاطمة على صواب وسلمى على خطأ لأن الاضطراب المعوي نتيجة لدوار البحر وليس لعدم التوازن .

25- الحل: العبارة صحيحة طبقا لمبدأ الفصل المنطقي حيث أن العبارة المعطاة "كل المثلثات التي تحقق الخاصية B تحقق نظرية فيثاغورس" صحيحة وحيث أن نظرية فيثاغورس لا تنطبق إلا على المثلثات القائمة الزاوية والتي تنص على أن مربع طول الوتر (الضلع المقابل للزاوية القائمة) = مجموع مربع طولي الضلعين الأخرين إذا فالنتيجة صحيحة.

26- الحل: في حالة التهاب الحلق مثلا فإنه من المفروض أن يصاحب حالة التهاب الحلق ارتفاع في درجة الحرارة واحمرار في الوجه وصعوبة في البلع فإذا اشتكى المريض من هذه الأعراض فتبعا للفرض والمعطى فالنتيجة طبقا لقانون الفصل المنطقي أن المريض لابد أن يكون مصاب بالتهاب الحلق.

27- الحل: حصل خليل على علبة عصير .

28- الحل: ميل المستقيم = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ = -4.

29- الحل: إذا كنت في ورشة المهندس لصيانة السيارات فأنت تتطلع إلى السرعة والإتقان.

30- الحل: سرعة ودقة العمل في صيانة السيارات.

31- الحل: نعم .

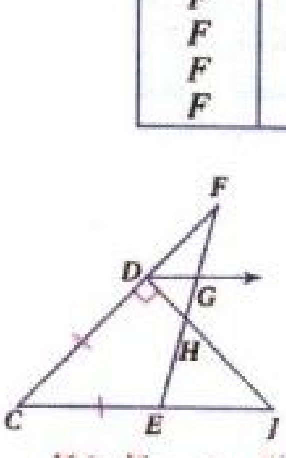
32- $p \wedge q$

q	r	$q \wedge r$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

33- $p \vee (\sim q \wedge r)$

p	q	r	$\sim q$	$(\sim q \wedge r)$	$p \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F

استعمل الشكل المجاور في حل الأسئلة 37 – 34:



34- ما الزاوية التي تتمم $\angle FDG$؟ $\angle GDH$

35- سم زاويتين متقابلتين بالرأس؟ $\angle DHF$, $\angle JHE$

36- سم زاويتين غير متطابقتين ولكنهما متكاملتين.

$\angle CEF$, $\angle FEJ$

37- الحل: متطابقتان - متكاملتان - متجاورتان .

اكتب ما يمكنك أن تفرضه حول القطع المستقيمة أو الزوايا المذكورة مع كل شكل من الأشكال:

38- الحل: $\overline{CN} = \overline{BN}$, $\overline{AM} = \overline{CM}$.

39- الحل: الزاويتان 2 و 1 متتامتان . $\angle 1 + \angle 2 = 90$ و $\angle 2 = \angle 1$

40- الحل: $\angle 4 + \angle 5 = 180$ $\angle 5 + \angle 6 = 180$.

5-1 المسلمات والبراهين الحرة

المسلمة: هي عبارة تُقبل على أنها صحيحة ولا تحتاج إلى برهان.

مثال:

1) كل نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم واحد.
2) كل ثلاث نقاط مختلفة لا تقع على استقامة واحدة يمر بهما مستوى واحد.

وعكس هذه المسلمات صحيح.

مثال

يراد توصيل أربعة أجهزة حاسوب بعضها مع بعض بحيث يوصل كل جهاز مع الثلاثة الأخرى كم وصلة تحتاج؟

انتبه: أ -حلل المثال ← هناك أربعة أجهزة كل جهاز موصل بالثلاثة الأخرى.

ب -ارسم شكلا للمثال.

ج -إذا كانت A,B,C,D أربع نقاط ليست على استقامة واحدة وكل نقطة تمثل جهاز نصل كل نقطة بالنقط الأخرى.

لاحظ: كل نقطتين توجد بينهما قطعة مستقيمة واحدة فقط وهنا نستطيع رسم ست قطع مستقيمة.

تحقق: الوصلات هي $\overline{AB}\ ,\overline{BD}\ ,\overline{CD}\ ,\overline{AC}\ ,\overline{CB}\ ,\ \overline{AD}$ (6 وصلات)

مسلمات

- إذا وقعت نقطتان في مستوى فإن المستقيم الوحيد المار بهاتين النقطتين يقع كليا في ذلك المستوى.
- إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة.
- إذا تقاطع مستويان فإنهما يتقاطعان في مستقيم.

مثال

بين ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة دائما أو أحيانا أو ليست صحيحة أبدا مع التوضيح:

إذا تقاطع مستقيمان فإن نقطة تقاطعهما تقع في المستوى نفسه.

العبارة صحيحة دائما لأن المستقيم يقع في المستوى إذا كانت جميع نقاطه واقعة في المستوى.

عزيزي الطالب/ **هناك عدد من المصطلحات التي لا بد من معرفتها جيدا والتفريق بينها:**

نظام المسلمات: **هو مجموعة من المسلمات التي يمكن استعمال بعضها أو كلها لاستنتاج النظريات عن طريق المنطق.**

النظرية: **هي عبارة تأتي من صحة عبارة أو تخمين وتستعمل لتبرير صحة عبارة أخرى.**

البرهان: **هو دليل منطقي بحيث أن كل عبارة تكتب تكون مبررة بعبارة سبق إثبات صحتها.**

البرهان الحر: **في هذا النوع تكتب فقرة توضح فيها لماذا يكون التخمين لوضع معطى صحيحا.**

انتبه **لتكتب برهان جيد يجب أن تتبع الخطوات التالية:**

1) **اكتب النظرية أو التخمين المراد إثباته (المطلوب).**
2) **حدد المعطيات.**
3) **ارسم شكل توضيحي للمعطيات إن أمكن.**
4) **حدد المطلوب إثباته.**
5) **كون البرهان باستعمال التبرير الاستنتاجي.**

مثـــال

اكتب برهان حر لإثبات أن C **هي نقطة منتصف** $\overline{AB}$ إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ وأن C تقع بين A , B.

المعطيات: $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ **و** C **تقع بين** A , B.

المطلوب: **إثبات أن** C **هي نقطة المنتصف.**

البرهان:

من تعريف تطابق القطع المستقيمة فإن $\overline{AC} = \overline{CB}$ **وبما أن** C **تقع بينهما فإن لهما القياس نفسه وبالتالي فهي منتصف للقطعة المستقيمة** AB.

ملاحظة

إذا قمنا بإثبات صحة التخمين فإنه يصبح نظرية يمكن استعمالها في البراهين اللاحقة.

انتبه **من الممكن في كتابة البراهين أن نبدأ بالحل عكسيا أي نبدأ من المطلوب إثباته ثم الرجوع خطوة فخطوة حتى نصل إلى المعطيات.**

نظرية

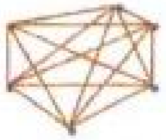
- **إذا كانت** M **هي نقطة منتصف** $\overline{AB}$ **فإن** $\overline{MB} \cong \overline{AM}$

تدريبات وحلول

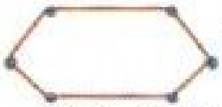
حدد عدد القطع المستقيمة التي تصل بين نقاط كل من المجموعتين التاليتين:

1 - 6 قطع مستقيمة.

2 - 15 قطعة مستقيمة.



3 - الحل: عدد الأشرطة (6 أشرطة) لأن كل طفل يمسك بطرفين فقط.



4 - الحل: ليست صحيحة لأن تقاطع ثلاث مستويات يكون في مستقيم أو نقطة.

في الشكل المجاور $\overline{BD}$ و $\overline{BR}$ يقعان في المستوى P، والنقطة W تقع على المستقيم $\overline{BD}$، اذكر المسلمة التي يمكن استعمالها لبيان صحة كل من العبارتين التاليتين:

5 - النقاط B, D, W على استقامة واحدة.

يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطتين.

6 - النقاط E, B, R مستوية.

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تحدد مستوى وحيد تقع فيه.

7 - في الشكل المجاور النقطة P منتصف $\overline{QR}$ و $\overline{ST}$ و $\overline{ST} \cong \overline{QR}$ اكتب برهانا حرا لإثبات أن $PQ=PT$

المعطى: P منتصف $\overline{QR}$ و $\overline{ST}$ و $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

المطلوب: لإثبات أن $PQ=PT$

البرهان: من تعريف نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة يكون: $PQ \cong PR$, $PS \cong PT$

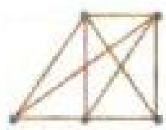
ومن تعريف تطابق القطع المستقيمة $PS = PT$, $PQ = PR$

وبما أن $ST = QR$ $PQ = PT$

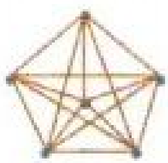
حدد عدد القطع المستقيمة التي تصل بين نقاط كل مجموعة مما يأتي:

8 - 5 قطع.

9 - 10 قطع.



10 - 15 قطعة.



بين ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة دائما، أو صحيحة أحيانا أو ليست صحيحة أبدا، مع التوضيح:

11 - أي ثلاث نقاط تحدد مستوى.

صحيحة أحيانا عندما تكون ليست على استقامة واحدة.

12 - النقطتان H,G تقعان في المستوى x، أي نقطة تقع على استقامة واحدة مع H,G تقع أيضا في المستوى x.

صحيحة دائما لأن أي نقطتين تكونان مستقيم وبما أن أي نقطة تقع على امتدادها هي نقطة من المستقيم فهو واقع في المستوى.

13 - يمكن أن يكون تقاطع مستويين نقطة.

غير صحيح أبدا لأن تقاطع مستويين هو مستقيم والمستقيم يتكون من نقطتين على الأقل.

14 - النقاط S, T, U تحدد ثلاثة مستقيمات.

صحيحة أحيانا إذا لم تقع على استقامة واحدة.

15 -إذا كانت النقطة C منتصف $\overline{AB}$ ، والنقطة B هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{CD}$ فأثبت أن $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

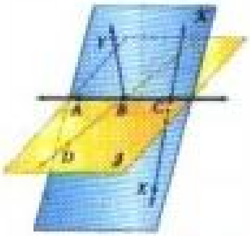
المعطى: C منتصف $\overline{AB}$ و B منتصف $\overline{CD}$

المطلوب: فأثبت أن $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

البرهان: من تعريف نقطة المنتصف:

ومن نظرية التعدي للمساواة للقطع المستقيمة $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BD}$ يقعان في المستوى J، وكذلك $\overleftrightarrow{BY}$ و $\overleftrightarrow{CX}$ يقعان في المستوى K، اذكر المسلمة التي تبين صحة كل من العبارات التالية:



16 - النقطتان D, C تقعان على استقامة واحدة.

17 - $\overleftrightarrow{XB}$ يقع في المستوى K.

18 - النقاط A, C, X تقع في مستوى واحد.

19 - $\overleftrightarrow{AD}$ يقع في المستوى J.

إذا وقعت نقطتان في مستوى فإن المستقيم المار بهما يقع في المستوى.

20 - الحل: في الهرم الثلاثي عدد الخطوط (الأقلام) = 6.
عدد المستويات الأوراق = 4.

21 - الحل: في التبرير الاستنتاجي نستخدم عبارات شرطية صحيحة وفروض تقابل المعطيات في البرهان كذلك في التبرير الاستنتاجي نصل إلى نتيجة يقابلها المطلوب في البرهان.

23 - الحل: التخمين (لأنه قابل لأن يكون صحيح أو خاطئ) أما باقي الخيارات فهي صحيحة تماما.

24 - الحل: أقل عدد بخمس مستويات وأكبر عدد لا نهائي من المستويات.

25 - الحل: في الأدب تستعمل المسلمات مثلا في أوزان أبيات الشعر حيث لكل بيت وزن وقافية في التاريخ هناك مسلمات كثيرة مثل الفتوحات الإسلامية والغزوات والمعارك.

26 - الحل: (C) يوجد على الأقل مستقيمان يحويان النقطة نفسها.

27 - الحل: $\frac{5+\sqrt{13}}{6}$ (F)

28 - الحل: العبارة (3) ناتجة من العبارتين (1) و (2) طبقا لمبدأ قانون الفصل المنطقي وهي صحيحة لأنهما نتيجة منطقية للعبارة الشرطية الصحيحة والفرض صحيح فهي صحيحة.

29 -العكس: إذا كان لديك حاسوب فإنك تستطيع الدخول للإنترنت من بيتك. (عبارة صحيحة)

المعكوس: إذا لم تستطع الدخول للإنترنت من بيتك فليس لديك حاسوب (عبارة خاطئة) لأنه من الممكن أن يكون لذي حاسوب ولا أستطيع دخول الانترنت.

. المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن لديك حاسوب فإنك لن تستطيع دخول الانترنت من بيتك. (عبارة صائبة).

حل المعادلات التالية:

30 - $m - 17 = 8$
$m = 8 + 17 = 25$

31 - $3y = 57$
$y = 57/3 = 19$

32 - $\frac{y}{6} + 12 = 14$
$\frac{y}{6} = 14 - 12 = 2$
$y = 6 \times 2 = 12$

33 - $-t + 3 = 27$
$-t = 27 - 3 = 24$
$t = -24$

اختبار نصف الفصل الأول

حدد ما إذا كان كل تخمين من التخمينات التالية صحيحا أو خطأ مع إعطاء مثال مضاد في حال الخطأ:

1 - المعطيات: $wx=xy$ التخمين: النقاط W, X, Y على استقامة واحدة.

ليس صحيح دائما فمن الممكن أن تكون ليست على استقامة واحدة.

2 - المعطيات: $\angle 1, \angle 2$ ليستا متتامتين و $\angle 2, \angle 3$ متتامتان. التخمين: $m\angle 1=m\angle 3$

ليس صحيح فمن الممكن $\angle 1=10$, $\angle 2=50$ **(ليسا متتامتين)**

$\angle 2=50^\circ$, $\angle 3=40$ **(متتامتين)**

$\angle 3 \neq \angle 1$

قام خليل بعمل إحصائية على ستة من أصدقائه وحصل على الجدول التالي:

الاسم	جدة	المدينة المنورة	مكة المكرمة
[illegible]	2	0	0
جمال	0	0	5
[illegible]	0	2	2
خالد	1	1	0
إبراهيم	2	1	10
فهد	1	1	1

3 - توصل خليل إلى النتيجة التالية: إذا كان عدد مرات سفر الشخص ثلاث مرات أو أكثر فإنه قد سافر إلى المدينة المنورة، هل هذه النتيجة صحيحة؟ وإذا كانت غير صحيحة فأعط مثالا مضادا.

النتيجة غير صحيحة فمثلا جمال سافر (5) مرات إلى مكة ولم يسافر إلى المدينة المنورة، أبدا.

كون جدول الصواب لكل من العبارات المركبة التالية:

4 - $\sim p \wedge q$

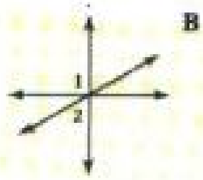
p	$\sim p$	q	$\sim p \wedge q$
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F

5 - $p \vee (q \wedge r)$

p	q	r	$(q \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

6 - سئلت مجموعة مكونة من 150 طالبا عما يفعلونه في أوقات فراغهم. ما عدد الطلاب الذين يستعملون الحاسب الآلي أو يقرؤون كتابا؟

طالب $75 + 5 + 4 + 10 + 20 + 3 = 117$



أي الأشكال التالية يعتبر مثالا مضادا للتخمين التالي؟

7 - "إذا تشاركت $\angle 1$, $\angle 2$ بنقطة واحدة فإن الزاويتين متقابلتين بالرأس"

الحل: **الشكل (B)**

8 - اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية:

"إذا تجاورت زاويتان فإن لهما الرأس نفسه".

وبين قيمة الصواب لكل عبارة مع إعطاء مثال مضاد في حالة الخطأ.

العكس: **إذا كانت الزاويتان لهما الرأس نفسه فإنهما متجاورتان" العبارة غير صحيحة دائما فمن الممكن أن تكونان متقابلتان بالرأس.**

المعكوس: **"إذا كانت زاويتين غير متجاورتين فليس لهما الرأس نفسه" صائبة.**

المعاكس الإيجابي : **"إذا كانت زاويتين ليس لهما الرأس نفسه فإنهما ليس متجاورتين" غير صائبة دائما.**

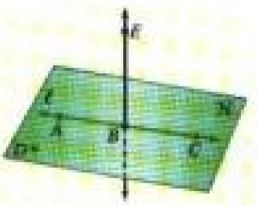
9 - حدد ما إذا كانت العبارة (3) تنتج عن العبارتين (1) و (2) من خلال قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي، وإذا كانت كذلك فاذكر أي قانون استعمل، وإذا لم تكن ناتجة عن أي من القانونين فاكتب "غير صحيحة".

(1) إذا كان n عددا صحيحا فإن n عدد حقيقي.

(2) n عدد حقيقي.

(3) n عدد صحيح.

العبارة (3) غير ناتجة عن أي من العبارتين "غير صحيحة".



في الشكل المجاور النقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة. والنقاط A, B, C, D تقع في المستوى N، اذكر المسلمة أو النظرية التي تدعم صحة كل من العبارات التالية:

10 - A, B, D تحدد المستوى N.

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تحدد مستوى وحيد.

11 - $\overleftrightarrow{BE}$ يقطع $\overleftrightarrow{AC}$ في النقطة B.

يتقاطع مستقيمان في نقطة واحدة.

12 - المستقيم l يقع في المستوى N.

إذا وقعت جميع نقاط مستقيم في مستوى نقول إن المستقيم يقع في المستوى.

6-1 البرهان الجبري

الجبر:
هو نظام مكون من مجموعات من الأعداد والعمليات عليها والخصائص التي تمكنك من إجراء هذه العمليات.

عزيزي الطالب/ عند حلك لأي مسألة رياضية فهي قد تكون جبرية أو هندسية ولحل هذه المسألة نستخدم البرهان الجبري أو الهندسي على حسب نوع المسألة ويتم الحل عن طريق خطوات مرتبة نستخدم فيها خصائص معينة.

المناقشة الاستنتاجية:
هي مجموعة خطوات جبرية تستعمل لحل المسائل الرياضية.

البرهان الجبري:
نستخدم فيه خصائص الأعداد الحقيقية في خطوات حل المسألة.

والخصائص تتلخص في الجدول التالي

ملخص المفاهيم	خصائص الأعداد الحقيقية
الخصائص التالية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c	
خاصية الانعكاس	$a = a$
خاصية التماثل	إذا كان $a = b$ فإن $b = a$.
خاصية التعدي	إذا كان $a = b$ و $b = c$ فإن $a = c$.
خاصيتا الجمع والطرح	إذا كان $a = b$ فإن $a + c = b + c$ و $a - c = b - c$.
خاصيتا الضرب والقسمة	إذا كان $a = b$ فإن $a \cdot c = b \cdot c$ وإذا كان $a = b$ و $c \neq 0$ فإن $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
خاصية التعويض	إذا كانت $a = b$ فإن a تحل مكان b في أي معادلة أو أي مقدار جبري.
خاصية التوزيع	$a(b + c) = ab + ac$

تذكر: تطبق خاصيتي الإبدال والتجميع في عمليتي الجمع والضرب أي:

1) الإبدال في عملية الجمع. $a + b = b + a$
2) التجميع في عملية الجمع. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3) الإبدال في عملية الضرب. $a . b = b . c$
4) التجميع في عملية الضرب. $(a . b) . c = a . (b . c)$

مثـــال

حل المعادلة $2x+3=5$ مع تبرير كل خطوة

الخطوات الجبرية	التبرير أو الخاصية
$2x+3=5$	المعادلة الأصلية
$2x+3-3=5-3$	خاصية الطرح
$2x = 2$	تبسيط
$\frac{2x}{2} = \frac{2}{2}$	خاصية القسمة
$x = 1$	تبسيط

لاحظ عزيزي الطالب:

في المثال السابق العمود عن اليمين هو تفصيل طريقة الحل خطوة خطوة والعمود عن اليسار مبرر كل خطوة وهذه الطريقة تسمى البرهان ذو العمودين.

البرهان ذو العمودين:

هو برهان يحتوي العبارات مرتبة في عمود والتبريرات مرتبة في عمود مواز له.

مثـــال

اكتب برهانا ذا عمودين لإثبات نظرية فيثاغورس.

تذكر أن نظرية فيثاغورس تنص على أنه في مثلث قائم الزاوية ABC وتره C وطول ضلعي القائمة a, b يكون $c^2=a^2+b^2$ أثبت أن: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

العبارات	المبررات
$c^2=a^2+b^2$	معطى
$c^2-b^2=a^2+b^2-b^2$	خاصية الطرح
$c^2-b^2=a^2$	تبسيط
$a = \sqrt{c^2 - b^2}$	بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

انتبه بما أن قياس الزوايا وأطوال القطع المستقيمة هي أعداد حقيقية فيمكن استعمال الخصائص الجبرية في إثبات العلاقات بين الزوايا والقطع المستقيمة.

الخاصية	القطع المستقيمة	الزوايا
الانعكاس	$AB = AB$	$m\angle1 = m\angle1$
التماثل	إذا كان $AB = CD$، فإن $CD = AB$	إذا كان $m\angle1 = m\angle2$، فإن $m\angle2 = m\angle1$.
التعدي	إذا كان $AB = CD$ و $CD = EF$ فإن $AB = EF$.	إذا كان $m\angle1 = m\angle2$ و $m\angle2 = m\angle3$، فإن $m\angle1 = m\angle3$.

مثال

إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ وكان $m\angle 2 = 90$ فأي عبارة مما يلي صحيحة:

F) $m\angle 1 = 45$ H) $m\angle 2 = 180$

G) $m\angle 1 = 90$ J) $m\angle 2 + m\angle 1 = 90$

التبرير من تعريف تماثل الزوايا فإن $m\angle 2 = 90 \Leftarrow m\angle 1 = 90$

مثال

إذا كانت $\angle B$, $\angle A$ متطابقتين وقياس $\angle A$ هو 110 اكتب برهانا ذا عمودين لإثبات أن قياس الزاوية $\angle B$ يساوي 110.

العبارات	المبررات
$110 = \angle A$, $\angle B \cong \angle A$	معطيات
$\angle B = \angle A$	من تعريف تطابق زاويتين
$110 = \angle A$	تعويض
$110 = \angle B$	تماثل

تدريبات وحلول

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يلي:

1 - إذا كان $\frac{x}{2}=7$ ، فإن $x=14$. خاصية الضرب.

2 - إذا كان $x=5$, $b=5$، فإن $x=b$. خاصية التماثل.

3 - إذا كان $XY-AB=WZ-AB$، فإن $XY=WZ$. خاصية الطرح.

4 - أكمل البرهان التالي:

المعطيات: $5 - \frac{2}{3}x = 1$. المطلوب إثبات أن: $x=6$

العبارات	المبررات
a) $5 - \frac{2}{3}x = 1$	a) معطى.
b) $3(5 - \frac{2}{3}x) = 1(3)$	b) خاصية الضرب
c) $15-2x = 3$	c) تبسيط
d) $-15+15-2x=3-15$	d) خاصية الطرح
e) $x=6$	e) تبسيط + قسمة

5 - إذا تقاطعت $\overline{KN}$, $\overline{JM}$ عند النقطة Q لتشكلا $\angle JQK$, $\angle MQN$، فأي استنتاج مما يلي ليس صحيحا؟

الاختيار (B) $\angle JQK$, $\angle MQN$ زاويتان متكاملتان.

التبرير: الزاويتان المعطيتان في السؤال متقابلتان بالرأس ومن تعريف الزوايا المتقابلة بالرأس فهما متطابقتان ومن تعريف تطابق الزوايا فهما متساويتان.

اكتب برهانا ذا عمودين لكل عبارة مما يلي:

6 -

العبارات	المبررات
$25=-7(y-3)+5y$	معطى.
$25=-7y+21+5y$	خاصية التوزيع
$25-21=-7y+5y$	تبسيط
$\frac{4}{-2}=\frac{-2y}{-2}$	تبسيط + قسمة
$-2=y$	تبسيط (المطلوب)

7 -

العبارات	المبررات
$AB=10, AD=3$, $ABCD$ مستطيل	معطى.
$BC=AD \Leftarrow BC//AD$	خاصية التوازي
$BC=3$	تعويض
$DC=AB \Leftarrow DC//AB$	خاصية التوازي
$DC=10$	تعويض
$AC=BD$	خصائص المستطيل

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يلي:

8 - إذا كان $m\angle A=m\angle B$, $m\angle B=m\angle C$ فإن $m\angle A=m\angle C$

خاصية التعدي للزوايا.

9 - إذا كان $XY+20=YW$, $XY+20=DT$، فإن $YW=DT$ **خاصية الجمع.**

10 - إذا كان $\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}AB$ فإن $AB=EF$. **خاصية الضرب**

11 - إذا كان $2(x-\frac{x}{2})=5$ فإن $2x-3=5$. **خاصية التوزيع.**

12 - إذا كان $EF=GH$, $GH=JK$، فإن $EF=JK$. **خاصية التعدي للمساواة.**

13 - أكمل البرهان التالي:

المعطيات: $\frac{3x+5}{2}=7$. المطلوب إثبات أن: $x=3$

العبارات	المبررات
a) $\frac{3x+5}{2}=7$	a) معطى.
b) $2(\frac{3x+5}{2})=7(2)$	b) خاصية الضرب
c) $3x+5=14$	c) تبسيط
d) $3x=9$	d) خاصية الطرح
e) $x=3$	e) خاصية القسمة

اكتب برهانا ذا عمودين:

14-

العبارات	المبررات
$\angle ACB = \angle ABC$	معطى (زاويتي قاعدة في مثلث)
$AC = AB$	المثلث متساوي الساقين (من خصائصه)
$\angle B + \angle A = \angle YBA$	من تعريف الزاوية الخارجة في مثلث
$\angle C + \angle A = \angle ACX$	من تعريف الزاوية الخارجة في مثلث
$\angle C = \angle B$	معطى
$\angle ACX = \angle YBA$	من خصائص تماثل الزوايا

اكتب برهانا ذا عمودين لكل عبارة مما يلي:

15-

العبارات	المبررات
$-\frac{1}{2} m = 9$	معطى.
$-1(-\frac{1}{2}m) = -1(9)$	خاصية الضرب
	تبسيط
$2(\frac{1}{2}m) = 2(-9)$	خاصية الضرب
$m=-18$	تبسيط (المطلوب)

16-

العبارات	المبررات
$-2y + \frac{3}{2} = 8$	معطى.
$2(-2y + \frac{3}{2}) = 2(8)$	خاصية الضرب
$-4y + 3 - 3 = 16-3$	خاصية التوزيع
$-4y = 13$	خاصية الطرح
	تبسيط
$y = -\frac{13}{4}$	خاصية القسمة

17-

العبارات	المبررات
$d=vt + \frac{1}{2}at^2$	معطى.
$d-vt = vt - vt + \frac{1}{2}at^2$	خاصية الطرح
$d-vt = \frac{1}{2} at^2$	تبسيط
$2(d-vt)=2(\frac{1}{2}at^2)$	خاصية الضرب
$2d-2vt = at^2$	خاصية التوزيع
$\frac{2d-2vt}{t^2} = a$	خاصية القسمة

18-

العبارات	المبررات
$PV = nRT$	معطى.
$\frac{PU}{n} = \frac{nRT}{n}$ $\quad \frac{PU}{n} = RT$	خاصية القسمة
$\frac{PV}{nR} = \frac{RT}{R}$	خاصية القسمة
$\frac{PV}{nR} = T$	تبسيط

19 -الحل: من تعريف تطابق المثلثات يمكن استنتاج أن:

$$m\angle ACB = m\angle DCE \quad \text{و} \quad m\angle FCE = m\angle ACG$$

20 -الحل: إذا كانت $a=b$ وكانت $a+13=20$ فإن $b=7$

21 -الحل: المعطيات: "إذا كان .... "، المطلوب: "فإن ... "

22 -الحل: مريم أخت فاطمة، فاطمة أخت مريم (تماثل)
سالم أخو ياسر، ياسر أخو لجين، سالم أخو لجين (تعد)
عادل أخو صالح، صالح أخو عادل (تماثل)
ريان حفيد آمال ، ريان أخو سناء، سناء حفيدة آمال.
صالح ابن خالة سالم، عادل أخو صالح، عادل ابن خالة سالم ......

23 - الحل: في المحكمة يستخدم المحامي عدة خطوات لإثبات قضيته منها أوراق ثبوتية أو شهادات أشخاص معينين أو بصمات أو أدلة صوتية أو تسجيلات ويستمر في عرض ما لديه حتى يثبت قضيته للقاضي، وبالمثل في برهنة نظرية في الرياضيات نعمل على استخدام المسلمات والحقائق والخصائص الجبرية أو الهندسية على شكل خطوات حتى نثبت صحة نظرية معينة.

24 - الحل: الإجابة الصحيحة (B) $\overline{BF}$ تنصف $\angle BFD$

25 - الحل: الإجابة الصحيحة (J) "وللتأكد يمكن التعويض بأي قيمة لـ n في المعادلة الصحيحة"

26 - الحل: 6 ممرات مشاة.

27 - الحل: بما أن العبارة الشرطية صحيحة، والفرض 24 يقبل القسمة على 6 صحيح دائما، فالنتيجة طبقا لقانون الفصل المنطقي لا بد أن تكون صحيحة دائما 24 يقبل القسمة على 3.

28 - الحل: النتيجة غير صحيحة 27 لا يقبل القسمة على 6 لأن الفرض غير صحيح.

29 - الحل: العبارة الشرطية صحيحة والفرض 85 لا يقبل القسمة على 3 صحيح فالنتيجة صحيحة طبقا لقانون الفصل المنطقي.

30 - الحل: إذا كنت صبورا فستنال مرادك.

31 - الحل: إذا لم تبلغ هدفا تريده فإنك بلغت جزءا من السعادة.

32 - الحل: $\overline{KL} = 25 - 14 = 11$

33 - الحل: $\overline{WZ} = 38 + 9 = 47$

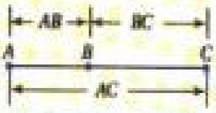
7-1 إثبات علاقات بين القطع المستقيمة

جمع القطع المستقيمة:

عندما نقيس قطعة مستقيمة باستخدام المسطرة نضع صفر المسطرة على أحد طرفي القطعة المستقيمة ويمثل التدريج المقابل للطرف الآخر طول القطعة.

مسلمات

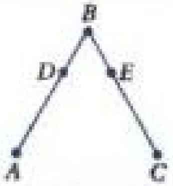
- **النقاط التي تقع على مستقيم أو قطعة مستقيمة يمكن ربطهما بأعداد حقيقية بحيث تقابل النقطة الأولى الصفر بينما تقابل النقطة الثانية عدد حقيقي موجب.**
- **إذا وقعت النقاط A, B, C على استقامة واحدة وكانت النقطة B بين A, C فإن $AB + BC = AC$.**



وعكس العبارة صحيح أيضا أي أن:

إذا كان $AB + BC = AC$ فإن B تقع بين C , A.

مثال



المعطيات: $\overline{AD} \cong \overline{CE}$, $\overline{DB} \cong \overline{EB}$

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$

العبارات	المبررات
$\overline{AD} \cong \overline{CE}$	معطى
$\overline{DB} \cong \overline{EB}$	معطى
$\overline{EB} + \overline{CE} = \overline{CB}$	خاصية جمع القطع المستقيمة.
$\overline{DB} + \overline{AD} = \overline{AB}$	خاصية جمع القطع المستقيمة.
$\overline{AB} \cong \overline{CB}$	خاصية التعويض.

تطابق القطع المستقيمة:

1) خاصية الانعكاس: $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

2) خاصية التماثل: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ فإن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$

3) خاصية التعدي: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

لاحظ عزيزي الطالب:

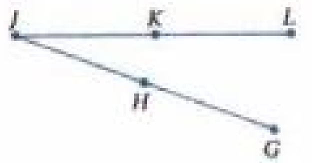
الخصائص السابقة تشبه خصائص المساواة التي درستها سابقا:

$$a = a$$

$$a = b \Rightarrow b = a$$

$$a = b , b = c \Rightarrow a = c$$

مثـــال



المعطيات: $\overline{HJ} \cong \overline{TV}$, $\overline{HI} \cong \overline{TU}$

المطلوب: $\overline{IJ} \cong \overline{UV}$

العبارات	المبررات
$\overline{HJ} \cong \overline{TV}$	معطى
$\overline{HI} \cong \overline{TU}$	معطى
$\overline{HJ} = \overline{HI} + \overline{IJ}$	خاصية جمع القطع المستقيمة.
$\overline{TV} = \overline{TU} + \overline{UV}$	خاصية جمع القطع المستقيمة.
$\overline{HI} = \overline{TU}$ و $\overline{IJ} = \overline{UV}$	تساوي القطع المستقيمة.
$\overline{IJ} \cong \overline{UV}$	تطابق القطع المستقيمة.

تدريبات وحلول

1 - أكمل البرهان التالي:

المعطيات: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$ و $\overline{QS} \cong \overline{ST}$ المطلوب إثبات أن: $\overline{PS} \cong \overline{RT}$

العبارات	المبررات
a) $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\overline{QS} \cong \overline{ST}$	a) معطى.
b) $\overline{PQ} = \overline{RS}$, $\overline{QS} = \overline{ST}$	b) تعريف تطابق القطع المستقيمة.
c) $\overline{PS} = \overline{PQ}+\overline{QS}$, $\overline{RT} = \overline{RS}+\overline{ST}$	c) خاصية جمع القطع المستقيمة.
d) $\overline{PQ}+\overline{QS} = \overline{RS}+\overline{ST}$	d) خاصية التعويض.
e) $\overline{PS} = \overline{RT}$	e) خاصية التعويض.
f) $\overline{PS} \cong \overline{RT}$	f) تعريف تطابق القطع المستقيمة.

2 - أثبت ما يلي:

المعطيات: $\overline{AP} \cong \overline{CP}$ ، $\overline{BP} \cong \overline{DP}$ المطلوب إثبات أن: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

العبارات	المبررات
$\overline{AP} \cong \overline{CP}$	معطى.
$\overline{BP} \cong \overline{DP}$	معطى
$\overline{AP} = \overline{CP}$, $\overline{BP} = \overline{DP}$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$\overline{AB} = \overline{AP}+\overline{BP}$, $\overline{CD} = \overline{CP}+\overline{PD}$	خاصية جمع القطع المستقيمة
$\overline{AB} = \overline{CD}$	خاصية التعويض
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	تعريف تطابق القطع المستقيمة

3 - أكمل البرهان التالي:

المعطيات: $\overline{WY} \cong \overline{ZX}$ ، النقطة A منتصف $\overline{ZX}$ ومنتصف $\overline{WY}$

المطلوب إثبات أن: $\overline{WA} \cong \overline{ZA}$

العبارات	المبررات
a) $\overline{WY} \cong \overline{ZX}$ النقطة A منتصف $\overline{ZX}$ ومنتصف $\overline{WY}$	a) معطى. معطى
b) $\overline{WY} = \overline{ZX}$	b) تطابق القطع المستقيمة
c) $AZ=AX$, $AW = AY$	c) تعريف نقطة المنتصف
d) $WY = WA + AY$, $ZX=ZA+AX$	d) تعريف جمع القطع المستقيمة
e) $WA+AY = AZ + AX$	e) خاصية التعويض
f) $WA + WA = ZA + ZA$	f) خاصية التماثل
g) $2WA = 2ZA$	g) خاصية الانعكاس
h) $WA = ZA$	h) خاصية القسمة
i) $\overline{WA} \cong \overline{ZA}$	i) تعريف تطابق القطع المستقيمة

أثبت كلا مما يلي:

4 - خاصية الانعكاس لتطابق القطع المستقيمة.

لإثبات خاصية الانعكاس $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ المعطيات: قطعة مستقيمة AB

البرهان الحر: بما أن القطعة المستقيمة AB تنطبق عليها خصائص القطع المستقيمة، تنطبق عليها خاصية الانعكاس للقطع المستقيمة، $AB=AB$ ومن تعريف التطابق للقطع المستقيمة المتساوية: $\overline{AB} \cong \overline{AB}$.

5 - خاصية التماثل لتطابق القطع المستقيمة.

العبارات	المبررات
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	معطى
$\overline{AB} = \overline{CD}$	تطابق القطع المستقيمة.
$\overline{CD} = \overline{AB}$	خاصية تماثل القطع المستقيمة.
$\overline{CD} \cong \overline{AB}$	تطابق القطع المستقيمة.

أثبت ما يلي:

6 - المعطيات: $\overline{AP} \cong \overline{BC}$ ، $\overline{PC} \cong \overline{QB}$ المطلوب إثبات أن: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

العبارات	المبررات
$\overline{AP} \cong \overline{BC}$ ، $\overline{PC} \cong \overline{QB}$	معطى.
$\overline{AP} \cong \overline{AQ}$	تعريف تطابق المثلثات
$\overline{AC} = \overline{AP}+\overline{PC}$, $\overline{AB} = \overline{AQ}+\overline{QB}$	خاصية جمع القطع المستقيمة
$\overline{AC} = \overline{AB}$	تساوي القطع المستقيمة
$\overline{AC} \cong \overline{AB}$	تعريف تطابق القطع المستقيمة

7 - المعطيات: $\overline{LM} \cong \overline{PN}$ ، $\overline{XM} \cong \overline{XN}$ المطلوب إثبات أن: $\overline{LX} \cong \overline{PX}$

العبارات	المبررات
$\overline{LM} \cong \overline{PN}$ ، $\overline{XM} \cong \overline{XN}$	معطى.
$\overline{PX} = \overline{ND} - \overline{NX}$, $\overline{LX} = \overline{LM} - \overline{MX}$	خاصية جمع القطع المستقيمة
$\overline{XP} = \overline{LX}$	تساوي القطع المستقيمة
$\overline{XP} \cong \overline{LX}$	تعريف تطابق القطع المستقيمة

8 - المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ، النقطة C منتصف $\overline{BD}$ أثبت أن: $\overline{AC} \cong \overline{CE}$

العبارات	المبررات
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BD}$ منتصف C	معطى.
$\overline{AB} = \overline{DE}$	تطابق القطع المستقيمة
$\overline{CD} = \overline{CB}$	تعريف نقطة المنتصف
$\overline{CD} \cong \overline{CB}$	تعريف تساوي القطع المستقيمة
$\overline{CE} = \overline{DE} + \overline{CD}$, $\overline{AC} = \overline{BC} + \overline{AB}$	تعريف جمع القطع المستقيمة
$\overline{DE} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AB}$	خاصية التعويض
$\overline{AC} = \overline{CE}$	تعريف تساوي القطع المستقيمة
$\overline{AC} \cong \overline{CE}$	تعريف تطابق القطع المستقيمة

9 - المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ و $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ أثبت أن: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

العبارات	المبررات
$\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\overline{BC} \cong \overline{DE}$	معطى.
$\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{DE}$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$\overline{DF} = \overline{DE} + \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{BC} + \overline{AB}$	تعريف جمع القطع المستقيمة
$\overline{DE} + \overline{EF} = \overline{BC} + \overline{AB}$	خاصية التعويض
$\overline{AC} = \overline{DF}$	تعريف تساوي القطع المستقيمة
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$	تعريف تطابق القطع المستقيمة

10 - ارسم ثلاث قطع مستقيمة متطابقة، ووضح خاصية التعدي باستعمال هذه القطع المستقيمة.

$\overline{bc} \cong \overline{ab}$ و $\overline{ac} \cong \overline{bc}$

بما أن القطع متطابقة إذن من خصائص تساوي القطع المستقيمة

$\overline{bc} = \overline{ab}$ و $\overline{ac} = \overline{bc}$

من خصائص التعدي للمساواة: $\overline{ab} = \overline{ac}$

من تعريف تطابق القطع المستقيمة: $\overline{ab} \cong \overline{ac}$

11 - على خارطة الطرق في المملكة العربية السعودية، اختر مدينتين وصف المسافة بينهما مستعملا خاصية الانعكاس.

المسافة بين الرياض والدمام تقريبا 45.5كلم والمسافة هي عبارة عن قطعة مستقيمة طولها $450km$ من الرياض إلى الدمام وبتطبيق خاصية الانعكاس فإن المسافة من الدمام إلى الرياض هي نفسها $450km$ أيضا.

12 - الحل:

(1) $\overline{LN} \cong \overline{QO}$ **خاصية التعدي لتطابق القطع المستقيمة.**

حيث من المعطى $\overline{LN} \cong \overline{RT}$, $\overline{RT} \cong \overline{QO}$

(2) $\overline{MP} \cong \overline{NO}$, $\overline{LQ} \cong \overline{NO}$ **(معطى)**

من خاصية التماثل فإن $\overline{LQ} \cong \overline{MP}$

(3) **النقطة S منتصف القطعة RT (معطى)**

$\overline{ST} = \overline{SR}$ **من تعريف نقطة المنتصف.**

$\overline{ST} \cong \overline{SR}$ **من تعريف تطابق القطع المستقيمة.**

13 -الحل: المسافات بين المدن هي عبارة عن قطع مستقيمة تنطبق عليها خصائص القطع المستقيمة فمثلا المسافر من مدينة الدمام إلى مدينة جدة ممكن أن يمر في مدينة الرياض ويستطيع المسافر إيجاد المسافة الكلية بين الدمام وجدة إذا أعلن قائد الطائرة عن المسافة من الدمام إلى الرياض ثم من الرياض إلى جدة وبخاصة جمع القطع المستقيمة يستطيع إيجاد المسافة الكلية وتكون هذه المسلمات مفيدة لبعض الأشخاص لحساب الوقت الذي تستغرقه الرحلة كاملة حيث يكون من المعلوم لديه سرعة الطائرة وبمعرفة المسافة يستطيع معرفة الزمن اللازم للرحلة.

14 -الحل: (C) مسلمة جمع القطع المستقيمة.

15 -الحل: (F) 225 مترا.

16 -الحل: (B) $3x4$

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يلي:

17 -الحل: خاصية التعويض.

18 -الحل: خاصية توزيع الضرب على الجمع.

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي "صحيحة دائما" أو "صحيحة أحيانا" أو "ليست صحيحة أبدا".

19 -نقطة المنتصف تقسم القطعة المستقيمة إلى قطعتين غير متطابقتين.

ليست صحيحة أبدا.

20 -ثلاثة مستقيمات تتقاطع في نقطة واحدة. **صحيحة أحيانا.**

21 -تقاطع مستويين هو مستقيم. **صحيحة دائما.**

أوجد قيمة x فيما يلي:

22- $2x+x = 90$

$3x = 90$

$x = \frac{90}{3} = 30^{\circ}$

23- $(3x+2) + x = 90$

$3x + 2 + x = 90$

$4x = 88$

$x = \frac{88}{4} = 22^{\circ}$

24 - $4x+10+3x -5= 180$

$7x + 5 = 180$

$7x = 175$

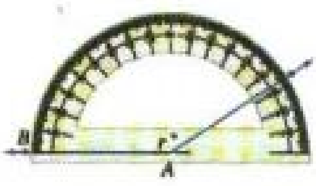
$x = \frac{175}{7} = 25^{\circ}$

8-1 إثبات علاقات الزوايا

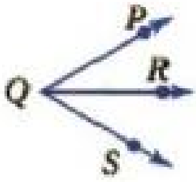
تذكر عزيزي الطالب:

عند قياس زاوية باستعمال منقلة نضع المنقلة بحيث أن أحد ضلعي الزاوية ينطبق على صفر المنقلة ثم نقرأ التدريج على المنقلة المنطبق على ضلع الزاوية الآخر.

مسلمات:



1) إذا كان $\overline{AB}$ نصف مستقيم معطى والعدد r معطى بين 0 , 180 فإنه يوجد نصف مستقيم وحيد طرفه النقطة A ويقع في إحدى جهتي $\overline{AB}$ بحيث يكون قياس الزاوية المتكونة يساوي r.



2) إذا وقعت النقطة R داخل $\angle PQS$ فإن:

$$m\angle PQR + m\angle RQS = m\angle PQS$$

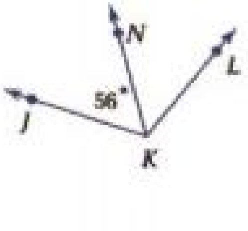
وإذا كانت $m\angle PQS + m\angle RQS = m\angle PQS$

فإن R تقع داخل $\angle RQS$

انتبه تستخدم هذه المسلمات لحل مسائل تتضمن قياس الزوايا.

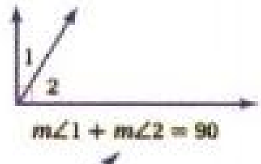
مثال

أوجد $m\angle NKL$ إذا كان $m\angle JKL = 2m\angle JKN$



$\angle JKL = \angle JKN + \angle NKL$	مسلمة جمع الزوايا
$2\angle JKN = \angle JKN + \angle NKL$	بالتعويض
$2(56) = 56 + \angle NKL$	بالتعويض
$112 - 56 = \angle NKL$	بالطرح
$56 = \angle NKL$	تبسيط

لاحظ جيدا:



1) تكون الزاويتان متتامتان:

إذا كان مجموعهما 90°.

2) تكون الزاويتان متكاملتان:

إذا كان مجموعهما 180°.

مثال

A) في الشكل المجاور أوجد قياسات الزوايا $\angle 5, \angle 4, \angle 3$

إذا كان: $m\angle 3 = x + 20,\ m\angle 4 = x + 40,\ m\angle 5 = x + 30$

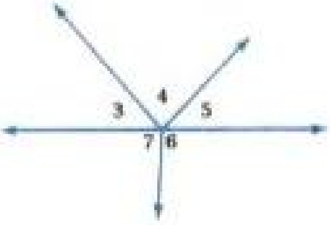
$\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ زوايا متجاورة على مستقيم

$x + 20 + x + 40 + x + 30 = 180$ بالتعويض

$3x + 90 = 180$ بالطرح

$3x = 90$ تبسيط

$x = 30$ بالقسمة



$$m\angle 3 = x + 20 = 50^\circ$$
$$m\angle 4 = x + 40 = 70^\circ$$
$$m\angle 5 = x + 30 = 60^\circ$$

B) إذا كانت $\angle 6, \angle 7$ زاويتين متجاورتين على مستقيم وكان:

$$m\angle 7 = 5x + 12\ ,\ m\angle 6 = 3x + 32$$

فأوجد كلا من $\angle 6, \angle 7, x$.

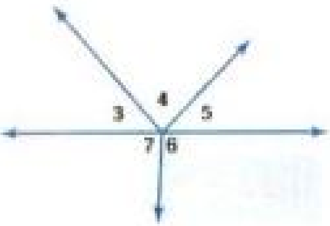
$\angle 6 + \angle 7 = 180^\circ$ زوايا متجاورة على مستقيم

$5x + 12 + 3x + 32 = 180$ بالتعويض

$8x + 44 = 180$ بالطرح

$8x = 136$ تبسيط

$x = 17$ بالقسمة



$$m\angle 6 = 3x + 32 = 83^\circ$$
$$m\angle 7 = 5x + 12 = 97^\circ$$

لاحظ:

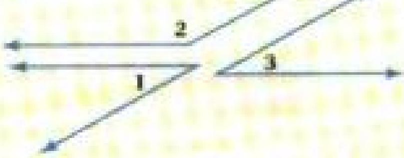
تنطبق خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي على الزوايا كما تنطبق على الأعداد.

1) خاصية الانعكاس: $\angle 1 \cong \angle 1$

2) خاصية التماثل: إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$ ⇐ $\angle 2 \cong \angle 1$

3) خاصية التعدي: إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\angle 2 \cong \angle 3$ ⇐ $\angle 1 \cong \angle 3$

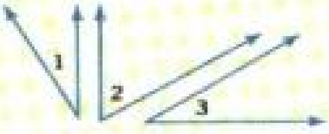
نظريات



الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

مثال: إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$

و $m\angle 2 + m\angle 3 = 180$، فإن $\angle 1 \cong \angle 3$.

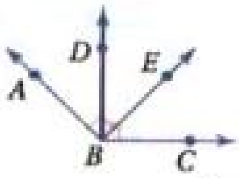


الزاويتان المتممتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

مثال: إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 90$

و $m\angle 2 + m\angle 3 = 90$، فإن $\angle 1 \cong \angle 3$.

مثال



في الشكل المجاور $\angle ABE$, $\angle DBC$ قائمتان

أثبت أن : $\angle ABD \cong \angle EBC$

$\angle ABE$ قائمة	معطى
$\angle ABD$, $\angle DBE$	متتامتان
$\angle ABD + \angle DBE = 90^\circ$	تعريف الزوايا المتتامة
$\angle EBC + \angle DBE = 90^\circ$	تعريف الزوايا المتتامة
$\angle ABD + \angle DBE = \angle EBC + \angle DBE$	بالتعويض
$\angle ABD = \angle EBC$	تساوي الزوايا
$\angle ABD \cong \angle EBC$	تطابق الزوايا

نظرية

- **الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان**

$\angle 1 \cong \angle 3$

$\angle 2 \cong \angle 4$

تذكر:

الزاويتان المتقابلتان بالرأس غير متجاورتين ناتجتان عن تقاطع مستقيمين.

مثال

إذا كانت $\angle 3, \angle 4$ متقابلتين بالرأس وكان $m\angle 3 = 6x + 2$, $m\angle 4 = 8x - 14$ فأوجد: $m\angle 3$, $m\angle 4$

$\angle 3 \cong \angle 4$	زوايا متقابلة بالرأس
$\angle 3 = \angle 4$	تعريف تطابق الزوايا
$6x + 2 = 8x - 14$	بالتعويض
$8x - 6x = 2 + 14$	تبسيط
$2x = 16$	تبسيط
$x = 8$	بالقسمة

$$m\angle 3 = 6x + 2 = 6(8) + 2 = 50^\circ$$

$$m\angle 4 = 8x - 14 = 8(8) - 14 = 50^\circ$$

نظريات الزاوية القائمة:

(1) تتقاطع المستقيمات المتعامدة وتشكل أربعة زوايا قائمة.

(2) جميع الزوايا القائمة متطابقة.

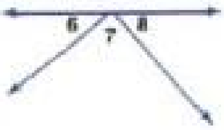
(3) تشكل المستقيمات المتعامدة زوايا متجاورة ومتطابقة.

(4) إذا كانت الزاويتان متطابقتين ومتكاملتين فإنهما قائمتان.

(5) إذا كانت الزاويتان متطابقتين متجاورتين على مستقيم فإنهما قائمتان.

تدريبات وحلول

أوجد كل من الزوايا المرقمة في السؤالين 1 و 2:



1- $\angle 8 , \angle 6$ متتامتان ، $m\angle 8 = 47$

$\angle 6 + \angle 8 = 90 \rightarrow \angle 6 + 47 = 90 \rightarrow \angle 6 = 43$

$\angle 6 + \angle 8 + \angle 7 = 180 \rightarrow 47 + 43 + \angle 7 = 180$

$\angle 7 = 180 - 90 = 90^\circ$

2- $\angle 12 , \angle 11$ متكاملتان

$\angle 12 + \angle 11 = 180$

$x - 4 + 2x - 5 = 180$

$3x = 189 \rightarrow x = 63$

$\angle 11 = x - 4 = 63 - 4 = 59^\circ$

$\angle 12 = 2x - 5 = 126 - 5 = 121^\circ$

3- أكمل البرهان التالي:

المعطيات: $\angle 2 , \angle 1$ زاويتان متكاملتان ، $\angle 3 , \angle 4$ زاويتان متكاملتان.

المطلوب إثبات أن: $\angle 2 \cong \angle 3$

العبارات	المبررات
a) $\angle 1 , \angle 2$ زاويتان متكاملتان $\angle 4 , \angle 3$ زاويتان متكاملتان $\angle 1 \cong \angle 4$	معطى. (a
b) $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$ $m\angle 3 + m\angle 4 = 180$	تعريف تكامل الزوايا (b
c) $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$	التعويض (c
d) $m\angle 1 = m\angle 4$	المساواة (d
e) $m\angle 2 = m\angle 3$	المساواة (e
f) $\angle 2 \cong \angle 3$	تعريف تطابق الزوايا (f

4- اكتب برهانا ذا عمودين:

المعطيات: $\overrightarrow{VX}$ ينصف $\angle WVY$ ، $\overrightarrow{VY}$ ينصف $\angle XVZ$.

المطلوب إثبات أن: $\angle WVX \cong \angle YVZ$

العبارات	المبررات
$\overrightarrow{VX}$ ينصف $\angle WVY$ $\overrightarrow{VY}$ ينصف $\angle XVZ$	معطى.
$\angle XVY + \angle WVY = \angle WVY$	مسلمة جمع الزوايا
$\angle XVY + \angle YVZ = \angle XVZ$	مسلمة جمع الزوايا
$\angle XVY = \angle XVY$	خاصية الانعكاس
$\angle WVX = \angle YVZ$	خاصية التماثل
$\angle WVX \cong \angle YVZ$	تعريف تطابق الزوايا

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في الأسئلة 7-5:

-5

$m\angle 1 = 64$

$\angle 1 + \angle 2 = 90$

$\angle 2 + 64 = 90$

$\angle 2 = 26^\circ$

-6

$m\angle 3 = 38$

$\angle 3 + \angle 4 = 90$

$\angle 4 + 38 = 90$

$\angle 4 = 52^\circ$

-7

$\angle 7 + \angle 8 = 90 \rightarrow \angle 7, \angle 8$ متتامتان

$\angle 5 = \angle 8 \rightarrow \angle 5 \cong \angle 8$

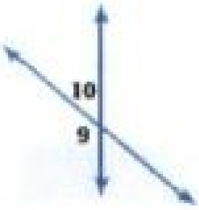
$\angle 5 + \angle 6 = 90$ متتامتان

$\angle 5 + 29 = 90 \rightarrow \angle 5 = 61$

$\angle 5 = \angle 8 \rightarrow \angle 8 = 61^\circ$

$\angle 7 + \angle 8 = 90 \rightarrow \angle 7 = 90 - 61 \rightarrow \angle 7 = 29^\circ$

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة



-8 $m\angle 9 = 100 + 20x$, $m\angle 10 = 20x$

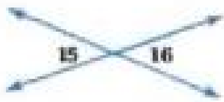
متكاملتان $\angle 9 + \angle 10 = 180$

$100 + 20x + 20x = 180$

$40x = 180 - 100 \rightarrow x = 2$

$\angle 9 = 100 + 20(2) = 140^\circ$

$\angle 10 = 20(2) = 40^\circ$



-9 $m\angle 16 = 6x - 290$, $m\angle 15 = x$

متقابلتين بالرأس $\angle 16 = \angle 15$

$x = 6x - 290 \rightarrow 5x = 290 \rightarrow x = 58$

$\angle 15 = 58^\circ$, $\angle 16 = 6(58) - 290 = 58^\circ$

-10 $m\angle 14 = 7x + 49$, $m\angle 13 = 2x + 94$

متقابلتين بالرأس $\angle 14 = \angle 13$

$7x + 49 = 2x + 94$

$5x = 45 \rightarrow x = 9$

$\angle 14 = 7(9) + 49 = 63 + 49 = 112^\circ$

$\angle 13 = 2(9) + 94 = 18 + 94 = 112^\circ$

-11 اكتب برهانا ذا عمودين:

المعطيات: $m\angle RSW = m\angle TSU$

المطلوب إثبات أن: $m\angle RST \cong m\angle WSU$

العبارات	المبررات
$m\angle RSW = m\angle TSU$	معطى.
$m\angle RSW = m\angle RST + m\angle TSW$	نظرية جمع الزوايا
$m\angle TSU = m\angle WSU + m\angle TSW$	نظرية جمع الزوايا
$m\angle RST + m\angle TSW = m\angle WSU + m\angle TSW$	التعويض
$m\angle RST \cong m\angle WSU$	خاصية التعدي

اكتب برهانا لكل نظرية مما يلي:

12 - نظرية تكامل الزوايا.

$\angle 1$, $\angle 2$ متجاورتين على مستقيم معطى

$\angle 1 + \angle 2 = 180$ من الرسم

الزاويتان مجموعهما 180 تعويض

الزاويتان متكاملتان تعريف تكامل الزوايا

13 - نظرية تتام الزوايا.

الضلعان AC, AB يشكلان ضلعان معطى

غير مشتركين لزاويتين زاوية قائمة من الرسم

$\angle 1 + \angle 2 = 90$ تعويض

الزاويتان مجموعهما 90 تعريف تكامل الزوايا

الزاويتان متتامتان

14 - خاصية الانعكاس لتطابق الزوايا.

معطى: $\angle 1 \cong \angle 1$ مطلوب: $\angle 1 \cong \angle 1$

$\angle 1 \cong \angle 1$ ومن تعريف تطابق الزوايا فإن $\angle 1 = \angle 1$ وباستعمال خاصية الانعكاس للمساواة فإن $\angle 1 = \angle 1$ ومن تعريف تطابق الزوايا $\angle 1 \cong \angle 1$

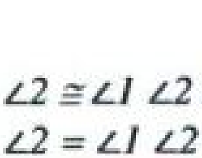
15 - خاصية التعدي لتطابق الزوايا.

معطى: $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 2$ مطلوب: $\angle 1 \cong \angle 3$

معطى ومن تعريف تطابق الزوايا فإن $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 2 \cong \angle 3$

وباستعمال خاصية التعدي للمساواة فإن $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$

$\angle 1 = \angle 3$ ومن تعريف تطابق الزوايا فإن $\angle 1 \cong \angle 3$



استعمل الشكل المجاور لكتابة برهان لكل نظرية:

16 - بما أن $m \perp l$ ← يتقاطع معه في نقطة واحدة من تعريف التعامد ومن الرسم نلاحظ أنه ينتج من تعامد l على m أربع زوايا قائمة هي $1, 2, 3, 4$.

17 - $\angle 2 \cong \angle 3$ لأنهما متقابلتان بالرأس ⇐ $\angle 2 = \angle 3$ من تعريف التطابق

من تعريف التطابق $\angle 1 = \angle 4$ ⇐ لأنهما متقابلتان بالرأس $\angle 1 \cong \angle 4$ أيضا

$\angle 1 = \angle 2$ بالتماثل حول المستقيم l

$\angle 3 = \angle 4$ بالتماثل حول المستقيم l

$\angle 1 = \angle 3$ بالتماثل حول المستقيم m

بالتماثل حول المستقيم m $\quad \angle 2 = \angle 4$

باستخدام خصائص التعدي للمساواة نجد $\angle 1 = \angle 2 \quad = \angle 3 = \angle 4 = 90$

أي جميع الزوايا القائمة متطابقة.

18 - المستقيم l عمودي على المستقيم m ⇐ يكون أربع زوايا قائمة

الزوايا القائمة متطابقة من النظرية السابقة

يشكل المستقيمان l , m زوايا متطابقة هي $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$

بما أن $\angle 1$, $\angle 2$ متكاملتان فهما متجاورتان.

بما أن $\angle 3$, $\angle 4$ متكاملتان فهما متجاورتان.

19 - الزوايا متطابقة فهي إما متجاورة أو متقابلة بالرأس

معطى أن الزوايا متكاملة أي مجموعها (180°) من تعريف التكامل

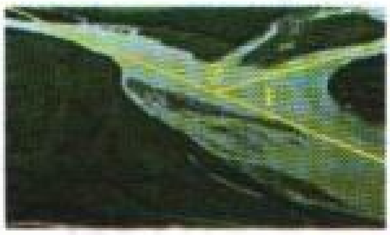
الزوايا متجاورة بما أنها متكاملة.

مجموعهما 180 وبما أنهما متطابقتان فهما متساويتان أي مجموع كل واحدة منهما 90° إذن فهما قائمتان.

20 - بما أنهما متجاورتان على مستقيم ⇐ مجموعهما 180°.

بما أنهما متطابقتان إذن هما متساويتان أي قياس كل زاوية يساوي $\frac{180}{2} = 90^\circ$

إذن الزاويتان قائمتان.

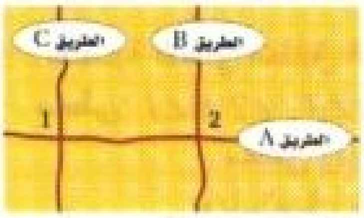


21 - $\angle 1$, $\angle 2$ متجاورتين على مستقيم

$\angle 1$, $\angle 2$ متكاملتان

$\angle 1 + \angle 2 = 180$

$28 + \angle 2 = 180 \rightarrow \quad \angle 2 = 152$



22 - بما أن زاويتي تقاطع الطريق A هما $\angle 1$, $\angle 2$

الطريق A عمودية على الطريقين B , C

الزوايا 1 ، 2 زوايا قائمة.

جميع الزوايا القائمة متطابقة

$\angle 1 \cong \angle 2$

23 - $\angle 1$, $\angle 2$ متطابقتان لأنهما زاويتان قائمتان

$\angle 2$, $\angle 3$ متطابقتان لأنهما زاويتان قائمتان

من خصائص التعدي نجد أن:

$\angle 1$, $\angle 3$ متطابقتان (قائمتان ومتقابلتان بالرأس)

24 - معادلة يوسف صحيحة بينما معادلة تامر غير صحيحة وذلك لأن معادلة تامر لا يوجد فيها الزاوية $\angle EBF$ وهي جزء من الزاوية $\angle ABC$

25 - ليست صحيحة دائما بل أحيانا تكون الزاويتان الغير متجاورتان متقابلتان بالرأس.

26 - صحيحة أحيانا فمثلا $60 = 30 + 30$ ⇐ قيمتها $= 30$.

وخطأ أحيانا مثل $120 = 60 + 60$ ⇐ غير صحيح.

27- $m\angle 1 = m\angle 2$

$m\angle 3 = m\angle 4$

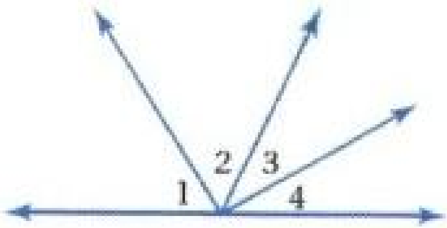
$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 180$

$m\angle 1 + m\angle 1 + m\angle 4 + m\angle 4 = 180$

$2m\angle 1 + 2m\angle 4 = 180$

$2(m\angle 1 + m\angle 4) = 180$

$m\angle 1 + m\angle 4 = 90$



28- بالرجوع إلى ص 56 نجد أن:

$\angle 1 , \angle 2$ زاويتان متكاملتان

$\angle 3 , \angle 2$ زاويتان متكاملتان

29- (B) 18) $\frac{18}{72} = \frac{1}{4} \Leftarrow 72 + 18 = 90)$

30- $4(3x-2)(2x+4)+3x^2+5x-6$

$(12x-8)(2x+4)+3x^2+5x-6$

$24x^2+48x-16x-32+3x^2+5x-6$

$27x^2+37x-38$

31- اكتب برهانا ذا عمودين:

العبارات	المبررات
G تقع بين H , F	معطى
H تقع بين J , G	معطى
$FG = GH$	تعريف نقطة المنتصف
$FH = FG + GH$	تعريف جمع القطع المستقيمة
$GH = HJ$	تعريف نقطة المنتصف
$GJ = GH + HJ$	تعريف جمع القطع المستقيمة

32-

العبارات	المبررات
النقطة X منتصف WY	معطى
$XY = XW$	تعريف نقطة المنتصف
$ZX = XY + YZ$	تعريف جمع القطع المستقيمة
$ZX = ZY + XW$	بما أن $XW = XY$

اختبار الفصل الأول

حدد ما إذا كان كل تخمين صحيحا أو خاطئا، وضح إجابتك مع إعطاء مثال مضاد كل تخمين خاطئ:

1 - الحل: التخمين صحيح بناء على خاصية التماثل للزوايا.

2 - الحل: التخمين غير صحيح فمثلا $y=3$ ⇐ $-3 > 0$ (غير صحيح)

3 - الحل: التخمين صحيح $3(4)^2=48$ ⇐ $3\times16=48$

استعمل العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة لكل عبارة فصل أو وصل، ثم أوجد قيمة الصواب لهذه العبارة المركبة:

4 - الحل: $3x=12$ عندما $x=4$ و $-3>2$ (عبارة خاطئة)

5 - الحل: $3x=12$ عندما $x=4$ أو $-3>2$ (عبارة صائبة)

6 - الحل: $3x=12$ عندما $x=4$ والمثلث المتطابق الأضلاع هو مثلث متطابق الزوايا أيضا أو $-3>2$ (عبارة صائبة)

7 - حدد كلا من الفرض والنتيجة للعبارة "الناس الذين يجهدون أنفسهم بالعمل يستحقون إجازة مريحة" ثم اكتب العبارة على صورة "إذا كان ... فإن ..."

الفرض:: "الناس يجهدون نفسهم بالعمل"

النتيجة: "يستحقون إجازة مريحة".

"إذا اجهدت نفسك بالعمل فإنك تستحق إجازة مريحة".

8 - بين ما إذا كانت العبارة (3) ناتجة عن العبارتين (1)، (2) من قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي، وإلا فاكتب غير صحيح:

(1) تتقاطع المستقيمات المتعامدة.

(2) المستقيمان $n.m$ متعامدان.

(3) يتقاطع المستقيمان n, m.

(3) العبارة صحيحة لأن العبارة الشرطية (1) صحيحة والفرض المستقيمان n , m متعامدان صحيح فطبقا لقانون الفصل المنطقي فإن النتيجة صحيحة أي يتقاطع المستقيمان n , m.

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في الشكل:

9 - الحل: $\angle 1 = 95 - 73 = 22$

10 -الحل: $\angle 2 = 85$

11 -الحل: $\angle 3 = 85$

اكتب برهانا لكل من العبارات التالية بالطريقة المطلوبة:

12 - طريقة البرهان ذي العمودين: إذا كان $2(n-3)+5=3(n-1)$ فإن $n=2$

العبارات	المبررات
$2(n-3)+5 = 3(n-1)$	المعطى
$2n - 6 + 5 = 3n - 3$	خاصية التوزيع
$2n - 3n = -3 + 6 - 5$	تبسيط
$-n = -2$	خاصية الطرح والجمع
$n = 2$	خاصية الضرب

13 - طريقة البرهان الحر:

المعطيات: $AM = CN$, $MB = ND$

المطلوب: إثبات أن $AB = CD$

من خصائص المستطيل ومن خصائص جمع القطع المستقيمة

$$AB = AM + MB$$

$$DC = DN + NC$$

كذلك $AM = DN$, $MB = NC$ **بالتعويض في** AB

$$AB = DN + NC \Rightarrow AB = DC$$

حدد ما إذا كانت العبارة صحيحة دائما، أو صحيحة أحيانا، أو ليست صحيحة أبدا. برر إجابتك.

14 - الزاويتان اللتان تشكلان زاوية قائمة متتامتان.

عبارة صحيحة دائما فمثلا : $\angle 90 = \angle 60 + \angle 30$

$$\angle 90 = \angle 45 + \angle 45$$

15 - الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متطابقتان.

ليس صحيح دائما فمثلا $\angle 30$, $\angle 150$ متجاورتين ولكنهما غير متطابقتين.

16 - حدد الفرض والنتيجة للعبارة التالية، ثم اكتبها على صورة "إذا كان ... فإن...) ثم اكتب كلا من عكسها ومعكوسها والمعكوس الإيجابي لها:

"كثرة الاستغفار تقرب من الرحمن"

الفرض: **"أكثر الاستغفار".**
النتيجة: **"تقرب من الرحمن"**
العكس: **تقربك من الرحمن يجعلك تكثر الاستغفار.**
المعكوس: **قلة استغفارك تبعدك عن الرحمن.**
المعكوس الإيجابي: **ابتعادك عن الرحمن يقلل استغفارك.**

17 - اعتمادا على العبارات التالية:

p: بيروت عاصمة الأردن.
q: $8 + 12 = 20$.
r: عدد أيام الأسبوع 8.

أي من العبارات المركبة التالية صحيحة؟

A) p و q
B) q أو p
C) p أو r
D) r و q

اختبار معياري تراكمي

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

1 - الحل: (A) مستقيمان في مستوى واحد.

2 - الحل: (H) $\sim r \wedge \sim q$

3 - الحل: (C) العبارة تقبل على أنها صحيحة

4 - الحل: (G) إذا أمطرت السماء اليوم فإن المباراة ستقام يوم الجمعة

5 - الحل: (A) إذا لم يكن المضلع مثلثا فإن مجموع قياسات زواياه لا تساوي 180

6 - الحل:

نفرض أن خالد ومروان = x ، سعد = $(3+x)$ ، ياسر = $3(3+x)$

$$x+ (3+x) + 3(3+x) = 22$$
$$x+3 + x+9+3x = 22$$
$$5x + 12 = 22$$
$$5x = 22-12$$
$$x=2$$

7 - الحل: (H) خاصية الطرح.

8 - الحل: (B) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

9 - الحل: (J) 25 قدما × 40 قدما

10 - الحل: (D) $\angle GFM$ هي زاوية حادة

11 - الحل: (F) $m\angle 1 - m\angle 2 + m\angle 3 = 90$

12 - الحل:

معطى	$3x + 5 = 2x + 8$
بالطرح	$3x - 2x = 8 - 5$
تبسيط	$x = 3$
تعويض	$m\angle 1 = 3(3) + 5 = 14$

13 - الحل:

من نظرية فيثاغورس:

$(30)^2 = (18)^2 + (x)^2 \quad \rightarrow \quad (x)^2 = 900 - 324 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{576} = 24m$

محيط المثلث = $18 + 24 + 30 = 72\ m$

محيط المربع = (طول الضلع) × 4 ← $4x = 72$ ← $x = \frac{72}{4} = 19m$

مساحة المثلث = القاعدة × الارتفاع = × (24) × (18) = $216m$

مساحة المربع = ^{2}(طول الضلع) = $^2(19)$ = $361m$

مساحة المنطقة المربعة ستكون أكبر من المنطقة المثلثة.

الفصل الثاني

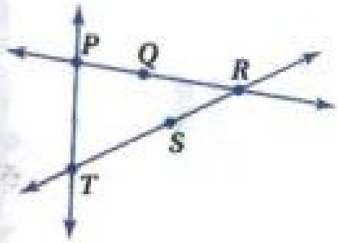
التوازي والتعامد

- المستقيمان المتوازيان والمستقيمات المستعرضة
- الزوايا والمستقيمات المتوازية
- ميل المستقيم
- معادلة المستقيم
- إثبات توازي المستقيمات
- الأعمدة والمسافة

التهيئة للفصل الثاني

حلول اختبار سريع

سم جميع المستقيمات التي تحتوي النقطة المعطاة:



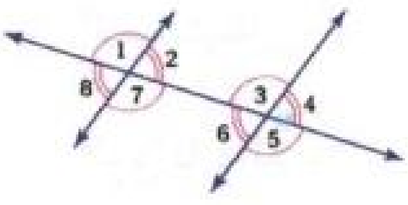
1 - النقطة Q هي نقطة من المستقيم $\overleftrightarrow{RP}$.

2 - النقطة R هي نقطة تقاطع المستقيمين $\overleftrightarrow{TS}$ ، $\overleftrightarrow{PQ}$.

3 - النقطة S هي نقطة من المستقيم $\overleftrightarrow{TR}$.

4 - النقطة T هي نقطة تقاطع المستقيمين $\overleftrightarrow{SR}$ ، $\overleftrightarrow{TP}$.

سم جميع الزوايا التي تطابق الزاوية المعطاة:



5 - $\angle 2$ تطابق $\angle 8$، $\angle 4$، $\angle 6$.

6 - $\angle 5$ تطابق $\angle 3$، $\angle 7$، $\angle 1$.

7 - $\angle 3$ تطابق $\angle 1$، $\angle 5$، $\angle 7$.

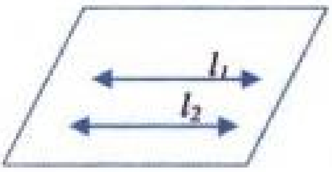
8 - $\angle 8$ تطابق $\angle 6$، $\angle 4$، $\angle 2$.

9 - الحل: ثمن بطاقة الدخول x.

$$2x + 15 = 95$$
$$2x = 95 - 15$$
$$2x = 80$$
$$x = 40$$

2-1 المستقيمان المتوازيان والمستقيمات المستعرضة

المستوى: هو سطح مكون من مجموعة من النقاط.



نقول عن مستقيمين أنهما متوازيين:

إذا وقعا في مستوى واحد ولم يتقاطعا $l_1 // l_2$

وكل مستقيمين متوازيين يعينان مستوى وحيد.

نقول عن مستقيمين أنهما متخالفين إذا لم يتقاطعا ولم يقعا في مستوى واحد.

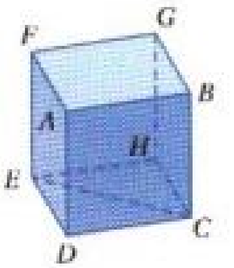
نقول عن مستويين أنهما متوازيان إذا كان تقاطعهما = $\varnothing$

$$x \cap y = \emptyset$$

مثال

- سم جميع المستويات التي توازي ADF

المستوى CBG



- سم جميع القطع المستقيمة التي تتقاطع مع $\overline{ED}$

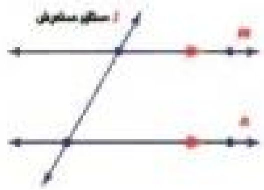
$\overline{EF}, \overline{DA}, \overline{EH}, \overline{EC}, \overline{DC}$

- سم جميع القطع المستقيمة المتخالفة مع $\overline{FA}$

$\overline{BC}, \overline{GH}, \overline{HE}, \overline{CE}, \overline{DC}$

- سم جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{EF}$

$\overline{AD}, \overline{GH}, \overline{CB}$



المستقيم المستعرض:

هو المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في مستوى وفي نقاط مختلفة.

مثال

في الشكل التالي عين جميع المستقيمات التي يكون كل مستقيم مما يلي مستعرضا لها:

a) المستقيم l : n, m, r, t

b) المستقيم m: n, r, s, l

c) المستقيم r: t, m, l, s

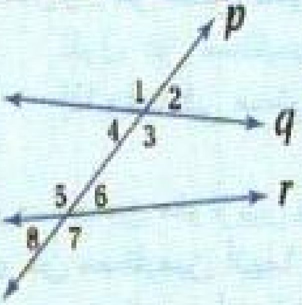
ملاحظة

المستقيم المستعرض يقطع الامتداد أيضا وليس فقط المستقيم المرسوم.

عزيزي الطالب/ حتى تتعرف على مسميات الزوايا لابد أن تلاحظ الرسم التالي.
في الشكل المجاور هناك عدد من الزوايا هي:

الاسم	الزوايا
زوايا خارجية	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
زوايا داخلية	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
زاويتان داخليتان متحالفتان	$\angle 5, \angle 3$ ، $\angle 4, \angle 6$
زاويتان داخليتان متبادلتان	$\angle 5, \angle 4$ ، $\angle 6, \angle 3$
زاويتان خارجتان متبادلتان	$\angle 8, \angle 1$ ، $\angle 7, \angle 2$
زاويتان متناظرتان	$\angle 7, \angle 3$ ، $\angle 5, \angle 1$ $\angle 8, \angle 4$ ، $\angle 6, \angle 2$

المستقيم المستعرض p يقطع المستقيمين r , q

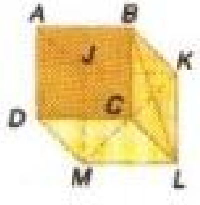


ملاحظة

نسمي الزاويتان الداخليتان المتخالفتان زاويتان داخليتان من الجهة نفسها.

تدريبات وحلول

لحل الأسئلة من 3-1 ارجع إلى الشكل المجاور:



1 - سم جميع المستويات التي تتقاطع مع المستوى ADM.

CDM , DML , AJK , BAJ

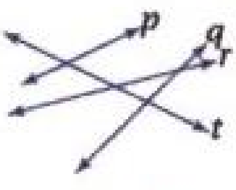
2 - سم جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{CD}$

$\overline{ML}, \overline{AB}, \overline{JK}$

3 - سم جميع القطع المستقيمة التي تتقاطع مع $\overline{KL}$

$KB, \overline{KJ}, \overline{KM}, LB, \overline{LC}, \overline{LM}$

عين أزواج المستقيمات التي يكون الخط المعطى مستعرضا لهما:



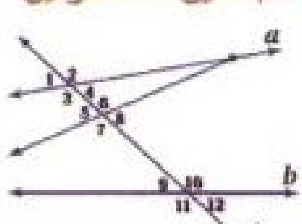
4 - P مستقيم مستعرض للمستقيمات r, t, q

5 - r مستقيم مستعرض للمستقيمات p, t, q

6 - q مستقيم مستعرض للمستقيمات p, r, t

7 - t مستقيم مستعرض للمستقيمات q, r, p

صنف كل زوج من الزوايا على: متبادلتين، خارجيتين، متبادلتين، متناظرتين، داخليتين متحالفتين:



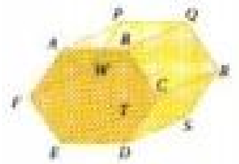
8 - $\angle 10, \angle 7$ داخليتان متبادلتان.

9 - $\angle 5, \angle 1$ متناظرتان.

10 - $\angle 6, \angle 4$ داخليتان متحالفتان.

11 - $\angle 1, \angle 8$ خارجيتان متبادلتان.

لحل الأسئلة من 12-15 ارجع إلى الشكل المجاور:



12- سم جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{TW}$

$\overline{QR}, \overline{BC}, \overline{FE}$

13- سم جميع المستويات التي تتقاطع مع المستوى EDS.

QRS , AFE , DCB

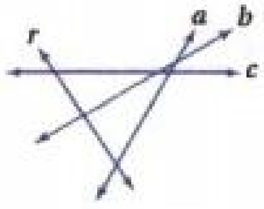
14- سم جميع القطع المستقيمة المتخالفة مع $\overline{AB}$

$ET, \overline{ED}, \overline{DS}, RS, \overline{CD}, \overline{CR}$

15- سم جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{DS}$

$\overline{ET}, \overline{FW}, \overline{AB}, \overline{BQ}, \overline{CR}$

عين أزواج المستقيمات التي يكون الخط المعطى قاطعا لهما:



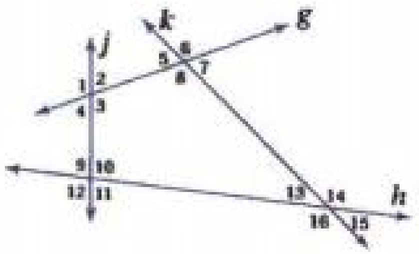
16- a مستقيم قاطع للمستقيمات r, c, b

17- b مستقيم قاطع للمستقيمات r, c, a

18- c مستقيم قاطع للمستقيمات r, b, a

19- r مستقيم قاطع للمستقيمات c, b, a

صنف كل زوج من الزوايا على: داخليتين متبادلتين، خارجيتين متبادلتين، متناظرتين، داخليتين متخالفتين:



20- $\angle 2, \angle 10$ متناظرتان.

21- $\angle 1, \angle 11$ خارجتان متبادلتان.

22- $\angle 5, \angle 3$ داخليتان متبادلتان.

23- $\angle 6, \angle 14$ متناظرتان.

24- $\angle 5, \angle 15$ خارجتان متبادلتان.

25- $\angle 11, \angle 13$ داخليتان متبادلتان.

لحل الأسئلة 27-30، ارجع إلى الصورة المجاورة:

27- اذكر مستقيمين متوازيين في الصورة.

خط حافة السطح مع خط الشباك الأفقي.

28- أعط مثالا على مستويين متوازيين.

مستوى الشباك مع مستوى البناية.

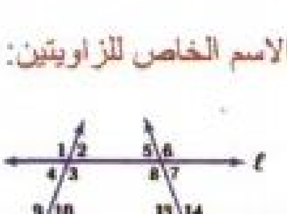
29- عين مستقيمين متخالفين.

خط الشباك العمودي مع خط حافة السطح.

30- عين مستعرضا يقطع مستقيمين.

المستقيم الذي ينصف حافتي الشباك الأفقيتين.

حدد المستقيم الذي يكون كل زوج من الزوايا فيما يلي، ثم حدد الاسم الخاص للزاويتين:



31- $\angle 3, \angle 10$ المستقيم p "داخليتان متبادلتان".

32- $\angle 2, \angle 12$ المستقيم p "خارجتان متبادلتان".

33- $\angle 8, \angle 14$ المستقيم q "داخليتان متبادلتان".

34- $\angle 9, \angle 16$ المستقيم m .

لحل الأسئلة 37-35، ارجع إلى الصورة المجاورة:

35- سم جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{BF}$

$\overline{EI}, \overline{DH}, \overline{CG}$

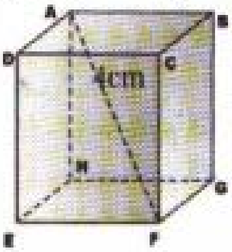
36- سم جميع القطع المستقيمة المتخالفة مع $\overline{AC}$

$\overline{HI}, \overline{GH}, \overline{FG}$

37- هل توجد مستويات في الصورة توازي المستوى ADE؟ وضح.

لا لا يوجد مستويات توازيه بل جميعها تتقاطع معه في النقطة A لأنه يشكل وجه لهرم سداسي وأوجه الهرم مستويات تتقاطع في نقطة A.

38- الحل: في التاريخ: العصور المتوازية في الرياضة: التصفيات المتوازية.



39- الحل: متوازي المستطيلات وفيه :

$\overline{CB}$ ويوازي كلا من $\overline{EH}, \overline{FG}, \overline{AD}$

$\overline{BG}$ ويوازي كلا من $\overline{DE}, \overline{AH}, \overline{CF}$

$\overline{FE}$ ويوازي كلا من $\overline{AB}, \overline{DC}, \overline{HG}$

40- الحل: منال إجابتها صحيحة بينما ليلى إجابتها خاطئة لأن:

$\angle 4, \angle 9$ ، $\angle 4, \angle 6$ داخليتان متبادلتان

بينما $\angle 4, \angle 10$ ، $\angle 4, \angle 5$ داخليتان متحالفتان.

41- الحل: يمكن رسم مستقيم واحد فقط يمر بالنقطة p ولا يقطع l (يكون موازٍ لـ l)

44- الحل: (C) $\angle 4, \angle 6$

45- الحل: (F) $(0, 4)$ و $(-5.6, 0)$

46- اكتب برهانا ذا عمودين:

العبارات	المبررات
$m\angle 1 = m\angle 4$	معطى
$m\angle ABC = m\angle DFE$	معطى
$m\angle ABC = m\angle DFE = 90^\circ$	من الرسم
$\angle 1 + \angle 2 = \angle ABC$	من تعريف تتام الزوايا
$\angle 3 + \angle 4 = \angle DFE$	من تعريف تتام الزوايا
$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$	بالتعويض
$\angle 2 = \angle 3$	المطلوب

47- الحل: لا يمكن الوصول إلى نتيجة محددة من العبارتين لأن فروضهما مختلفة.

اذكر قياسي كل زاويتين متجاورتين على مستقيم في كل مما يلي:

48- الزاوية المجهولة = $180 - 50 = 130^\circ$

49- الزاوية المجهولة = $180 - 90 = 90^\circ$

50- $x + 2x = 180$ $\Leftarrow$ $3x = 180$ $\Leftarrow$ $x = 60^\circ$

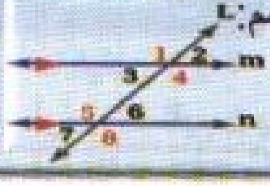
2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية

نقول عن مستقيمان أنهما متوازيان $A \,//\, B$ إذا كان تقاطعهما يساوي $\varnothing$

أو $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A // B$

مسلمة

إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتين، في الرسم:



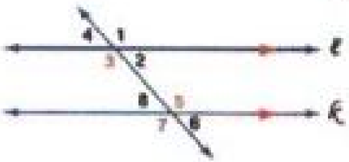
$\angle 6 \cong \angle 2 \;,\; \angle 5 \cong \angle 1$

$\angle 7 \cong \angle 3 \;,\; \angle 8 \cong \angle 4$

راجع معلوماتك: الزاويتان المتقابلتان بالرأس غير متجاورتين ومتطابقتين.

مثال

في الشكل المجاور إذا كان $m\angle 8 = 47$ فأوجد $m\angle 4$.



$\angle 4 \cong \angle 8$ مسلمة الزاويتين المتناظرتين

$\angle 4 = \angle 8$ تعريف الزاويتين المتطابقتين

$47^\circ = \angle 4$ بالتعويض

لاحظ جيدا الجدول التالي لأنه يحوي نظريات أساسية في إيجاد قياسات الزوايا وهي مهمة في حل المسائل.

نظرية المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا

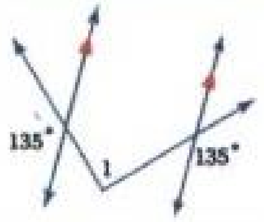
النظريات	الأمثلة	النموذج
2.1 **الزاويتان الداخليتان المتبادلتان،** إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين داخليتين متبادلتين متطابقتان.	$\angle 4 \cong \angle 5$ $\angle 3 \cong \angle 6$	
2.2 **الزاويتان الداخليتان المتحالفتان،** إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين داخليتين متحالفتين متكاملتان.	$\angle 4$ و $\angle 6$ متكاملتان. $\angle 3$ و $\angle 5$ متكاملتان.	
2.3 **الزاويتان الخارجيتان المتبادلتان،** إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين خارجيتين متبادلتين متطابقتان.	$\angle 1 \cong \angle 8$ $\angle 2 \cong \angle 7$	

نظرية

- إذا كان المستقيم المستعرض عموديا على أحد المستقيمين المتوازيين فإنه يكون عمودي على الآخر أي:

- إذا كان $m \perp l \Leftarrow n \perp l$

مثال



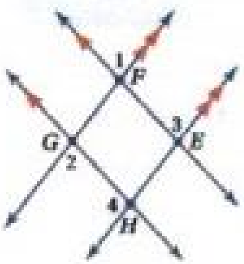
ما قياس $\angle 1$ ؟

نرسم مستقيم k يمر بالزاوية (1) أو النقطة H ويوازي $\overline{nD}$, $\overline{mc}$

$\angle AFC \cong \angle MFH$	زاويتين متقابلتين بالرأس
$\angle AFC = \angle MFH$	تعريف الزوايا المتطابقة
$135 = \angle MFH$	بالتعويض
$\angle KHF + \angle MFH = 180^{\circ}$	زاويتين متخالفتين داخليتين
$\angle KHF = 45$	بالتعويض
$\angle NGH \cong \angle BDG$	زاويتين متقابلتين بالرأس
$\angle NGH = \angle BDG$	تعريف الزوايا المتطابقة
$135 = \angle NGH$	بالتعويض
$\angle KHG + \angle NGH = 180^{\circ}$	زاويتين داخليتين متخالفتين
$\angle KHG = 45$	بالتعويض
$\angle 1 = \angle KHG + \angle KHF$	مسلمة جمع الزوايا
$\angle 1 = 45 + 45 = 90^{\circ}$	بالتعويض

الجواب الصحيح هو البديل (H)

مثال



لاحظ الشكل المجاور:

إذا كان $m\angle 2 = 4x + 7$ ، $m\angle 3 = 5x - 13$ ،

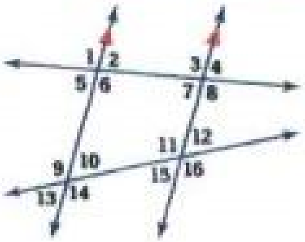
فأوجد $m\angle 3$.

$\angle 1 \cong \angle 2$	خارجيتان متبادلتان
$\angle 3 \cong \angle 1$	متناظرتان
$\angle 3 \cong \angle 2$	خاصية التعدي لتطابق الزوايا
$\angle 3 = \angle 2$	تعريف الزوايا المتطابقة
$5x-13 = 4x+7$	بالتعويض
$5x-4x = 7 + 13$	تبسيط
$x=20$	تبسيط

$$m\angle 3 = 5(20) - 13 = 100 - 13 = 87$$

تدريبات وحلول

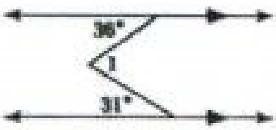
في الشكل المجاور، $m\angle 3 = 110$ و $m\angle 12 = 55$ أوجد قياس كل زاوية مما يلي:



1- $\angle 1 \cong \angle 3$ متناظرتان
$\angle 1 = \angle 3$ تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 1 = 110^\circ$ بالتعويض

2- $\angle 1 \cong \angle 6$ متقابلتان بالراس
$\angle 1 = \angle 6$ تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 6 = 110^\circ$ بالتعويض

3- $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$ زاويتان متكاملتان
$110 + m\angle 2 = 180^\circ$ بالتعويض
$m\angle 2 = 70^\circ$ بالطرح



4- ما قياس $\angle 1$؟

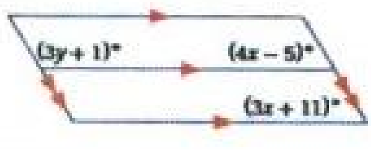
$\angle 1 = 31 + 36 = 67^\circ$

أوجد قيمة x و y في كل من الشكلين الآتيين:

5- $(8y+2) + (25y-20) = 180$ زاويتين داخليتين متخالفتين متكاملتين.

$8y + 25y = 180 + 20 - 2$
$33y = 198 \Rightarrow y = 6$
$10x = (25y-20)$ زاويتان داخليتان متبادلتان متطابقتان
$10x = 25(6) - 20 \Rightarrow x = 13$

6- $(3x+11) = (4x-5)$ زاويتين متناظرتين متطابقتين



$4x - 3x = 11 + 5 \Rightarrow x = 16$
$(4x-5) + (3y+1) = 180$
$4(16) - 5 + 3y + 1 = 180$
$64 - 4 + 3y = 180$
$3y = 20 \Rightarrow y = 6.6$

في الشكل المجاور، إذا كان $m\angle 3 = 43$ أوجد قياس كل زاوية مما يلي:

7- $m\angle 3 + m\angle 2 = 180^\circ$ زاويتان متخالفتين متكاملتان
$43 + m\angle 2 = 180^\circ$ بالتعويض
$m\angle 2 = 137^\circ$ بالطرح

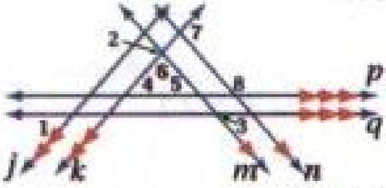
8- $\angle 2 \cong \angle 10$ متناظرتان
$\angle 2 = \angle 10$ تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 10 = 137^\circ$ بالتعويض

9- $\angle 3 \cong \angle 13$ خارجتان متبادلتان
$\angle 3 = \angle 13$ تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 13 = 43^\circ$ بالتعويض

10- $\angle 10 \cong \angle 16$ متقابلتان بالراس
$\angle 10 = \angle 16$ تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 16 = 137^\circ$ بالتعويض

في الشكل المجاور، $m\angle 1 = 50$ و $m\angle 3 = 60$ أوجد قياس كل زاوية مما يلي:

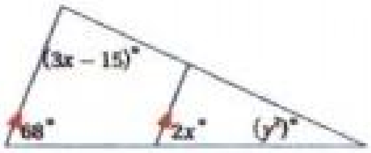
-11 $\angle 5 \cong \angle 3$ خارجتان متبادلتان
$\angle 5 = \angle 3$ تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 5 = 60$ بالطرح



-12 $\angle 4 \cong \angle 1$ بالتعدي لتطابق الزوايا
$\angle 1 = \angle 4$ تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 4 = 50$ بالتعويض

-13 $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180$ مجموع زوايا المثلث
$\angle 6 + 50 + 60 = 180$ بالتعويض
$m\angle 6 = 70$
$\angle 2 + \angle 6 = 180^{\circ}$ زاويتين متكاملتين
$\angle 2 = 180 - 70$ بالتعويض
$m\angle 2 = 110^{\circ}$

-14 $\angle 7 \cong \angle 2$ خارجتان متبادلتان متطابقتان
$\angle 7 = \angle 2$ تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 7 = 110$ بالطرح



-15 أوجد قيمة x و y في كل من الشكل المقابل:
$2x = 68 \Rightarrow x = 34$ زاويتين متناظرتين
$(3x-15) = 3(34) - 15$ زاوية قاعدة المثلث
$102 - 15 = 87$
$y^2 + 87 + 68 = 180$ مجموع زوايا مثلث $= 180$
$y^2 = 25 \Rightarrow y = 5$

أوجد $m\angle 1$ في كل من الشكلين التاليين:

-16 $\angle 3 + \angle 2 = \angle 1$
$\angle 3 = 37^{\circ}$ ، $\angle 2 = 110^{\circ}$
$\angle 1 = 110 + 37 = 147^{\circ}$

-17 لاحظ جيدا الشكل المقابل:
نرسم امتدادات للمستقيمات المعطاة لتكون زوايا مساعدة.

$\angle 2 = 157$
$\angle 3 + \angle 2 = 180^{\circ}$ متكاملتان
$\angle 3 = 180 - 157 = 23^{\circ}$
$\angle 4 = 90^{\circ}$ متكاملتان
$\angle 4 + \angle 5 + \angle 3 = 180$
$m\angle 5 = 67$
$\angle 6 + \angle 5 = 180^{\circ}$ متكاملتان
$m\angle 6 = 113^{\circ}$
$\angle 1 \cong \angle 6$ خارجتان متبادلتان

-18 أكمل البرهان:
المعطيات: $l // m$ ، المطلوب: إثبات أن $\angle 1 \cong \angle 8$ ، $\angle 2 \cong \angle 7$
$l // m$ معطى
$\angle 1 \cong \angle 5$ ، $\angle 2 \cong \angle 6$ زاويتان متناظرتان متطابقتان
$\angle 5 \cong \angle 8$ ، $\angle 6 \cong \angle 7$ زاويتان متقابلتان بالرأس متطابقتان
$\angle 1 \cong \angle 8$ ، $\angle 2 \cong \angle 7$ خاصية التعدي لتطابق الزوايا

-19 الحل: من الرسم نلاحظ أن الزاوية 40 والزاوية x زاويتين داخليتين متحالفتين
$\therefore$ مجموعهما $= 180^{\circ}$: $40 + x = 180 \Rightarrow x = 140$

20- الحل: الأنبوب الأول m الأنبوب الثاني n الربط بينهما l

من الرسم يصنع الأنبوب l زاويتين متخالفتين داخليتين مع الأنبوبين n , m

$\therefore$ مجموعهما $= 180^\circ$: $\quad 56 + x = 180 \Rightarrow x = 115$

21- اكتب برهانا ذا عمودين للنظرية 2.2:

العبارات	المبررات
$n \parallel m$	معطى
$\angle 4 + \angle 3 = 180$	متجاورتان على مستقيم متكاملتان
$\angle 3 \cong \angle 6$	زاويتان داخليتان متبادلتان
$\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$	متجاورتان على مستقيم متكاملتان
$\angle 4 \cong \angle 5$	زاويتان داخليتان متبادلتان
$\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$	بالتعويض والتماثل
$\angle 5 + \angle 3 = 180^\circ$	

22- $\angle 1$ تطابق $\angle 2$ أحيانا مثال: إذا كان المستقيم المستعرض عمودي على المستقيمين المتوازيين فإن $\angle 2 = \angle 1 = 90^\circ$

23- يلزمه معرفة زاوية واحدة على الأقل لمعرفة باقي الزوايا.

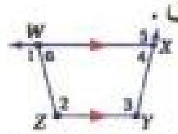
25- مجموع زاويتين خارجيتين وفي وجهة واحدة من المستقيم المستعرض 180 (متكاملتان)

$180 = \angle 2 + \angle 1$ زاويتان متجاورتان على مستقيم متكاملتان.

$180 = \angle 4 + \angle 3$ زاويتان متجاورتان على مستقيم متكاملتان.

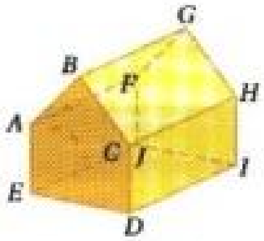
$180 = \angle 3 + \angle 2$ زاويتان داخليتين متخالفتين متكاملتان.

$180 = \angle 4 + \angle 1$ خاصية التعدي لجمع الزوايا.



26- $\angle 2$ و $\angle 6$ متكاملتان لأنهما زاويتان داخليتان متحالفتان فهما متكاملتان، لأنهما تقعان على مستقيمان هما x , y ويقطعان مستقيم مستعرض هو w أي يحقق شروط النظرية.

بينما $\angle 4$ و $\angle 6$ لا يمكن أن نقرر أنهما متكاملتان لأنهما تقعان على المستقيمين $w . x$ وهما غير متوازيين أي لا تحقق شروط النظرية.



28- الحل: $90 , 70 , 20$ (A)

لحل الأسئلة من 29-31 ارجع إلى الشكل المجاور:

29- سم جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{AB}$: $\overline{FG}$

30- سم جميع القطع المستقيمة المتخالفة مع $\overline{CH}$: $\overline{AB}, \overline{AE}$.

31- سم جميع المستويات التي تتوازى مع المستوى AEF . : HCD

32- $\angle 1 = 180 - 124$ زاويتين متكاملتين : $\angle 1 = 56^\circ$

33- $\angle 2 = 53^\circ$ متقابلتان بالرأس

حدد الفرض والنتيجة في كل من العبارتين الآتيتين:

34- الفرض ← إذا أمطرت السماء. النتيجة ← قص عشب الحديقة غدا.

35- الفرض ← الأكل باتزان. النتيجة ← الحفاظ على الصحة.

بسط كلا مما يلي:

36- $\frac{14-11}{23-15} = \frac{3}{8}$ $\quad$ 37- $\frac{-3-6}{2-8} = \frac{3}{2}$ $\quad$ 38- $\frac{2}{9} \cdot \left(\frac{-18}{5}\right) = \frac{-4}{5}$

2-3 ميل المستقيم

في المستوى الإحداثي ميل المستقيم هو النسبة بين التغير في اتجاه المحور الصادي إلى التغير في اتجاه المحور السيني أو بمعنى آخر فهو النسبة بين ارتفاع المستقيم العمودي إلى المسافة الأفقية.

ملاحظة

الارتفاع العمودي = الفرق بين الإحداثيين الصاديين لنقطتين على مستقيم.

المسافة الأفقية = الفرق بين الإحداثيين السينيين لنقطتين على مستقيم.

مفهوم: الميل m لمستقيم يحتوي (x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) يعطى بالقانون:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ حيث } x_1 \neq x_2$$

انتبه هناك عدة نقاط لا بد من الانتباه لها:

1) $x_1=x_2$ ⇐ ميل المستقيم غير معرف لأن المقام يساوي صفر.
2) إذا كان ميل المستقيم موجب ⇐ المستقيم صاعد.
3) إذا كان ميل المستقيم سالب ⇐ المستقيم نازل.
4) ميل المستقيم الأفقي يساوي 0.
5) ميل المستقيم العمودي غير معرف.
6) يستعمل ميل المستقيم لوصف معدل التغير.

مثال

أوجد ميل المستقيم الذي يحتوي النقطتين $(3 , -5)$ ، $(-6 , -2)$

نفرض $(3 , -5)$ هي (x_1 , y_1) ، نفرض $(-6 , -2)$ هي (x_2 , y_2)

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-2-(-5)}{-6-3} = \frac{3}{-9} = \frac{-1}{3}$$

مثال

كانت مبيعات إحدى الشركات 20 مليون قرص مدمج عام 2003 و 200مليون قرص عام 2004، إذا حافظت الشركة على نفس المعدل في الزيادة فكم يكون عدد مبيعاتها من الأقراص المدمجة عام 2008.

$(x_1 , y_1) = (2003 , 20)$, $(x_2 , y_2) = (2004 , 200)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{200-20}{2004-2003} = \frac{180}{1} = 180$$

إذا حافظت الشركة على نفس المعدل:

$(x_1 , y_1) = (2004 , 200)$, $(x_2 , y_2) = (2008 , y_2)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow 180 = \frac{y2-200}{2008-2004}$$

$$y_2 = 720$$

∴ عدد المبيعات في الأقراص المدمجة 720 مليون قرص في عام 2008

مسلمات هامة

يكون للمستقيمين غير الرأسيين الميل نفسه إذا وإذا فقط إذا كانا متوازيين.

يكون المستقيمين غير الرأسيين متعامدين إذا وإذا فقط إذا كان حاصل ضرب ميلهما يساوي (-١).

مثال

حدد ما إذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

1) $A(14, 13)\ \ B(-11,0)\ \ C(-3,7)\ \ D(-4, -5)$

ميل $\overleftrightarrow{AB} = \frac{0-13}{-11-14} = \frac{-13}{-25} = \frac{13}{25}$

ميل $\overleftrightarrow{CD} = \frac{-5-7}{-4+3} = \frac{-12}{-1} = 12$

∴ حاصل ضربهما $= 12 \times \left(\frac{13}{25}\right) \neq -1$ ⇐ غير متعامدين

∴ $\frac{13}{25} \neq 12$ ⇐ غير متوازيين

2) $A(3, 6)\ \ B(-9,2)\ \ C(-12,-6)\ \ D(15, 3)$

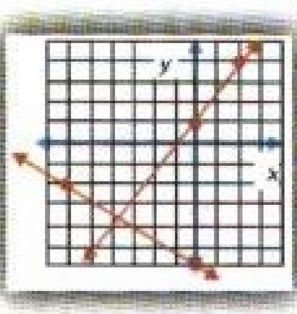
ميل $\overleftrightarrow{AB} = \frac{2-6}{-9-3} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}$

ميل $\overleftrightarrow{CD} = \frac{3+6}{15+12} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

∴ $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ بما أن الميلين متساويين $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

مثال

ارسم المستقيم المار بالنقطة $p(0,1)$ والعمودي على $\overleftrightarrow{QR}$



حيث $R(0,-6)\ ,\ Q(-6,-2)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-6+2}{0+6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

ميل $\overleftrightarrow{QR} = \frac{-2}{3}$

∴ المستقيمين متعامدين حاصل ضرب ميلهما = -1

∴ ميل المستقيم الآخر $\frac{3}{2}$ لأن $-1 = \frac{-2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)$

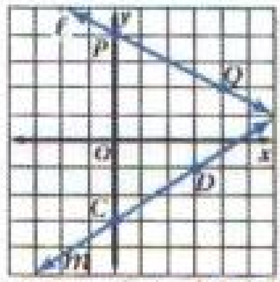
∴ لرسم المستقيم نبدأ من النقطة المعطاة $(0,1)$

ثم نتحرك إلى الأعلى ثلاث وحدات ثم إلى اليمين وحدتين.

∴ نُسم النقطة F ثم نرسم $\overleftrightarrow{PF}$

تدريبات وحلول

أوجد ميل كلا من المستقيمين في الشكل المجاور:



1- المستقيم l مار بالنقطتين $(4,2)$, $(0,4)$:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-2}{0-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

2- المستقيم m مار بالنقطتين $(-3,-1)$, $(0\ ,\ -3)$:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-3+1}{0+3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

للأسئلة 3-5، استعمل المعلومات التالي: درجة انحدار طريق جبلية لقيادة الدراجات 8%.

3- ما ميل الطريق؟ **ميل الطريق هو درجة الانحدار = 8.**

4- الحل: **$(0,0)$ هي النقطة الأولى والنقطة الثانية $(x,-120)$.**

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-120-0}{x-0} = \frac{-120}{x} = 8$$

$$8x = -120 \quad \Rightarrow \quad x = -15$$

5- ما المسافة التي قطعها راكب الدراجة على الطريق؟ قرب الجواب إلى أقرب متر.

المسافة التي قطعها الراكب هي المسافة بين النقطتين $(0,0)$, $(-15,-120)$

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(0+15)^2+(0+120)^2} = 120m$$

6- حدد ما إذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{GH}$ و $\overleftrightarrow{RS}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

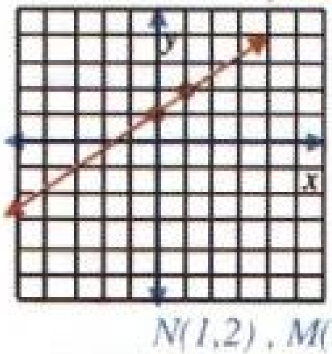
$$G(15,-9)\ ,\ H(9,-9)\ ,\ R(-4,-1)\ ,\ S(3,-1)$$

ميل $\overleftrightarrow{RS} = \frac{-1+1}{3+4} = \frac{0}{7} = 0$, **ميل** $\overleftrightarrow{GH} = \frac{-9+9}{9-15} = \frac{0}{-6} = 0$

∴ الميلين متساويين ⇐ المستقيمين متوازيين.

في السؤالين التاليين، ارسم المستقيم الذي يحقق الشروط المعطاة.

7- الميل =2، ويمر بالنقطة $p(1,2)$



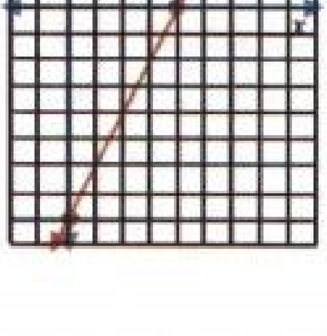
$$\frac{y_2-2}{x_2-1} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2x_2-1 = y_2-2$$

$$\Rightarrow \quad 2x_1 = y_2-1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{y_2-1}{2}$$

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad y_2-1=0 \quad \Rightarrow \quad y_2=1$$

∴ المستقيم يمر بالنقطة $(0,1)$

8- يمر بالنقطة $A(6,4)$ ، وعمودي على $\overleftrightarrow{MN}$ حيث $M(5,0)$, $N(1,2)$



$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-0}{1-5} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

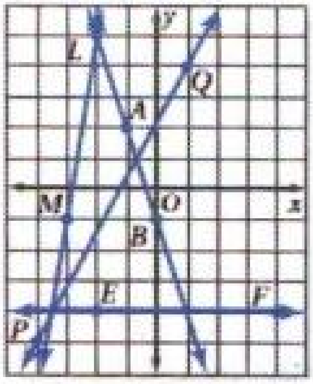
ميل المستقيم العمودي عليه يساوي 2

معادلة المستقيم: $y-y_1 = m(x-x_1)$

$$y-y_1 = 2(x-6) \quad \Rightarrow \quad y = 2x-8$$

عند $x=0 \Leftarrow y=-8$

$(0,-8)$ واقعة على المستقيم



أوجد ميل كل مستقيم فيما يلي:

9- ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $A(-1,2)\ B(0,-1)$

$\Leftarrow \quad m = \frac{-1-2}{0+1} = \frac{-3}{1} = -3$

10- ميل $\overleftrightarrow{PQ}$: $p(-4,-5)\ \ Q(1,4)$

$\Leftarrow \quad m = \frac{4+5}{1+4} = \frac{9}{5}$

11- مستقيم يوازي $\overleftrightarrow{LM}$ $\Leftarrow$ ميله يساوي ميل $\overleftrightarrow{LM}$

$L(-2,5)\ M(-3,-1) \quad \Leftarrow \quad m = \frac{-1-5}{-3+2} = \frac{-6}{-1} = 6$

12- مستقيم عمودي على $\overleftrightarrow{EF}$ $\Leftarrow$ ميله ×ميل $\overleftrightarrow{EF}$ =-1

$E(-2,--4)\ ,\ F(4,4) \quad \Leftarrow \quad m = \frac{4+4}{4+2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = $-\frac{3}{4}$

أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين في كل مما يلي:

13- $A(0,2)\ ,\ B(7,3\ )$ $\Leftarrow \quad m = \frac{3-2}{7-0} = \frac{1}{7}$

14- $W(3,2)\ ,\ X(4,-3)$ $\Leftarrow \quad m = \frac{-3-2}{4-3} = \frac{-5}{1} = -5$

15- عدد الطلاب = x ، السنة التي أجري فيها المسح = y

معدل التغير بين $2005, 2002$: $\frac{20900-194900}{2005-2002} = \frac{26000}{3} = 8666.6$

$$\frac{y_2-220900}{2012-2005} = 8667$$

$$y_2 - 220900 = 60669 \Rightarrow y_2 = 281569 \approx 280000$$

للأسئلة 19-16، حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{UV}$ ، $\overleftrightarrow{PQ}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك:

16- ميل $\overleftrightarrow{UV}$ = $\frac{-2-6}{5-3} = \frac{-8}{2} = -4$ ، ميل $\overleftrightarrow{PQ}$ = $\frac{1+2}{9+3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

∵ $\frac{1}{4}.(-4) = -1$ ∴ المستقيمان متعامدان

17- ميل $\overleftrightarrow{UV}$ = $\frac{6+3}{8+4} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ ، ميل $\overleftrightarrow{PQ}$ = $\frac{3-0}{0+4} = \frac{3}{4}$

∵ الميلين متساويين $\Leftarrow$ المستقيمين متوازيين.

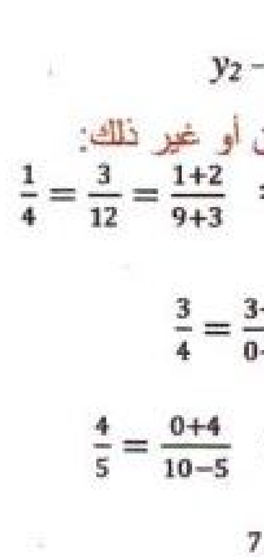
18- ميل $\overleftrightarrow{UV}$ = $\frac{-13+8}{5-9} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$ ، ميل $\overleftrightarrow{PQ}$ = $\frac{0+4}{10-5} = \frac{4}{5}$

∴ المستقيمان ليسا متوازيين ولا متعامدان.

19- ميل $\overleftrightarrow{UV}$ = $\frac{8-1}{2+6} = \frac{7}{8}$ ، ميل $\overleftrightarrow{PQ}$ = $\frac{8-1}{9-1} = \frac{7}{8}$

∵ الميلان متساويان $\Leftarrow$ المستقيمان متوازيان.

في كل من الأسئلة 22-20، ارسم المستقيم الذي يحقق الشروط المعطاة



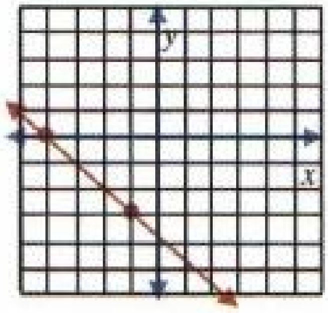
20- الميل = 4-، ويمر بالنقطة $p(-2,1)$

$\frac{y_2-1}{x_2+2} = -4 \quad \Rightarrow \quad -4x_2-8 = y_2 - 1 \Rightarrow y_2 = -4x_2-7$

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -7$

∴ المستقيم يمر بالنقطة $(0,-7)$

21 - يمر بالنقطة $A(-1,-3)$ ، ويوازي $\overleftrightarrow{CD}$ حيث $D(5,1)$ ، $C(-1,7)$



$$m = \frac{7-1}{-1-5} = \frac{6}{-6} = -1$$

ميله = -1.

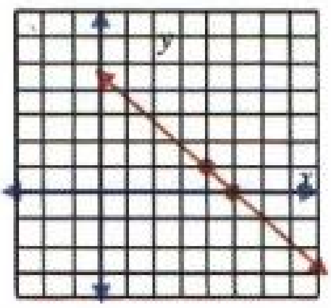
$$\frac{y_2+3}{x_2+1} = -1 \quad \Rightarrow \quad -x_2-1 = y_2+3$$

$$\Rightarrow y = -x-4$$

عند $y=0$ ⇐ $-x-4=0$ ⇐ $x=-4$

∴ المستقيم يمر بالنقطة $(-4, 0)$

22 - يمر بالنقطة $M(4,1)$ ، وعمودي على $\overleftrightarrow{GH}$ حيث $G(0,3)$ ، $H(-3,0)$



$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3-0}{0+3} = \frac{3}{3} = 1$$

ميل المستقيم المطلوب = -1.

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

$$y-1 = -x+4 \quad \Rightarrow \quad -x = y-5$$

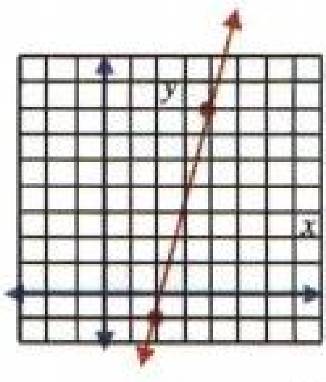
عند $x=-5$ ⇐ $y=0$

∴ المستقيم يمر بالنقطة $(5,0)$

23 - $m = \frac{7-1}{-1-5} = \frac{6}{-6}$

$$-3(6-x) = 7(2+1)$$

$$-18+3x = 21 \quad \Rightarrow \quad 3x = 21+18 \quad \Rightarrow \quad x = 13$$



24 - نوجد ميل المستقيم الأول:

وليكن $\overleftrightarrow{A}$ ⇐ $m(\overleftrightarrow{A}) = \frac{8+1}{4-2} = \frac{9}{2}$

نفرض أن المستقيم الثاني $\overleftrightarrow{B}$

بما أن $\overleftrightarrow{A}$ عمودي على $\overleftrightarrow{B}$ إذن ميل $\overleftrightarrow{A}$ × ميل $\overleftrightarrow{B}$ = -1

إذن ميل $\overleftrightarrow{B}$ = $-\frac{2}{9}$ ⇐ $\frac{2-5}{x+4} = -\frac{2}{9}$

$$2(x+4) = -27 \Rightarrow 2x = -35 \Rightarrow x = -17.5$$

لحل الأسئلة 27-25، ارجع إلى الرسم المجاور:

25 - من الرسم في 1970 ← العمر تقريبا 28

من الرسم في 2000 ← العمر تقريبا 35.3

معدل التغير: $m = \frac{35.3-28}{2000-1970} = \frac{7.3}{30} = 0.24$

26 - $0.24 = \frac{y-35.3}{2010-2000}$

$$0.24(10) = y - 35.3 \quad \Rightarrow \quad y = 37.7$$

27 - $\frac{1}{3}$ المعدل السنوي أي $\frac{1}{3}(0.24)$ ← معدل التغير = 0.08

بعد سنة 20000 ← $0.08 = \frac{40.6-35.3}{x-2000}$

$$0.08(x) - 160 = 5.3 \quad \Rightarrow \quad x = 2066$$

للأسئلة 28-30، استعمل المعلومات التالية:
بلغ عدد المعتمرين من إحدى الدول الإسلامية 541960 معتمرا في عام 1420 هـ، وفي عام 1424 بلغ عدد المعتمرين 518271 معتمرا.

28 - معدل التغير $= \frac{518271-541960}{1432-1420} = \frac{-23689}{4} = -5922.25$

29 - $-5922.25 = \frac{y-518271}{1432-1424} \Rightarrow -47378 = y - 518271$

في عام 1432 عدد المعتمرين هو: $y = 470893$

30 - نعم يستمر في التناقص طالما معدل التغير بالسالب ولكن إذا تغير معدل التغير وأصبح بالموجب فإنه يزداد.

31 - ميل $\overleftrightarrow{AB} = \frac{4+13}{15+6} = \frac{17}{21}$ إذن إجابة خالد صحيحة

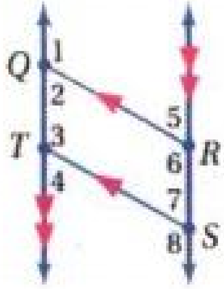
32 - أعط مثالا من واقع الحياة لمستقيم ميله يساوي 0، ولمستقيم آخر ميله غير معروف.
مستقيم ميله يساوي صفر خطوط السكك الحديدية الأفقية.
مستقيم ميله غير معروف إشارة المرور العمودية.

33 - $m = \frac{y-3+t}{x-5-2t}$ $\quad -3t + t = \frac{y-3+t}{x-5-2t} + 5 + 2t$

$-8-t = \frac{y-3+t}{x-5-2t} \Rightarrow y-3+t = (-8-t)(x-5-2t)$

34 - (B) $y=-3x-5$

في الشكل المجاور، $m\angle 1 = 131$ و $\overleftrightarrow{QT} // \overleftrightarrow{RS}$ و $\overline{QR} // \overline{TS}$ أوجد قياس كل زاوية مما يلي:



36 - $\angle 1 \cong \angle 6$ داخليتان متبادلتان
$\angle 1 = \angle 6$ تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 6 = 131$ بالتعويض

37 - $\angle 7 + \angle 6 = 180^\circ$ زاويتان داخليتان متحالفتان
$\angle 7 = 180 - 131$ بالتعويض
$m\angle 7 = 49^\circ$

38 - $\angle 4 \cong \angle 7$ داخليتان متبادلتان
$\angle 4 = \angle 7$ تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 4 = 49^\circ$ بالتعويض

39 - $\angle 2 \cong \angle 4$ متناظرتان
$\angle 2 = \angle 4$ تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 2 = 49^\circ$ بالتعويض

40 - $\angle 7 \cong \angle 5$ متناظرتان
$\angle 7 = \angle 5$ تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 5 = 49^\circ$ بالتعويض

41 - $\angle 6 \cong \angle 8$ متناظرتان
$\angle 6 = \angle 8$ تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 8 = 131^\circ$ بالتعويض

أوجد محيط المثلث ABC إلى أقرب جزء من مائة، باستعمال إحداثيات رؤوسه المعطاة:

42 - $A(-3,2)$, $B(2,-9)$ $C(0,-10)$

المسافة بين AB :

$$d = \sqrt{(2+3)^2 + (-9-2)^2} = \sqrt{25+122} \Rightarrow d = 12.08$$

المسافة بين BC :

$$d = \sqrt{(0-2)^2 + (-10+9)^2} = \sqrt{4+1} \Rightarrow d = 2.2$$

المسافة بين AC :

$$d=\sqrt{(0+3)^2+(-10-2)^2}=\sqrt{9+144} \Rightarrow d=12.36$$

$\therefore$ محيط المثلث $\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AB}=ABC$

$$12.36+12.08+2.2=26.64$$

43- $A(10,-6)$, $B(-2,-8)$ $C(-5,-7)$

المسافة بين AB :

$$d=\sqrt{(-2-6)^2+(-8+6)^2}=\sqrt{144+4} \Rightarrow d=12.16$$

المسافة بين BC :

$$d=\sqrt{(-5+2)^2+(-7+8)^2}=\sqrt{9+1} \Rightarrow d=3.16$$

المسافة بين AC :

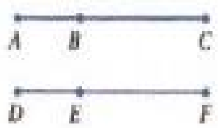
$$d=\sqrt{(-5-10)^2+(-7+6)^2}=\sqrt{225+1} \Rightarrow d=15.03$$

$\therefore$ محيط المثلث $\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AB}=ABC$

$$15.03+3.16+12.16=30.35$$

44- اكتب برهانا ذا عمودين:

العبارات	المبررات
$AC=DF$, $AB=DE$	معطى
$AC=AB+BC$	جمع القطع المستقيمة
$DF=DE+EF$	جمع القطع المستقيمة
$AB+BC=DE+EF$	بالتعويض
$BC+DE=DE+EF$	بالمساواة
$BC=EF$	خصائص التعدي للمساواة



كون جدول الصواب لكل عبارة مركبة مما يلي:

45- p و q

p	q	p و q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

46- p أو $\sim q$

p	q	$\sim q$	p أو $\sim q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

47- $\sim p \wedge q$

p	$\sim p$	q	$\sim p \wedge q$
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F

48- $\sim p \wedge \sim q$

p	$\sim p$	q	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	F	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	T	F	T	T

اعمل تخمينا يعتمد على المعلومات المعطاة في كل من الأسئلة التالية، وارسم شكلا يوضح تخمينك:

49- النقاط J , I , H تنصف أضلاع المثلث المرسوم.

50- النقطة Z تنصف القطعة المستقيمة $\overline{XY}$

اكتب y بدلالة x فيما يلي:

51- $2x+y=7$

$y=7-2x$

52- $2x+4y=5$

$y=\frac{5-2x}{4}$

53- $5x-2y+4=0$

$y=\frac{5x+4}{2}$

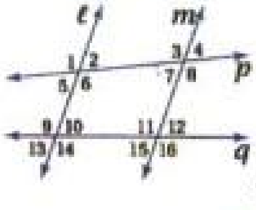
اختبار نصف الفصل الأول

في الشكل التالي، المستقيم t قاطع مستعرض للمستقيمين q ، p:

1 - ما أفضل وصف للزاويتين 3 ، 5؟

(B) داخليتان متبادلتان.

سم المستقيم المستعرض الذي يكون كل زوج من أزواج الزوايا التالية، ثم أعط الاسم الخاص لكل زوج من الزوايا.



2 - المستقيم المستعرض p ، $\angle 1 , \angle 8$ ، داخليتان متبادلتان.

3 - المستقيم المستعرض l ، $\angle 6 , \angle 10$ ، داخليتان متحالفتان.

4 - المستقيم المستعرض q ، $\angle 11 , \angle 14$ ، داخليتان متبادلتان.

ارجع إلى الشكل أعلاه وأوجد قياس كل زاوية من الزاويتين التاليتين:

5 -
$\angle 1 \cong \angle 6$ متقابلتان بالرأس

$\angle 1 = \angle 6$ تعريف تطابق الزوايا

$m\angle 6 = 105$ بالتعويض

6 -
$\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$ زاويتان داخليتان متحالفتان

$\angle 5 = 180 - 105$ بالتعويض

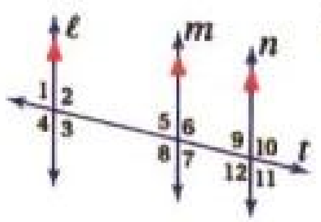
$m\angle 7 = 75^\circ$

$\angle 5 \cong \angle 4$ خارجتان متبادلتان

$\angle 5 = \angle 4$ تطابق الزوايا

$m\angle 4 = 75^\circ$ تعويض

في الشكل المقابل إذا كان $m\angle 9 = 75^\circ$ فأوجد قياس كل زاوية مما يلي:



7 -
$\angle 5 \cong \angle 9$ متناظرتان

$\angle 5 = \angle 9$ تعريف تطابق الزوايا

$m\angle 5 = 75^\circ$ بالتعويض

$\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$ متكاملتان

$m\angle 6 = 105^\circ$ تعويض

$\angle 3 \cong \angle 5$ داخليتان متبادلتان

$\angle 3 = \angle 5$ تطابق الزوايا

$m\angle 3 = 75^\circ$ تعويض

$\angle 3 + \angle 8 = 180^\circ$ داخليتان متحالفتان متكاملتان

$m\angle 8 = 105^\circ$ تعويض

$\angle 9 \cong \angle 11$ متقابلتان بالرأس

$\angle 9 = \angle 11$ تطابق الزوايا

$m\angle 11 = 75^\circ$ تعويض

$\angle 11 + \angle 12 = 180^\circ$ متجاورتان متكاملتان

$m\angle 12 = 105^\circ$ تعويض

13- أوجد ميل المستقيم العمودي على المستقيم المار بالنقطتين $(-3,-2)$, $(-5,1)$:

$m = \frac{1+2}{-5+3} = -\frac{3}{2}$ ⇐ لأن $-\frac{3}{2}$ (G)

حدد ما إذا كان متوازيين، أو متعامدين، أو غير ذلك:

14- $A(3,-1)$, $B(6,1)$, $C(-2,-2)$, $D(2,4)$

ميل $\overleftrightarrow{AB} = \frac{1+1}{6-3} = \frac{2}{3}$

ميل $\overleftrightarrow{CD} = \frac{4+2}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

∴ غير متعامدين وغير متوازيين.

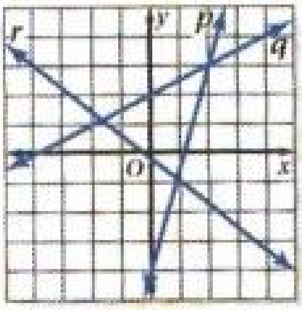
15- $A(-3,-11)$, $B(3,13)$, $C(0,-6)$, $D(8,-8)$

ميل $\overleftrightarrow{AB} = \frac{13+11}{3+3} = \frac{24}{6} = 4$

ميل $\overleftrightarrow{CD} = \frac{-8+6}{8-0} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$

∴ المستقيمان متعامدان لأن : $4.(-\frac{1}{4}) = -1$.

أوجد ميل كل مستقيم من المستقيمات التالية:



16- من الرسم المستقيم p يمر بالنقطتين $(0,-4)$, $(2,3)$

$m = \frac{-4-3}{0-2} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} = 3.5$

17- مستقيم يوازي q ⇐ ميله يساوي ميل q

من الرسم q يمر بالنقطتين $(-2,1), (0,2)$

$m = \frac{2-1}{0+2} = \frac{1}{2}$

18- مستقيم عمودي على r ⇐ ميله × ميل $r = -1$.

لإيجاد ميل r: من الرسم المستقيم r يمر بالنقطتين: $(1,-1)$, $(-4,3)$

$m = \frac{-1-3}{1+4} = \frac{-4}{5}$

ميل المستقيم المطلوب : $\frac{4}{5}$

19- ما معدل التغير في متوسط عدد الحضور للمباريات بين عامي 1422, 1424؟

معدل التغير $= \frac{38122-31078}{1424-1422} = \frac{7044}{2} = 3522$

السنة	متوسط عدد الحضور
1422	31078
1424	38122

20- إذا استمر معدل االتغير هذا فماذا تتوقع أن يكون متوسط عدد الحضور لمباريات عام 1432؟

$3522 = \frac{y-38122}{8} \Rightarrow 28176 = y - 38122$

متوسط عدد الحضور: $y=66298$

2-4 معادلة المستقيم

تذكر عزيزي الطالب/ تعلمت سابقا طرق كتابة معادلة مستقيم وعرفت أنه يمكننا كتابة معادلة مستقيم إذا علمنا:
1) الميل والمقطع الصادي.
2) الميل ونقطة واقعة على المستقيم.
3) نقطتان على المستقيم.

فمثلا إذا علمت أن ميل مستقيم 0.3 ويقطع محور الصادات عند الإحداثي 5 فيمكن أن نستعمل هاتين القيمتين لكتابة معادلة بصيغة الميل والمقطع وهي $y = mx + b$ إذن:

1- $y = mx + b$
هي معادلة خط مستقيم بمعلومية ميله m ومقطعه الصادي b.

مثال

اكتب معادلة المستقيم الذي ميله 3 والمقطع الصادي -8 بصيغة الميل والمقطع.

$$y = mx + b$$

$y = 3x - 8$ لأن $b=-8\ ,\ m=3$

2- $y - y_1 = m(x - x_1)$
هي معادلة خط مستقيم بدلالة الميل m ونقطة $(x_1\ ,\ x_2)$ حيث $(x_1\ ,\ x_2)$ نقطة واقعة على المستقيم.

مثال

اكتب معادلة المستقيم الذي ميله 4 ويمر بالنقطة $(-3,-6)$ بصيغة الميل والنقطة؟

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 6 = 4x+3 \quad \Leftarrow \quad (-3\ ,\ -6) = (x_1\ ,y_1) \quad ,\ m=4$$

انتبه

في الحالتين السابقتين يجب أن يكون الميل موجود ولكن في بعض الأحيان لا يعطى في السؤال بل يعطى نقطتين يمر بهما المستقيم ويتم حساب ميل المستقيم منهما كما تعلمت في الدرس السابق $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ثم نستعمل صيغة الميل والمقطع أو الميل ونقطة واقعة على مستقيم لكتابة معادلة المستقيم.

مثال

اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع الذي يمر بالنقطتين $(8,10),(-2,4)$

نوجد ميل المستقيم: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-10}{-2-8} = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}$

نستعمل الميل m مع أي من النقطتين :

الطريقة الأولى مع النقطة $(-2,4)$: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y-4=\frac{3}{5}(x+2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{5}x + \frac{6}{5}+4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{5}x + \frac{26}{5}$$

الطريقة الثانية مع النقطة $(8\ ,\ 10)$: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y-10=\frac{3}{5}(x-8) \Rightarrow y=\frac{3}{5}x-\frac{24}{5}+10 \Rightarrow y=\frac{3}{5}x+\frac{26}{5}$$

لاحظ أن النتيجة واحدة باستعمال أي من النقطتين.

مثال

اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع الذي يمر بالنقطة $(-3,6)$ ويوازي المستقيم الذي معادلته $y=-\frac{3}{4}x+3$

ميل المستقيم $y=-\frac{3}{4}x+3$ هو $-\frac{3}{4}$ لأنه على صورة المعادلة $y=mx+b$

المستقيم المطلوب موازي له $\Leftarrow$ ميلهما متساويان

ميل المستقيم المطلوب $m=-\frac{3}{4}$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4} \Leftarrow y=-\frac{3}{4}x-\frac{9}{4}+6 \Leftarrow y-6=-\frac{3}{4}(x+3)$$

مثال

يدفع معتز مبلغ 99.50 ريالا شهريا ثمن مكالمته في جهازه الجوال مهما كان عددها ويدفع 0.05 ريال عن كل رسالة نصية يرسلها.

a) إذا كان معتز يرسل t من الرسائل النصية اكتب معادلة تمثل النفقات الكلية الشهرية C.

$$C = mt + b \quad ,\ m=0.05 \quad ,\ b=999.50$$

$$C = 0.05\,t + 999.50$$

b) إذا كان معدل الرسائل التي يرسلها معتز أو يستقبلها 150 رسالة كل شهر احسب التكلفة الشهرية؟

$$C = 0.05\,(150) + 999.50 \Rightarrow C = 1007$$

c) افترض أن معتز كان يرسل بمعدل (500) رسالة نصية شهريا وكان يدفع ثمن مكالمته 850 ريالا قارن بين هذا العرض والعرض السابق وأيهما أفضل؟

$$C = 0.05\,(500) + 850 \Rightarrow C = 875$$

إذن هذا العرض أفضل من السابق.

تدريبات وحلول

اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع للمستقيم الذي أعطي ميله ومقطعه الصادي:

1- $m=3,\ b=-4 \Leftarrow y = 3x - 4$

2- $m=-\frac{3}{5}$ المقطع الصادي عند النقطة $(0, 2)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y+2=-\frac{3}{5}(x-0) \Rightarrow y=-\frac{3}{5}x-2$$

اكتب معادلة بصيغة النقطة والميل للمستقيم المعطى ميله ونقطة عليه في كل مما يلي:

3- $m=\frac{3}{2}$ النقطة $(4, -1)$ واقعة على المستقيم.

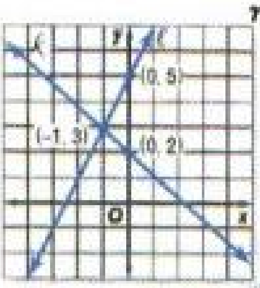
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y+1=\frac{3}{2}(x-4) \Rightarrow y=\frac{3}{2}x-7$$

4- $m=3$ النقطة $(7, 5)$ واقعة على المستقيم.

$y - 5 = 3(x-7) \Rightarrow y = 3x - 21 + 5 \Rightarrow y = 3x - 16$

اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع لكل مستقيم في الشكل المجاور:

5- المستقيم k مار بالنقطتين $(0, 2)$, $(-1, 3)$



نوجد ميل المستقيم: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1$

نستخدم إحدى النقطتين مثلا: $(0, 2)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -1(x-0) \Rightarrow y = -x + 2$

6- المستقيم l مار بالنقطتين $(0, 5)$, $(-1, 3)$

نوجد ميل المستقيم: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{0+1} = \frac{-2}{1} = -2$

نستخدم إحدى النقطتين مثلا: $(0, 5)$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x + 5$

7- المستقيم الذي يوازي l ويمر بالنقطة $(4, 4)$

المستقيم الذي يوازي l $\Leftarrow$ ميله يساوي ميل l ، $m=2$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = 2(x-4) \Rightarrow y = 2x - 4$

8- المستقيم العمودي على l والمار بالنقطة $(2, -1)$

المستقيم عمودي على l إذن ميله $= -\frac{1}{2}$

$y + 1 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 - 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$

9- اكتب معادلة تمثل التكلفة الشهرية لكل عرض.

في العرض الأول $C = 0.8t + 25$

حيث C التكلفة الشهرية

0.8 معدل الصفحات التي ينسخها شهريا

t عدد الصفحات التي ينسخها

25 الاشتراك الشهري

في العرض الثاني: $C = 0.8t + 35$ حيث $t > 40$

10- إذا كان وليد ينسخ 15 صفحة كل شهر، فأي العرضين أفضل له؟ اشرح إجابتك.

يدفع في العرض الأول $C = 0.8t + 25$

$C = 0.8(15) + 25 \Rightarrow C = 37$

يدفع في العرض الثاني: $C = 0.8t + 35$

$C = 0.8(15) + 35 \Rightarrow C = 47$

العرض الأول أفضل لأن تكلفته أقل.

اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع في كل مما يلي:

11- $m=2$ مار بالنقطة $(0, 8)$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 8 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x + 8$

12- $m = -\frac{1}{12}$, $b=1$ $\Leftarrow$ $y = -\frac{1}{12}x + 1$

13- $m = \frac{2}{9}$, $b = \frac{1}{3}$ $\Leftarrow$ $y = \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$

14- $m=-1$, $b=-3$ $\Leftarrow$ $y = -x - 3$

اكتب معادلة كل من المستقيمات التالية بصيغة النقطة والميل:

15- $m=2$ مار بالنقطة $(3, 1)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = 2(x-3) \Rightarrow y = 2x - 5$$

16- $m=-\frac{4}{5}$ مار بالنقطة $(12, -5)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 5 = -\frac{4}{5}(x + 12) \Rightarrow y = -\frac{4}{5}x - \frac{73}{5}$$

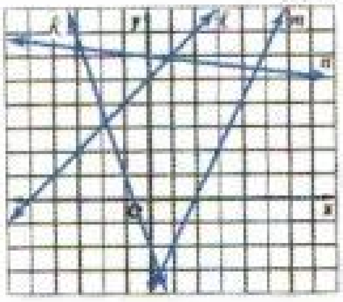
17- $m=0.48$ مار بالنقطة $(5, 17.12)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 17.12 = 0.48(x - 5) \Rightarrow y = 0.48x + 14.72$$

استعمل الشكل المجاور واكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع لكل من المستقيمات التالية:

18- المستقيم k مار بالنقطتين $(-3, 7)$, $(0, -2)$

نوجد ميل المستقيم: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-2-7}{0+3} = \frac{-9}{3} = -3$



نستخدم إحدى النقطتين مثلا: $(0, -2)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 2 = -3(x-0) \Rightarrow y = -3x - 2$$

19- المستقيم l مار بالنقطتين $(0, 5)$, $(-5, 0)$

نوجد ميل المستقيم: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{5-0}{0+5} = \frac{5}{5} = 1$

نستخدم إحدى النقطتين مثلا: $(0, 5)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 1(x-0) \Rightarrow y = x + 5$$

20- المستقيم m مار بالنقطتين $(2, 0)$, $(3, 2)$

نوجد ميل المستقيم: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-2}{2-3} = \frac{-2}{-1} = 2$

نستخدم إحدى النقطتين مثلا: $(2, 0)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x - 4$$

21- المستقيم l مار بالنقطتين $(0, 6)$, $(7, 5)$

نوجد ميل المستقيم: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{6-5}{0-7} = \frac{-1}{7}$

نستخدم إحدى النقطتين مثلا: $(0, 6)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 6 = -\frac{1}{7}(x-0) \Rightarrow y = -\frac{1}{7}x + 6$$

22- عمودي على المستقيم l ويمر بالنقطة $(-1, 6)$ **الميل يساوي (1-)**

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 6 = -1(x + 1) \Rightarrow y = -x + 5$$

23- يوازي المستقيم k، ويمر بالنقطة $(7, 0)$ **الميل يساوي (3-)**

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -3(x - 7) \Rightarrow y = -3x + 21$$

24- يوازي المستقيم n، ويمر بالنقطة $(0, 0)$ **الميل يساوي** $(-\frac{1}{7})$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{7}(x-0) \Rightarrow y = -\frac{1}{7}x$$

25- عمودي على المستقيم m، ويمر بالنقطة $(-3, -3)$ **الميل يساوي** $(-\frac{1}{2})$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 3 = -\frac{1}{2}(x + 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$

26- $y = 750x + 10800 \Rightarrow y = 10800 + 750x$

28- معلوم نقطتين $(70-, 80)$, $(80-, 90)$

نوجد ميل المستقيم: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-70+80}{80-90} = \frac{10}{-10} = -1$

نستخدم إحدى النقطتين مثلا: $(70-, 80)$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 70 = -1\,(x - 80) \Rightarrow y = -x + 10$

29- $AD \perp AC \Leftarrow$ ميله يساوي (1) AC مار بالنقطة: $(80-, 90)$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 80 = 1\,(x - 90) \Rightarrow y = x - 170$

30- المقطع السيني 5 $\Leftarrow$ $y = 0$, $x = 5$ $\Leftarrow$ $(5, 0)$

المقطع الصادي 3 $\Leftarrow$ $y = 3$, $x = 0$ $\Leftarrow$ $(0, 3)$

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3-0}{0-5} = \frac{-3}{5}$ نختار النقطة $(5, 0)$ $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = \frac{-3}{5}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{-3}{5}x + 3$

31- يمر بالنقطتين $(1-, 4)$, $(2-, 1-)$

نوجد ميل المستقيم: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-1+1}{4+2} = \frac{0}{6} = 0$

نستخدم إحدى النقطتين مثلا: $(1-, 4)$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 1 = 0\,(x - 4) \Rightarrow y = -1$

32- $y + 5 = m(x+1)$

مستقيم عمودي على المستقيم السابق $m = -\frac{1}{m}$ ، $y + 5 = -\frac{1}{m}(x + 1)$

33- يرتبط $y = m(x - x_1) + y_1$ بالرسم $y = mx$

حيث نعمل انسحاب لرسم $y = mx$ إلى أعلى بارتفاع أو بمقدار (y_1)

35- $3S + 14 = 81 \Rightarrow 3S = 81 - 24 \Rightarrow 3S = 57 \Rightarrow S = 19$ (D)

36- (F) $y = -\frac{3}{4}x - 6$

37- معدل تغير الإنفاق: $m = \frac{498-152}{1434-1430} = \frac{346}{4} = 86.5$

في الشكل المقابل فأوجد قياس كل زاوية مما يلي:

38- $\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = 180^\circ$ مجموع زوايا مثلث

$\angle 6 = 180 - 47 - 58 = 75^\circ$

$\angle 5 \cong \angle 2$ داخليتان متبادلتان

$\angle 5 = \angle 2 \quad m\angle 5 = 47^\circ$ تطابق الزوايا

$\angle 3 + \angle 5 + \angle 4 = 180^\circ$ مجموع زوايا مثلث

$\angle 4 = 180 - 47 - 26$

$m\angle 4 = 107^\circ$

$\angle 7 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$

$\angle 7 = 180 - 47 - 75 = 58^\circ$ متجاورتان متكاملتان

$\angle 4 + \angle 8 = 180^\circ$

$m\angle 8 = 73^\circ$ متجاورتان متكاملتان

$\angle 7 + \angle 9 + \angle 8 = 180^\circ$

$\angle 9 = 180 - 73 - 58 = 49^\circ$ مجموع زوايا مثلث

44- $\angle 2, \angle 5$ ، $\angle 3, \angle 8$

45- $\angle 1, \angle 5$ ، $\angle 6, \angle 2$ ، $\angle 8, \angle 4$ ، $\angle 3, \angle 7$

46- $\angle 7, \angle 1$ ، $\angle 6, \angle 4$

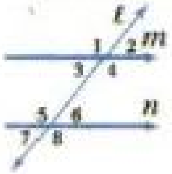
2-5 إثبات توازي المستقيمات

نقول عن مستقيمين أنهما متوازيان $m // n$ إذا كان تقاطعهما يساوي $\emptyset$

$$m \cap n = \emptyset$$

مسلمة

إذا قطع قاطع مستعرض مستقيمين في مستوى وكانت الزوايا المتناظرة متطابقة ⇐ المستقيمين متوازيان.



مثال: إذا كانت: $\angle 2 \cong \angle 6$ و $\angle 4 \cong \angle 8$

$\angle 1 \cong \angle 5$ و $\angle 3 \cong \angle 7$ فإن: $m // n$

مسلمة التوازي

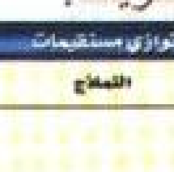
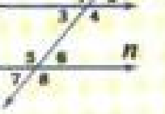
إذا علم مستقيم ونقطة لا تقع عليه بأن هناك مستقيم وحيد يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم.

لاحظ

يكون المستقيمان المتوازيان والمستقيم المستعرض أزواجا من الزوايا المتطابقة والعكس صحيح أي أن أزواج الزوايا المتطابقة تلك يمكن أن تحدد ما إذا كان المستقيمان متوازيان أم لا.

انتبه في الدرس (2-2) قمنا بشرح نظريات أساسية لإيجاد قياسات الزوايا في حل المسائل وهنا سندرس عكس هذه النظريات وهي أيضا نظريات صحيحة يمكن إثباتها بسهولة وفيما يلي جدول يوضح هذه النظريات.

نظريات — برهنة توازي مستقيمات

النظرية	الأمثلة	النماذج
2.5 إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين في مستوى وكانت زاويتان خارجيتان متبادلتان متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان.	إذا كانت $\angle 8 \cong \angle 1$ أو $\angle 2 \cong \angle 7$، فإن $m \parallel n$.	
2.6 إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين في مستوى وكانت زاويتان داخليتان متحالفتان متكاملتين فإن المستقيمين متوازيان.	إذا كانت $\angle 5$ ، $\angle 3$ زاويتين متكاملتين أو $\angle 6$ ، $\angle 4$ زاويتين متكاملتين فإن $m \parallel n$.	
2.7 إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين في مستوى وكانت زاويتان داخليتان متبادلتان متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان.	إذا كانت $\angle 6 \cong \angle 3$ أو $\angle 5 \cong \angle 4$، فإن $m \parallel n$.	
2.8 في المستوى، إذا كان مستقيمان عموديين على مستقيم فإنهما متوازيان.	إذا كان $\ell \perp m$ و $\ell \perp n$، فإن $m \parallel n$.	

مثال

إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 8$ فحدد المستقيمات المتوازية موضحا المسلمة أو النظرية التي استخدمتها.

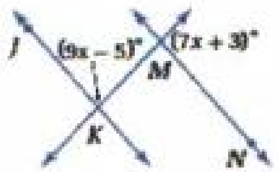
$\angle 2 \cong \angle 8$ زاويتان داخليتان متبادلتان متطابقتان.

المستقيم المستعرض يكون مستقيمين متوازيين. ⇐ $a \parallel b$

∴ $\angle 6 \cong \angle 8$ متقابلتان بالرأس ∴ $\angle 6 = \angle 14$ متناظرتان

∵ المستقيم المستعرض يكون مستقيمين متوازيين ∴ $m \parallel l$

مثال



أوجد x حتى يكون $\overline{JK} \parallel \overline{MN}$، أوجد $m\angle JKM$.

من الرسم المقابل نلاحظ أن:

$\angle r \cong 7x + 3$ لأنهما متقابلتين بالرأس

$\angle r = 7x + 3$ تطابق الزوايا

أيضا $\angle r + (9x - 5) = 180$ لأنهما زاويتان متحالفتان داخليتان

بالتعويض عن $\angle r$ بـ $(7x + 3)$

$(7x + 3) + (9x - 5) = 180$

لا بد أن تتحقق المعادلة السابقة حتى يكون $\overline{JK} \parallel \overline{MN}$

$7x + 3 + 9x - 5 = 180 \Leftarrow 16x = 180 + 5 - 3 \Leftarrow x = 11.38$

$\angle JKM = 9x - 5 = 9(11.38) - 5 = 97.3^\circ$

لاحظ

يمكن استعمال العلاقة بين أزواج الزوايا الناتجة عن قاطع مستقيمات لإثبات أن مستقيمين متوازيين.

أيضا من الدرس السابق تعلمنا أن ميل مستقيمين متوازيين هو نفسه لذلك يمكن استعمال الميل لإثبات أن مستقيمين متوازيين.

مثال

اكتب برهانا ذا عمودين للنظرية (2.5)

العبارات	المبررات
$\angle 1 \cong \angle 8$	معطى
$\angle 2 \cong \angle 7$	معطى
$\angle 1 = \angle 8$	تعريف تطابق الزوايا
$\angle 2 = \angle 7$	تعريف تطابق الزوايا
$\angle 7 + \angle 8 = 180^\circ$	زوايا متجاورة على مستقيم متكاملة
$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$	زوايا متجاورة على مستقيم متكاملة
$\angle 7 + \angle 8 = \angle 1 + \angle 2$	بالتعويض
$\angle 2 + \angle 1$ تشكل مستقيم موازي لمستقيم الذي تشكله الزوايا $\angle 7 + \angle 8$	تعريف الزوايا المتجاورة

مثال

المستقيم l يمر بالنقطتين $(-5,3)$ ، $(0,4)$ والمستقيم m يمر بالنقطتين $(2, -\frac{2}{3})$ ، $(12,1)$ هل $l // m$؟

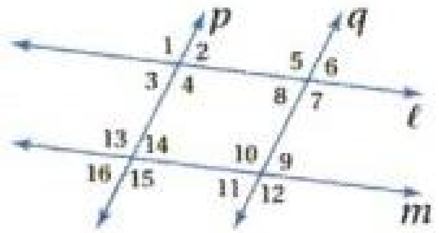
ميل المستقيم l: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3-4}{-5-0} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$

ميل المستقيم m: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1+\frac{2}{3}}{12-2} = \frac{\frac{5}{3}}{10} = \frac{1}{6}$

الميلين غير متساويين $\Leftarrow$ $l \nparallel m$

تدريبات وحلول

حسب المعلومات المعطاة حدد المستقيمات المتوازية إن وجدت، واذكر المسلمة أو النظرية التي تؤكد إجابتك:



1- $\angle 3 \cong \angle 16$ متناظرتان

$\therefore \angle 16 = \angle 3$ تطابق الزوايا

$\angle 16$ ، $\angle 3$ يقطعهما مستقيم مستعرض

يُكون مستقيمين متوازيين هما $m // l$

2- $\angle 13 \cong \angle 4$ داخليتان متبادلتان

$\therefore \angle 4 = \angle 13$ تطابق الزوايا

$\angle 4$ ، $\angle 13$ يقطعهما مستقيم مستعرض يُكون مستقيمين متوازيين هما $m // l$

3- $\angle 14 + \angle 10 = 180$ زاويتان داخليتان متحالفتان متطابقتان

$\angle 10$ ، $\angle 14$ يقطعهما مستقيم يُكون مستقيمين متوازيين هما $p // q$

4- $\angle 1 \cong \angle 7$ زاويتان خارجيتان متبادلتان

$\therefore \angle 1 = \angle 7$ تطابق الزوايا

$\angle 1$ ، $\angle 7$ يقطعهما مستقيم يُكون مستقيمين متوازيين هما $p // q$

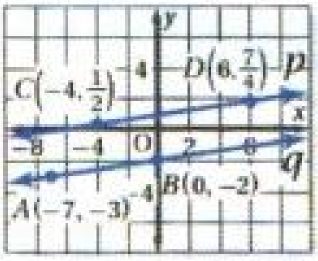
5- أوجد قيمة x حتى يكون $m // l$.

حتى يكون $m // l$ $\Leftarrow$ الزاوية $(5x+90)$ تطابق الزاوية $(14x+9)$ وفق تعريف تطابق الزوايا.

$$5x + 90 = 14x + 9$$

$$14x - 5x = 90 - 9 \quad \Rightarrow \quad x = 9$$

6- الحل: المستقيمات متوازية لأن هناك زوايا متطابقة في الشكل نلاحظها من خلال القياس بالمنقلة.



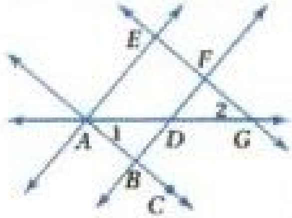
7- حدد إذا ما كان $p // q$

ميل المستقيم p: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{7}{4} - \frac{1}{2}}{6+4} = \frac{\frac{5}{4}}{10} = \frac{1}{8}$

ميل المستقيم q: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2+3}{0+7} = \frac{1}{7}$

الميلين غير متساوين $\Leftarrow$ $p \nparallel q$

حسب المعلومات المعطاة حدد المستقيمات المتوازية إن وجدت، واذكر المسلمة أو النظرية التي تؤكد إجابتك:



8- $\angle AEF \cong \angle BFG$ متناظرتان

$\therefore \angle AEF = \angle BFG$ تطابق الزوايا

يكونان مستقيمان متوازيان هما $\overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{AE}$

9- $\angle EFB \cong \angle CBF$ زاويتان داخليتان متطابقتان متبادلتان

$\therefore \angle EFB = \angle CBF$ تطابق الزوايا

يكونان مستقيمان متوازيان هما $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{EG}$

10- $m\angle GFD + m\angle CBD = 180^\circ$ زاويتان داخليتان متحالفتان

متكاملتان $\Leftarrow$ يكونان مستقيمان متوازيان هما $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{EG}$

أوجد قيمة x حتى يكون $m // l$.

11- إذا كان $m // l$ $\Leftarrow$ $140 = (9x-4)$ لأنهما خارجيتان متبادلتان

$9x = 140 + 4 \quad \Rightarrow \quad x = 16$

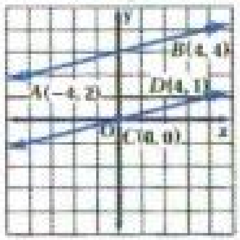
12- حتى يكون $m // l$ $\Leftarrow$ $90 = (7x - 1)$ لأنهما خارجيتان متبادلتان

$7x = 90 + 1 \quad \Rightarrow \quad x = 13$

13- حتى يكون $m // l$ $\Leftarrow$ $(4 - 5x) = (7x+100)$ لأنهما زاويتان متناظرتان

$7x + 5x = 100 - 4 \quad \Rightarrow \quad x = -43$

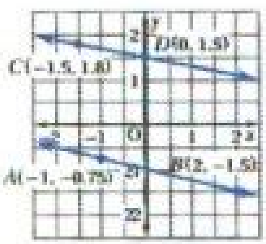
حدد ما إذا كان كل زوج من المستقيمات متوازيين أو غير متوازيين، وضح السبب:



14- ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{4+4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{4-0} = \frac{1}{4}$

$\because$ الميلين متساويين $\Leftarrow$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



15- ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1.5+0.75}{2+1} = 0.2$

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1.5-1.8}{0-1.5} = -0.2$

$\because$ الميلين متساويين $\Leftarrow$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

16 - أكمل برهان النظرية (2.8):

العبارات	المبررات
$L \perp t\ ,\ m \perp t$	معطى
$\angle 1, \angle 2$ قائمتان	تعريف التعامد
$\angle 1 \cong \angle 2$	تعريف الزوايا القائمة
$l \parallel m$	تعريف تطابق الزوايا المتناظرة

17 - اكتب برهانا ذا عمودين للنظرية (2.6)

العبارات	المبررات
$\angle 3, \angle 5$ متكاملتين	تعريف الزوايا الداخلية المتخالفة
$\angle 6, \angle 4$	تعريف الزوايا الداخلية المتخالفة
$\angle 3 + \angle 5 = 180^{\circ}$	تعريف التكامل
$\angle 4 + \angle 6 = 180^{\circ}$	تعريف التكامل
$\angle 3 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 6$	تعويض
$\angle 3 + \angle 4 = 180^{\circ}$	زوايا متجاورة على مستقيم متكاملة
$\angle 6 + \angle 5 = 180$	زوايا متجاورة على مستقيم متكاملة
$n \parallel m$	لأن الزوايا تصنع مستقيمين متوازيين

18 - اكتب برهانا حرا للنظرية (2.7)

إذا كانت الزاويتين $\angle 3 \cong \angle 6$ متطابقتان لأنهما زاويتان داخليتان متبادلتان فإنه من تعريف الزوايا المتطابقة $\angle 3 \cong \angle 6$ كذلك $\angle 5 \cong \angle 4$ لأنهما زاويتين داخليتان متبادلتين ومن تعريف تطابق الزوايا $\angle 5 \cong \angle 4 \Leftarrow m \parallel n$.

اكتب برهانا ذا عمودين لكل مما يلي:

19 -

العبارات	المبررات
$\angle 1 \cong \angle 2$ و $\angle 1 \cong \angle 3$	معطى
$\angle 2 \cong \angle 3$	خصائص التعدي لتطابق الزوايا
$\angle 2 = \angle 3$	تعريف تطابق الزوايا
$\overleftrightarrow{ST} \parallel \overleftrightarrow{UV}$	لأن $\angle 2, \angle 3$ زوايا داخلية متبادلة

20 -

العبارات	المبررات
$\overleftrightarrow{JM} \parallel \overleftrightarrow{KN}$	معطى
$\angle 1 \cong \angle 2$ و $\angle 3 \cong \angle 4$	معطى
$\angle 1 \cong \angle 3$	زاويتين متناظرتين متطابقتين
$\angle 2 \cong \angle 4$	خصائص التعدي لتطابق الزوايا
$\overleftrightarrow{KM} \parallel \overleftrightarrow{LN}$	لأن $\angle 2, \angle 4$ زوايا متناظرة

22 - الحل: لأن الزوايا بين دعامات السياج والألواح الخشبية زوايا متناظرة متطابقة وبالتالي فهي تكون مستقيمات متوازية وهي الأوتاد.

23 - الحل: نعم القطع المتقابلة في الإطار متوازية لأنها تكون زوايا متناظرة متطابقة قياسها 45°.

24 - لخص خمس طرق مختلفة يمكن استعمالها لإثبات أن مستقيمين متوازيان.

1) باستخدام الميل حيث إذا كان ميلي المستقيمين متساويان فهما متوازيان.
2) باستخدام نظرية (2.5).
3) باستخدام نظرية (2.6).
4) باستخدام نظرية (2.7).
5) باستخدام نظرية (2.8).

25- الحل: إذا لم تكن الزوايا الداخلية = 90 فإن t ليس عمودي على كل من المستقيمين.

27- الحل: في المربع ← كل ضلعين متقابلين متوازيين.
في المستطيل ← كل ضلعين متقابلين متوازيين.
في المعين ← كل ضلعين متقابلين متوازيين.
في شبه المنحرف ← ضلعي القاعدتين متوازيين.
في متوازي الأضلاع ← كل ضلعين متقابلين متوازيين.

29- الحل: (B) $\angle 1 \cong \angle 3$ (لأنهما داخليتان متحالفتان)

اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع الذي يحقق الشروط التالية:

30- $b=-6,\quad m=o.3 \Leftarrow y = 0.3x - 6$

31- $m=\frac{1}{3}$ مار بالنقطة $(-3, -15)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 15=\frac{1}{3}(x + 3) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - 14$$

32- مار بالنقطتين $(-3, 11)$, $(5, 7)$

نوجد ميل المستقيم: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{7-11}{5+3} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

نستخدم إحدى النقطتين مثلا: $(5, 7)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 7=-\frac{1}{2}(x-5) \Rightarrow y =-\frac{1}{2}x + \frac{19}{2}$$

33- عمودي على $y=\frac{1}{2}x - 4$، ويحوي $(-3, -3)$

الميل يساوي (-2)

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1=-2(x - 4) \Rightarrow y =-2x + 9$$

34- ميل المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-3+3}{4+1} = \frac{0}{5} = 0$

35- ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2+2}{0+4} = \frac{4}{4} = 1$

36- ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AE}$: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2+2}{4+4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

37- ميل مستقيم عمودي على $\overleftrightarrow{BD}$:

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{BD}$: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-3-2}{4-0} = \frac{-5}{4}$ ، ميل العمودي عليه : $\frac{4}{5}$

38- الحل: الزاويتين المستعملتان لتكون زاوية الإطار 90° هما متتامتان أي مجموعهما 90° ممكن أن يكونا 45+45 أو 20+70 أو 60+30 أو 10+80 أو 40+50 .

استعمل قانون المسافة لتجد البعد بين كل نقطتين فيما يلي:

39- المسافة بين $(7, 19)$, $(2,7)$:

$$d = \sqrt{(7-2)^2 + (197)^2} = \sqrt{25 + 144} \Rightarrow d = 13$$

40- المسافة بين $(1, 2)$, $(8,0)$:

$$d = \sqrt{(1-8)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{49 + 4} \Rightarrow d = 7.2$$

41- المسافة بين $(-8, 2)$, $(-6, -4)$:

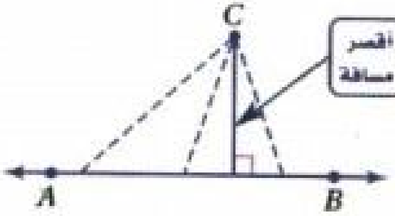
$$d = \sqrt{(-8+6)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{4 + 36} \Rightarrow d = 6.3$$

2-6 الأعمدة والمسافة

تذكر: أقصر قطعة مستقيمة من نقطة إلى مستقيم هي القطعة المستقيمة العمودية من النقطة عليه.

مفهوم: البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه = طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.

البعد بين C , $\overleftrightarrow{AB}$ = أقصر مسافة

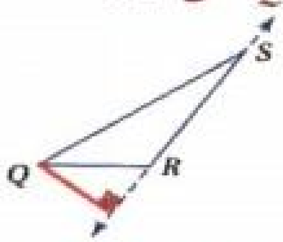


مثال

ارسم القطعة المستقيمة التي تمثل العمود النازل من Q على $\overleftrightarrow{RS}$.

نرسم امتداد لـ $\overleftrightarrow{RS}$

نسقط عمود من Q على امتداد المستقيم $\overleftrightarrow{RS}$



لرسم قطعة مستقيمة عمودية نتبع خطوات معينة سنشرحها في المثال التالي:

مثال

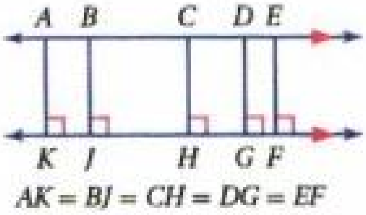
المستقيم l يمر بالنقطتين $(2, 1)$, $(4, 5)$. ارسم مستقيما عموديا على l ويمر بالنقطة p $(7, 1)$ ثم أوجد المسافة من p إلى l.

1) نرسم المستقيم l ونرسم النقطة p.
2) ركز الفرجار على النقطة p ثم ارسم قوس يقطع l في نقطتين سميهما m , n.
3) ركز الفرجار على النقطة m ثم ارسم قوس فوق المستقيم l (عكس اتجاه p).
4) باستعمال فتحة الفرجار نفسها في الخطوة 3 ركز الفرجار على النقطة n، وارسم قوس يقطع القوس الذي رسمته في الخطوة 3.
5) سم نقطة التقاطع Q.
6) ارسم المستقيم $\overleftrightarrow{PQ}$ بحيث يكون $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$.
7) سم نقطة تقاطع بـ K.
8) القطعة المستقيمة المرسومة من p $(7, 1)$ والعمودية على المستقيم l تقطع المستقيم عند النقطة $k(3.5 , 3.5)$.
9) نستعمل قانون المسافة لنوجد المسافة بين النقطة p والمستقيم l.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7 - 3.5)^2 + (1 - 3.4)^2}$$
$$= \sqrt{(12.25 + 6.25)} = 4.3$$

بعد p عن l يساوي 4.3 وحدات تقريبا.

البعد بين مستقيمين متوازيين هو البعد بين أحد المستقيمين وأي نقطة على المستقيم الآخر.

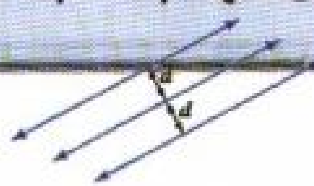


لاحظ/ البعد بين المستقيمين المتوازيين ثابت دائما.

المحل الهندسي هو مجموعة النقاط التي تحقق شرطا معلوما.

نظرية

- في المستوى، المستقيمان اللذان يبعد كل منهما بعدا ثابتا عن مستقيم ثالث يكونان متوازيين.



مثال

أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين a , b إذا كانت معادلتهما $x+3y = -14$, $x + 3y = 6$ على الترتيب.

1) نكتب المعادلتين على الصورة $y = mx + b$

معادلة المستقيم (b): $x + 3y = -14$

$3y = -14 - x \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{14}{3}$ ميل المستقيم b هو $-\frac{1}{3}$.

معادلة المستقيم (a): $x + 3y = 6$

$3y = 6 - x \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 2$ ميل المستقيم a هو $-\frac{1}{3}$.

لاحظ/ ميل المستقيمين المتوازيين متساويين.

2) لإيجاد معادلة المستقيم العمودي على كل من a , b ولنفرض أنه المستقيم (m) ⇐ ميل m هو 3 لأنه مقلوب ومخالف له بالإشارة.

3) نستعمل المقطع الصادي للمستقيم a، والنقطة $(0, 2)$ كنقطة طرف للقطعة المستقيمة العمودية لكتابة معادلة m.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x + 2$$

4) نوجد نقطة تقاطع المستقيمين b , m بمساواة معادلتيهما:

$$3x + 2 = -\frac{1}{3}x - \frac{14}{3} \Rightarrow 3x + \frac{1}{3}x = -2 - \frac{14}{3} \Rightarrow x = -6$$

نوجد قيمة y بالتعويض في معادلة المستقيم m:

$$y = 3x + 2 \Rightarrow y = 3(-6) + 2 \Rightarrow y = -16$$

∴ نقطة التقاطع $(-6 , -16)$

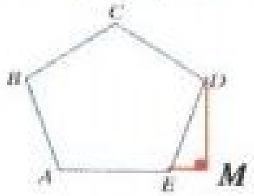
5) نستعمل قانون المسافة حتى نوجد المسافة بين النقطتين $(-6 , -16)$, $(0, 2)$

$$d = \sqrt{(-6-0)^2 + (-16-2)^2} = \sqrt{(36 + 324)} = 18.9$$

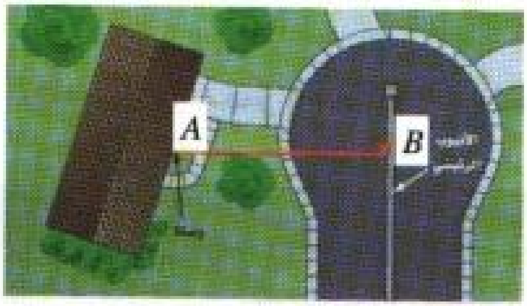
تدريبات وحلول

انقل الشكل، ثم ارسم القطعة المستقيمة التي تمثل المسافة بين النقطة D و $\overleftrightarrow{AE}$.

-1



-2



-3 المستقيم l يمر بالنقطتين $(0, 0)$, $(2, 4)$. ارسم مستقيما عموديا على l ويمر بالنقطة A $(2, -6)$ ثم أوجد بعد النقطة A عن المستقيم l.

1)نرسم المستقيم l ونرسم النقطة A.

2)ركز الفرجار على النقطة A ثم ارسم قوس يقطع l في نقطتين m , n.

3)ركز الفرجار على النقطة m ثم ارسم قوس فوق المستقيم l.

4)باستعمال فتحة الفرجار نفسها في الخطوة 3 ركز الفرجار على النقطة n، وارسم قوس يقطع القوس الذي رسمته في الخطوة 3 عند النقطة R.

5)ارسم المستقيم $\overleftrightarrow{RA}$ بحيث يكون $\overleftrightarrow{RA} \perp l$ عند النقطة K.

6)القطعة المستقيمة المرسومة من $A(2, -6)$ والعمودية على المستقيم l تقطع المستقيم عند النقطة $k(-2 , -4)$.

7)نستعمل قانون المسافة لنوجد المسافة بين النقطة A و K.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2+2)^2 + (-6+4)^2}$$
$$= \sqrt{(16+4)} = \sqrt{20}$$

بعد A عن l يساوي $\sqrt{20}$ وحدة تقريبا.

-4 أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين a , b إذا كانت معادلتهما $y = \frac{3}{4}x - 1$, $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ على الترتيب.

- ميل كلا من المستقيمين $\frac{3}{4}$
- لإيجاد معادلة المستقيم العمودي على كل من a , b ولنفرض أنه المستقيم (m)
  $\Leftarrow$ ميل m هو $-\frac{4}{3}$ لأنه مقلوب ومخالف له بالإشارة.
- نستعمل المقطع الصادي للمستقيم a، والنقطة $(0, -1)$ كنقطة طرف للقطعة المستقيمة العمودية لكتابة معادلة المستقيم m.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 1 = -\frac{4}{3}x - 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x - 1$$

- نوجد نقطة تقاطع المستقيمين b , m بمساواة معادلتيهما:

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = -\frac{4}{3}x - 1$$

$$-\frac{4}{3}x - \frac{3}{4}x = \frac{1}{8} + 1 \quad \Rightarrow \quad x = -0.54$$

نوجد قيمة y بالتعويض في معادلة المستقيم m:

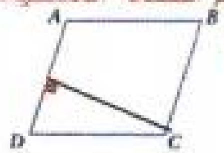
$$y = -\frac{4}{3}x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}(-0.54) - 1 \quad \Rightarrow \quad y = -1.72$$

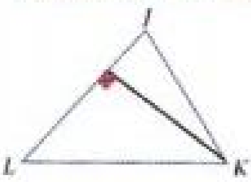
$\therefore$ نقطة التقاطع $(-0.54 , -1.72)$

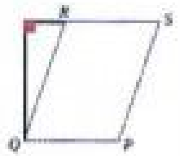
- نستعمل قانون المسافة حتى نوجد المسافة بين النقطتين $(0, 2)$, $(-6 , -16)$

$$d = \sqrt{(0 + 1.72)^2 + (-1 + 0.54)^2} = \sqrt{(2.96 + 0.21)} = 1.78$$

ارسم القطعة المستقيمة التي تمثل البعد المطلوب:

-5


-6


-7


ارسم مستقيما عموديا على l ويمر بالنقطة P، ثم أوجد بعد النقطة P عن المستقيم l:

-8 المستقيم l يمر بالنقطتين $(0 , -3)$, $(3, 0)$ وإحداثيا P هما $(4, 3)$.

بنفس الخطوات المتبعة في سؤال (3) نستطيع رسم التالي:

- القطعة المستقيمة المرسومة من $P(4, 3)$ ، وتقطع l عند النقطة $R(4, 0)$.
- المسافة العمودية هي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(4 - 4)^2 + (3 - 0)^2}$$
$$= \sqrt{(0 + 9)} = \sqrt{9} = 3$$

$\therefore$ المسافة بين l , p هي 3 وحدات.

-9 المستقيم l يمر بالنقطتين $(-2 , 0)$, $(1, 3)$ وإحداثيا P هما $(-4, 4)$.

بنفس الخطوات المتبعة في سؤال (3) نستطيع رسم التالي:

- القطعة المستقيمة المرسومة من P ، وتقطع l عند النقطة $R(1, 2.5)$.
- المسافة العمودية هي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(1 + 4)^2 + (2.5 - 4)^2}$$
$$= \sqrt{(25 + 2.25)} = \sqrt{27.25} = 5.2$$

$\therefore$ المسافة بين l , p هي 5.2 وحدات.

أوجد المسافة بين كل زوج من المستقيمات المتوازية إذا كانت معادلاتهما:

-10 $y = 1$, $y = -3$

$a: (y = -3)$, $b: (y = 1)$

ميل المستقيمين $=0$ $\Leftarrow$ ميل العمودي عليهما وليكن $R=0$.

- نستعمل المقطع الصادي للمستقيم a، والنقطة $(0, -3)$ كنقطة طرف للقطعة المستقيمة العمودية لكتابة معادلة المستقيم R.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 3 = 0\,(x - 0) \Rightarrow y = -3$$

- لا يوجد نقطة تقاطع بين b , R.
- المسافة بين النقطتين $(0, 1)$, $(0, -3)$

$$d = \sqrt{(0-0)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{(0+16)} = 4$$

∴ المسافة بين المستقيمين 4 وحدات.

11- $x = 4$, $x = -2$

بما أن y في المعادلتين $= 0$ ⇐ نوجد المسافة مباشرة:

من النقطتين $(4, 0)$, $(-2, 0)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4+2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{36} = 6$$

∴ المسافة بين المستقيمين 6 وحدات.

12- $y = 2x + 2$, $y = 2x - 3$

$a: (y = 2x + 2)$, $b: (y = 2x - 3)$

ميل المستقيمين $=2$ ⇐ ميل العمودي عليهما وليكن $-\frac{1}{2}$.

- نستعمل المقطع الصادي للمستقيم a، والنقطة $(0, 2)$ كنقطة طرف للقطعة المستقيمة العمودية لكتابة معادلة المستقيم العمودي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = -\tfrac{1}{2}\,(x - 0) \Rightarrow y = -\tfrac{1}{2}x + 2$$

- نوجد نقطة تقاطع المستقيم مع b.

$$-\tfrac{1}{2}x + 2 = 2x - 3 \Rightarrow -\tfrac{1}{2}x - 2x = -3 - 2 \Rightarrow x = 2$$

- لإيجاد y نعوض في معادلة المستقيم العمودي:

$$y = -\tfrac{1}{2}(2) + 2 = -1 + 2 = 1$$

- المسافة بين النقطتين $(2, 1)$, $(0, 2)$

$$d = \sqrt{(2-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(4+1)} = \sqrt{5}$$

∴ المسافة بين المستقيمين $\sqrt{5}$ وحدات.

13- $y = \frac{1}{3}x + 2$, $y = \frac{1}{3}x - 3$

ميل المستقيمين $= \frac{1}{3}$ ⇐ ميل العمودي عليهما وليكن -3 .

- نستعمل المقطع الصادي للمستقيم a، والنقطة $(0, -3)$ كنقطة طرف للقطعة المستقيمة العمودية لكتابة معادلة المستقيم العمودي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 3 = -3\,(x - 0) \Rightarrow y = -3x - 3$$

- نوجد نقطة تقاطع المستقيم مع b.

$$-3x-3=\frac{1}{3}x+2 \Rightarrow -\frac{1}{3}x-3x= 3+2 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

- لإيجاد y نعوض في معادلة المستقيم العمودي:

$$y=-3\left(-\frac{3}{2}\right)-3= -\frac{15}{2}$$

- المسافة بين النقطتين $(0\ ,\ -3)$, $(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{2})$

$$d=\sqrt{\left(0+\frac{3}{2}\right)^2+\left(-3+\frac{15}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{4}+\frac{81}{4}\right)}=4.7$$

∴ المسافة بين المستقيمين المتوازيين هي 4.7 وحدات.

14- $x=8.5\ ,\ x=-12.5$

بما أن y في المعادلتين = 0 ⇐ نوجد المسافة مباشرة:

من النقطتين $(8.5, 0)$, $(-12.5, 0)$

$$d=\sqrt{(8.5+12.5)^2+(0-0)^2} = \sqrt{441}=21$$

∴ المسافة بين المستقيمين 21 وحدات.

15- $y=15\ ,\ y=-4$

بما أن y في المعادلتين = 0 ⇐ نوجد المسافة مباشرة:

من النقطتين $(0,15)$, $(0, -4)$

$$d=\sqrt{(0-0)^2+(15+4)^2} = \sqrt{(19)^2}=19$$

∴ المسافة بين المستقيمين 19 وحدات.

ملاحظة هامة: تلاحظ من خلال التمارين $10,\ 11,\ 14,\ 15$ أنه إذا كان معادلة المستقيمين على الصورة $y=a$ و $y=b$ أو على الصورة $x=a\ ,\ x=b$ فإنه يمكن إيجاد المسافة مباشرة من خلال جمع $b+a$ مباشرة جمع جبري دون النظر لإشاراتهما.

أوجد المسافة بين كل مستقيمين متوازيين إذا كانت معادلتاهما:

16- $y=4x\ ,\ y=4x-17$

ميل المستقيمين = 4 ⇐ ميل العمودي عليهما وليكن $-\frac{1}{4}$.

- نستعمل المقطع الصادي للمستقيم a، والنقطة $(0,\ 0)$ كنقطة طرف للقطعة المستقيمة العمودية لكتابة معادلة المستقيم العمودي:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=-\frac{1}{4}(x-0) \Rightarrow y=-\frac{1}{4}x$$

- نوجد نقطة تقاطع المستقيم مع b.

$$-\frac{1}{4}x=4x-17 \Rightarrow \frac{1}{4}x+4x= 17 \Rightarrow x=4$$

- لإيجاد y نعوض في معادلة المستقيم العمودي:

$$y = -\tfrac{1}{4}(4) = -1$$

- المسافة بين النقطتين $(4, -1)\ ,\ (0\ ,\ 0)$

$$d = \sqrt{(0-4)^2 + (0+1)^2} \qquad = \sqrt{(16+1)} = \sqrt{17}$$

∴ المسافة بين المستقيمين هي $\sqrt{17}$ وحدات.

17- $y = 2x - 3\ \ ,\ \ 2x - y = -4$

نكتب b على الصورة $y = mx + b$

$$2x + 4 = y \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 4$$

ميل المستقيمين $= 2 \Leftarrow$ ميل العمودي عليهما وليكن $-\frac{1}{2}$.

- نستعمل المقطع الصادي للمستقيم a، والنقطة $(0,\ -3)$ كنقطة طرف للقطعة المستقيمة العمودية لكتابة معادلة المستقيم العمودي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x - 3$$

- نوجد نقطة تقاطع المستقيم مع b.

$$-\frac{1}{2}x - 3 = 2x + 4 \Rightarrow \tfrac{1}{2}x + 2x = -3 - 4 \Rightarrow x = -\frac{14}{5}$$

- لإيجاد y نعوض في معادلة المستقيم العمودي:

$$y = -\tfrac{1}{2}\left(-\frac{14}{5}\right) - 3 = -\frac{8}{5}$$

- المسافة بين النقطتين $\left(-\frac{14}{5}, -\frac{8}{5}\right),\ (0\ ,\ -3)$

$$d = \sqrt{\left(0 + \frac{14}{5}\right)^2 + \left(-3 + \frac{8}{5}\right)^2} \qquad = \sqrt{\left(\frac{196}{25} + \frac{49}{25}\right)} = 3.1$$

∴ المسافة بين المستقيمين هي 3.1 وحدات.

18- $y = -\frac{3}{4}x - 1\ ,\quad 3x + 4y = 20$

- نكتب b على الصورة $y = mx + b$

$$3x + 4y = 20 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{4}x + 5$$

- ميل كلا من المستقيمين $-\frac{3}{4}$
- لإيجاد معادلة المستقيم العمودي على كل من $a\ ,\ b$ ميل العمودي هو $\frac{4}{3}$ لأنه مقلوب ومخالف له بالإشارة.
- نستعمل المقطع الصادي للمستقيم a، والنقطة $(0,\ -1)$ كنقطة طرف للقطعة المستقيمة العمودية لكتابة معادلة المستقيم m.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 1 = \frac{4}{3}x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{3}x - 1$$

- نوجد نقطة تقاطع المستقيم العمودي مع b بمساواة معادلتيهما:

$$\frac{3}{4}x + 5 = \frac{4}{3}x - 1$$

$$\frac{4}{3}x + \frac{3}{4}x = 5 + 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2.8$$

- نوجد قيمة y بالتعويض في معادلة العمودي:

$$y = \frac{4}{3}x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{3}(2.8) - 1 \quad \Rightarrow \quad y = 2.8$$

∴ نقطة التقاطع $(2.8 , 2.8)$

- نستعمل قانون المسافة حتى نوجد المسافة بين النقطتين $(0, -1)$, $(2.8, 2.8)$

$$d = \sqrt{(0 - 2.8)^2 + (-1 - 2.8)^2} \quad = \sqrt{(7.84 + 14.44)} = 4.72$$

19- اكتب برهانا حرا للنظرية (2.9)

من الرسم المقابل نلاحظ أن:

المستقيم a يبعد مسافة d عن المستقيم b

أيضا b يبعد مسافة d عن المستقيم c.

أي $\overleftrightarrow{ab} = \overleftrightarrow{bc} \Leftarrow a \parallel b$ ، $b \parallel c \Leftarrow a \parallel c$

ارسم كل مستقيم، وارسم قطعة مستقيمة عمودية على المستقيم وتمر بالنقطة المعطاة، ثم أوجد البعد بين النقطة والمستقيم.

20- $(-2 , 4)$, $y = 5$

بنفس الخطوات المتبعة في سؤال (3) نستطيع رسم الشكل:

- نقطة تقاطع المستقيم مع النقطة المعطاة هي R وإحداثياتها $R(1, 2.5)$.
- المسافة العمودية هي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-2 + 2)^2 + (5 - 4)^2}$$
$$= \sqrt{(0 + 1)} = \sqrt{1} = 1$$

∴ المسافة بين l , p هي 5.2 وحدات.

21- $(-1 , -5)$, $y = 2x + 2$

نختار نقطتين نفرضهما لرسم المستقيم $y=2x+2$.

عندما $x = 0 \Leftarrow y=2(0)+2 \Leftarrow y = 2$.

∴ النقطة الأولى $(0 , 2)$

عندما $y=0 \Leftarrow 0=2x+2 \Leftarrow x = -1$

∴ النقطة الثانية $(-1 , 0)$

وبنفس الخطوات نرسم المستقيم والنقطة.

نقطة تقاطع المستقيم مع النقطة المعطاة هي $R(-3, -4)$

- المسافة العمودية هي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-3 + 1)^2 + (-4 + 5)^2}$$
$$= \sqrt{(4 + 1)} = \sqrt{5}$$

22- $2x = 3y - 9$, $(2,0)$

نختار نقطتين نفرضهما لرسم المستقيم $2x=3y-9$.

عندما $x = 0 \Leftarrow 2(0)= 3y - 9 \Leftarrow y = 3$.

$\therefore$ النقطة الأولى $(0 , 3)$

عندما $y=5 \Leftarrow 2x=2(5)+2 \Leftarrow x = 3$

$\therefore$ النقطة الثانية $(3 , 5)$

وبنفس الخطوات في الأسئلة السابقة نرسم الشكل.

نقطة تقاطع المستقيم مع النقطة المعطاة هي $R(0.5, 3)$

- المسافة العمودية هي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(2 - 0.5)^2 + (0 - 3)^2}$$
$$= \sqrt{11.25} = 3.3$$

24- ما العلاقة بين المستقيمين l , $\overleftrightarrow{PQ}$، وضح تخمينك باستعمال ميلي المستقيمين:

العلاقة بين المستقيمين l , $\overleftrightarrow{PQ}$، متعامدين وللتأكد نستخدم ميليهما.

1 - ميل l باستخدام النقطتين $(2, -3)$, $(-4, 3)$

$$m = \frac{3+3}{-4-2} = \frac{6}{-6} = -1$$

2 - ميل $\overleftrightarrow{PQ}$ باستخدام النقطتين $(0,3)$, $(-2, 1)$

$$m = \frac{1-+3}{-2-0} = \frac{-2}{-2} = 1$$

حاصل ضرب الميلين = (-1) إذن المستقيمين متعامدين

25- قارن بين ثلاث طرائق مختلفة يمكنك استعمالها لتوضيح أن مستقيمين في مستوى متوازيان.

1) إذا كان بعد المستقيم الأول عن المستقيم ثاني يساوي بعد المستقيم الثالث عن المستقيم الثاني فإن المستقيم الأول والثالث متوازيان.

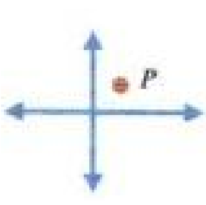
2) إذا كان ميل المستقيم الأول يساوي ميل المستقيم الثاني فإنهما متوازيان.

3) لأي مستقيمين إذا كان البعد بينهما ثابت عند أي نقطة فإنهما متوازيان.

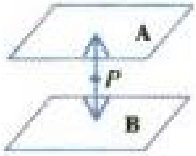
للأسئلة 32-27، ارسم شكلا يمثل كل وصف مما يلي:

27- النقطة P متساوية البعد بين مستقيمين متوازيين.

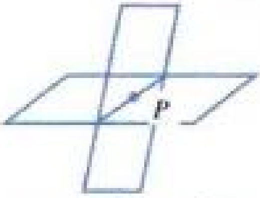
28- النقطة P متساوية البعد بين مستقيمين متقاطعين.



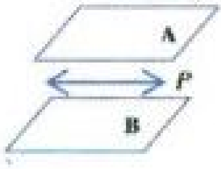
29 - النقطة P متساوية البعد بين مستويين متوازيين.



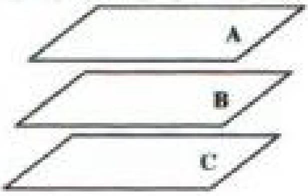
30 - النقطة P متساوية البعد بين مستويين متقاطعين.



31 - مستقيم متساوي البعد بين مستويين متوازيين.

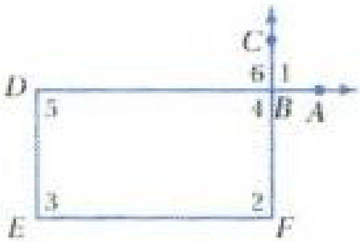


32 - مستوى متساوي البعد عن مستويين آخرين متوازيين.



34 - الحل: $10\ (c)$

من المعلومات المعطاة، حدد المستقيمات المتوازية، إن وجدت، واذكر المسلمة أو النظرية التي تبرر إجابتك:



35- $\angle 6 \cong \angle 5$ داخليتان متبادلتان متطابقتان.

$\therefore\ \overleftrightarrow{ED} = \overleftrightarrow{FC}$

36- $\angle 2 \cong \angle 6$ متناظرتان متطابقتان.

$\therefore\ \overleftrightarrow{EF} = \overleftrightarrow{DA}$

37- $\angle 1$ و $\angle B$ متكاملتان لأنهما متجاورتان على مستقيم.

$\therefore\ \angle B \cong \angle 1$ أنهما قائمتان.

$\therefore\ \angle 2 \cong \angle B$ لأنهما داخليتان متبادلتان.

$\therefore\ \overleftrightarrow{CF} = \overleftrightarrow{DE}$

اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع لكل مستقيم:

38 - المستقيم a يمر بالنقطتين $(0, 3)$ ، $(-2, 2)$

نوجد ميل المستقيم: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3-2}{0+2} = \frac{1}{2}$

نستخدم إحدى النقطتين مثلا: $(0, 3)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x-0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$$

39 - المستقيم b يمر بالنقطتين $(0, 5)$ ، $(5, 0)$

نوجد ميل المستقيم: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-5}{5-0} = \frac{-5}{5} = -1$

نستخدم إحدى النقطتين مثلا: $(0, 3)$

$$y - y1 = m(x - x1) \Rightarrow y - 0 = -1\ (x-5) \Rightarrow y = -x + 5$$

40- المستقيم c يمر بالنقطتين $(3, 0)$, $(0, -2)$

نوجد ميل المستقيم: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0+2}{3-0} = \frac{2}{3}$

نستخدم إحدى النقطتين مثلا: $(3, 0)$

$y - y1 = m(x - x1) \Rightarrow y - 0 = \frac{2}{3}(x-3) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$

41- عمودي على المستقيم a ⇐ ميله = -2.

مار بالنقطة: $(-1, -4)$

$y - y1 = m(x - x1) \Rightarrow y + 4 = -2(x+1) \Rightarrow y = -2x - 6$

42- يوازي المستقيم c ⇐ ميله = $\frac{2}{3}$

مار بالنقطة: $(2, 5)$

$y - y1 = m(x - x1) \Rightarrow y - 5 = \frac{2}{3}(x-2) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$

43- الحل: معدل التغير بين 1426 , 1428

$\frac{20-11}{1428-1426} = \frac{9}{2}$

إذا استمر معدل التغير ثابت وكانت السنة المطلوبة x فإن:

$\frac{9}{2} = \frac{50-20}{x-1428} = \frac{30}{x-1428}$

$9(x-1428) = 2(30) \Rightarrow 9x = 12912 \Rightarrow x = 1434$

اختبار الفصل الثاني

1 - المصطلح الذي يصف $\angle 6$ و $\angle 5$ أفضل ما يمكن هو الاختيار (C).

في الشكل التالي $m\angle 12 = 64$. أوجد قياس كل زاوية مما يلي:

2 - $\angle 12 + \angle 8 = 180^\circ$ زاويتان داخليتان متحالفتان متكاملتان.

$64 + \angle 8 = 180^\circ$ تعويض

$\angle 8 = 180^\circ - 64$

$\angle 8 = 116^\circ$

3 - $\angle 13 \cong \angle 12$ زاويتان خارجيتان متبادلتان.

$\angle 13 = \angle 12$ تعريف تطابق الزوايا

$\angle 13 = 64^\circ$ تعويض

4 - $\angle 7 \cong \angle 12$ داخليتان متبادلتان.

$\angle 7 = \angle 12$ تعريف تطابق الزوايا

$\angle 7 = 64^\circ$ تعويض

5 - $\angle 11 \cong \angle 8$ داخليتان متبادلتان.

$\angle 11 = \angle 8$ تعريف تطابق الزوايا

$\angle 11 = 116^\circ$ تعويض

6 - $\angle 11 \cong \angle 3$ متناظرتان.

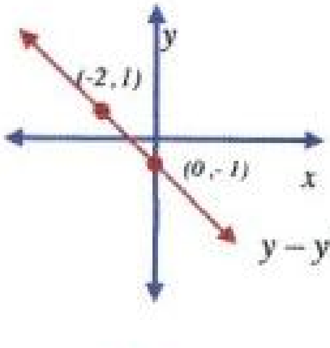
$\angle 11 = \angle 3$ تعريف تطابق الزوايا

$\angle 3 = 116^\circ$ تعويض

7 - $\angle 11 \cong \angle 9$ متناظرتان.

$\angle 11 = \angle 9$ تعريف تطابق الزوايا

$\angle 9 = 116^\circ$ تعويض



ارسم المستقيم الذي يحقق الشرط المعطى في كل مما يلي:

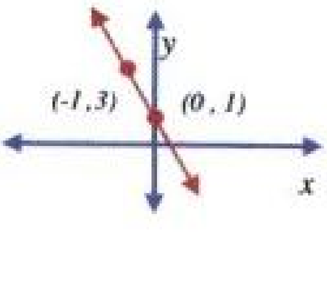
8 - الميل $(m = -1)$ ، يمر بالنقطة $p(-2, 1)$

معادلة المستقيم المطلوب:

$y - y1 = m(x - x1) \Rightarrow y - 1 = -x - 2 \Rightarrow y = -x - 1$

عند $x=0 \Leftarrow y=-0-1 \Leftarrow y = -1$

∴ المستقيم يحوي النقطة $(0 , -1)$



9 - يمر بالنقطة $Q(-1, 3)$ ، عمودي على $\overleftrightarrow{AB}$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $m = \frac{3-0}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Leftarrow$

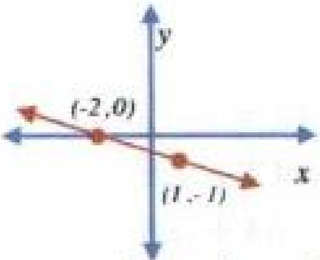
ميل المستقيم المطلوب = -2.

معادلة المستقيم المطلوب:

$y - y1 = m(x - x1) \Rightarrow y - 3 = -2x + 1 \Rightarrow y = -2x + 1$

$y = 1 \Leftarrow y = -2(0) + 1 \Leftarrow x = 0$ عند

∴ النقطة $(0 , 1)$ تقع على المستقيم



10 - يمر بالنقطة $M(1, -1)$ ، يوازي $\overleftrightarrow{FG}$

ميل $\overleftrightarrow{FG}$: $\Leftarrow m = \frac{-1-5}{-3-3} = \frac{-6}{-6} = 1$

ميل المستقيم المطلوب = 1

معادلة المستقيم المطلوب:

$y - y1 = m(x - x1) \Rightarrow y + 1 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 2$

$y = -2 \Leftarrow y = 0 - 2 \Leftarrow x = 0$ عند

∴ النقطة $(0 , -2)$ تقع على المستقيم

11 - الحل: (G) $\angle 1 \cong \angle 4$

لحل الأسئلة 12-15، ارجع إلى الشكل أدناه، وأوجد كل قيمة مما يلي إذا كان $p \parallel q$:

12 -
$3x - 60 + 2x + 15 = 180$
$5x - 45 = 180$
$x = 45°$

13 -
$y = 2x + 15$
$y = 2(45) + 15$
$y = 105°$

14 -
$\angle BCE = 2x + 15$
$= 2(45) + 15$
$= 105°$

15 -
$105 + \angle BCE = 180°$

أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين:

16 - $y = 2x + 9$ ، $y = 2x - 1$

ميل المستقيمين = 2 $\Leftarrow$ ميل العمودي عليهما $-\frac{1}{2}$.

- نستعمل المقطع الصادي للمستقيم a، والنقطة $(0, -1)$ كنقطة طرف للقطعة المستقيمة العمودية لكتابة معادلة المستقيم العمودي:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1$$

- نوجد نقطة تقاطع المستقيم مع b.

$$-\frac{1}{2}x - 1 = 2x + 9 \Rightarrow \frac{1}{2}x + 2x = -9 - 1 \Rightarrow x = -4$$

- لإيجاد y نعوض في معادلة المستقيم العمودي:

$$y = -\frac{1}{2}(-4) - 1 = 1$$

- المسافة بين النقطتين $(0 , -1)$ ، $(-4, 1)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0 + 4)^2 + (-1 - 1)^2}$$
$$= \sqrt{(16 + 4)} = \sqrt{20}$$

∴ المسافة بين المستقيمين هي $\sqrt{20}$ وحدات.

17 - $y = -x + 4$ ، $y = -x - 2$

ميل المستقيمين = -1 $\Leftarrow$ ميل العمودي عليهما 1.

- نستعمل المقطع الصادي للمستقيم a، والنقطة $(0, -2)$ كنقطة طرف للقطعة المستقيمة العمودية لكتابة معادلة المستقيم العمودي:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x - 2$$

- نوجد نقطة تقاطع المستقيم مع b.

$$x - 2 = -x + 4 \Rightarrow x + x = 4 + 2 \Rightarrow x = 3$$

- لإيجاد y نعوض في معادلة المستقيم العمودي:

$$y = 3 - 2 = 1$$

- المسافة بين النقطتين $(0 , -2) , (3, 1)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (-2-1)^2}$$
$$= \sqrt{(9+9)} = \sqrt{18}$$

∴ المسافة بين المستقيمين هي $\sqrt{18}$ وحدات.

18- $y = -x$, $y = -x - 4$

ميل المستقيمين $= (-1)$ ⇐ المستقيمين متوازيين. ⇐ ميل العمودي $= (1)$

- نستعمل المقطع الصادي للمستقيم a، والنقطة $(0, -4)$ كنقطة طرف للقطعة المستقيمة العمودية لكتابة معادلة المستقيم العمودي:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 42 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x - 4$$

- نوجد نقطة تقاطع المستقيم مع b.

$$x - 4 = -x \Rightarrow x + x = 4 \Rightarrow x = 2$$

- لإيجاد y نعوض في معادلة المستقيم العمودي:

$$y = x - 4 = 2 - 4 = -2$$

- المسافة بين النقطتين $(2 , -2) , (0, 4)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (-2+4)^2}$$
$$= \sqrt{(4+4)} = \sqrt{8}$$

∴ المسافة بين المستقيمين هي $\sqrt{8}$ وحدات.

اختبار معياري تراكمي

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

1 - الحل: (C) المستقيم l يوازي المستقيم m.

2 - الحل: (D) زاويتان متناظرتان.

3 - الحل: (C) قيمة زكاة المال إذا كانت نسبة الزكاة 2.5%.

4 - الحل: (A) $\angle 1 \cong \angle 4$

5 - الحل: (C) $3\left(\frac{4x-6}{3}\right) = 3(10)$

6 - الحل:

من تعريف نقطة المنتصف: $\overleftrightarrow{DE} = \overleftrightarrow{EF}$

$$8x - 3 = 3x + 7 \Rightarrow 8x - 3x = 7 + 3 \Rightarrow x = 2$$

7 - الحل: (F) $\overline{BC}$ تنصف $\angle ABD$.

8 - الحل: (B)

$$4y^3 8y^{-5} = 4(8)y^{3-5} = 32y^{-2}$$

9 - الحل: (C) لا يوجد مربو ماعز لديهم أغنام.

10 - الحل: (D)

$m = \frac{-2-4}{0-2} = \frac{-6}{-2} = 3$ نختار النقطة $(0 , -2)$

$$y - y1 = m(x - x1) \Rightarrow y + 2 = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x - 2$$

11 - الحل: (G) خاصية القسمة.

12 - الحل: (A) مستقيم يعامد المستقيمين l , m.

13 - الحل:

كل $1cm$ يقابل 10قدم.

من الرسم يتضح أن خليل إذا رمى الكرة 120 قدم لن تصل إلى C.

لأن المسافة بين $A , C = 145$ قدم

ستصل الكرة إلى C بعد 25 قدم لأن $25 = 120 - 145$.

الفصل الثالث

تطابق المثلثات

- تصنيف المثلثات
- زوايا المثلث
- المثلثات المتطابقة
- إثبات التطابق – حالتي: SAS , SSS
- إثبات التطابق – حالتي: ASA , AAS
- المثلثات المتطابقة الضلعين
- المثلثات والبرهان الإحداثي

التهيئة للفصل الثالث

حلول اختبار سريع

حل كل معادلة مما يلي:

1- $2x+18 = 5$

$2x = -13$

$x = -\frac{13}{2}$

2- $\frac{2}{3}b+9 = -15$

$2b = -72$

$b= -36$

3- $3m -16 = 12$

$3m = 28$

$m = \frac{28}{3}$

4- $6 = 2a + \frac{1}{2}$

$2a = 6 - \frac{1}{2}$

$a= \frac{11}{4}$

5- الحل: إذا كان ثمن السمكة x:

$4x + 20 = 25 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x=1.25$

ثمن السمكة 1.25 ريالا.

6- الحل: الزوايا $\angle 15$, $\angle 12$, $\angle 9$ $\angle 6, \angle 2$ زوايا مطابقة للزاوية 8.

7- الحل: الزوايا $\angle 10$, $\angle 16$ $\angle 4$, هي زوايا مكملة للزاوية 12.

أوجد المسافة بين كل زوج من النقط الآتية إلى أقرب عشر:

8- $(11, -8)$, $(-3, -4)$

$$d = \sqrt{(-3-11)^2 + (-4+8)^2} = \sqrt{(196+16)} = 14.5$$

9- $(6, 8)$, $(-4, 3)$

$$d = \sqrt{(-4-6)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{(100+25)} = 11.2$$

10- الحل:

$$d = \sqrt{(-8-15)^2 + (14+25)^2} = \sqrt{(23)^2 + (39)^2} = 45.3$$

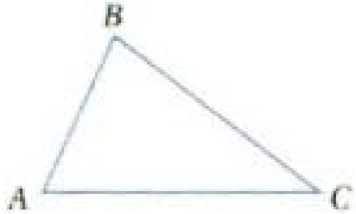
المسافة بين بيت خالد والملعب هي $45.3m$ تقريبا.

1-3 تصنيف المثلثات

عزيزي الطالب/ راجع معلوماتك السابقة لتجد أن:

المثلث هو شكل رباعي مكون من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا فإذا نظرت إلى الشكل المجاور فإن المثلث ABC يمكن كتابته على الصورة ΔABC.

أيضا: أضلاعه هي $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$



رؤوسه هي: A , B , C

زواياه هي: $\angle A$ أو $\angle BAC$

$\angle B$ أو $\angle ABC$

$\angle C$ أو $\angle BCA$

كيف نصنف المثلثات:

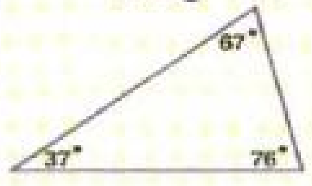
يمكن تصنيف المثلثات حسب زواياها أو حسب أضلاعها.

انتبه

- بما أن جميع المثلثات فيها زاويتان حادتان على الأقل فإن الزاوية الثالثة هي التي نستعملها في تصنيف المثلث.
- من الخطأ أن نصنف المثلث وفقا لزواياه بأكثر من طريقة فلا نقول مثلث قائم الزاوية وحاد الزاوية.

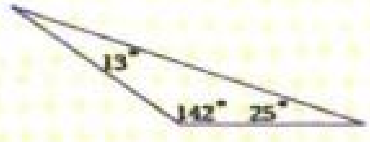
تصنيف المثلثات وفقا لزواياها

في المثلث الحاد الزوايا
تكون جميع الزوايا حادة.



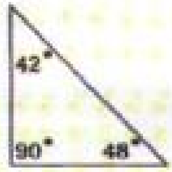
قياس كل زاوية أقل من 90

في المثلث المنفرج الزاوية
زاوية واحدة منفرجة.



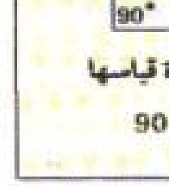
زاوية واحدة منفرجة قياسها أكبر من 90

في المثلث القائم الزاوية
زاوية واحدة قائمة.



زاوية واحدة قياسها يساوي 90

حالة خاصة:



إذا كان مثلث حاد الزوايا وجميعها متطابقة يسمى متطابق الزوايا.

ملاحظة

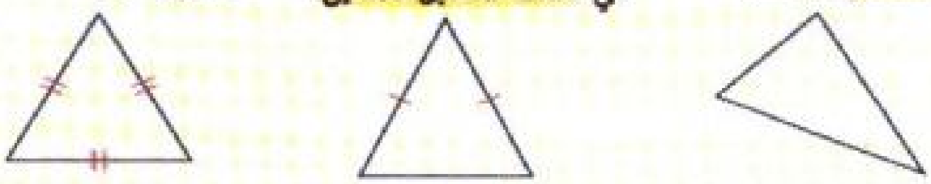
نشير إلى أن أضلاع مثلث متطابق الأضلاع على الرسم بوضع إشارة "/" على الأضلاع المتطابقة.

مثال

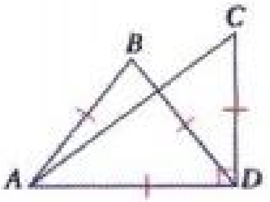
هيكل هذه الدراجة ذات المقعدين يحتوي على أشكال مثلثية.
استعمل المنقلة لتصف ΔABC ، ΔCDE
باستعمال المنقلة نجد أن كلا من الزاويتين (70°)

تصنيف المثلثات وفقاً لأضلاعها

أضلاع المثلث المختلف الأضلاع غير متطابقة.	يوجد ضلعان متطابقان على الأقل في المثلث المتطابق الضلعين.	جميع أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع متطابقة.



مثال



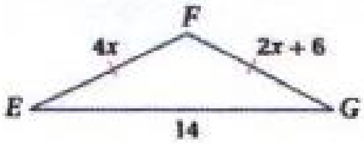
حدد مثلثا في الشكل من النوع المشار إليه.

A) متطابق الأضلاع ΔABD

B) متطابق الضلعين ΔACD

مثال

أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلث المتطابق الضلعين EFG



∵ المثلث متطابق الضلعين ∴ $2x+16 = 4x$

$4x - 2x = 16 \Rightarrow x = 8$

طول $\overline{EF} = 4x = 4(8) = 32$

طول $\overline{FG} = 2x + 6 = 2(8) + 6 = 22$

مثال

أوجد أطوال أضلاع ΔHIJ ذي الرؤوس $J(0,1)$ ، $I(0,4)$ ، $H(-3,1)$ وصنفه وفقا لأضلاعه.

المسافة بين أي نقطتين: (x_1 , y_1) ، (x_2, y_2) هي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

المسافة بين IJ: $d = \sqrt{(0-0)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2} = 3$

المسافة بين IH: $d = \sqrt{(0+3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18}$

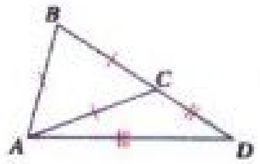
المسافة بين JH: $d = \sqrt{(0+3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(3)^2 + (0)^2} = 3$

بما أن $\overline{JH} = \overline{IJ}$ ⇐ المثلث ΔHIJ متطابق الضلعين.

تدريبات وحلول

استعمل المنقلة لتصنيف المثلثين حسب الزاوية:

1- منفرج الزاوية   2- متطابق الزوايا

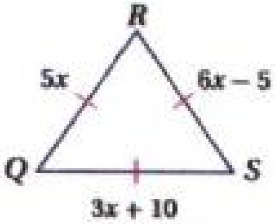


حدد مثلثا في الشكل من النوع المشار إليه.

3- متطابق الضلعين ΔABC

4- مختلف الأضلاع ΔACD

5- أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلث المجاور.



من الرسم نلاحظ: $\overline{JH} = \overline{IJ}$

$$5x = 6x - 5x \Rightarrow 6x - 5x = 5 \Rightarrow x = 5$$

طول $\overline{QR} = 5x = 5(5) = 25$

طول $\overline{RS} = 6x\text{-}5 = 6(5) - 5 = 25$

طول $\overline{QS} = 3x + 10 = 3(5) + 10 = 25$

∴ المثلث متطابق الأضلاع.

6- أوجد أطوال أضلاع ΔTWZ الذي إحداثيات رؤوسه $Z(-3,0)$, $W(4,-5)$, $(2,6)$ وصنفه وفقا لأضلاعه.

طول TW: $d = \sqrt{(4-2)^2 + (-5-6)^2} = \sqrt{(2)^2 + (11)^2} = 11.18$

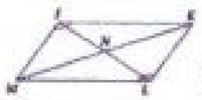
طول WZ: $d = \sqrt{(-3-4)^2 + (0+5)^2} = \sqrt{(7)^2 + (5)^2} = 8.6$

طول JZ: $d = \sqrt{(-3-2)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{(5)^2 + (6)^2} = 7.8$

∴ المثلث مختلف الأضلاع.

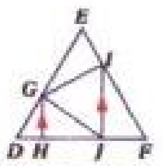
استعمل المنقلة لتصنيف المثلثين حسب الزاوية:

7- قائم الزاوية   8- حاد الزوايا   9- منفرج الزاوية



10- عين المثلثات المنفرجة الزاوية:

ΔMJK ، ΔKLM ، ΔMNL ، ΔKNJ

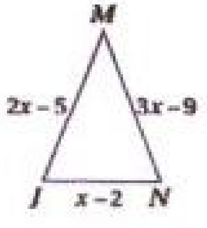


11- عين المثلثات القائمة الزاوية:

ΔGIJ ، ΔIJF ، ΔJGH ، ΔGHD

12- أوجد كلا من x , JM, MN , JN إذا كان ΔJMN متطابق الضلعين $\overline{MN} \cong \overline{JM}$

$$3x\text{-}9 = 2x\text{-}5 \Rightarrow 3x - 2x = -5+9 \Rightarrow x = 4$$



طول $\overline{JM} = 2x\text{-}5 = 2(4)\text{-}5 = 3$

طول $\overline{MN} = 3x\text{-}9 = 3(4) - 9 = 3$

طول $\overline{JN} = x\text{-}2 = 4 - 2 = 2$

أوجد أطوال أضلاع ، وصنف كل مثلث وفقا لأضلاعه.

13- $C(-3,-7)$, $B(5,6)$, $A(-4,1)$

طول AB: $d = \sqrt{(5+4)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{(9)^2 + (5)^2} = 10.3$

طول BC: $d = \sqrt{(-3-5)^2 + (-7-6)^2} = \sqrt{(8)^2 + (13)^2} = 15.2$

طول AC: $d = \sqrt{(-3+4)^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{(1)^2 + (8)^2} = 8.06$

∴ المثلث مختلف الأضلاع.

-14 $A(5,4)\ ,\ B(3,-1)\ ,\ C(7,-1)$

طول AB: $d=\sqrt{(3-5)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{(2)^2+(-5)^2}=5.38$

طول BC: $d=\sqrt{(7-3)^2+(-7+1)^2}=\sqrt{(4)^2+(0)^2}=4$

طول AC: $d=\sqrt{(7-5)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{(2)^2+(5)^2}=5.38$

∴ المثلث متطابق الضلعين.

-16 الحل: المثلث متطابق الزوايا كل زاوية 60°.
المثلث متطابق الأضلاع كل ضلع 1.3.

-18 الحل: المثلث متطابق الضلعين:

$X+7=3x-5 \Rightarrow 3x-x=7+5 \Rightarrow x=6$

طول $\overline{HG}=x+7=6+7=13$

طول $\overline{GJ}=3x-5=3(6)-5=13$

طول $\overline{HI}=x-1=6-1=5$

-19 الحل: ΔQRS متطابق الأضلاع

طول $\overline{QR}=2x-2$

طول $\overline{RS}=x+6$

طول $\overline{QS}=3x-10$

$2x-2=x+6 \Rightarrow 2x-x=6+2 \Rightarrow x=8$

طول $\overline{QR}=2x-2=2(8)-2=14$

طول $\overline{RS}=x+6=8+6=14$

طول $\overline{QS}=3x-10=3(8)-10=14$

-20 الحل: المسافة الكلية = محيط المثلث = 2076 كلم

المسافة بين المدينة ومكة = x

المسافة بين المدينة والرياض = $x+490$

المسافة بين الرياض ومكة = $x+22+490=x+512$

المسافة الكلية : $x+490+x+512+x=2076$

$3x+1002=2076 \Rightarrow 3x=1074 \Rightarrow x=358$

المسافة بين المدينة ومكة = 358 كلم

المسافة بين المدينة والرياض = 848 كلم

المسافة بين الرياض ومكة = 870 كلم

-21

P نقطة منتصف $\overline{MN}$	معطى
$\overline{NP}\cong\overline{MP}$	تعريف نقطة المنتصف
$\overline{NP}=\overline{MP}=12$	تطابق الأضلاع
$OP\perp\overline{MN}\ ,\ \overline{OP}=12$	معطى
$ON^2=OP^2+PN^2$	نظرية فيثاغورس
$ON^2=12^2+12^2=288$	
$ON=16.9$	

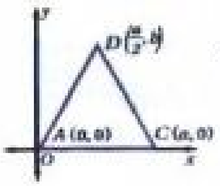
إذن المثلث ONP متطابق الضلعين وليس متطابق الأضلاع كذلك المثلث OMP.

-22

العبارات	المبررات
$\angle QUI \cong \angle LIU \cong \angle LEQ$	معطى
$UI \parallel LQ$	من الرسم
$\angle LIU \cong \angle ELQ$	زاويتان متناظرتان
$\angle ELQ \cong \angle LEQ$	نظرية التعدي لتطابق الزوايا
$\angle EUI \cong \angle EQL$	زاويتان متناظرتان
$\angle LEQ \cong \angle EQL$	نظرية التعدي لتطابق الزوايا
المثلث متطابق الأضلاع	تعريف المثلث متطابق الأضلاع

23- الحل: بما أن $\angle MPR$ متجاورة مع الزاوية 33° ⇐ فهي مكملة لها وفق تعريف الزاويتان المتكاملتان فإن $33 + \angle MPR = 180$ ⇐ $\angle MPR = 147^\circ$ ⇐ ΔRPM مثلث منفرج الزاوية.

24- الحل: يجب إثبات أن: $\overline{DC} = \overline{OD}$



طول OD: $d = \sqrt{(\frac{a}{2}-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (b)^2}$

طول DC: $d = \sqrt{(\frac{a}{2}-a)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (b)^2}$

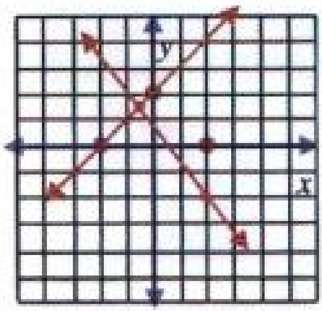
بما أن الطرفين متساويين إذن المثلث متطابق الضلعين.

26- صحيحة دائما.

27- صحيحة دائما.

28- الحل: نرسم إحداثيات L, K على المحور السيني والصادي.
نرسم عمودي من L أن المثلث قائم الزاوية مسافة تساوي KL.
تسقط عمودي من M على كل من المحور السيني والصادي لنوجد إحداثيات $M = (4, 8)$

30- (A) متطابق الأضلاع.



31- الحل: لرسم المستقيم نفرض نقطتين تمران بالمستقيم وتحققان معادلته:

$0=x$ ⇐ $y=2$ ⇐ $(0, 2)$

$0=y$ ⇐ $x=-2$ ⇐ $(-2, 0)$

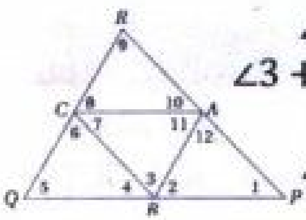
القطعة المستقيمة تقطع المستقيم في النقطة R إحداثياتها $(-0.5, 1.5)$

المسافة بين R و $(2, -2)$ هي:

$$d = \sqrt{(-0.5-2)^2 + (1.5+2)^2} = \sqrt{(-2.5)^2 + (3.5)^2} = 4.3$$

32- $3x-50 = 2x-5$
$3x-2x = -5+50$
$x = 45$

33- $3x-9+57=180$
$3x=180-57+9$
$x= 44$



34- $\angle 2, \angle 11$ — $\angle 4, \angle 7$ — $\angle 11, \angle 8$

35- $\angle 5, \angle 8$ — $\angle 1, \angle 10$ — $\angle 3 + 4, \angle 10$
$\angle 2 + 3, \angle 8$ — $\angle 6 + 7, \angle 12$ — $\angle 5, \angle 2$

36- $\angle 6 \cong \angle 3$ — $\angle 12 \cong \angle 3$ — $\angle 9 \cong \angle 3$

37- $\angle 4 \cong \angle 7$ — $\angle 10 \cong \angle 7$

38- $\angle 2 \cong \angle 11$ — $\angle 8 \cong \angle 11$ — $\angle 4 \cong \angle 11$

3-2 زوايا المثلث

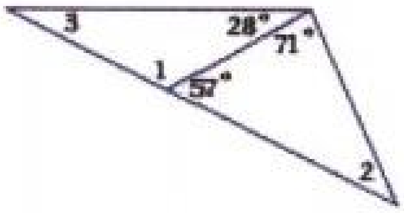
نظرية

- مجموع زوايا المثلث يساوي 180° فإذا كان لدينا ΔXYW فإن: $m\angle W + m\angle X + m\angle Y = 180^\circ$

ملاحظة: إذا علمنا قياس زاويتين في مثلث فإنه يمكننا إيجاد قياس الزاوية الثالثة.

مثال

أوجد قياس الزوايا المجهولة في الرسم.



$$71 + 57 + \angle 2 = 180^\circ$$
$$\angle 2 = 180^\circ - 57 - 71 = 52^\circ$$
$$57 + \angle 1 = 180^\circ$$
$$\angle 1 = 180^\circ - 57 = 123^\circ$$
$$\angle 1 + \angle 3 + 28 = 180^\circ$$
$$\angle 3 = 180^\circ - 28 - 123 = 29^\circ$$

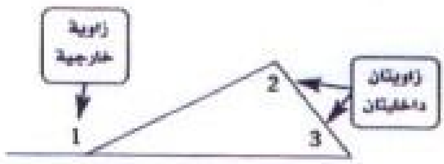
نظرية

- إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الآخر.

مثال، إذا كانت $\angle A \cong \angle F$ و $\angle C \cong \angle D$ ، فإن $\angle B \cong \angle E$.

نظرية

- قياس الزاوية الخارجة لمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.



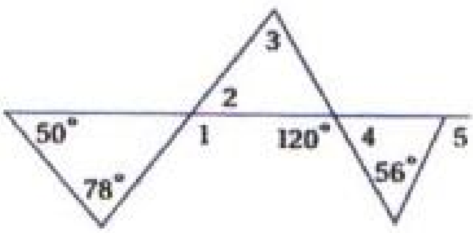
في الشكل المقابل:

$\angle 1$ هي الزاوية الخارجية للمثلث.

$\angle 2, \angle 3$ هما زاويتان داخليتان بعيدتان.

حسب النظرية $\angle 1 = \angle 3 + \angle 2$

مثال



أوجد قياس كل زاوية فيما يلي:

1) $m\angle 4$

$$\angle 120 + \angle 4 = 180^{\circ}$$

$$\angle 4 = 180 - 120 = 60^{\circ}$$

2) $m\angle 5$

$$\angle 56 + \angle 4 = \angle 5$$

$$\angle 5 = 56 + 60 = 116^{\circ}$$

انتبه تعلمت سابقا طريقتي البرهان الحر والبرهان ذا العمودين لإثبات نظرية أو نتيجة ما وهنا سوف نتعلم طريقة جديدة للبرهان تسمى البرهان التسلسلي حيث تنظم سلسلة من العبارات في ترتيب منطقي بدءاً بالعبارة المعطاة ثم تكتب كل عبارة داخل مستطيل ويكتب المبرر تحته ونستعمل الأسهم لربط العبارات.

تذكر جيدا:

النتيجة هي عبارة يمكن إثباتها بسهولة باستعمال النظرية ويمكن استعمالها كمبرر في البرهان.

نتائج:

1) الزاويتان الحادتان في مثلث قائم الزاوية متتامتان (مجموعهما 90°)
2) يوجد على الأكثر زاوية واحدة قائمة أو منفرجة في أي مثلث.

مثال

يشكل شراع التزلج على سطح الماء مثلثا قائم الزاوية قياس إحدى زواياه الحادة يساوي 68° فما قياس الزاوية الحادة الأخرى؟

قياس زاويتان في مثلث قائم متتامتان

$$\angle 68 + x = 90^{\circ}$$

$$x = 90 - 68 = 22$$

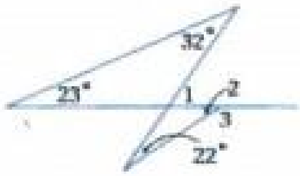
تدريبات وحلول

1- أوجد قياس الزاوية المجهولة في المثلث الموضح على الخريطة.

نفرض الزاوية x

$$x+52+58=180 \quad \Rightarrow \quad x=180-85-52=43$$

أوجد قياس كل زاوية مما يلي:



2- $m\angle 1$ 3- $m\angle 2$ 4- $m\angle 3$

$\angle 1 = 23 + 32 = 55°$

الزاوية المكملة لـ $\angle 1$: $180 - 55 = 125$

$\angle 3 = 125 + 22 = 147°$

$\angle 2 + 125 + 22 = 180°$

$\angle 2 = 180 - 125 - 22 = 33°$

أوجد قياس كل من الزاويتين الآتيتين:

5- في المثلث ΔABC

$\angle 1 + 25 + 90 = 180°$

$\angle 1 = 65°$

6- في المثلث ΔDFG

$\angle 2 + 65 + 90 = 180°$

$\angle 2 = 25°$

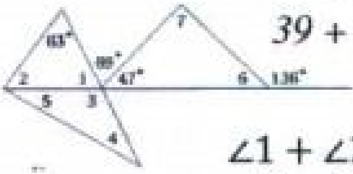
أوجد قياس الزاوية المجهولة في كل مما يلي:

7- $x + 47 + 40 = 180$

$x = 180 - 40 - 47 = 93°$

8- $39 + x + x = 180$

$39 + 2x = 180 = 70.5°$



إذا كان $m\angle 4 = m\angle 5$ فأوجد قياس كل زاوية فيما يلي:

9- $\angle 1 + 69 + 47 = 180°$

$\angle 1 = 180 - 69 - 47$

$\angle 1 = 64°$

10- $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

$\angle 2 = 180 - 63 - 64$

$\angle 2 = 53°$

11- $\angle 1 + \angle 3 = 180°$

$\angle 3 = 180 - 64$

$\angle 3 = 116$

12- بما أن $\angle 5 = \angle 4$

نفرض $x = \angle 4 = \angle 5$

$x + x + \angle 3 = 180$

$2x = 180 - 116$

$x = 32$

$\angle 4 = \angle 5 = 32°$

14- $\angle 6 + 136 = 180°$

$\angle 6 = 180 - 136 = 44°$

إذا كان $m\angle DGF = 53$ و $m\angle AGC = 40$

فأوجد قياس كل زاوية:

15- $\angle 1 + 53 = 90°$

$\angle 1 = 90 - 53 = 37°$

16- $\angle 2 + 40 = 90°$

$\angle 2 = 90 - 40 = 50°$

17- $\angle 3 + 40 + 90 = 180°$

$\angle 3 = 180 - 90 - 40 = 50°$

18- $\angle 4 + 50 + 90 = 180°$

$\angle 3 = 180 - 90 - 50 = 4°$

19- $\angle 2 + 34 + 43 = 180^\circ$

$\angle 2 = 180 - 34 - 43 = 130^\circ$

$\angle 2 + 34 = \angle 1 \quad \Rightarrow \quad \angle 1 = 34 + 103 = 137^\circ$

21- $\angle 1 + 101 + 26 = 180^\circ$

$\angle 1 = 180 - 101 - 26 = 53^\circ$

22- $\angle 2 = 26 + 103$

$\angle 2 = 129^\circ$

23- $\angle 3 = 52 + 101$

$\angle 3 = 153^\circ$

في الأسئلة 24-28، اكتب برهانا من النوع المشار إليه:

24- برهان تسلسلي:

$\boxed{\angle FGI \cong \angle IGH}$ ← معطى ← $\boxed{\angle G + \angle F + \angle I = 180}$ ← تعريف الزاوية القائمة ← $\boxed{\angle G + \angle F = 90}$ ← بالطرح

$\boxed{\angle G + \angle H + \angle I = 180}$ ← مجموع زوايا مثلث ← $\boxed{\angle G + \angle H + 90 = 180}$ ← تعريف الزاوية القائمة ← $\boxed{\angle G + \angle H = 90}$ ← بالطرح

$\boxed{\angle G + \angle H = \angle G + \angle F}$ بالتعويض

← بالطرح ← $\boxed{\angle H = \angle F}$

25- برهان ذي عمودين:

العبارات	المبررات
$ABCD$ شكل رباعي	معطى
$\angle B + \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ$	مجموع زوايا مثلث
$\angle D + \angle DAC + \angle ACD = 180^\circ$	مجموع زوايا مثلث
$\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$	منصف الزاوية AC
$\angle BCA + \angle ACD = \angle BCD$	منصف الزاوية AC
$\angle B + \angle BAC + \angle BCA + \angle D +$	بالجمع
$\angle DAC + \angle ACD = 180 + 180$	بالتعويض
$\angle B + \angle DAB + \angle BCD + \angle D = 360$	

26- برهان تسلسلي للنتيجة 3.1:

$\boxed{\angle H = 90^\circ}$ ← معطى

$\boxed{\angle G + \angle H + \angle J = 180}$ ← مجموع زوايا مثلث ← $\boxed{\angle G + \angle J + 90 = 180}$ ← تعريف الزاوية القائمة ← $\boxed{\angle H + \angle G = 90}$ ← بالطرح ← $\boxed{\text{الزاويتان متتامتان}}$

27- برهان حر للنتيجة 3.2:
بما أن مجموع زوايا مثلث = 180 لو قسمنا 180÷ 3= 60 .
فإن مجموع الزاويتين الأخرتين = 120 وبالتالي فالمثلث منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

28- برهان ذي عمودين للنظرية 3.2:

العبارات	المبررات
ABCD شكل رباعي	معطى
$\angle D \cong \angle C\ ,\ \angle F \cong \angle A$	مجموع زوايا مثلث
$\angle A + \angle C + \angle B = 180^\circ$	مجموع زوايا مثلث
$\angle F + \angle D + \angle E = 180^\circ$	بالتعويض
$\angle A + \angle C + \angle B = \angle F + \angle D + \angle E$	من تطابق الزوايا
$\angle B = \angle E$	تعريف تساوي الزوايا
$\angle B \cong \angle E$	

30- $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

31- الحل: ناجي تعبيره صحيح أي أن: $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4$
وذلك طبقاً لنظرية الزاوية الخارجة حيث $\angle 4$ زاوية خارجية في المثلث $\angle 1, \angle 2$ زاويتين داخليتين بعيدتين.

33- أولا نوجد الزاوية الثالثة من نظرية مجموع الزوايا $x+35+80=180$
$x=65$ ثم نجرب جميع الزوايا كزوايا داخلية بعيدة:
$80+65=145\ ,\ 35+65=100\ ,\ 35+80=115$
جميع هذه الخيارات ممكن أن تكون زوايا خارجية.
وبذلك يكون الاختيار الصحيح (A) 165

حدد المثلثات من النوع المشار إليه، إذا كان:

34- مختلف الأضلاع: ΔAED

35- منفرج الزاوية: ΔAED

36- متطابق الضلعين: ΔEBC

37- أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين التاليين: $y=x+6\ ,\ y=x-10$
ميل المستقيمين = (1) ⇐ المستقيمين متوازيين. ⇐ ميل العمودي = (-1)

- نستعمل المقطع الصادي للمستقيم a، والنقطة $(0,6)$ كنقطة طرف للقطعة المستقيمة العمودية لكتابة معادلة المستقيم العمودي:
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 6 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x + 6$$
- نوجد نقطة تقاطع المستقيم مع b.
$$-x + 6 = x - 10 \Rightarrow -x - x = -16 \Rightarrow x = 8$$
- لإيجاد y نعوض في معادلة المستقيم العمودي:
$$y = -x + 6 = -8 + 6 = -2$$
- المسافة بين النقطتين $(0,\ 6)\ ,\ (8\ ,\ -2)$
$$d = \sqrt{(8-0)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{128} = 11.3$$
∴ المسافة بين المستقيمين هي 11.3 وحدات.

38- الحل: الزاوية المقابلة بالرأس للزاوية x مطابقة لها ومساوية لها وهي زاوية داخلية متخالفة مع الزاوية $2x$.
من تعريف الزاويتين المتخالفتين: $2x + x = 180$
$$3x = 180 \Rightarrow x = 60$$

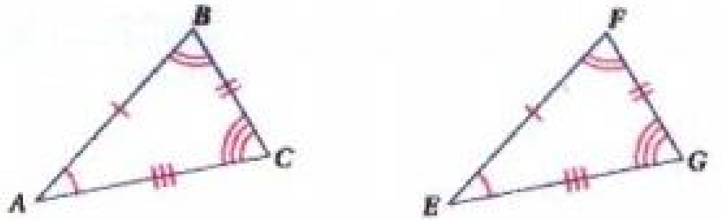
اكتب الخاصية المستعملة (الانعكاس، التماثل، التعدي) في كل عبارة مما يلي:

39- الحل: الانعكاس. 40- الحل: التماثل. 41- الحل: التعدي.

3-3 المثلثات المتطابقة

تذكر: نقول عن المثلثات أنها متطابقة إذا كان لها نفس القياس والشكل.
مفهوم التطابق: يتطابق المثلثان إذا وإذا فقط تطابقت أجزاؤها المتناظرة.

انتبه الأضلاع المتطابقة في مثلثات متطابقة تقابلها زوايا متطابقة.



مثال

إذا كانت أطوال أضلاع المثلثين CEO , QDP كما يلي:

$PD=5$, $DQ=7$, $PQ=11$, $EC=7$, $OC=5$, $OE=11$

1) ما الزوايا والأضلاع المتناظرة والمتطابقة؟

$\angle P \cong \angle O$ ، $\angle Q \cong \angle E$ ، $\angle D \cong \angle C$

$\overline{CE} \cong \overline{DQ}$ ، $\overline{EO} \cong \overline{QP}$ ، $\overline{CO} \cong \overline{DP}$

2) ما المثلثات المتطابقة.

$\Delta CEO \cong \Delta DQP$

تذكر: درست سابقا نظريات التعدي والانعكاس والتماثل لكل من المساواة والزوايا والقطع المستقيمة وتنطبق هذه الخصائص أيضا على تطابق المثلثات.

نظرية 3.4 خصائص تطابق المثلثات

الانعكاس

$\Delta JKL \cong \Delta JKL$

التماثل

إذا كان $\Delta JKL \cong \Delta PQR$، فإن $\Delta PQR \cong \Delta JKL$

التعدي

إذا كان $\Delta JKL \cong \Delta PQR$ و $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

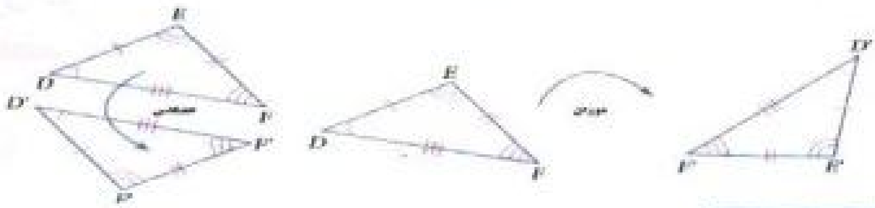
فإن $\Delta JKL \cong \Delta XYZ$.

نتيجة هامة:

تحويلات التطابق هي التحويلات التي إذا أجريت على مثلث فإن قياساته وشكله لا تتغير بل تبقى ثابتة وهي ثلاث تحويلات تتمثل في الانسحاب والانعكاس والدوران.

تعريف تحويلات التطابق: في الأشكال أدناه $\triangle ABC$ يطابق $\triangle DEF$. إذا سحبت أو نقلت $\triangle DEF$ إلى أعلى ثم إلى اليمين، فسيبقى مطابقا للمثلث $\triangle ABC$.

لا يتأثر تطابق المثلثين $\triangle ABC$ ، $\triangle DEF$ بتحويلات الانعكاس والدوران.



مثال

رؤوس ΔLMN هي $L(1,1)$, $M(3,5)$, $N(5,1)$ وإحداثيات رؤوس $\Delta L'M'N'$ هي $L'(-1,-1)$, $M'(-3,-5)$, $N'(-5,-1)$. تحقق من أن:

1) $\Delta LMN \cong \Delta L'M'N'$

نستعمل قانون المسافة لنجد طول كل ضلع في المثلثين.

$$LM = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$MN = \sqrt{(5-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$LN = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{16+0} = 4$$

$$L'M' = \sqrt{(-3+1)^2 + (-5+1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$M'N' = \sqrt{(-5+3)^2 + (-1+5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$L'N' = \sqrt{(-5+1)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{16+0} = 4$$

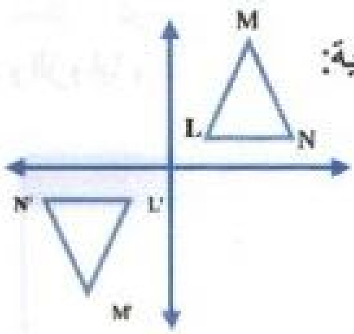
من تعريف التطابق للقطع المستقيمة نجد أن:

$\overline{MN} \cong \overline{M'N'}$ ، $\overline{LM} \cong \overline{L'M'}$ ، $\overline{LN} \cong \overline{L'N'}$

وباستعمال المنقلة نجد أن قياسات زوايا المثلثين متساوية:

$\angle L \cong \angle L'$ ، $\angle N \cong \angle N'$ ، $\angle M \cong \angle M'$

$\therefore \Delta LMN \cong \Delta L'M'N'$



2) اذكر تحويل التطابق للمثلثين.

دوران حول نقطة الأصل.

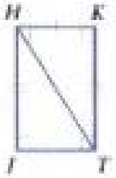
تمرينات وحلول

حدد الزوايا والأضلاع المتناظرة والمتطابقة، ثم المثلثات المتطابقة في الشكلين الآتيين:

1- $\angle D \cong \angle A$ ، $\angle C \cong \angle B$ ، $\angle AFC \cong \angle DFB$

$\overline{FA} \cong \overline{FD}$ ، $\overline{FB} \cong \overline{FC}$ ، $\overline{AC} \cong \overline{DB}$

$\Delta AFC \cong \Delta DFB$



2- $\angle J \cong \angle K$ ، $\angle HTJ \cong \angle KHT$ ، $\angle HTK \cong \angle THJ$

$\overline{JT} \cong \overline{HK}$ ، $\overline{KT} \cong \overline{HJ}$ ، $\overline{HT}$ ضلع مشترك

$\Delta CEO \cong \Delta DQP$

3- $\Delta EOF \cong \Delta BNC \cong \Delta LMK \cong \Delta HPJ$

4- رؤوس ΔSUV هي $S(0,4)$, $U(0,0)$, $V(2,2)$ وإحداثيات رؤوس $\Delta S'U'V'$ هي $S'(0,-4)$, $U'(0,0)$, $V'(-2,-2)$، تحقق من أن:

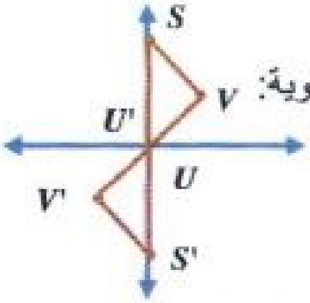
$\Delta SUN \cong \Delta S'U'N'$

نستعمل قانون المسافة لنجد طول كل ضلع في المثلثين.

$$S'U' = \sqrt{(0-0)^2 + (-5+1)^2} = \sqrt{0+16} = 4 \qquad SU = \sqrt{(0-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{0+16} = 4$$

$$U'V' = \sqrt{(-2-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{8} \qquad UV = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$$

$$S'V' = \sqrt{(-2-0)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{8} \qquad SV = \sqrt{(2-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{8}$$



من تعريف التطابق للقطع المستقيمة نجد أن:

$\overline{SV} \cong \overline{S'V'}$ ، $\overline{SU} \cong \overline{S'U'}$ ، $\overline{UV} \cong \overline{U'V'}$

وباستعمال المنقلة نجد أن قياسات زوايا المثلثين متساوية:

$\angle U \cong \angle U'$ ، $\angle V \cong \angle V'$ ، $\angle S \cong \angle S'$

$\therefore \Delta SUV \cong \Delta S'U'V'$

المثلثين متطابقين بدوران زاويته 180 حول U.

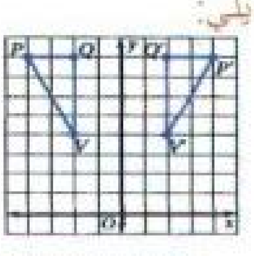
5- $\angle F \cong \angle K$ ، $\angle C \cong \angle J$ ، $\angle H \cong \angle L$

$\overline{FH} \cong \overline{KL}$ ، $\overline{FC} \cong \overline{KJ}$ ، $\overline{CH} \cong \overline{JL}$ $\Leftarrow$ $\Delta HFC \cong \Delta LJK$

6- $\angle E \cong \angle G$ ، $\angle EFH \cong \angle GFH$ ، $\angle EHF \cong \angle GHF$

$\overline{HE} \cong \overline{GF}$ ، $\overline{EF} \cong \overline{HG}$ ، $\overline{HF}$ ضلع مشترك $\Leftarrow$ $\Delta FEH \cong \Delta FGH$

تحقق من تطابق كل مثلثين واذكر تحويل التطابق في كل مما يلي:

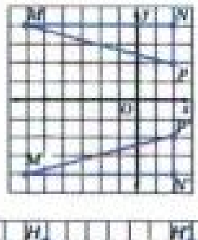


7- $\Delta PVQ \cong \Delta P'V'Q'$

$\angle P \cong \angle P'$ ، $\angle V \cong \angle V'$ ، $\angle Q \cong \angle Q'$

$\overline{PV} \cong \overline{P'V'}$ ، $\overline{VQ} \cong \overline{V'Q'}$ ، $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$

انعكاس حول محور الصادات.

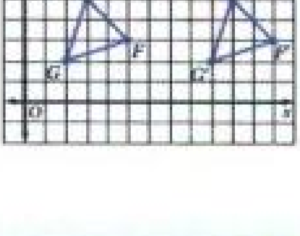


8- $\Delta MNP \cong \Delta M'N'P'$

$\angle P \cong \angle P'$ ، $\angle M \cong \angle M'$ ، $\angle N \cong \angle N'$

$\overline{NM} \cong \overline{N'M'}$ ، $\overline{NP} \cong \overline{N'P'}$ ، $\overline{MP} \cong \overline{M'P'}$

انعكاس حول محور السينات.

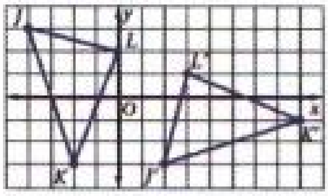


9- $\Delta FGH \cong \Delta F'G'H'$

$\angle H \cong \angle H'$ ، $\angle G \cong \angle G'$ ، $\angle F \cong \angle F'$

$\overline{GH} \cong \overline{G'H'}$ ، $\overline{GF} \cong \overline{G'F'}$ ، $\overline{FH} \cong \overline{F'H'}$

انسحاب بقدر V وحدات باتجاه اليمين



10- $\Delta JKL \cong \Delta J'K'L'$

$\angle L \cong \angle L'$ ، $\angle K \cong \angle K'$ ، $\angle J \cong \angle J'$

$\overline{JK} \cong \overline{J'K'}$ ، $\overline{KL} \cong \overline{K'L'}$ ، $\overline{JL} \cong \overline{J'L'}$

دوران عكس عقارب الساعة بزاوية $270°$.

اذكر الزوايا والأضلاع المتطابقة لكل زوج من المثلثات المتطابقة:

11- $\Delta TUV \cong \Delta XYZ$

$\angle T \cong \angle X$ ، $\angle U \cong \angle Y$ ، $\angle V \cong \angle Z$

$\overline{TU} \cong \overline{XY}$ ، $\overline{YZ} \cong \overline{UV}$ ، $\overline{TV} \cong \overline{XZ}$

12- $\Delta BCF \cong \Delta DGH$

$\angle B \cong \angle D$ ، $\angle C \cong \angle G$ ، $\angle H \cong \angle F$

$\overline{BC} \cong \overline{DG}$ ، $\overline{CF} \cong \overline{GH}$ ، $\overline{BF} \cong \overline{DH}$

13- الحل: العبارة الأولى صحيحة وهي متكررة، وهي صحيحة لأن الأضلاع والزوايا مكونة بالترتيب.

14- الحل: نحتاج لمعرفة أن زوايا القاعدتين متساويتان.

15- $\Delta 6 \cong \Delta 5$ ، $\Delta 7 \cong \Delta 4$ ، $\Delta 3 \cong \Delta 8$ ، $\Delta 2 \cong \Delta 9$ ، $\Delta 10 \cong \Delta 1$

16- $\Delta 2 \cong \Delta 1 \cong \Delta 3 \cong \Delta 4$

$\Delta 6 \cong \Delta 5 \cong \Delta 10 \cong \Delta 9 \cong \Delta 8 \cong \Delta 7 \cong \Delta 12 \cong \Delta 11$

$\Delta 14 \cong \Delta 13 \cong \Delta 18 \cong \Delta 17 \cong \Delta 16 \cong \Delta 15 \cong \Delta 20 \cong \Delta 19$

17- الحل: عبارة خاطئة لأنه من الممكن أن تكون الزوايا المتناظرة متساوية ولكن أطوال الأضلاع مختلفة.

18- الحل: عبارة صحيحة.

20- الحل: $2x-4 = 12 \Leftarrow 2x = 16 \Leftarrow x=8$

21- $\angle L \cong \angle H$ ، $\angle P \cong \angle J$ ، $\angle K \cong \angle G$

$\overline{LP} \cong \overline{HJ}$ ، $\overline{LK} \cong \overline{HG}$ ، $\overline{KP} \cong \overline{GJ}$

22-

"تطابق المثلثات علاقة متماثلة"

المعطيات، $\triangle RST \cong \triangle XYZ$

المطلوب إثبات أن، $\triangle XYZ \cong \triangle RST$

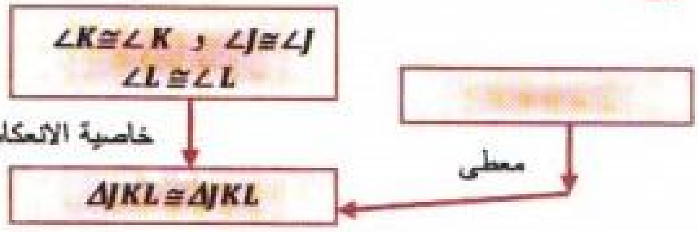
البرهان:

$\triangle XYZ \cong \triangle RST$	$\triangle RST \cong \triangle XYZ$	$\angle R \cong \angle X$, $\angle S \cong \angle Y$, $\angle T \cong \angle Z$, $\overline{RS} \cong \overline{XY}$, $\overline{ST} \cong \overline{YZ}$, $\overline{RT} \cong \overline{XZ}$	$\angle X \cong \angle R$, $\angle Y \cong \angle S$, $\angle Z \cong \angle T$, $\overline{XY} \cong \overline{RS}$, $\overline{YZ} \cong \overline{ST}$, $\overline{XZ} \cong \overline{RT}$
تطابق المثلثات	معطى	تعريف تطابق المثلثات	خاصية التماثل للزوايا

-23

البرهان:

-24



تطابق المثلثات

25-الحل: الجسور المستخدمة في إنشاء المباني والكباري العالية.

26- $\angle T \cong \angle NPT$ ، $\overline{PT} \cong \overline{SP}$

28-الحل: $AC = \sqrt{(2+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$\overline{KP} \cong \overline{GJ}$ الحل الصحيح هو (c)

29-الحل: $528cm^2$ (B)

أوجد قيمة x فيما يلي:

30 $x+40=115$

$x=115-40=75$

31 $x+42=100$

$x=100-42=58$

32 $2x+30=180$

$x=(180-30)\div 2=75$

33-أوجد قيمة x وطول كل ضلع في المثلث التالي:

$\overline{BC} \cong \overline{CD}$

$2x+4=10 \Leftarrow 2x=6 \Leftarrow x=3$

$\overline{BC} = 2x+4 = 2(3)+4 = 10$ ، $\overline{CD} = 10$

$\overline{BD} = x+2 = 3+2 = 5$

أوجد المسافة بين النقطتين:

34- $(1,6)$ ، $(-1,7)$

$$d = \sqrt{(1+1)^2 + (6-7)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

35- $(4,-2)$ ، $(8,2)$

$$d = \sqrt{(4-8)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

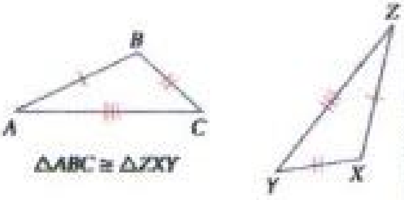
36- $(-3,-1)$ ، $(0,-6)$

$$d = \sqrt{(-3-0)^2 + (-1+6)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

3-4 إثبات التطابق - حالتي SAS. SSS

مسلمة

إذا تطابقت الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإن المثلثين متطابقان وتسمى هذه المسلمة مسلمة الأضلاع الثلاثة ويرمز لها SSS.



$\Delta ABC \cong \Delta ZXY$

مثال

لافتة تحذيرية تفيد أن "الطريق زلق عندما يكون رطبا" تتكون من مثلثين. إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ و $\overline{CB} \cong \overline{DC}$ أثبت أن: $\Delta ACB \cong \Delta ACD$

بما أنه من المعطى هناك ضلعين متناظرين متطابقين .

وبما أن $\overline{AC}$ ضلع مشترك بين المثلثين.

إذن الأضلاع المتناظرة الثلاثة متطابقة $\Leftarrow$ المثلثين متطابقين.

مثال

إذا كانت $A(1,1)$ $B(3,2)$ $C(2,5)$ $T(1,-1)$ $D(3,-3)$ $S(2,-5)$ هي رؤوس المثلثين ABC , TDS فهل المثلثان متطابقان؟ برر إجابتك.

نستخدم قانون المسافة بين النقطتين:

$$\overline{TD} = \sqrt{(3-1)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\overline{DS} = \sqrt{(2-3)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\overline{TS} = \sqrt{(2-1)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

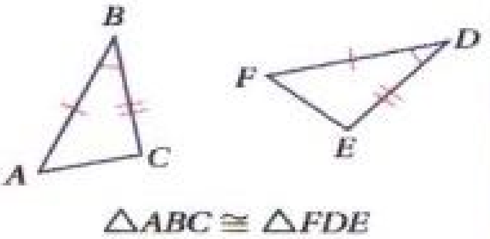
$$\overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$\overline{LP} \neq \overline{HJ}$ كذلك $\overline{LK} \neq \overline{HG}$ أيضا $\overline{KP} \neq \overline{GJ}$

إذن المثلثان غير متطابقان.

مسلمة

إذا طابق ضلعان وزاوية محصورة بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقين، ونرمز لهما بالرمز SAS.



$\triangle ABC \cong \triangle FDE$

مثـــــال

قضبان الإطار الداخلية تقسمه إلى ثمانية أجزاء، إذا كان $\overline{TU} \cong \overline{TX}$ و $\angle XTV \cong \angle UTV$ فبين أن: $\Delta TXV \cong \Delta UTV$.

$\overline{TU} \cong \overline{TX}$ معطى (ضلعين متطابقين)

$\angle XTV \cong \angle UTV$ معطى (زاوية)

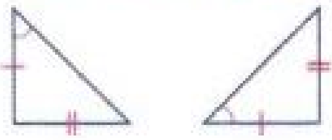
$\overline{TV}$ ضلع مشترك بين المثلثين.

∴ تطابق ضلعين وزاوية محصورة بينهما.

∴ $\Delta TXV \cong \Delta UTV$

مثـــــال

حدد المسلمة التي يمكنك استعمالها لإثبات أن المثلثين متطابقان، واكتب "غير ممكن" في الحالة التي لا يمكنك فيها إثبات التطابق.



1) هناك ضلعين متطابقين ولكن الزاوية المحصورة بينهما غير متطابقة ⇐ لا يمكن إثبات التطابق.

2) بما أن الأضلاع المتناظرة الثلاثة متطابقة، إذن من مسلمة SSS المثلثين متطابقين.

تدريبات وحلول

-1

العبارات	المبررات
$\overline{SQ}$ منتصف T	معطى
$\overline{TQ} = \overline{TS}$	تعريف نقطة المنتصف
$\overline{RT} = \overline{RT}$	ضلع مشترك خاصية الانعكاس
$\overline{SR} \cong \overline{QR}$	معطى
$\Delta SRT \cong \Delta QRT$	مسلمة SSS

-2 الحل: نستخدم قانون المسافة بين النقطتين:

$$\overline{EF} = \sqrt{(-2-4)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{(4-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$\overline{FG} = \sqrt{(-2+2)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{0+16} = 4$$

$$\overline{NP} = \sqrt{(2-2)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{0+16} = 4$$

$$\overline{EG} = \sqrt{(-2+4)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{4+0} = 2$$

$$\overline{MP} = \sqrt{(2-4)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{4+0} = 2$$

∴ المثلثين طبقا لمسلمة SSS متطابقين لأن الأضلاع الثلاثة المتناظرة متطابقة.

3- الحل: من المعطى هناك ضلعين في المثلثين متطابقين ومن نظرية تطابق زوايا المثلث بما أن $\angle T \cong \angle M$ و $\angle S \cong \angle N$ فإن الزاوية الثالثة $\angle P$ في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة R في المثلث الثاني وطبقا لمسلمة SAS فإن المثلثين متطابقين.

4- مسلمة SAS لأنه تطابق ضلعين وزاوية محصورة بينهما في المثلثين.

5- مسلمة SSS لأنه تطابق ثلاث أضلاع في المثلثين.

6-

العبارات	المبررات
$\overline{AC} \cong \overline{GC}$	معطى
$\overline{AE} = \overline{EG}$	تعريف نقطة المنتصف
$\overline{EC} = \overline{EC}$	ضلع مشترك بين المثلثين
$\Delta GEC \cong \Delta AEC$	مسلمة SSS

7- الحل: نستخدم قانون المسافة بين النقطتين:

$$\overline{FG} = \sqrt{(3-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\overline{JK} = \sqrt{(-2+1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$
$$\overline{GH} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$
$$\overline{KL} = \sqrt{(-5+2)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$
$$\overline{FH} = \sqrt{(2-2)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{0+36} = 6$$
$$\overline{JL} = \sqrt{(-5+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$\overline{JK} \neq \overline{FG}$ كذلك $\overline{KL} \neq \overline{GH}$ أيضا $\overline{JL} \neq \overline{FH}$

إذن المثلثان غير متطابقان.

8- الحل: نستخدم قانون المسافة بين النقطتين:

$$\overline{FG} = \sqrt{(2-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$
$$\overline{JK} = \sqrt{(4-3)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$
$$\overline{GH} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$
$$\overline{KL} = \sqrt{(1-4)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$
$$\overline{FH} = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$
$$\overline{JL} = \sqrt{(1-3)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$\overline{JK} \cong \overline{FG}$ و $\overline{KL} \cong \overline{GH}$ و $\overline{JL} \cong \overline{FH}$

$\therefore$ طبقا لمسلمة SSS المثلثين متطابقين.

اكتب برهانا حسب النوع المشار إليه:

9- برهان ذو عمودين:

العبارات	المبررات
$\overline{KM} \parallel \overline{LJ}$	معطى
$\angle MJL \cong \angle KMJ$	زاويتان داخليتان متبادلتان
$\overline{JM} \cong \overline{JM}$	ضلع مشترك بين المثلثين
$\overline{LJ} \cong \overline{KM}$	معطى
$\Delta JKM \cong \Delta MLJ$	مسلمة SAS

10 - برهان تسلسلي:

11 - الحل: بما أنه يتطابق ضلعين وزاوية محصورة بينهما في كل من المثلثين فإنه طبقا لمسلمة SAS المثلثين متطابقين.

12 - الحل: لا يمكن إثبات التطابق لعدم وجود ضلع مشترك بينهما.

13 - اكتب برهانا تسلسليا:

14 - الحل: بما أن $\overline{HF} = \overline{EF}$ و $\overline{FG}$ ضلع مشترك بين المثلثين، وبما أن G هي منتصف $\overline{FG}$ فمن تعريف نقطة المنتصف $\overline{GE} = \overline{GH}$.

∴ طبقا لمسلمة SSS المثلثين متطابقين.

15 -

العبارات	المبررات
$\Delta MRN \cong \Delta QRP$	معطى
$\angle MNP \cong \angle QPN$	معطى
$\overline{MN} \cong \overline{PQ}$	تعريف تطابق المثلثات
$\angle MNR \cong \angle QRP$	تعريف تطابق المثلثات
$\angle M \cong \angle Q$	لأن $\Delta MRN \cong \Delta QRP$
$\overline{QR} = \overline{MR}$	لأن $\Delta MRN \cong \Delta QRP$
$\overline{NP}$ ضلع مشترك	مسلمة SSS
∴ $\Delta MNP \cong \Delta QPN$	

16 -

العبارات	المبررات
$\Delta GHJ \cong \Delta LKJ$	معطى
$\overline{KL} = \overline{HG}$	تعريف تطابق المثلثات
$\overline{GL} = \overline{GL}$	خاصية الانعكاس
$KG = KJ + JG$	جمع القطع المستقيمة
$HL = HJ + JL$	جمع القطع المستقيمة
$KG = HL$	من تطابق المثلثين
$KG \cong HL$	تعريف تساوي زاويتين
∴ $\Delta LKG \cong \Delta GHL$	مسلمة SSS

17- الحل: تستعمل مسلمة SSS لبرهنة تطابق مثلثين بإثبات أن كل ضلع في مثلث يطابق الضلع المقابل أو نظيره في المثلث المراد إثبات أنه متطابق معه.

19- الحل: زيد تبريره صحيح لأنه لا يوجد ثلاث أضلاع متناظرة متطابقة في المثلثين كذلك لا يوجد ضلعين وزاوية محصورة بينهما متطابقة في المثلثين.

20-

العبارات	المبررات
$\Delta GHJ \cong \Delta LKJ$	معطى
$\overline{KL} = \overline{HG}$	تعريف تطابق المثلثات
$\overline{GL} = \overline{GL}$	خاصية الانعكاس
$KG=KJ + JG$	جمع القطع المستقيمة
$HL = HJ + JL$	جمع القطع المستقيمة
$KG = HL$	من تطابق المثلثين
$KG \cong HL$	تعريف تساوي زاويتين
$\therefore \Delta LKG \cong \Delta GHL$	مسلمة SSS

21- الحل: عن طريق إثبات أن الأضلاع الثلاثة المتناظرة في المثلثين متطابقة (SSS).
عن طريق إثبات أن ضلعين وزاوية محصورة بينهما يتطابقان مع نظائرهما في مثلث آخر (SAS).

22- $a+b = 90$ (C).

سم المثلثين المتطابقين في كل شكل مما يلي:

23 $\Delta DEC \cong \Delta ABC$ 24 $\Delta PLM \cong \Delta MNP$ 25 $\Delta XWZ \cong \Delta XYZ$

26-31 - أوجد قياس كل من الزوايا التالية مع العلم أن $\overline{PQ} \perp \overline{QR}$:

$$\angle 6 + 90 + 56 = 180^\circ \Rightarrow \angle 6 = 180 - 90 - 56 \Rightarrow \angle 6 = 34^\circ$$
$$\angle 5 + 34 + 78 = 180^\circ \Rightarrow \angle 5 = 180 - 78 - 34 \Rightarrow \angle 5 = 68^\circ$$
$$\angle 4 + \angle 5 = 90^\circ \Rightarrow \angle 4 = 90 - 68 \Rightarrow \angle 4 = 22^\circ$$
$$\angle 3 + 22 + 56 = 180^\circ \Rightarrow \angle 3 = 180 - 56 - 22 \Rightarrow \angle 3 = 102^\circ$$
$$\angle 2 + \angle 3 = 1800^\circ \Rightarrow \angle 2 = 180 - 102 \Rightarrow \angle 2 = 78^\circ$$
$$\angle 1 + 43 + 78 = 180^\circ \Rightarrow \angle 5 = 180 - 78 - 43 \Rightarrow \angle 1 = 59^\circ$$

32- معدل التغير: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3.3-4.5}{2-1} \Leftarrow \frac{-1.2}{1} = -1.2$

33- معدل التغير من الثالث إلى الرابع: $\frac{3.8-4}{4-3} = \frac{-0.2}{1} = -0.2$
معدل التغير من الربع الثالث إلى الرابع أكبر من معدل التغير من الربع الأول إلى الثاني.

-34 $\overline{BE} \cong \overline{EC}$ -35 $\angle CBD \cong \angle ABD$ -36 $\angle BDC \cong \angle BDA$

-37 $\overline{DC} \cong \overline{AD}$ -38 $\angle EAC \cong \angle BAE$ -39 $\angle EXD \cong \angle BXA$

اختبار نصف الفصل الثالث

1- الحل: المثلث متطابق الضلعين وحاد الزوايا.

2- الحل: $\Delta HJD \cong \Delta GJH \cong \Delta FJD \cong \Delta FJG$

أيضا: $\Delta FDH \cong \Delta FGH \cong \Delta DFG \cong \Delta DHG$

3- الحل: ΔFJG متطابق الأضلاع $\Leftarrow$ $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$

$2x = 4x - 7 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = 3.5$

4- الحل: $\overline{AB} = 2(x) = 2(3.5) = 7$

$\overline{BC} = 4x - 7 = 4(3.5) - 7 = 7$

$\overline{AC} = x + 3.5 = 3.5 + 3.5 = 7$

5- $\angle 1 + 50 + 70 = 180^{\circ}$

$\angle 1 = 180 - 50 - 70$

$\angle 1 = 60^{\circ}$

6- $\angle 2 + 70 = 180^{\circ}$

$\angle 2 = 180 - 70$

$\angle 2 = 110^{\circ}$

7- $\angle 3 + 110 + 21 = 180^{\circ}$

$\angle 3 = 180 - 110 - 21$

$\angle 3 = 49^{\circ}$

8- $\angle 1 + 47 + 57 = 180^{\circ}$

$\angle 1 = 180 - 47 - 57$

$\angle 1 = 76^{\circ}$

9- $\angle 2 \cong \angle 1$

$\angle 2 = 76^{\circ}$

10 $\angle 3 + 76 + 55 = 180^{\circ}$

$\angle 3 = 180 - 55 - 76$

$\angle 3 = 49^{\circ}$

11- الحل: الزاويتين متطابقتين إذا فرضنا إحداهما x تكون الثانية x.

$x + x + 45 = 180 \Rightarrow 2x + 45 = 180 \Rightarrow x = 67.5$

12- الحل: $\angle J \cong \angle M$ ، $\angle K \cong \angle N$ ، $\angle L \cong \angle P$

$\overline{JK} \cong \overline{MN}$ ، $\overline{KL} \cong \overline{NP}$ ، $\overline{JL} \cong \overline{MP}$

13- الحل: نستعمل قانون المسافة لنجد طول كل ضلع في المثلثين.

$J'K' = \sqrt{(3-7)^2 + (-7+7)^2}$
$= \sqrt{4 + 16} = 4$

$K'L' = \sqrt{(7-3)^2 + (-1+7)^2}$
$= \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$

$J'L' = \sqrt{(7-7)^2 + (-1+7)^2}$
$= \sqrt{0 + 36} = 6$

$JK = \sqrt{(3-7)^2 + (7-7)^2}$
$= \sqrt{16 + 0} = 4$

$KL = \sqrt{(7-3)^2 + (1-7)^2}$
$= \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$

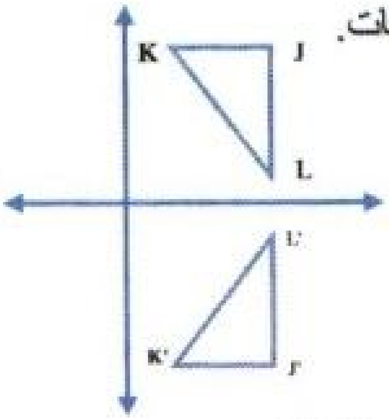
$JL = \sqrt{(7-7)^2 + (1-7)^2}$
$= \sqrt{0 + 36} = 6$

من تعريف التطابق للقطع المستقيمة نجد أن:

$\overline{JK} \cong \overline{J'K'}$ ، $\overline{KL} \cong \overline{K'L'}$ ، $\overline{JL} \cong \overline{J'L'}$

ومن قياس الزوايا في الرسم نجد أنها متطابقة إذن المثلثين متطابقين.

14- الحل: انعكاس حول محور السينات.



15- الحل: نستخدم قانون المسافة بين النقطتين:

$$\overline{DB} = \sqrt{(-4-3)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$
$$\overline{DG} = \sqrt{(1+4)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$
$$\overline{BG} = \sqrt{(1+3)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\overline{JM} = \sqrt{(-2-4)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$\overline{ML} = \sqrt{(-1+2)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$
$$\overline{JL} = \sqrt{(-1+4)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$\overline{JM} \cong \overline{BD}$ و $\overline{ML} \cong \overline{DG}$ و $\overline{JL} \cong \overline{BG}$

$\therefore$ طبقا لمسلمة SSS المثلثين متطابقين.

16- الحل: نستخدم قانون المسافة بين النقطتين:

$$\overline{TU} = \sqrt{(-3+6)^2 + (-3+6)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$
$$\overline{UV} = \sqrt{(-3+3)^2 + (-6+3)^2} = \sqrt{0+9} = 3$$
$$\overline{TV} = \sqrt{(-3+6)^2 + (-6+6)^2} = \sqrt{9+0} = 3$$

$$\overline{XY} = \sqrt{(3-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$
$$\overline{YZ} = \sqrt{(0-3)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{9+0} = 3$$
$$\overline{XZ} = \sqrt{(0-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+16} = 3$$

$\overline{XY} \cong \overline{TU}$ و $\overline{YZ} \cong \overline{UV}$ و $\overline{XZ} \cong \overline{TV}$

$\therefore$ طبقا لمسلمة SSS المثلثين متطابقين.

-17

العبارات	المبررات
$\Delta ABF \cong \Delta EDF$	معطى
$\overline{BF} \cong \overline{DF}$	تعريف تطابق المثلثات
$\overline{CF}$ تنصف $\angle DFB$	معطى
$\angle CFB \cong \angle CFD$	تعريف الزاوية المنصفة
$\overline{CF} \cong \overline{CF}$	ضلع مشترك (خاصية الانعكاس)
$\therefore \Delta BCF \cong \Delta DCF$	مسلمة SSS

3-5 إثبات التطابق - حالتي ASA. AAS

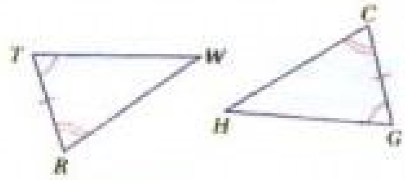
تعلمت في الدرس السابق طريقتين لإثبات تطابق المثلثات هما:

1) تطابق الأضلاع الثلاثة المتناظرة في المثلثين (SSS).
2) تطابق ضلعين وزاوية محصورة بينهما مع نظائرهما في مثلث (SAS)

ستتعلم هنا طريقتين جديدتين لإثبات تطابق مثلثين:

مسلمة التطابق بـ: زاوية – ضلع – زاوية

إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان ويرمز لهما بالرمز ASA.



$\angle RTW \cong \angle CGH$

مثال

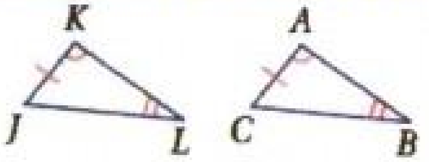
المعطيات: $\angle CDA \cong \angle BAD$ و $\angle CAD \cong \angle BDA$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABD \cong \Delta DCA$

بما أن $\angle CAD \cong \angle BDA$ و بما أن $\overline{AD}$ ضلع مشترك، بين المثلثين ΔDCA و ΔABD وبما أن $\angle CDA \cong \angle BAD$ فإن $\angle BAC \cong \angle BAC$ ومن مسلمة ASA فإن المثلثين ΔDCA و ΔABD متطابقان.

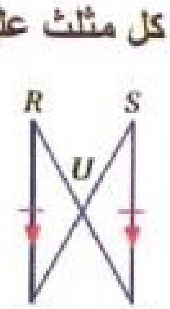
نظرية

- **إذا تطابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها مع مثلث آخر يكون المثلثان متطابقان ويرمز لهما بالرمز AAS.**



مثال: $\Delta JKL \cong \Delta CAB$

انتبه **إذا كان هناك مثلثان متداخلان يفضل أن يرسم كل مثلث على حدا وتوضح الأجزاء المتطابقة.**

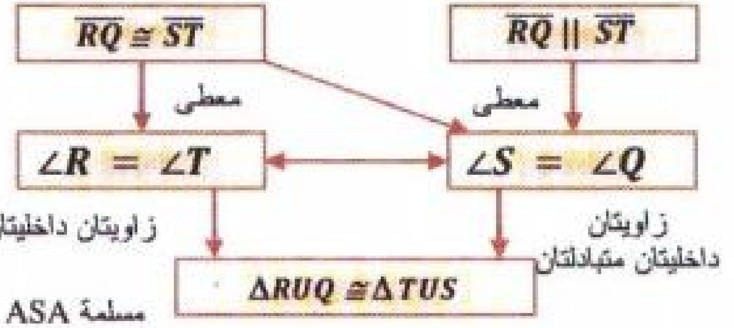


مثال

اكتب برهانا تسلسليا:

المعطيات: $\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$ و $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta RUQ \cong \Delta TUS$



تعلمت الآن أربع طرق لإثبات تطابق مثلثين فيما يلي:

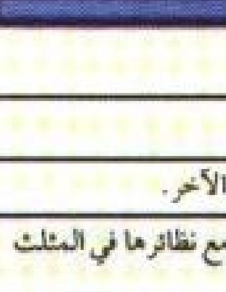
ملخص المفاهيم

الطريقة	تستعمل عندما...
تعريف المثلثين المتطابقين	العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة.
SSS	الأضلاع الثلاثة في مثلث تطابق نظائرها في المثلث الآخر.
SAS	يتطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث مع نظائرها في المثلث الآخر.
ASA	تتطابق زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث مع نظائرها في المثلث الآخر.
AAS	تتطابق زاويتان وضلع غير محصور بينها في مثلث مع نظائرها في المثلث الآخر.

مثال

في الشكل المقابل مثلثان: إذا كان $AB=AD=28cm$، $DC=CB=11cm$.

فهل $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ ؟ برر إجابتك.



$\overline{AB} \cong \overline{AD}$ معطى

$\overline{DC} \cong \overline{CB}$ معطى

$\overline{AC} \cong \overline{AC}$ ضلع مشترك

من مسلمة SSS لتطابق المثلثات نجد أن: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

تدريبات وحلول

1- برهان حر:

بما أن $\overline{EG} \cong \overline{HK}$ من المعطى والزاوية $\angle DGH \cong \angle DHG$ فإن مكملتي هاتين الزاويتين متطابقتين أيضا أي $\angle DGE \cong \angle DHK$ ومن مسلمة SAS نجد أن المثلثين متطابقين.

2- برهان تسلسلي:

$\overline{XW} \parallel \overline{YZ}$

معطى

$\angle XWY \cong \angle WYZ$ زاويتان داخليتان متبادلتان

$\angle XYW \cong \angle YWZ$ زاويتان داخليتان متبادلتان

$\overline{WY} \cong \overline{WY}$ ضلع مشترك خاصية الانعكاس

$\Delta WXY \cong \Delta YZW$ مسلمة AAS

3- الحل: من المعطى هناك طولي ضلعين في كلا من المثلثين متطابقين وهناك زاويتان متناظرتان متطابقتان $\angle L \cong \angle T$ ولكن هذه الزاوية غير محصورة بين الضلعين ⇐ لا نستطيع إثبات حالة التطابق من المعلومات المعطاة.

4- برهان حر:

من المعطى $\overline{DL}$ تنصف $\overline{BN}$ ⇐ $\overline{XB} \cong \overline{XN}$ أيضا $\angle LNX \cong \angle DXB$ لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس ومن المعطى $\angle XLN \cong \angle XDB$ وطبقا لمسلمة AAS فإن $\Delta NXL \cong \Delta DXB$ ومن تعريف تطابق المثلثات نستنتج أن $\overline{LN} \cong \overline{DB}$.

5- برهان تسلسلي:

$\angle 3 = \angle 2 , \angle Q \cong \angle M$

معطى

$\angle 4 \cong \angle 1$ زاويتان مكملتان لـ 3,2

$\Delta MLP \cong \Delta QLN$ مسلمة ASA

$\overline{PQ} \cong MN$

معطى

$\overline{NP} \cong NP$ ضلع مشترك خاصية الانعكاس

$\overline{NQ} \cong MP$

6- الحل: بما أن F هي منتصف $\overline{DG}$ فمن تعريف نقطة المنتصف $\overline{DF} \cong \overline{FG}$ ومن المعطى $\overline{CD} \cong \overline{GH}$ أيضا $m\angle CFD = 29^\circ$ ، ومن هنا نستنتج أن $m\angle GFH = 29^\circ$ لأنهما متقابلتان بالرأس متطابقتان ولكن ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما لا تحقق شروط أي نظرية من نظريات التطابق ⇐ لا نستطيع إثبات حالة التطابق من المعلومات المعطاة.

7- الحل: بفرض أن F هي منتصف $\overline{CH}$ فمن تعريف نقطة المنتصف $\overline{CF} \cong \overline{FH}$ ومن المعطى $\overline{CH} \cong \overline{DG}$ ⇐ أجزاء القطع المستقيمة متطابقة ⇐ $\overline{GF} \cong \overline{DF}$ ، أيضا $\angle GFH \cong \angle CFD$ لأنهما متقابلتان بالرأس وطبقا لمسلمة SAS فإن $\Delta HFG \cong \Delta CFD$.

8- برهان تسلسلي:

9- برهان حر: بما أن $\overline{CG}$ ضلع مشترك في المثلثين فمن خاصية الانعكاس $\overline{CG} \cong \overline{CG}$ أيضا $\overline{GH} \cong \overline{EC}$ و بما أن $\overline{EG} = \overline{EC} + \overline{CG}$ ، $\overline{CH} = \overline{CG} + \overline{GH}$ إذن $\overline{CH} \cong \overline{EG}$ وطبقا لمسلمة AAS نجد أن المثلثين $\Delta HJC \cong \Delta EFG$ ومن تعريف تطابق المثلثات نجد أن $\overline{HJ} \cong \overline{EF}$.

10- برهان ذا عمودين:

العبارات	المبررات
$\angle MYT \cong \angle NYT$	معطى
$\angle MTY \cong \angle NTY$	معطى
في المثلثين ΔNYT , ΔMYT	ضلع مشترك يحقق
$\overline{YT} \cong \overline{YT}$	خاصية الانعكاس
$\Delta NYT \cong \Delta MYT$	طبقا لقانون AAS
$\overline{MY} \cong \overline{YN}$	تعريف تطابق المثلثات
$\overline{RY} \cong \overline{RY}$	ضلع مشترك يحقق خاصية الانعكاس
$\angle RYN \cong \angle MYR$	زاويتان مكملتان لزاويتان متطابقتان
$\Delta NYR \cong \Delta MYR$	طبقا لقانون SAS

11- الحل: N منتصف JL من تعريف نقطة المنتصف $\overline{NJ} \cong \overline{NL}$ أيضا KN ضلع مشترك بين المثلثين $\Delta JKN \cong \Delta LKN \Leftarrow \overline{KN} \cong \overline{KN}$ حسب خاصية الانعكاس، وبما أن KM عمودي على $JL \Leftarrow \angle KNJ \cong \angle KNL = 90$ وطبقا لمسلمة SAS فإن $\Delta JKN \cong \Delta LKN$.

12- الحل: إذا كان $\overline{JM} \cong \overline{LM}$ من المعطى و $\overline{MN} \cong \overline{MN}$ ضلع مشترك يحقق خاصية الانعكاس ومن المعطى أيضا ولكن ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما لا نستطيع منهما إثبات حالة التطابق للمثلثين

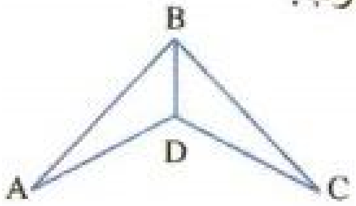
13- الحل: وفق نظرية AAS.

14- الحل: وفق نظرية ASA.

15- الحل: SSA لأنه لا يوجد في حالات إثبات التطابق للمثلثات ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما.

16- الحل: ممكن في المثلثات القائمة الزاوية وقياس الزاويتين الأخرتين 60 , 30 لكن أطوالهما مختلفة.

18- الحل: لو رسمنا التمرين كالشكل المجاور:



حيث BD هو طول الشخص، AB المسافة إلى القارب.

BC المسافة إلى نقطة على الأرض.

BD ضلع مشترك $\Leftarrow$ $\overline{BD} \cong \overline{BD}$

$\angle ABD \cong \angle CBD$ أيضا $\angle BDA \cong \angle BDC$

$\Delta ABD \cong \Delta CBD$ (طبقا لمسلمة ASA)

$\overline{AD} \cong \overline{DC}$ (تعريف تطابق مثلثين)

20- الحل: ASA (B)

21-

22-

23- من الرسم نجد أن الأضلاع $\overline{TR} \cong \overline{T'R'}$ و $\overline{RS} \cong \overline{R'S'}$ و $\overline{TS} \cong \overline{T'S'}$ أيضا من الرسم الزوايا متطابقة والتحويل المستخدم هو دوران مع عقارب الساعة بزاوية 270°.

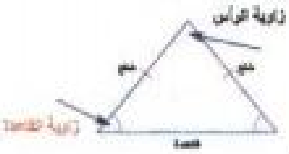
24- الحل: إذا كنت شخصا سعيدا فإنك نادرا ما تفشل في حياتك.

25- الحل: إذا كنت بطلا فإنك تخاف من الخسارة.

26- الحل: مثلث متطابق الضلعين.

27- الحل: مثلث متطابق الأضلاع.

3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين



تذكر:

المثلث المتطابق الضلعين له ضلعان متطابقان على الأقل:

زاوية الرأس هي الزاوية المحصورة بين الضلعين المتطابقين.

زاوية القاعدة هي الزاوية المحصورة بين القاعدة وأحد الضلعين المتطابقين.

نظرية

- إذا تطابق ضلعان في مثلث فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتين:
- إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ فإن $\angle A \cong \angle C$.

مثال

اكتب برهانا ذا عمودين لما يلي:

المعطيات: $\overline{CJ} \cong \overline{KC}$ ، $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ ، Cمنتصف $\overline{BK}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABC \cong \Delta JKC$

العبارات	المبررات
$\overline{CA} \cong \overline{CB}$	معطى
$\overline{CJ} \cong \overline{KC}$	معطى
$\angle BCA \cong \angle JCK$	متقابلتان بالرأس متطابقتان
$\Delta ABC \cong \Delta JKC$	مسلمة SAS

مثال

ΔABD متطابق الضلعين، ΔACD قائم الزاوية إذا كان $m\angle 6 = 136^{\circ}$ فما $m\angle 3$ ؟

ΔABD متطابق الضلعين

$\angle 4 = \angle 5$

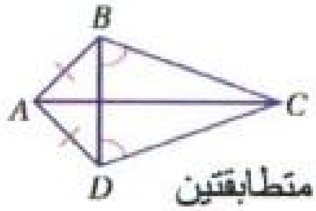
نفرض $x = \angle 4$ $\Leftarrow$ $x + x + 136 = 180$

$\Leftarrow$ $2x = 180 - 136$ $\Leftarrow$ $x = 22$ $\Leftarrow$ $\angle 4 = \angle 5 = 22^{\circ}$

ΔACD قائم الزاوية $\Leftarrow$ $\angle 3 + \angle 5 = 90^{\circ}$ $\Leftarrow$ $\angle 3 = 68$

انتبه: عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين صحيحة أيضا أي إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين متطابقتين.

مثال



في الشكل المجاور:

1- اذكر زاويتين متطابقتين:

ΔABD متطابق الضلعين $\Leftarrow$ زاويتي القاعدة متطابقتين

$\angle ADB = \angle ABD$

2- اذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

ΔBCD يوجد فيه زاويتين متطابقتان $\Leftarrow$ من عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين فإن الضلعين المقابلين للزاويتين متطابقين أي أن

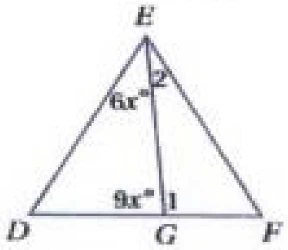
$\overline{DC} \cong \overline{BC}$

نتائج :

1 - يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا و إذا فقط إذا كان متطابق الزوايا.

2 - قياس كل زاوية في المثلث متطابق الأضلاع يساوي 60°.

مثال



ΔDEF متطابق الأضلاع:

1) أوجد قيمة x.

في المثلث ΔDEG:

$$\angle D + 9x + 6x = 180^{\circ} \Rightarrow 60 + 15x = 180 \Rightarrow x = 8$$

2) أوجد قياس $\angle 1$ ، $\angle 2$

$$\angle 1 + 9x = 180^{\circ} \Rightarrow \angle 1 = 180 - 9(8) = 108^{\circ}$$

$$\angle 2 + 6x = 60^{\circ} \Rightarrow \angle 2 = 60 - 6(8) = 12^{\circ}$$

تدريبات وحلول

1- اكتب برهانا ذا عمودين:

العبارات	المبررات
ΔCTE متطابق الضلعين	معطى
$\angle T = 60^{\circ}$	معطى
$\angle T = \angle E = 60$	تعريف المثلث متطابق الضلعين
$\angle T + \angle E + \angle C = 180$	مجموع زوايا المثلث
$\angle C = 180 - 60 - 60$	تعويض
$\angle C = 160$	بالطرح
ΔCTE	قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع 60

2- إذا كان $m\angle PRS = 72$ ، $\overline{QR} \cong \overline{RS}$ ، $\overline{PQ} \cong \overline{QS}$ فما قياس الزاوية $\angle QPS$.

في المثلث RSQ زاوية الرأس $R=72$ زاويتي القاعدة متطابقتان:

$$\angle Q \cong \angle S = x \Rightarrow 180\text{-}72 = 2x \Rightarrow x = 54$$

$$\angle RSQ \cong \angle SQR = 54$$

في المثلث SQP زاوية الرأس $\angle SQP$ متكاملة مع $\angle SQR$ لأنهما متجاورتان على مستقيم:

$$\angle SQR + \angle SQP = 180 \Rightarrow \angle SQP = 180 - 54 = 126$$

زاويتي القاعدة $\angle P$, $\angle QSP$ متطابقتان وليكون قياس كل منهما x:

$$x + x + 126 = 180 \Rightarrow 2x = 180\text{-}126 \Rightarrow x = 27$$

في الشكل المجاور:

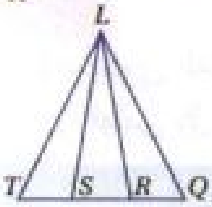
3- إذا كان $\overline{AD} \cong \overline{AH}$، فاذكر زاويتين متطابقتين.

$\angle AHD \cong \angle ADH$ تعريف المثلث متطابق الضلعين.

4- إذا كانت $\angle BDH \cong \angle BHD$ فاذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

$\overline{BH} \cong \overline{BD}$ عكس نظرية المثلث متطابق الضلعين.

في الشكل المجاور:



5- إذا كان $\overline{LT} \cong \overline{LR}$، فاذكر زاويتين متطابقتين.

$\angle LTR \cong \angle LRT$ تعريف المثلث متطابق الضلعين

6- إذا كانت $\angle LSR \cong \angle LRS$ فاذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين

$\overline{LS} \cong \overline{LR}$ عكس نظرية المثلث متطابق الضلعين.

اكتب برهانا ذا عمودين لكل من:

7- نتيجة 3.3:

العبارات	المبررات
ΔABC متطابق الزوايا	معطى
$\angle C \cong \angle B$	تعريف التطابق
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين
$\angle A \cong \angle C$	تعريف التطابق
$\overline{BC} \cong \overline{AB}$	عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	نظرية التعدي لتطابق القطع المستقيمة
المثلث متطابق الأضلاع	$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$

8- نتيجة 3.4:

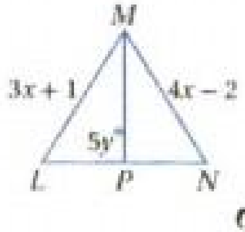
العبارات	المبررات
ΔABC متطابق الأضلاع	معطى
$\angle A + \angle B + \angle C = 180$	مجموع زوايا المثلث
$\angle A \cong \angle B \cong \angle C = x$	تعريف المثلث متطابق الأضلاع
$x + x + x = 180$	تعويض
$3x = 180$	جمع
$x = 60$	قسمة

9- نظرية 3.10:

العبارات	المبررات
$\angle C \cong \angle B$	معطى
نرسم قطعة مستقيمة $\overline{BC} \perp \overline{AQ}$	كل نقطتان تحددان مستقيم
$\overline{QB} \cong \overline{QC}$	نظرية نقطة المنتصف
$\overline{AQ} \cong \overline{AQ}$	ضلع مشترك
$\angle AQB \cong \angle AQC$	زاويتين قائمتين متطابقتين
$\Delta AQB \cong \Delta AQC$	نظرية SAS
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	تعريف تطابق المثلثات

إذا كان المثلث LMN متطابق الأضلاع، وكانت $\overline{MP}$ تنصف $\overline{LN}$.

10 -أوجد كلا من x ، y.



المثلث متطابق الأضلاع $\overline{LM} \cong \overline{NM}$

$3x+1=4x-2 \Rightarrow 3x-4x=-2-1 \Rightarrow x=3$

$\angle L = 60$ (لأنه متطابق الأضلاع)

$\angle LMP = 30$ (لأن $\overline{MP}$ تنصف $\overline{LN}$)

$60+30+5y = 180 \Rightarrow 90+5y = 180 \Rightarrow y=18$

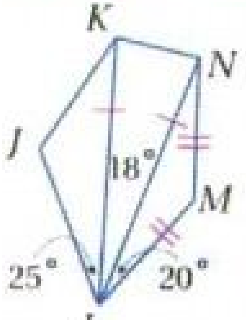
11 -أوجد طول كل ضلع.

$\overline{LM} = 3x + 1 = 3(3) + 1 = 10$

$\overline{MN} = 4x - 2 = 4(3) - 2 = 10$

$\overline{LN} = 10$

إذا كان كل من المثلثين KLN ، LMN مثلثا متطابق الضلعين وكان $m\angle JKN = 130$.



12- $m\angle LNM = 20$

13- $m\angle M = 180 - 20 - 20$

$m\angle M = 180 - 40 = 140$

14- $m\angle LKN = 25$

15- $m\angle J = 180 - 25 - 25$

$m\angle J = 180 - 50 = 130$

16 -الحل: في المثلث MPL : $\overline{PL} \cong \overline{ML}$

زاوية الرأس = 34 ، زاويتي القاعدة $x+x$

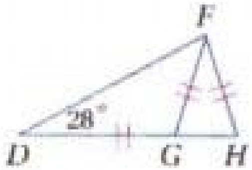
$x+x+34 = 180 \Rightarrow 2x = 180-34 \Rightarrow x=73$

في المثلث JMP الزاوية JMP زاوية الرأس وهي زاوية مجاورة للزاوية 73

ومكملة لها: $\angle JMP = 180 - 73 = 107$

زاويتي القاعدتين $\angle MJP \cong \angle JPN = x$

$x+x+107 = 180 \Rightarrow 2x = 180-107 \Rightarrow x=36.5$



17 -في المثلث DGF المتطابق الضلعين:

$\angle DFG \cong \angle FDG = 28$

18 - $\angle DGF$ هي زاوية الرأس:

$\angle DGF = 180 - 28 - 28 = 124$

19- $\angle HGK = 28$ هي زاوية رأس في المثلث HGK.

$\angle HGK + \angle GHK + \angle GKH = 180$

$28+x+x = 180 \Rightarrow 2x=180-28 \Rightarrow x=76$

$\angle KJH \cong \angle JHK$ زاويتي قاعدة للمثلث HJK

والزاوية $\angle KJH$ مكملة للزاوية $\angle HKJ$ لأنها مجاورة على مستقيم لها.

$\angle KJH = 180 - 76 - 104$

$\angle KJH$ هي زاوية رأس للمثلث

$104+x+x = 180 \Rightarrow 2x=180-104 \Rightarrow x=38$

$\angle HJK = 38$

20 - $\angle HGK = 42$ هي زاوية رأس في المثلث GHK.

زاويتي القاعدة $\angle GKH \cong \angle KHG = x$

$42+x+x = 180 \Rightarrow 2x=180-42 \Rightarrow x=69$

$\angle GKH \cong \angle KHG = 69$

الزاوية $\angle HKJ$ مكملة للزاوية $\angle GKH$

$\angle GKH + \angle HKJ = 180 \quad \Rightarrow \angle HKJ = 180 - 69 = 111$

اكتب برهانا ذا عمودين لكل مما يلي:

21-

العبارات	المبررات
ΔAQB متطابق الأضلاع	معطى
$\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle x$	تعريف المثلث متطابق الأضلاع
$\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle x = 60$	مجموع زوايا المثلث
$\angle JXF \cong \angle JXK$	تعريف الزاوية المنصفة
$\overline{XJ} \cong \overline{XJ}$	ضلع مشترك
$\Delta XJF \cong \Delta XJK$	نظرية AAS
$\overline{FJ} \cong \overline{KJ}$	تعريف تطابق المثلثات
J منتصف $\overline{JF}$	نقطة المنتصف

22-

العبارات	المبررات
ΔAQB متطابق الضلعين	معطى
$\overline{LM} \cong \overline{LP}$	تعريف المثلث متطابق الضلعين
$\angle M \cong \angle P \cong x$	تعريف المثلث متطابق الضلعين
$\overline{LN} \cong \overline{LN}$	ضلع مشترك
$\overline{NM} \cong \overline{NP}$	تعريف نقطة المنتصف
$x+x+2x=180$	مجموع زوايا المثلث
$3x=180$	تعويض
$x= 60$	قسمة
$\angle PLN = 30$	لأن LN ينصف L
$60 + 30 + \angle LNP = 180$	مجموع زوايا المثلث
$\angle LNP = 180 - 90 = 90$	بالطرح
$\overline{LN} \perp \overline{MP}$	تعريف الزاوية القائمة

أوجد x في كل مما يلي:

23- الحل: $2x+5=3x-13 \Rightarrow 2x-3x = -13-5 \Rightarrow x=18$

24- الحل: $2x-25=x+5 \Rightarrow 2x-x = 5+25 \Rightarrow x=30$

25- الحل: نرسم مستقيم طوله $5cm$ ونسميه AB ثم نفتح الفرجار $5cm$ ونركزه على النقطة A ونرسم قوس ثم نفتح نفس الفتحة ونركزه على B ثم نرسم قوس يقطع القوس الأول ثم نسمي نقطة التقاطع C ثم نوصل بين BC , AC.

26- الحل: $\angle 3 + 77 + 77 = 180' \Rightarrow \angle 3 = 180 - 154 \Rightarrow \angle 3 = 26$

$\angle 2 \cong \angle 4 \Rightarrow \angle 2 = 180 - 103 - 60 \Rightarrow \angle 2 = 17 = \angle 4$

$\angle 1 \cong \angle 5 \Rightarrow \angle 1 = 180 - 120 - 42 \Rightarrow \angle 1 = 18 = \angle 5$

28- الحل: $\angle B \cong \angle D$ (B)

29- الحل: بما أن $\overline{RS} \cong \overline{US}$ ومن قانون التعامد فإن $\angle U \cong \angle R = 90$ أيضا $\angle UST \cong \angle RSV$ لأنهما متقابلتان بالرأس وطبقا لمسلمة ASA المثلثين متطابقين.

30- الحل: نستخدم قانون المسافة بين النقطتين:

$$\overline{EG} = \sqrt{(2-6)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(1+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$\overline{GH} = \sqrt{(4-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{20}$$

$$\overline{RS} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{20}$$

$$\overline{EH} = \sqrt{(4-6)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\overline{QS} = \sqrt{(-1+3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$\overline{QR} \cong \overline{EG}$ و $\overline{RS} \cong \overline{GH}$ و $\overline{QS} \cong \overline{EH}$

$\therefore$ طبقا لمسلمة SSS المثلثين متطابقين.

كون جدول الصواب لكل عبارة مركبة مما يلي:

32- a^b

a	b	a^b
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

33- ~pV~q

p	q	~p	~q	~pV~q
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

34- k^~m

k	m	~m	k^~m
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

35- ~yVz

y	~y	z	~yVz
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T

أوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطعة التي إحداثيات طرفيها كما يلي:

36- A(2,15) , B(7,9)

$x = \frac{2+7}{2} = \frac{9}{2}$, $y = \frac{15+9}{2} = \frac{24}{2} = 12$ نقطة المنتصف $(\frac{9}{2}, 12)$

37- C(-4,6) , D(2,-12)

$x = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$, $y = \frac{6-12}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ نقطة المنتصف $(-1, -3)$

38- E(3,2.5) , F(7.5,4)

$x = \frac{3+7.5}{2} = \frac{10.5}{2} = 5.25$, $y = \frac{2.5+4}{2} = \frac{6.5}{2} = 3.25$

نقطة المنتصف $(5.25, 3.25)$

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي

عزيزي الطالب/ تعلمت في دروس سابقة البراهين وتعرفت على أشكال عديدة منها: البرهان ذا العمودين، البرهان الحر، البرهان التسلسلي والآن سنتعرف إلى مفهوم جديد من البراهين يسمى البرهان الإحداثي.

ما هو البرهان الإحداثي:

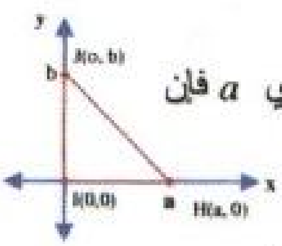
هو برهان يستعمل الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية وتتمثل الخطوة الأولى فيه برسم الشكل على المستوى الإحداثي.

كيف ترسم شكل على المستوى الإحداثي؟

1) نضع رأس المضلع أو مركزه على نقطة الأصل $(0,0)$.
2) نرسم ضلع على الأقل من أضلاع المضلع على أحد المحورين x أو y.
3) نضع المضلع في الربع الأول من المستوى إن أمكن.
4) نستعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

مثال

ارسم المثلث HIJ القائم الزاوية بحيث يقع ضلعاه $\overline{HI}$ ، $\overline{IJ}$ على المحورين الإحداثيين ويكون طول $\overline{HI}$ يساوي a وحدة، وطول $\overline{IJ}$ يساوي b وحدة.



- نجعل رأس المثلث I عند نقطة الأصل $(0,0)$.
- نرسم الضلع $\overline{HI}$ على المحور السيني وبما أن طوله يساوي a فإن الإحداثي السيني a والصادي 0 ⇐ $H(a, 0)$
- نرسم الضلع $\overline{IJ}$ على المحور الصادي وبما أن طوله يساوي b فإن الإحداثي الصادي b والسيني 0 ⇐ $J(0, b)$
- نرسم المثلث في الربع الأول من المستوى.

انتبه الإحداثي السيني لرأس المثلث المتطابق الضلعين يساوي الإحداثي السيني لمنتصف القاعدة.

مثال

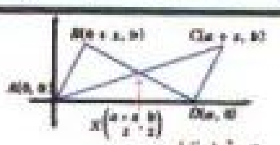
اذكر الإحداثيات المجهولة في المثلث المتطابق الضلعين PDQ.

بما أن D تقع على محور السينات فالإحداثي الصادي لها يساوي صفر $D(a,0)$

بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن الإحداثي السيني للنقطة p $-a=$

وبما أنها تقع على المحور السيني فالإحداثي الصادي لها يساوي صفر $P(-a,0)$

الإحداثي السيني لرأس المثلث يساوي صفر لأنه يقع على المحور الصادي ونسمي الإحداثي الصادي b: $Q(0,b)$



مثال

استعمل البرهان الإحداثي لبيان أن المثلثين ABX , CDX متطابقان.

نستعمل مسلمة من المسلمات التي تمت دراستها لإثبات تطابق مثلثين ولتكن SAS.

$\angle UST \cong \angle RSV$ أنهما متقابلتان بالرأس.

نستخدم قانون المسافة لإيجاد المسافة بين النقاط:

$$\overline{CX} = \sqrt{\left[a+x-\left(\frac{a+x}{2}\right)\right]^2+\left(b-\frac{b}{2}\right)^2} \quad = \sqrt{\left(\frac{a+x}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$\overline{BX} = \sqrt{\left[a+x-\left(\frac{a+x}{2}\right)\right]^2+\left(b-\frac{b}{2}\right)^2} \quad = \sqrt{\left(\frac{a+x}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

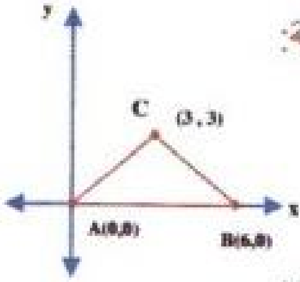
$$\overline{DX} = \sqrt{\left[a-\left(\frac{a+x}{2}\right)\right]^2+\left(0-\frac{b}{2}\right)^2} \quad = \sqrt{\left(\frac{a-x}{2}\right)^2+\left(\frac{-b}{2}\right)^2}$$

$$\overline{CX} = \sqrt{\left[0-\left(\frac{a+x}{2}\right)\right]^2+\left(0-\frac{b}{2}\right)^2} \quad = \sqrt{\left(\frac{-a-x}{2}\right)^2+\left(\frac{-b}{2}\right)^2}$$

$\overline{CX} \cong \overline{BX}$ و $\overline{DX} \cong \overline{AX}$

إذن من مسلمة SAS $\Leftarrow$ المثلثين متطابقين

مثال



استعمل الهندسة الإحداثية لتصنيف مثلث رؤوسه النقاط التالية:

$A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(3,3)$

1) نرسم المثلث على المستوى الإحداثي حيث نجعل رأس المثلث هي النقطة A(0,0)
2) نرسم الضلع AB بعد تحديد النقطة B على المستوى الإحداثي بحيث ينطبق الضلع AB على المحور السيني.
3) نعين النقطة (3,3) على المستوى.
4) نستخدم قانون المسافة لنصنف المثلث:

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2} \quad = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$
$$\overline{CB} = \sqrt{(3-6)^2+(3-0)^2} \quad = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{(6-0)^2+(0-0)^2} \quad = \sqrt{6+0} = 6$$

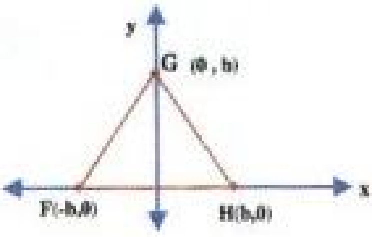
$\overline{AC} \cong \overline{CB}$ $\Leftarrow$ المثلث متطابق الضلعين.

تدريبات وحلول

1- ارسم المثلث ΔFGH المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته $\overline{FH}$ يساوي $2b$ وحدة.

نرسم القاعدة على المحور السيني بحيث يكون رأس المثلث G على المحور الصادي بحيث الإحداث السيني 0 والصادي a $\Leftarrow$ $G(0,b)$

طول $\overline{FH}$ يساوي $2b$ $\Leftarrow$ الطول من نقطة الأصل إلى النقطة H = الطول من نقطة الأصل إلى F ويساوي $b = \frac{2b}{2}$



النقطة H تقع على المحور السيني الموجب

$\Leftarrow$ الإحداثي الصادي $=0 \Leftarrow H(b,0)$

النقطة F تقع على المحور السيني السالب

$\Leftarrow$ الإحداثي الصادي $=0 \Leftarrow F(-b,0)$

2- ما الإحداثيات المجهولة في المثلث المجاور؟

بما أن المثلث متطابق الضلعين والمحور الصادي ينصف المحور السيني.

الطول من نقطة الأصل إلى Q = الطول إلى النقطة $2a=N$

النقطة O تقع على المحور السيني $\Leftarrow$ الإحداثي الصادي $= 0$

$O(-2a , 0) \Leftarrow$

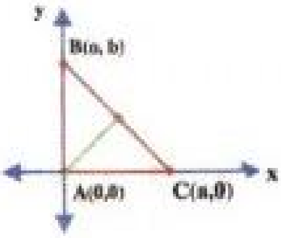
3- اكتب برهانا إحداثيا للعبارة:

"تبعد نقطة المنتصف في مثلث قائم الزاوية أبعادا متساوية عن رؤوسه".

نرسم مثلث قائم الزاوية رأسه $A(0,0)$ في نقطة الأصل ونرسم ضلعي القائمة بحيث يتطابقان على محوري المستوى الإحداثي وحيث $C(0,0)$ لأنها تقع على المحور السيني وB تقع على المحور الصادي $B(0,b)$

نفرض Q نقطة منتصف الوتر $\overline{BC} \Leftarrow$ نقطة المنتصف $\left(\frac{0+a}{2}, \frac{b+0}{2}\right)$، $Q\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

نستخدم قانون المسافة لإيجاد المسافة بين النقاط:



$$\overline{AQ} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{b}{2}-0\right)^2} \quad = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$\overline{YQ} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{b}{2}-b\right)^2} \quad = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{2}\right)^2}$$

$$\overline{AQ} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-a\right)^2 + \left(\frac{b}{2}-0\right)^2} \quad = \sqrt{\left(\frac{-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$\overline{AQ} = \overline{YQ} = \overline{CQ}$$

4- اكتب برهانا إحداثيا:

نرسم المثلث ABC بحيث يكون B على نقطة الأصل $B(0,0)$ وبما أن عرض المظروف $= 10cm$ فإن الإحداثي الصادي لـ A , $C = 10$ ، أما الإحداثي السيني فبما أن طول المظروف يساوي $20cm$، و B في المنتصف فإن إحداثي السيني للنقطة $C=10cm$، والنقطة $A=-10$، $A(-10,10)$, $C(10, 10)$

$$\overline{BC} = \sqrt{(10-0)^2 + (10-0)^2} \quad = \sqrt{100+100} = \sqrt{200}$$

$$\overline{BA} = \sqrt{(-10-0)^2 + (10-0)^2} \quad = \sqrt{100+100} = \sqrt{200}$$

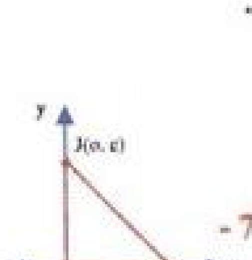
$\overline{BC} \cong \overline{BA} \Leftarrow$ المثلث متطابق الضلعين.

ارسم كل مثلث مما يلي على المستوى الإحداثي:

-5

-6

-7



اذكر الإحداثيات المجهولة لكل مثلث مما يلي:

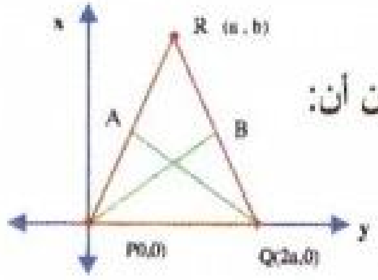
8- الحل: بما أن المثلث PRQ متطابق الضلعين فالإحداثي السيني لرأس المثلث يساوي الإحداثي السيني لمنتصف القاعدة $\frac{0+2a}{2}$ ⇐ الإحداثي السيني $a = \frac{2a}{2}$

$R = (a, b)$

9- الحل: الإحداثي السيني للنقطة P هو نفس الإحداثي السيني للنقطة Q لأنهما على نفس القطعة أيضا الإحداثي الصادي للنقطة P يساوي صفر لأنها تقع على المحور السيني $P(a,0)$ أما الإحداثي الصادي للنقطة Q فهو a وحدة لأن المثلث متطابق الضلعين وطول $\overline{PQ} \cong \overline{CP}$ ، $Q(a, a)$.

10- الحل: النقطة B تقع على المحور السيني ⇐ إحداثيها الصادي يساوي صفر وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن طول $\overline{BO} \cong \overline{OC}$ ⇐ $B(-a, 0)$ ، أما النقطة E فهي تقع على المحور الصادي ⇐ إحداثيها السيني يساوي صفر ونفرض أنها بارتفاع b على المحور الصادي ⇐ $E(0,b)$

اكتب برهانا إحداثيا لكل عبارة مما يلي:



11- لو رسمنا الشكل المطلوب كالتالي:

نلاحظ من الرسم باستخدام قانون المسافة بين نقطتين أن:

إحداثي B: $\left(\frac{2a+a}{2}, \frac{b+0}{2}\right)$ ، $B\left(\frac{3a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

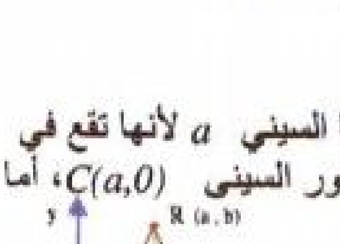
إحداثي A: $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right)$ ، $A\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

$$\overline{PB} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$\overline{QA} = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 2a\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$\overline{PB} \cong \overline{QA}$$

12- الحل: من الرسم المجاور نجد أن النقطة C إحداثها السيني a لأنها تقع في منتصف $2a$ وإحداثها الصادي 0 لأنها تقع على المحور السيني $C(a,0)$، أما النقطة D:



الإحداثي السيني: $\frac{a+a}{2} = \frac{2a}{2} = a$

الإحداثي الصادي: $\frac{b}{2} = \frac{0+b}{2} = b$

$D\left(a, \frac{b}{2}\right)$

$$\overline{CD} = \sqrt{(a-a)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b}{2}$$

$$\overline{PD} = \sqrt{(a-0)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

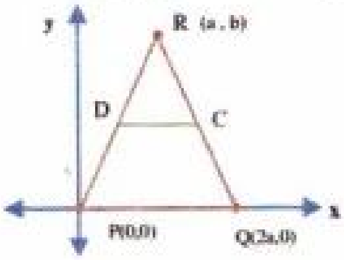
$$\overline{QD} = \sqrt{(a-2a)^2 + \left(\frac{b}{2}-0\right)^2} = \sqrt{(-a)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$\overline{PC} = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{a^2} = a$$

$$\overline{CQ} = \sqrt{(a-2a)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-a)^2} = a$$

$\overline{PC} \cong \overline{CQ}$ و $\overline{PD} \cong \overline{QD}$ $\Leftarrow$ المثلث متطابق الضلعين.

13 - الحل: نرسم المثلث كما في الشكل المقابل ونحدد إحداثيات المثلث PQR



إحداثي C: $\left(\frac{2a+a}{2}, \frac{b+0}{2}\right)$، $B\left(\frac{3a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

إحداثي D: $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right)$، $A\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

حيث C منتصف الضلع $\overline{RQ}$

وحيث D منتصف الضلع $\overline{PR}$

$\overline{CD}$ ضلع يصل بين منتصفي الضلعين $\overline{RQ}$ و $\overline{PR}$

بقياس الزاوية $\angle CQP \cong \angle RCD$ نجد أن كلا منهما تساوي 60 (متناظرتان)

بقياس الزاوية $\angle DPQ \cong \angle RDC$ نجد أن كلا منهما تساوي 60 (متناظرتان)

$\overline{PQ} \parallel \overline{DC}$

14 - الحل: باستخدام نفس الشكل في السؤال السابق:

نجد: $C\left(\frac{3a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ، $D\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

$$= a\ \overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{(a)^2 + (0)^2}$$

الضلع الثالث $\overline{PQ}$

$$\overline{PC} = \sqrt{(2a-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(2a)^2} = a$$

$$\overline{CD} = \tfrac{1}{2}\ \overline{PQ} \text{ ، } \quad \overline{CD} = a\ ,\ \ \overline{PQ} = 2a$$

15 - الحل: **بتحليل السؤال: نفرض أن القارب يقع على نقطة الأصل ونسميه $Q(0,0)$**

السفينة الثانية تبعد $800cm$ عند القارب (شمال) نفرض أنها تقع على المحور الصادي الإحداثي السيني = 0، ونسميه $P(0\ ,\ 800)$.

السفينة الأولى تقع على المحور السيني (شرق) الموجب إذن الإحداثي السيني لها 800 والصادي 0 ونسميها R $\Leftarrow$ $R(800\ ,\ 0)$

الميناء نفرض أنه يقع على يسار القاري (غرب) أي أنه في الاتجاه السيني السالب فإحداثياته $D(-800, 0)$.

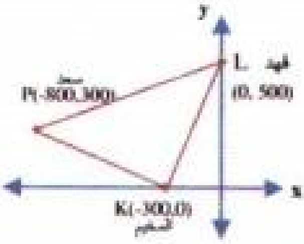
من الرسم نلاحظ أن المثلث PQD قائم الزاوية عند Q.

باستخدام قانون المسافة:

$$\overline{QP} = \sqrt{(0-0)^2 + (800-0)^2} = \sqrt{800^2} = 800$$

$$\overline{QD} = \sqrt{(a+800)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{800^2} = 800$$

$\overline{QP} \cong \overline{QD}$ $\Leftarrow$ المثلث PQD متطابق الضلعين.



16 -الحل: نحلل السؤال فتفرض أن المخيم يقع على المحور السيني على بعد 300 من نقطة الأصل باتجاه الغرب ونسميه $K \Leftarrow K(-300, 0)$

فهد تحرك 300 إلى الشرق حيث يصل إلى نقطة الأصل ثم يتحرك شمالا باتجاه محور الصادات الموجب 500 وحدة $\Leftarrow$ نسمي موقع فهد $L \Leftarrow L(0, 500)$.

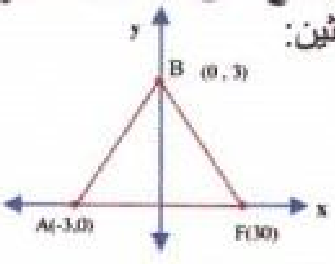
سعد انطلق من المخيم باتجاه الغرب)السيني السالب) 500 ونضيف 300 (بعد المخيم عن نقطة لأصل) $\Leftarrow$ الإحداثي السيني $300+500=800$ باتجاه السالب ثم اتجه شمالا باتجاه الصادات 300 وحدة $\Leftarrow P(-800 , 300)$

من الرسم نلاحظ أن $\overline{KL} \cong \overline{PK}$ أي أنه قائم الزاوية عند K.

17 -الحل: من الرسم نجد أن ارتفاع المثلث = ارتفاع الحاجز – ارتفاع العارض

$\overline{BD} = 4 - 1 = 3$

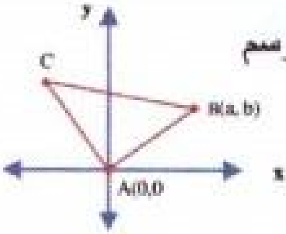
نرسم المثلثين مرة أخرى على المحاور الإحداثية حيث ينطبق $\overline{BD}$ على محور الصادات حيث $B(0,3)$ ، $D(0,0)$ أيضا الإحداثي السيني للنقطة F هو 3 لأن المحور يقسم القاعدة بالمنتصف والصادي $=0$ لأنها تقع على المحور السيني $\Leftarrow F(3,0)$ وبالمثل النقطة A لكن إشارة 3 بالسالب لأنها تقع على المحور السيني السالب $\Leftarrow A(-3, 0) \Leftarrow \overline{BD}$ ضلع مشترك بين المثلثين:



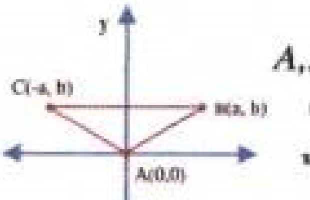
$$\overline{BF} = \sqrt{(0-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$
$$\overline{BA} = \sqrt{(0+3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$
$$\overline{DF} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+0} = 3$$
$$\overline{DA} = \sqrt{(0+3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+0} = 3$$

$\overline{BF} \cong \overline{BA}$ ، $\overline{DF} \cong DA$ ، $\overline{BD} \cong \overline{BD}$

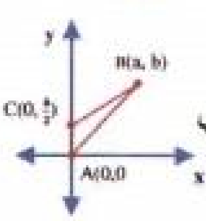
طبقا لمسلمة SSS المثلثين متطابقين.



18 - من الشكل المجاور نرسم المحورين السيني والصادي ونرسم النقطة A على نقطة الأصل والنقطة $B(a,b)$ ثم نرسم عمود من النقطة A ونمده حسب الإحداثيات التي سنفرضها ولتكن $(\frac{a}{2}, c)$ ليتكون مثلث قائم الزاوية.

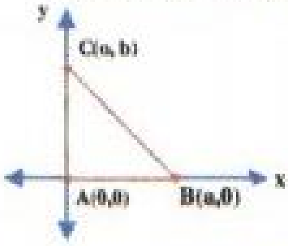


19 - كما في السؤال (18) نرسم الإحداثيات ونحدد النقاط A,B وبما أن المثلث متطابق الضلعين إذن إحداثيات C ستكون نفس إحداثيات B ولكن في الاتجاه السالب $.C(-a,b)$



20 - نحدد A, B كما في السؤالين السابقين وبما أن المطلوب مثلث مختلف الأضلاع نفرض أن C تقع على المحور الصادي فالإحداثي السيني لها يساوي صفر والصادي $\frac{1}{2}b \Leftarrow C(0, \frac{a}{2})$

21 - الحل: قمنا برسم المثلث بحيث رأس القائمة يكون عند نقطة الأصل وطرفا الضلعين على المحاور السيني والصادي حتى يسهل حساب المسافات.



22 - صنف المثلث ABC وفقا لزواياه وأضلاعه.

$$\overline{AC} = \sqrt{(0+2a)^2 + (2a-0)^2} = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{8a^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(0-2a)^2 + (2a-0)^2} = \sqrt{(-2a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{8a^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2a+2a)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(4a)^2 + 0} = 4a$$

المثلث متطابق الضلعين فقط وزاويتي القاعدة متساويتين

24 - الحل: (B)

اكتب برهانا ذا عمودين لكل مما يلي:

25-

العبارات	المبررات
$\angle 3 \cong \angle 4$	معطى
$\angle 3 + \angle 1 = 180$	متجاورتان على مستقيم متكاملتان
$\angle 2 + \angle 4 = 180$	متجاورتان على مستقيم متكاملتان
$\angle 3 + \angle 1 = \angle 2 + \angle 4$	بالتعويض
$\angle 1 = \angle 2$	تعريف تساوي الزوايا
$\angle 1 \cong \angle 2$	تعريف تساوي الزوايا
$\overline{QR} \cong \overline{QS}$	عكس نظرية المثلث متطابق الضلعين

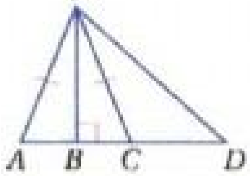
26-

العبارات	المبررات
	معطى
$\angle D \cong \angle C$	داخليتان متبادلتان
$\angle A \cong \angle E$	داخليتان متبادلتان
$\Delta ABD \cong \Delta EBC$	مسلمة ASA

27 - الحل: $y = 1800 + 200t$ حيث t الزمن

عند $t=17$ $\quad y = 1800 + 200(17) \Rightarrow y = 5200$

اختبار الفصل الثالث



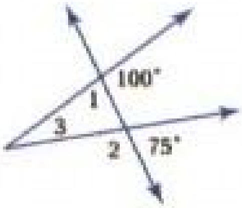
إذا كان $\overline{PB} \perp \overline{AD}$ و $\overline{AD} \cong \overline{PC}$ ، فحدد مثلثا يكون :

1 - منفرج الزاوية: ΔCPD

2 - متطابق الضلعين: ΔAPC

3 - قائم الزاوية: ΔBPC

أوجد قياس كل زاوية من الزوايا التالية في الشكل المجاور:



4 - $\angle 1 + 100 = 180^\circ$ متجاورتان على مستقيم.

$\angle 1 = 80^\circ$

5 - $\angle 2 + 75 = 180^\circ$ متجاورتان على مستقيم.

$\angle 2 = 105^\circ$

6 - $\angle 3 + 75 + 80 = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث.

$\angle 3 = 25^\circ$

7 - اكتب برهانا تسلسليا:

8 - حدد الزوايا والأضلاع المتناظرة والمتطابقة: $\Delta DEF \cong \Delta PQR$

$\angle D \cong \angle P$ ، $\angle E \cong \angle Q$ ، $\angle F \cong \angle R$

$\overline{DE} \cong \overline{PQ}$ ، $\overline{EF} \cong \overline{QR}$ ، $\overline{DF} \cong \overline{PR}$

9 - الحل: (D)

10 - نستخدم قانون المسافة بين النقطتين:

$$\overline{MN} = \sqrt{(-2+6)^2 + (1+7)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

$$\overline{NP} = \sqrt{(5+2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$$

$$\overline{MP} = \sqrt{(-5+6)^2 + (3+7)^2} = \sqrt{1+100} = \sqrt{101}$$

$$\overline{JK} = \sqrt{(2+1)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\overline{KL} = \sqrt{(3-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$\overline{JL} = \sqrt{(3+1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

المثلثان غير متطابقان لأن الأضلاع المتناظرة غير متطابقة

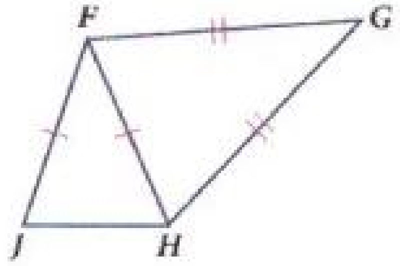
11 المثلث FJH متطابق الضلعين:

$\angle J \cong \angle H = x$

$x+x+34 = 180 \Rightarrow$

$2x+34 = 180 \Rightarrow x = 73$

$\angle J \cong \angle H = 73^\circ$



12 - $\angle G=32$ $\Leftarrow$ زاويتي القاعدة

$74 = \angle GHF \text{ , } \angle GFH$

$\angle FHG = 152 - 74 = 78$

$\angle FHG = \angle FJH = 78$

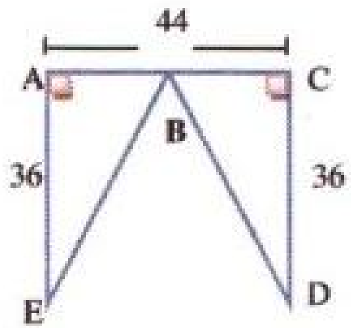
$\angle JFH = 180 - 2(78) = 24^\circ$

13 -نرسم الشكل ونوضح عليه الأبعاد والزوايا المعطاة ومن الرسم يتضح

$\overline{AE} \cong \overline{CD}$ ، $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

$\angle A \cong \angle C$ قائمتان

من مسلمة SAS $\Leftarrow$ $\Delta ABE \cong \Delta BCD$



14 -الحل: $56^\circ (H)$

اختبار معياري تراكمي

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

1 - الحل: (B) ASA.

2 - الحل: (C) زامل يقترب من الميل الرأسي مع بقاء المقطع الصادي كما هو.

3 - الحل: (C) $\angle 1 = 180 - 63 - 32 \Rightarrow \angle 1 = 85^\circ$

4 - الحل: (A) $\angle A \cong \angle D$

5 - الحل: (C) ميل $\overline{DE}$ × ميل $\overline{DG} = 1$

6 - الحل:

$$4(y-2) - 3(2y-4) = 9$$

$$4y - 8 - 6y + 12 = 9 \Rightarrow -2y + 4 = 9$$

7 - الحل: (D) $\overline{BF} \cong \overline{CE}$

8 - الحل: (D) إذا كانت السماء تمطر فإن خالد يحمل مظلة.

9 - الحل: (A) $y=3x-2$.

10 - الحل: (B)

من نظرية فيثاغورس:

$$5^2=3^2+x^2 \Rightarrow x^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

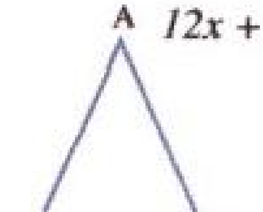
11 - الحل: (C) مسلمة جمع القطع المستقيمة.

12 - الحل: (A) زاويتان متتامتان.

13 - الحل:

a) $3x+13+4x-1+5x = 180$

$$12x + 12 = 180 \Rightarrow 12x = 168 \Rightarrow x = 14$$



$$\angle B = 3x + 13 = 3(14) + 13 = 55^\circ$$

$$\angle C = 5x = 5(14) = 70^\circ$$

$$\angle A = 4x - 1 = 4(14) - 1 = 55^\circ$$

b) بما أن $\angle A = \angle B = 55^\circ$ ⇐ إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن المثلث متطابق الضلعين

الفصل الرابع

العلاقات في المثلث

- المنصفات والقطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث
- المتباينات والمثلثات
- البرهان غير المباشر
- متباينة المثلث
- متباينات تتضمن مثلثين

التهيئة للفصل الرابع

حلول اختبار سريع

1- نقطة المنتصف C بين AB:

$$C = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \Rightarrow C = \left(\frac{-12+4}{2}, \frac{-5+15}{2}\right) \Rightarrow C = (-4,5)$$

2- جـ $= \left(\frac{-15+5}{2}, \frac{-16+25}{2}\right) = \left(\frac{-10}{2}, \frac{9}{2}\right) = (-5,4.5)$

أوجد قياس كل زاوية مرقمة إذا كان $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

3- $\angle 1 + 104 = 180^\circ$

$\angle 1 = 180 - 104$

$\angle 1 = 76^\circ$

4- $\angle 1 + \angle 2 + 36 = 180^\circ$

$\angle 2 = 180 - 36 - 76$

$\angle 2 = 68^\circ$

5- $\angle 3 \cong \angle 1$

$\angle 3 = 76^\circ$

6- $\angle 4 \cong 40$

$\angle 4 = 40^\circ$

7- $\angle 5 + 40 + 76 = 180^\circ$

$\angle 5 = 180 - 40 - 76$

$\angle 5 = 64^\circ$

8- $\angle 6 + \angle 5 = 90^\circ$

$\angle 6 = 90 - 64$

$\angle 6 = 26^\circ$

9- $\angle 7 + \angle 4 = 180^\circ$

$\angle 7 = 180 - 40$

$\angle 7 = 140^\circ$

10 $\angle 8 + \angle 6 + \angle 7 = 180^\circ$

$\angle 8 = 180 - 26 - 140$

$\angle 8 = 14^\circ$

11- الحل: يمكن الوصول إلى استنتاج صحيح من العبارتين وهو أن أضلاع المثلثين PQR , ABC متطابقة.

4-1 المنصفات والقطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

تعلمت سابقا: العمود المنصف لأحد أضلاع مثلث هو مستقيم أو نصف مستقيم أو قطعة مستقيمة يمر بنقطة منتصف ذلك الضلع ويكون عموديا عليه.

نظرية

- كل نقطة على العمود المنصف لقطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفي القطعة.

مثال:

إذا كان $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{AB}$ تنصف $\overline{CD}$.

فإن $BC=BD \ , \ AC=AD$

وعكسها صحيح أي كل نقطة تبعد بعدين متساويين عن طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصف لتلك القطعة.

مثال:

$AC = AD \Leftarrow$ A تقع على العمود المنصف لـ $\overline{CD}$

$BC = BD \Leftarrow$ B تقع على العمود المنصف لـ $\overline{CD}$

تذكر: المحل الهندسي هو مجموعة كافة النقاط التي تحقق شرطا معينا.

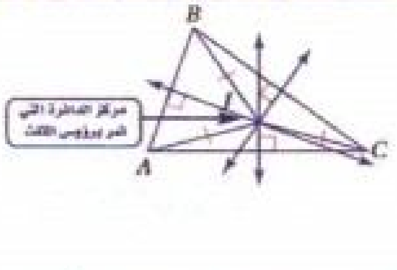
إذن يمكن تعريف العمود المنصف لقطعة المستقيمة مرة أخرى:
هو المحل الهندسي للنقاط الواقعة في مستوى والتي تبعد كل منها بعدين متساويين عند طرفي تلك القطعة المستقيمة.

انتبه المثلث له ثلاثة أضلاع إذن يوجد له ثلاثة أعمدة منصفة لأضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة وتسمى تلك المستقيمات أو الأعمدة مستقيمات متلاقية وتسمى نقطة تقاطعها نقطة التلاقي وهي تمثل مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث.

نظرية

- **مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث يبعد أبعاد متساوية عن رؤوس المثلث.**

مثال:



إذا كان J مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث $ABC \Leftarrow AJ = BJ = CJ$

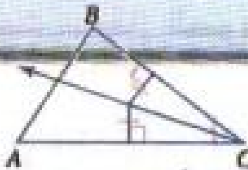
مثال

اكتب برهانا حرا للنظرية (4-1)

من الرسم نلاحظ أن (AB) ضلع مشترك بين المثلثين DQA ، CQA أيضا من تعريف التعامد $\angle AQC \cong \angle AQD$ ومن المعطى $\overline{AB}$ منصف $\overline{CD} \Leftarrow \overline{AB} \cong \overline{BC} \Leftarrow$ طبقا لمسلمة SAS فإن المثلثين متطابقين ومن تعريف التطابق فإن $\overline{AC} \cong \overline{AD}$.

نظرية

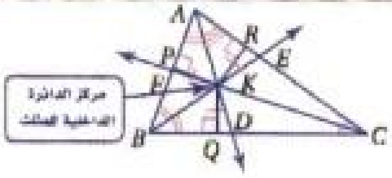
• كل نقطة على منصف الزاوية تكون على بعدين متساويين من ضلعي الزاوية وعكسها صحيح أي أن كل نقطة تبعد بعدين متساوين من ضلعي زاوية تقع على منصف تلك الزاوية.



انتبه كما ذكرنا سابقا هناك ثلاث أعمدة منصفة للمثلث أيضا هناك ثلاثة منصفات زوايا في كل مثلث ومنصفات زوايا أي مثلث تتلاقى في نقطة واحدة تسمى مركز الدائرة الداخلية للمثلث.

نظرية

• مركز الدائرة الداخلية للمثلث يكون على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.



مثال:

K مركز الدائرة الداخلية للمثلث $ABC \Leftarrow KP = KQ = KR$

القطعة المتوسطة: هي قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس. كل مثلث له ثلاث قطع متوسطة تتقاطع في نقطة واحدة تسمى مركز المثلث وهي نقطة توازنه.

نظرية

• يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثلثي طول القطعة المتوسطة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

مثال:

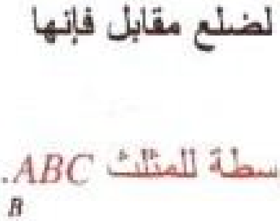
L مركز المثلث $ABC \Leftarrow$

$CL= \frac{2}{3}CD$ ، $BL= \frac{2}{3}BF$ ، $AL = \frac{2}{3}AE$.

انتبه بما أن القطعة المتوسطة تحوي نقطة المنتصف لضلع مقابل فإنها منصفة لضلع المثلث.

مثال

أوجد قيمة x إذا كانت AD قطعة متوسطة للمثلث ABC.

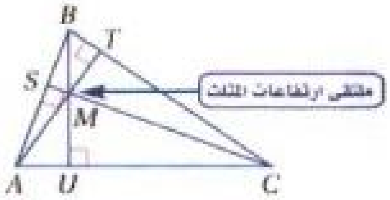


$\overline{AD}$ قطعة متوسطة

$\overline{BD} \cong \overline{DC}$ تعريف القطعة المتوسطة

$4x + 9 = 7x - 6 \Rightarrow 7x - 4x = 9 + 6 \Rightarrow x = 5$

ارتفاع المثلث:



هو العمود النازل من أحد رؤوس المثلث على المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس، ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات تتقاطع في نقطة تسمى (ملتقى الارتفاعات).

مثـــال

أوجد مركز الدائرة التي تمر بروؤس المثلث JKL .
إذا كانت $J(-2,4)$, $K(4,4)$, $L(1,-2)$

معادلة العمود المنصف للضلع JK:

يمر بالنقطة D إحداثيات D نقطة منتصف JK:

$$D=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{4+4}{2}\right) \Rightarrow D=\left(\frac{2}{2},\frac{8}{2}\right) \Rightarrow D=(1,4)$$

ميل العمود المنصف هو:

بما أن ميل JK: $0 = \frac{0}{0} = \frac{4-4}{4+2} = m$، ميل العمود $= 0$.

معادلة العمود المنصف للضلع JL:

يمر بالنقطة Q التي إحداثياتها $= \left(\frac{-2+1}{2},\frac{4-2}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2},\frac{2}{2}\right) = Q(-0.5\,,1)$

ميل JL: $-2 = \frac{-6}{3} = \frac{-2+4}{1+2} = m$، ميل العمود المنصف للضلع $= \frac{1}{2}$.

معادلة العمود المنصف للضلع JL:

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-1=\frac{1}{2}(x+0.5) \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+1.5$$

بحل معادلتي العمود المنصف لكل من JK , JL:

$$x=1 \quad , \quad y=\frac{1}{2}x+1.5$$

بالتعويض عن x في المعادلة الثانية بـ 1 لإيجاد قيمةx:

$$y=\frac{1}{2}(1)+1.5 \Rightarrow y=\frac{1}{2}+1.5 \Rightarrow y=2$$

إذن النقطة $(1,2)$ هي نقطة تلاقي العمودين المنصفين للضلعين JK , JL وهي مركز الدائرة التي تمر بروؤس المثلث.

لاحظ جيدا تعلمت في هذا الدرس عدة مفاهيم لنراجعها سويا.

مفاهيم أساسية	قطع مستقيمة خاصة في المثلث	
الاسم	النوع	نقطة التلاقي
العمود المنصف	مستقيم أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم	مركز الدائرة التي تمر بروؤس المثلث
منصف الزاوية	مستقيم أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم	مركز الدائرة الداخلية للمثلث
القطعة المتوسطة	قطعة مستقيمة	مركز المثلث
الارتفاع	قطعة مستقيمة	ملتقى الارتفاعات

تدريبات وحلول

1- اكتب برهانا ذا عمودين

العبارات	المبررات
$\overline{XY} \cong \overline{XZ}$	معطى
$\overline{YM}$ و $\overline{ZN}$ قطعتان متوسطتان	معطى
M منتصف $\overline{XZ}$	تعريف القطعة المتوسطة
N منتصف $\overline{XY}$	تعريف القطعة المتوسطة
$\overline{YX} = \overline{YN} + \overline{NX}$	جمع القطع المستقيمة
$\overline{ZX} = \overline{ZM} + \overline{MX}$	جمع القطع المستقيمة
$\overline{YN} = \overline{NX}$	تعريف نقطة المنتصف
$\overline{ZM} = \overline{MX}$	تعريف نقطة المنتصف
$\overline{ZM} = \overline{YN}$	بالتعويض
$\angle Z \cong \angle Y$	لأن المثلث متطابق الضلعين
$\overline{ZY} \cong \overline{YZ}$	ضلع مشترك
$\Delta MYZ \cong \Delta NZY$	مسلمة SAS
$\overline{YM} \cong \overline{ZN}$	تعريف تطابق مثلثين

2- الحل: بما أن l عمود منصف للضلع PR: $Z+4 = 7 \Rightarrow z = 7-4 = 3$

بما أن النقطة T تقع على العمود المنصف l للضلع PR، تبعد بعد متساوي عن طرفي الضلع: $PT = TR \Leftarrow PT = 8$

$3y - 1 = 8 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3$

إذن T تقع على العود المنصف n للضلع QR، إذن تبعد بعد متساوي عن طرفي الضلع: $TQ = TR$: $2x = 8 \Rightarrow x = 4$

3- الحل: ميل AB: $m = \frac{2-3}{3+3} = \frac{-1}{6}$، ميل العمود المنصف عليه = 6.

يمر بالنقطة Q التي إحداثياتها = $\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = Q(0, 2.5)$

معادلة العمود المنصف للضلع AB:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2.5 = 6(x - 0) \Rightarrow y = 6x + 2.5$$

ميل AC: $m = \frac{-4-3}{1+3} = -\frac{7}{4}$، ميل العمود المنصف عليه = $\frac{4}{7}$.

العمود المنصف يمر بالنقطة R:

$$R = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{3-4}{2}\right) \Rightarrow R = (-1, -0.5)$$

معادلة العمود المنصف للضلع AC:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0.5 = \frac{4}{7}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{4}{7}x$$

بحل معادلتي العمود المنصف: $y = 6x + 2.5$ ، $y = \frac{4}{7}x$

$$x = -0.46$$

بالتعويض عن x في المعادلة الثانية لإيجاد قيمة y:

$$y = \frac{4}{7}(-0.46) \quad \Rightarrow \quad y = -0.3$$

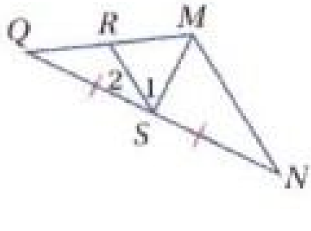
مركز الدائرة $(-0.46\ ,\ -0.3)$

4- اكتب برهانا ذا عمودين

العبارات	المبررات
ΔUVW متطابق الضلعين	معطى
	معطى
$\angle YVW \cong \angle UVY$	تعريف الزاوية المنصفة
$\overline{YV} \cong \overline{YV}$ ضلع مشترك	خاصية الانعكاس
$\overline{WV} \cong \overline{UV}$	تعريف المثلث متطابق الضلعين
$\Delta YVW \cong \Delta UVY$	مسلمة SAS
$\overline{UY} \cong \overline{YW}$	تعريف تطابق مثلثين
$\overline{YM}$ قطعة متوسطة	تعريف القطعة المتوسطة (تمر بأحد رؤوس المثلث وتنصف الضلع المقابل)

5- اكتب برهانا ذا عمودين

العبارات	المبررات
$\overline{GL}$ قطعة متوسطة لـ ΔEGH	معطى
$\overline{JM}$ قطعة متوسطة لـ ΔIJK	معطى
	معطى
$\overline{IJ} \cong \overline{HG}$ ، $\overline{IJ} \cong \overline{EG}$ ، $\overline{IK} \cong \overline{EH}$	تعريف تطابق مثلثين
$\overline{IK} = \overline{IM} + \overline{MK}$	جمع القطع المستقيمة
$\overline{EH} = \overline{EL} + \overline{LH}$	جمع القطع المستقيمة
$\overline{IM} = \overline{EL}$ و $\overline{LH} = \overline{MK}$	تعريف القطعة المتوسطة
$\angle H \cong \angle K$	من تطابق المثلثين
$\Delta LHG \cong \Delta MKJ$	مسلمة SAS
$\overline{MJ} \cong \overline{LG}$	تعريف التطابق



6- الحل: بما أن $\overline{MS}$ ارتفاع في المثلث:

$\overline{MS}$ عمودي على QN وينصفه.

$$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$3x + 11 + 7x + 9 = 90^\circ$$

$$10x = 90 - 20 \quad \Rightarrow \quad x = 7$$

$$\angle 2 = 7x + 9 \quad \Rightarrow \quad \angle 2 = 7(7) + 9 = 58^\circ$$

7- الحل: بما أن $\overline{MS}$ قطعة متوسطة: $\overline{QS} = \overline{SN}$

$$3a - 14 = 2a + 1 \quad \Rightarrow \quad 3a - 2a = 1 + 14 \quad \Rightarrow \quad a = 15$$

$$\angle MSQ = 7a + 1 \quad \Rightarrow \quad \angle MSQ = 7(15) + 1 = 106^\circ$$

$\overline{MS}$ ليس ارتفاع في المثلث لأنه ليس عمودي على $\overline{QN}$

8- الحل: بما أن $\overline{PS}$ قطعة متوسطة: $\overline{QS} = \overline{SR}$

$$10x - 7 = 5x + 3 \quad \Rightarrow \quad 10x - 5x = 7 + 3 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

9- الحل: بما أن $\overline{AD}$ ارتفاع في المثلث $\Leftarrow$ $\overline{AD}$ على عمودي $\overline{CB}$
إذن يشكل زاوية قائمة مع الضلع $\overline{CB}$

$$4x - 6 = 90 \Rightarrow 4x = 90 + 6 \Rightarrow x = 24$$

10- الحل: بما أن $\overline{WP}$ قطعة متوسطة: $\overline{HP} = \overline{PA}$

$$4y + 11 = 7y - 5 \Rightarrow 7y - 3y = 11 + 5 \Rightarrow y = 4$$

$\overline{WP}$ منتصف للزاوية في المثلث: $\angle HWA = 2(\angle HWP)$

$$4x - 16 = 2x + 24 \Rightarrow 4x - 2x = 24 + 16 \Rightarrow x = 20$$

$$\angle PAW = 3x - 2 \Rightarrow \angle MSQ = 3(20) - 2 = 58^{\circ}$$

$$\angle APW = 180 - 58 - 32 = 90^{\circ}$$

إذن $\overline{WP}$ ارتفاع للمثلث لأنه عمودي على HA عند النقطة P

11- الحل: $\overline{WP}$ عمود منصف: $\overline{AP} = \overline{PH}$

$$6r + 4 = 22 + 3r \Rightarrow 6r - 3r = 22 - 4 \Rightarrow r = 6$$

$$\angle HPW = 90^{\circ} \Leftarrow \angle WHA + \angle HWP + \angle HPW = 180^{\circ}$$

$$8q + 17 + 10 + q + 90 = 180$$

$$9q + 17 = 180 \Rightarrow 9q = 180 - 17 \Rightarrow q = 7$$

$$\angle HWP = 10 + q = 10 + 7 = 17^{\circ}$$

12- $\overline{PX}$ ارتفاع $\Leftarrow$ PX عمودي على $\overline{QR}$ $\Leftarrow$ يكون زاوية قائمة مع $\overline{QR}$

$$\angle PXR = 2a + 10$$

$$90 = 2a + 10 \Rightarrow 2a = 80 \Rightarrow a = 40$$

13- الحل: $\overline{RZ}$ منصف زاوية: $\angle PRZ = \angle ZRQ$

$$4b - 17 = 3b - 4 \Rightarrow 7b = -4 + 17 \Rightarrow b = 13$$

$$\angle PRZ = 4b - 17 = 4(13) - 17 = 35^{\circ}$$

14- الحل: بما أن $\overline{QY}$ قطعة متوسطة: $\overline{PY} = \overline{YR}$

$$2c - 1 = 4c - 11 \Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5$$

$$\overline{PR} = \overline{PY} + YR = 2c - 1 + 4c - 11 = 2(5) - 1 + 4(5) - 11 = 18$$

15- الحل: مركز المثلث: هي نقطة تلاقي القطع المتوسطة لمثلث:

إحداثيات النقطة C (تقع منتصف ED): $C = \left(\frac{4-2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) = C(1, 2)$

طول القطعة المستقيمة المتوسطة FC: هو المسافة بين النقطتين C , F.

$$d = FC = \sqrt{(1-0)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{(1+16)} = \sqrt{15}$$

معادلة FC باختيار النقطة: $C(1, 2)$ $\quad m = \frac{6-2}{0-1} = \frac{4}{-1} = -4$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 6$$

إحداثيات النقطة A (تقع منتصف EF)

$$A = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{10}{2}\right) = A(-1, 5)$$

طول القطعة المستقيمة المتوسطة AD: هو المسافة بين النقطتين D , A.

معادلة AD باختيار النقطة: $A(-1, 5)$ $\quad m = \frac{5-0}{-1-4} = \frac{5}{-5} = -1$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = -1(x+1) \Rightarrow y = -x + 4$

بحل المعادلتين: $y = -4x + 6$ ، $y = -x + 4$

$y = \frac{10}{3}$ ، $x = \frac{2}{3}$ إذن مركز المثلث $Q(\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$

16- الحل: ملتقى الارتفاعات: CY ارتفاع للمثلث عمودي على ED:

ميل ED: $m = \frac{4-0}{-2-4} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3}$ ، ميل CF: $\frac{3}{2}$

CF يمر بالنقطة $F(0, 6)$ ، معادلة CF:

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 6 = \frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 6$

AD ارتفاع للمثلث عمودي على EF: ميل EF: $m = \frac{6-4}{0+2} = \frac{2}{2} = 1$ ، ميل AD: -1

AD يمر بالنقطة $D(4, 0)$ ، معادلة CF:

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -1(x - 4) \Rightarrow y = -x + 4$

بحل المعادلتين: $y = \frac{3}{2}x + 6$ ، $y = -x + 4$

$y = \frac{24}{5}$ ، $x = \frac{-4}{2}$ إذن ملتقى الارتفاعات $(\frac{-4}{2}, \frac{24}{5})$

17- مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث:

العمود المنصف A يمر بالنقطة A ، إحداثيات A (منتصف EF):

$$A = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{10}{2}\right) = A(-1, 5)$$

ميل EF: $m = \frac{6-4}{0+2} = \frac{2}{2} = 1$ ميل العمود $A = (-1)$

معادلة العمود (A):

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = -1(x+1) \Rightarrow y = -x + 4$

العمود المنصف B يمر بالنقطة B ، إحداثيات B (منتصف FD):

$$B = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right) = A(2, 3)$$

ميل FD: $m = \frac{6-0}{0-4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{-2}$ ميل العمود $B = (\frac{2}{3})$

معادلة العمود (B):

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

بحل المعادلتين: $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ ، $y = -x + 4$

$y = 2.6$ ، $x = 1.4$ إذن مركز الدائرة $(1.4, 2.6)$

18- $\overline{RX}$ قطعة متوسطة ⇐ تنصف الضلع ST وتمر بـ R

إحداثيات X: $X = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{6+8}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{14}{2}\right) = A(0, 7)$

19- $\overline{RX}$ هو المسافة بين النقطتين X, R:

$$RX = \sqrt{(0-3)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{(9+16)} = 5$$

20- ميل $\overline{RX}$: $m = \frac{3-7}{3-0} = \frac{-4}{3}$

معادلة $\overline{RX}$ باختيار النقطة $X(0, 7)$:

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 7 = \frac{-4}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{-4}{3}x + 7$

21- ليكون $\overline{RX}$ ارتفاع في المثلث يجب أن يكون عمودي على ST:
ميل ST : $m = \frac{8-6}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$ ميل $\overline{RX}$: $\frac{-4}{3}$
حاصل ضرب الميلين $\neq (-1)$ ⇐ إذن الميلين غير متعامدين.
إذن $\overline{RX}$ ليس ارتفاع في المثلث.

اكتب برهانا ذا عمودين لكل من النظريات التالية:

22-

العبارات	المبررات
$\overline{CA} \cong \overline{CB}$, $\overline{AD} \cong \overline{BD}$	معطى
المثلثين ΔACB ، ΔADB متطابقين	تعريف تطابق الأضلاع
C تبعد البعد نفسه عن B , A	تعريف المثلث متطابق الضلعين
D تبعد البعد نفسه عن B , A	تعريف المثلث متطابق الضلعين
D,C تقعان على العمود المنصف لـ $\overline{AB}$	نظرية العمود المنصف

23-

العبارات	المبررات
$\overline{DC}$ منصف للزاوية $\angle ACB$	معطى
$\overline{RD} \cong \overline{DQ}$	عمودين منصفين
$\angle ARD \cong \angle BQD = 90^{\circ}$	تعريف التعامد
$\overline{BD} \cong \overline{BD}$ ضلع مشترك	خاصية الانعكاس
D تقع على $\overline{DC}$	تعريف النقطة الواقعة على مستقيم
D تقع على منصف الزاوية	تعريف النقطة الواقعة على منصفات الزوايا

24-

العبارات	المبررات
K مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC	معطى
K ملتقى منصفات زوايا المثلث	تعريف مركز الدائرة الداخلية
$\Delta PKA \cong \Delta AKR$	مسلمة SAS
$\Delta BQK \cong \Delta BKE$	مسلمة SAS
$\Delta QCK \cong \Delta CKR$	مسلمة SAS
$\overline{KP} = \overline{KQ} = \overline{KR}$	تعريف تطابق المثلثات

25- الحل: إذا ركضت بمستقيم من نقطة تقاطع B, A بحيث يكون هذا المستقيم منصف للزاوية بينهما.

26- الحل: حتى تكون الإدارة على بعد متساوي من المداخل الثلاثة يجب أن تتطابق الزاويتين $\angle A, \angle B$ حتى تتطابق المثلثات وبالتالي تتساوى الأضلاع التي هي الممرات المؤدية للإدارة.

27- الحل: متوسط الإحداثيات السينية لرؤوس المثلث: $\frac{16+2+(-6)}{3} = \frac{12}{3} = 4$

28- الحل: متوسط الإحداثيات الصادية لرؤوس المثلث: $\frac{8+4+12}{3} = \frac{24}{3} = 8$

30- الحل: مركز المثلث = متوسطي إحداثيات الرؤوس.

31- الحل: صحيح دائما.

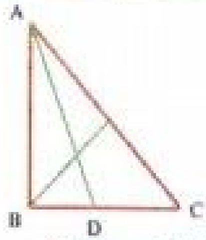
32- الحل: غير صحيح أبدا.

33- الحل: منصفات الزوايا تقع داخل المثلث (غير صحيحة).

34- الحل: صحيحة أحيانا.

35- قارن بين الأعمدة المنصفة لأضلاع مثلث وقطعه المتوسطة.

الأعمدة المنصفة	القطعة المتوسطة
مستقيم أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم. تشكل نقطة التقائهما مركز الدائرة التي تمر بروؤس المثلث. تنصف الضلع العمودية عليه.	قطعة مستقيمة. تشكل نقطة التقائها مركز المثلث. تنصف الضلع وتمر بالرأس المقابل له.



36- الحل: في المثلث المقابل AB ارتفاع في المثلث ABC ، AD منصف الزاوية A (ليسا نفس القطعة المستقيمة)

38- الحل: (الارتفاع لأنه ليس نقطة التقاء).

39- الحل: $\Delta XYN \cong \Delta XNZ$

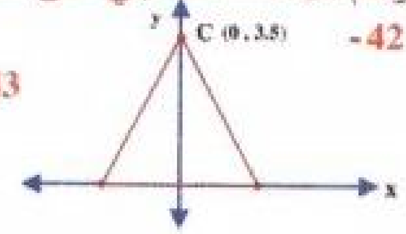
لأن $\overline{XN}$ ضلع مشترك و $\overline{YN} \cong \overline{NZ}$ (تعريف القطعة المتوسطة)

و $\angle XNY \cong \angle XNZ \Leftarrow$ مسلمة SAS

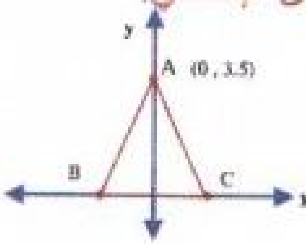
41- الحل: (C) FJ قطعة متوسطة للمثلث FGH

ارسم كل مثلث مما يلي على المستوى الإحداثي:

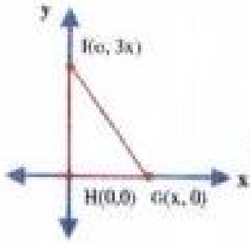
42-

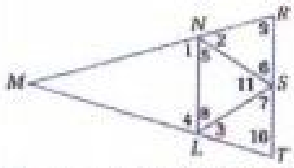


43-



44-





45- الحل: $\overline{MR} \cong \overline{MT}$

46- الحل: $\angle 5 \cong \angle 8$

47- الحل: $\angle 7 \cong \angle 10$

48- الحل: $\overline{MN} \cong \overline{ML}$

49- الحل: إذا كانت المسافة من السقف لكل مكان أخذه ثابت ويساوي 20 فإن الجسر سيكون موازيا للسقف.

50- الحل: $m = \frac{0-6}{4-0} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$

51- الحل: $m = \frac{-6-1}{8-8} = \frac{-7}{0} \Leftarrow$ غير معرف

52- الحل: $m = \frac{3-3}{-6-6} = \frac{0}{-12} = 0$

53- الحل: التخمين غير صحيح دائما ممكن أن يكون خاطئ فمثلا لو كان $x=-4$ فإن $-(-4)= 4$ عدد غير سالب.

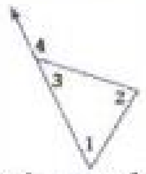
54- $\frac{18}{25} > \frac{-19}{27}$ 55- $\frac{3}{8} > \frac{5}{16}$ 56- $2.7 > \frac{5}{3}$ 57- $-4.25 < \frac{-19}{4}$

4-2 المتباينات والمثلثات

عزيزي الطالب: لنتذكر سويا المتباينة بصفتها علاقة بين الأعداد الحقيقية.
لكل عددين b, a يكون $a>b$ إذا وفقط إذا وجد عدد موجب c بحيث $a=b+c$
مثال: إذا كان $4+1 = 5$ فإن $5>1$ و $5>4$.

لاحظ جيدا: خصائص المتباينات تطبق على الزوايا كما طبقناها على الأعداد الحقيقية ومنها خاصية المقارنة، التعدي، الجمع والطرح والضرب والقسمة.

مثال



حدد الزاوية التي لها أكبر قياس:

نقارن بين $\angle 4 , \angle 1$ ⇐ من تعريف الزاوية الخارجية: $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

قياسات الزوايا أعداد موجبة ⇐ $\angle 4 > \angle 2$

أيضا $m\angle 4 > m\angle 1$

$\angle 3$ مكملة للزوايا $\angle 1 ,\angle 2$ لأنهما مجموع زوايا مثلث $=180$ ولأن $\angle 4$ أكبر من كل من $\angle 1 ,\angle 2$ ⇐ $m\angle 4 > m\angle 3$

نظرية

مثال، $m\angle 4 > m\angle 1$

$m\angle 4 > m\angle 2$

- قياس الزاوية الخارجية للمثلث أكبر من قياس كل من الزاويتين الداخليتين البعيدتين المتناظرتين لها.

مثال

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية لتحديد جميع الزوايا التي تحقق الشرط المذكور.

قياس كل منها أقل من $m\angle 3$.

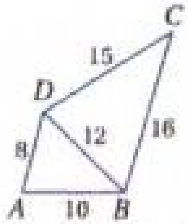
$\angle 5$ ، $\angle 6$ أقل من $\angle 3$

نظرية

- قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول في أي مثلث أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر منه.

انتبه الضلع الأطول في مثلث تقابل الزاوية الكبرى فيه.

عكس هذه النظرية أيضا صحيح.



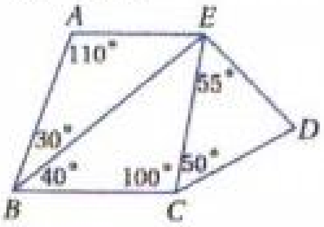
مثال

حدد العلاقة بين $\angle CDB$ ، $\angle CBD$.

الضلع المقابل لـ $\angle CDB = 16$

الضلع المقابل لـ $\angle CBD = 15$

$\angle CBD < \angle CDB$



مثال

حدد العلاقة بين BC , EC في الشكل المجاور؟

BC يقابل الزاوية $40 - 100 - 180 \Leftarrow (40)^\circ$

EC يقابل الزاوية 40°

طول $\overline{BC}$ = طول $\overline{EC}$

تدريبات وحلول

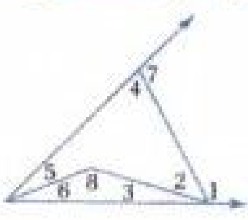
حدد الزاوية التي لها أكبر قياس:

1 - $\angle 2$ لأنها زاوية خارجية.

2 - $\angle 3$ لأنها زاوية خارجية.

3 - $\angle 3$ لأنها زاوية خارجية.

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية لتحديد جميع الزوايا التي تحقق الشرط المعطى:



4 قياساتها أقل من $m\angle 1$: "$\angle 6$ ، $\angle 5$ ، $\angle 4$"

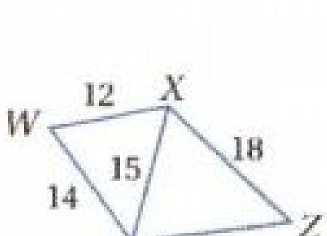
5 قياساتها أقل من $m\angle 7$: "$\angle 2$ ، $\angle 3$ ، $\angle 5$ ، $\angle 6$"

حدد العلاقة بين قياسي الزاويتين التاليتين في كل مما يلي:

6 - $\angle XYW$ ، $\angle WXY$.

$\angle XYW$ تقابل الضلع 12، $\angle WXY$ تقابل الضلع 14

إذن $\angle WXY$ أكبر من $\angle XYW$



7 - $\angle XYZ$ ، $\angle XZY$.

$\angle XYZ$ تقابل الضلع 18، $\angle XZY$ تقابل الضلع 15

إذن $\angle XYZ$ أكبر من $\angle XZY$

8 - $\angle XWY$ ، $\angle WXY$.

$\angle XWY$ تقابل الضلع 18، $\angle WXY$ تقابل الضلع 15

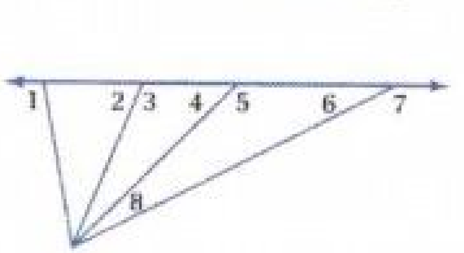
إذن $\angle XWY$ أكبر من $\angle WXY$

9 - الحل: الزاوية التي انطلقت بها الكرة $(180-100-30)$ مجموع زوايا مثلث:

الزاوية $= 50^\circ$ ، الضلع a يقابل 30° ، الضلع b يقابل 50°.

الضلع b أكبر من الضلع a

حدد الزاوية التي لها أكبر قياس:



10 - $\angle 1$ لأنها زاوية خارجية.

11 - $\angle 2$ لأنها زاوية خارجية.

12 - $\angle 7$ لأنها زاوية خارجية.

13 - $\angle 2$ لأنها زاوية خارجية.

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية لتحديد جميع الزوايا التي تحقق الشرط المعطى:

14- قياساتها أقل من $m\angle 5$: "$\angle 7$ ، $\angle 8$ ، $\angle 2$ ، $\angle 6$ ، $\angle 9$ ، $\angle 10$، $\angle 4$"

15- قياساتها أقل من $m\angle 6$: "$\angle 5$ ، $\angle 9$ ، $\angle 4$ ، $\angle 7$ ، $\angle 3$"

16- قياساتها أقل من $m\angle 10$: "$\angle 5$ ، $\angle 11$ ، $\angle 3$ ، $\angle 6$"

17- قياساتها أقل من $m\angle 11$: "$\angle 7$ ، $\angle 8$ ، $\angle 9$ ، $\angle 10$ ، $\angle 4$ ، $\angle 6$، $\angle 2$، $\angle 5$"

حدد العلاقة بين قياسي الزاويتين التاليتين في كل مما يلي:

18- $\angle KAJ$ ، $\angle AJK$.

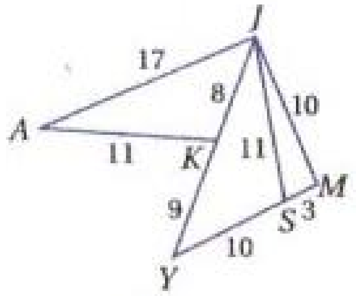
$\angle AJK$ تقابل الضلع 11، $\angle KAJ$ تقابل الضلع 8

إذن $\angle AJK$ أكبر من $\angle KAJ$

19- $\angle MJY$ ، $\angle JYM$.

$\angle JYM$ تقابل الضلع 18، $\angle MJY$ تقابل الضلع 13

إذن $\angle JYM$ أقل من $\angle MJY$



20- $\angle SMJ$ ، $\angle MJS$.

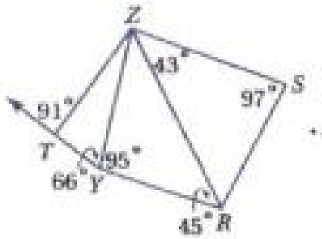
$\angle MJS$ تقابل الضلع 3، $\angle SMJ$ تقابل الضلع 11

إذن $\angle MJS$ أقل من $\angle SMJ$

21- $\angle MYJ$ ، $\angle JMY$.

$\angle JMY$ تقابل الضلع 17، $\angle MYJ$ تقابل الضلع 10

إذن $\angle JMY$ أكبر من $\angle MYJ$



حدد العلاقة بين طولي كل ضلعين مما يلي:

22- $\overline{YR}$ و $\overline{ZY}$ ، $\overline{ZY} > \overline{YR}$ لأنه يقابل الزاوية الأصغر.

23- $\overline{RZ}$ و $\overline{ZY}$ ، $\overline{ZY} < \overline{RZ}$ لأنه يقابل الزاوية الأكبر.

24- $\overline{ZT}$ و $\overline{TY}$ ، $\overline{TY} < \overline{ZT}$ لأنه يقابل الزاوية الأكبر.

25- اكتب برهانا ذا عمودين:

العبارات	المبررات
$\overline{JL} \cong \overline{KL}$ ، $\overline{JM} \cong \overline{JL}$	معطى
$\overline{KL} \cong \overline{JM}$	نظرية التعدي للقطع المستقيمة
$\overline{JL}, \overline{JM}$ أطول من $\overline{LM}$	من الرسم
$\overline{LM}$ يقابل الزاوية 1	من الرسم
$\overline{LM}$ يقابل الزاوية 2	من الرسم
$\angle 1 \cong \angle 2$	نظرية الزاوية المقابلة للضلع الأكبر.

26- الحل: أولا نوجد الزوايا:

$2x-12+4x-11+2x+3 = 180°$ مجموع زوايا المثلث

$8x - 20 = 180 \Rightarrow 8x = 200 \Rightarrow x = 25$

عند تبوك: $2x-12 \Leftarrow 2(25) - 12 = 38°$.

عند أبها: $2x+3 \Leftarrow 2(25) + 3 = 53°$.

عند الرياض: $4x-11 \Leftarrow 4(25) - 11 = 89°$

الأطول: من تبوك إلى أبها ← من الرياض إلى تبوك ← من الرياض إلى أبها

27- الحل: نوجد أطوال الأضلاع:

$$KL = \sqrt{(-1-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(16+9)} = 5$$

$$LM = \sqrt{(-3+1)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{(4+144)} = 12.1$$

$$KM = \sqrt{(-3-3)^2 + (-7-2)^2} = \sqrt{(36+81)} = 10.8$$

KL مقابل للزاوية M ، LM مقابل للزاوية K ، KM مقابل للزاوية L.

$$m\angle K > m\angle L > m\angle M$$

28- الحل: الزوايا من الأكبر للأصغر حسب الأضلاع:

$$m\angle A > m\angle B > m\angle C$$

$$AM > BN > CO$$

29- الحل: $\frac{x}{3} < 2(y+1) \Leftarrow y = \frac{x-6}{6} \Rightarrow \frac{x}{3} - 2 = 2y$

30- الحل: $9n + 29 + 93 - 5n + 10n + 2 = 180^\circ$

$$14n + 124 = 180 \Rightarrow 14n = 56 \Rightarrow n = 4$$

$\angle P = 9n + 29 \Rightarrow \angle P = 9(4) + 29 \Rightarrow \angle P = 65^\circ$ مقابلة للضلع QR

$\angle Q = 93 - 5n \Rightarrow \angle Q = 93 - 5(4) \Rightarrow \angle Q = 73^\circ$ مقابلة للضلع PR

$\angle R = 10n + 2 \Rightarrow \angle R = 10(4) + 2 \Rightarrow \angle R = 42^\circ$ مقابلة للضلع PQ

الترتيب: $\overline{PQ} \leftarrow \overline{QR} \leftarrow \overline{PR}$

31- الحل: $12n - 9 + 62 - 3n + 16n + 2 = 180^\circ$

$$25n + 55 = 180 \Rightarrow 25n = 125 \Rightarrow n = 5$$

$\angle P = 12n - 9 \Rightarrow \angle P = 12(5) - 9 \Rightarrow \angle P = 51^\circ$ مقابلة للضلع QR

$\angle Q = 62 - 3n \Rightarrow \angle Q = 62 - 3(5) \Rightarrow \angle Q = 47^\circ$ مقابلة للضلع PR

$\angle R = 16n + 2 \Rightarrow \angle R = 16(5) + 2 \Rightarrow \angle R = 82^\circ$ مقابلة للضلع PQ

الترتيب: $\overline{PR} \leftarrow \overline{QR} \leftarrow \overline{PQ}$

32- الحل: $4n + 61 + 67 - 3n + n + 74 = 180^\circ$

$$2n + 202 = 180 \Rightarrow 2n = -22 \Rightarrow n = -11$$

$\angle P = 4n + 61 \Rightarrow \angle P = 4(-11) + 61 \Rightarrow \angle P = 17^\circ$ مقابلة للضلع QR

$\angle Q = 67 - 3n \Rightarrow \angle Q = 67 - 3(-11) \Rightarrow \angle Q = 100^\circ$ مقابلة للضلع PR

$\angle R = n + 74 \Rightarrow \angle R = (-11) + 74 \Rightarrow \angle R = 63^\circ$ مقابلة للضلع PQ

الترتيب: $\overline{QR} \leftarrow \overline{PQ} \leftarrow \overline{PR}$

33- الحل: المثلث غير متطابق الضلعين $\Leftarrow$ القطعة المتوسطة هي منتصف أي ضلع ومار بالرأس المقابل لهذا الضلع وبما أن ارتفاع المثلث هو العمود النازل من الرأس على الضلع المقابل له ومن نظرية العمود فهو أقصر مسافة بين الرأس والضلع المقابل له وبالتالي الارتفاع أقصر من القطعة المتوسطة في المثلث غير متطابق الضلعين.

34- الحل: صحيحة دائما لأن $m\angle J = 90 \Leftarrow m\angle L = m\angle K = 45$

من المعطى: $\overline{JL} = \overline{KJ} \Leftarrow KL^2 = KJ^2 + JL^2 \Leftarrow KL^2 = KJ^2 + KJ^2$

إذن : $KL^2 = 2KJ^2$

35- أقل زاوية مقابلة لأقصر ضلع $\angle C \Leftarrow AB$

أكبر زاوية مقابلة لأطول ضلع $\angle A \Leftarrow BC$

36- الحل: تحديد سعيد هو الصحيح لأن الزاوية الأقل مقابلة للضلع الأقصر.

37- الحل: نوجد y أولا: $2y + 12 + y - 18 + 4y + 12 = 180$

$$7y + 6 = 180 \Rightarrow 7y = 174 \Rightarrow y = 24.85$$

$\angle A = 2y + 12 \Rightarrow \angle A = 61.7^\circ$ مقابلة للضلع BC

$\angle B = y - 18 \Rightarrow \angle B = 6.9^\circ$ مقابلة للضلع AC

$\angle C = 4y + 12 \Rightarrow \angle C = 111.4^\circ$ مقابلة للضلع AB

$$3x+15 > 4x + 7 \Rightarrow 15-7 > 4x - 3x \Rightarrow 8 > x$$

38- الحل: الزاوية الكبرى هي المقابلة للضلع الأطول ⇐ الزاوية الكبرى هي المقابلة للضلع الذي طوله (51م).
النظرية: قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول في أي مثلث أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر فيه.

39- الحل: (A) منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع.

40- الحل: 3 (J)

41- الحل: D منتصف BC ⇐ إحداثيات c(x,y) ،

$$\left(\frac{9+x}{2},\frac{12+y}{2}\right)=(12,3)$$

$$9+x=14 \Rightarrow x=15 \quad , \quad 12+y=6 \Rightarrow y=-6$$

$$C(15\ ,\ -6)$$

42- الحل: حتى يكون AD ارتفاع للمثلث يجب أن يكون عمودي على BC:

ميل $\overline{BC}$: $m=\frac{-6-12}{15-9}=\frac{-18}{6}=-3$ ، ميل $\overline{AD}$: $m=\frac{8-3}{3-12}=\frac{-5}{9}$

حاصل ضرب الميلين لا يساوي (-1) ⇐ غير متعامدين.

AD ليس ارتفاع في المثلث.

43- ميل $\overline{EF}$: $m=\frac{6-7.5}{6-10.5}=\frac{-1.5}{-4.5}=0.33$ ، ميل $\overline{BD}$: $m=\frac{12-3}{9-12}=\frac{9}{-3}=-3$

حاصل ضرب الميلين يساوي (-1) ⇐ $\overline{EF}$ عمود على $\overline{BD}$.

44- الحل: نحلل المسألة كما في الشكل المقابل:

$\overline{DC}\perp\overline{AB}$ ⇐ $\overline{CB}\cong\overline{AC}$

$\angle DCA\cong\angle DCB=90^\circ$ ⇐ $\overline{DC}\cong\overline{DC}$

لأنه ضلع مشترك بين المثلثين ΔDAC ، ΔDCB

طبقا لمسلمة SAS ⇐ المثلثين متطابقين.

المسافة DB: $DB=\sqrt{(0-50)^2+(25-0)^2}=\sqrt{(2500+625)}=55.90$

$$AD=\sqrt{(-50-0)^2+(0-25)^2}=\sqrt{(2500+625)}=55.90$$

المثلث متطابق الضلعين $\Rightarrow$ $\overline{DB}\cong\overline{AD}$

45- الحل: $\angle X\cong\angle T$ ، $\angle Y\cong\angle U$ ، $\angle V\cong\angle Z$

$\overline{XY}\cong\overline{TU}$ ، $\overline{XZ}\cong\overline{TV}$ ، $\overline{YZ}\cong\overline{UV}$

46- الحل: $\angle G\cong\angle W$ ، $\angle D\cong\angle S$ ، $\angle C\cong\angle R$

$\overline{DG}\cong\overline{SW}$ ، $\overline{CD}\cong\overline{RS}$ ، $\overline{CG}\cong\overline{RW}$

47- ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2,-1)$ $(4,8)$: $m=\frac{8+1}{4-2}=\frac{9}{2}=4.5$

ميل المستقيم العمودي عليه يجب أن يكون $\frac{-2}{9}$

$$m=\frac{12-3}{9-12}=\frac{9}{-3}=-3 \Rightarrow 9(2-5)=-2(x+4)$$

$$9(-3)=-2x-8 \Rightarrow 2x=27-8 \Rightarrow x=9.5$$

-48

$2ab=20$

$2(2)(5)=20$

$(4)(5)=20$

المتباينة صحيحة

49

$C(b-a)=15$

$6(5-2)=15$

$18\neq15$

المتباينة غير صحيحة

50

$a+c>a+b$

$2+6>2+5$

$8>7$

المتباينة صحيحة

4-3 البرهان غير المباشر

عزيزي الطالب: تعلمت سابقا طرق البرهان المباشر لإثبات صحة مسلمة أو نظرية أو فرض ما، وسنتعلم هنا طريقة جديدة للإثبات تسمى البرهان الغير مباشر أو البرهان بالتناقض.

طريقة كتابة البرهان الغير مباشر:

1) افرض أن النتيجة خطأ.
2) بين أن هذا الافتراض يؤدي إلى التناقض مع المعطيات أو مع حقيقة سابقة كتعريف أو مسلمة أو نظرية أو نتيجة.
3) أشر إلى أنه بسبب افتراض خطأ النتيجة حصلنا على عبارة غير صحيحة ولذلك يجب أن تكون النتيجة الأصلية صحيحة.

مثال

اكتب الفرض الذي ستبدأ منه برهانا غير مباشر لكل عبارة مما يلي:

1) $x < 4$

$x > 4$

2) $\angle 3$ زاوية منفرجة:

$\angle 3$ زاوية حادة أو $\angle 3$ زاوية قائمة.

انتبه البرهان الغير مباشر يستعمل لإثبات عبارات جبرية أو عبارات هندسية ويستعمل في الحياة اليومية ولإثبات النظريات.

مثال

(عبارات جبرية)

المعطيات $7x<56$ ، المطلوب: $x<8$:

استخدم البرهان الغير مباشر لإثبات صحة العبارة.

افرض أن $x \leq 8$ أي أن $x > 8$ أو $x = 8$

اعمل جدولا لعدة قيم ممكنة لـ x بحيث يكون $x>8$ أو $x=8$

x	8	9	10
$7x$	56	63	70

في كل الحالات الفرض يقود إلى تناقض مع الحقيقة المعطاة وعليه فإن الفرض $x \leq 8$ مما يؤدي إلى $x < 8$ صحيح.

مثال

(الحياة اليومية)

سافر سلطان لمسافة تزيد عن 360كلم، توقف خلالها مرة واحدة للاستراحة استعمل التبرير الغير مباشر لإثبات أنه قطع أكثر من 180كلم في جزء واحد من رحلته.

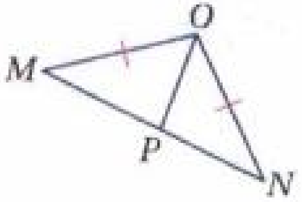
إذا كان $2x > 360$ فإن $x > 180$

نفرض $x \leq 180 \Leftarrow 2x \leq 360$ وهذا يتناقض مع المعطى.

الفرض $x \leq 180$ خاطئ والعبارة $x > 180$ صحيحة.

مثـــال

(عبارات هندسية)



المعطيات : $\overline{MO} \cong \overline{ON}$, $\overline{MP} \ncong \overline{NP}$

المطلوب: إثبات أن $\angle MOP \ncong \angle NOP$

افرض $\angle MOP \cong \angle NOP$

$\overline{MO} \cong \overline{ON}$ من المعطى

$\overline{OP}$ ضلع مشترك بين ΔOPM , ΔOPN

إذن يجب أن يكون المثلثين متطابقين وعليه $\overline{MP} \cong \overline{NP}$.

وهذا يتناقض مع المعطى، إذن الفرض خاطئ لذلك فإن العبارة $\overline{MP} \cong \overline{NP}$ هي العبارة الصحيحة.

تدريبات وحلول

اكتب الفرض الذي ستبدأ به برهانا غير مباشر لكل عبارة مما يلي:

1 - إذا كان $25 > 5x$، فإن $x<5$. الفرض: $5 \le x$.

2 - المستقيمان اللذان يقطعهما مستقيم ثالث بحيث تكون الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة يكونان متوازيين:
الفرض: الزوايا الداخلية المتبادلة غير متطابقة.

اكتب برهانا غير مباشر لكل من:

3 - الحل: نفرض أن: $0 > \frac{1}{a}$ بقلب الأطراف $a<0$
وهذا يتنافى عن المعطى $\Leftarrow$ الفرض خاطئ والعبارة $a>0$ صحيحة.

4 - الحل: نفرض أن n^2 عدد غير فردي، نضع عدة قيم

n	1	3	5
n^2	1	9	25

من الواضح أن n^2 عدد فردي أي أن الفرض خاطئ والعبارة n عدد فردي صحيح.

5 - الحل: المعطيات: نفرض أن المتسابقون قطعوا مرحلتين x , y ، $x+y > 200$.
المطلوب: $x > 100$ أو $y>100$
نفرض أن $x \le 100$, $y \le 100$.
$x + y \le 200$ وهذا يتنافى مع المعطى.
إذن الفرض خاطئ والعبارة $x + y > 200$ صحيحة.

6 - اكتب برهانا غير مباشر لإثبات أن وتر المثلث القائم الزاوية هو الضلع الأطول.
المعطيات: $z^2=x^2+y^2$ ، المطلوب: $z>x$, $z>y$

نفرض أن: $z \le x$, $z \le y$
$x^2 + y^2 = z^2$ نظرية فيثاغورس
$x^2 + y^2 \le z^2$ من الفرض
ولأن قياس الأطوال موجب فإنه من المستحيل أن يكون مجموع ضلعي القائمة أقل من طول الوتر بأي حال من الأحوال وهذا يتنافى مع تعريف نظرية فيثاغورس إذن الفرض $z \le x$, $z \le y$ فرض خاطئ، والعبارة $z>x$, $z>y$ صحيحة.

اكتب الفرض الذي ستبدأ به برهانا غير مباشر لكل عبارة مما يلي:

7 - الفرض: $\overline{PQ} \ncong \overline{ST}$

8 - الفرض: $x \leq 4$

9 - الفرض: العدد 6 غير نسبي.

10 - الفرض:القطعة المتوسطة لا تمثل ارتفاع في المثلث متطابق الضلعين.

11 - الفرض: النقاط P , Q, R لا تمثل مستقيم.

12 - افرض: منصف الزاوية لرأس المثلث لا يمثل ارتفاع في المثلث متطابق الضلعين.

اكتب برهانا غير مباشر لحل الأسئلة من 13-18:

13 - الحل: نفرض أن a عدد موجب: $0 < \frac{1}{a}$ بقلب المتباينة $\Leftarrow$ $a>0$

وهذا يتنافى مع المعطى $\frac{1}{a} < 0$

$\Leftarrow$ الفرض $a>0$ خاطئ والعبارة a عدد سالب صحيحة.

14 - الحل: نفرض أن n^2 لا يقبل القسمة على 4: نكون جدول بقيم n^2, n

n	n^2	$n^2 \div 4$
2	4	1
4	16	4
6	36	9

من الجدول نلاحظ أن الفرض خاطئ وأن العبارة n^2 قابل للقسمة على 4 إذا كان n^2 عدد زوجي صحيح.

15 - الحل: نفرض أن $1 \leq \frac{a}{b}$ ، نكون جدول بقيم لـ b, a بحيث تحقق $a>0,\ b>0,\ a>b$:

a	b	$\frac{a}{b}$
4	2	2
6	3	2
8	4	2

وبملاحظة قيم $\frac{a}{b}$ من الجدول نجد أن الفرض $1 \leq \frac{a}{b}$ خاطئ وأن العبارة $\frac{a}{b} > 1$ إذا كان $a>0,\ b>0,\ a>b$ عبارة صحيحة.

16 - الحل: نفرض أن $\angle 2 \cong \angle 3$

من عكس نظرية المثلث متطابق الضلعين فإنه إذا تساوت زاويتا قاعدة في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان وهذا يتنافى مع المعطى بأن الضلعين غير متطابقين.

إذن الفرض $\angle 2 \cong \angle 3$ غير صحيح والعبارة المعطاة صحيحة.

17 - الحل: نفرض أن $\overline{PZ}$ قطعة متوسطة للمثلث ΔPQR

من تعريف القطعة المتوسطة: $\overline{QZ} \cong \overline{RZ}$

$\overline{PZ} \cong \overline{PZ}$ ضلع مشترك يحقق خاصية الانعكاس.

$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ (معطى)

(SSS) $\Delta PQZ \cong \Delta PZR$

$\angle 1 \cong \angle 2$ (تعريف التطابق)

وهذا يتنافى مع الفرض $\angle 1 \ncong \angle 2$

إذن الفرض $\angle 1 \cong \angle 2$ خاطئ والعبارة المعطاة صحيحة.

18 - الحل: نفرض أن $m||l$ ، المستقيمين متوازيين يقطعهما مستقيم مستعرض t
$\angle 1 \cong \angle 2$ لأنهما زاويتان متناظرتان.
$\angle 1 \cong \angle 2$ من تعريف الزوايا المتطابقة.
هذا يتنافى مع المعطى، إذن الفرض $m||l$ خاطئ والعبارة المعطاة صحيحة.

19 - الحل: نفرض أن ΔBCD متطابق الأضلاع:
من التطابق ΔACB و ΔABC $\Leftarrow$ $\overline{BD} \cong \overline{BC}$ ، $\overline{AC} \cong \overline{AD}$
ولكن ΔACD غير متطابق الأضلاع أي أن $\overline{DC} \ncong \overline{AC}$ ، $\overline{DC} \ncong \overline{AD}$
إذن $\overline{DC} \ncong \overline{BC}$ ، $\overline{DC} \ncong \overline{BD}$ وهذا يتنافى مع الفرض ΔBCD متطابق الأضلاع.
إذن الفرض خاطئ والعبارة المعطاة صحيحة.

20 - الحل: نفرض أن $\overline{BC} \leq \overline{AC}$
من نظرية الضلع الأكبر في مثلث يقابل لزاوية الأكبر.
$m\angle A < m\angle B$ وهذا يتنافى مع المعطى.
الفرض $\overline{BC} \leq \overline{AC}$ خاطئ والعبارة المعطاة صحيحة.

21 - الحل: عدد النقاط الكلي 85 نفرض أنه سجل في كل مباراة x من النقاط بحيث $x < 15$
نفرض أن $15 \leq x$ $\leftarrow$ $6(15) \leq 6x$ نضرب في (6 عدد المباريات)
$90 \leq 6x$
الفرض خاطئ لأنه لم يسجل سوى 85 نقطة في الست مباريات.
الفرض $15 \leq x$ خاطئ والعبارة $x < 15$ صحيحة.

22 - الحل: نفرض أن الوالدين ليس لهم تأثير أو هم أقل تأثير في اختيار الكلية.
من الأعمدة نلاحظ:
1) يوجد تأثير للوالدين نسبته 54% على اختيار الكلية.
2) 54% هي النسبة الأعلى بين الخيارات الأخرى.
الفرض خاطئ والعبارة أن الوالدين الأكثر تأثيرا في اختيار الكلية عبارة صحيحة.

23 - الحل: الطلاب الذين تأثروا بالمرشد = 8%.
الطلاب الذين تأثروا بالمعلم والأصدقاء = $6+5=11\%$
الطلاب الذين تأثروا بالمعلم والأصدقاء أكثر نسبة من الطلاب الذين تأثروا بالمرشد.

24 - الحل: نعم يعتبر مثال على التبرير الغير مباشر لأنه فرض أن المتهم ليس في المدينة A.

26 - قارن بين البرهان غير المباشر والبرهان المباشر.

البرهان المباشر	البرهان غير المباشر
نبدأ من المعطى إلى أن نصل إلى المطلوب.	نبدأ من المطلوب إلى أن نصل إلى المعطى.
يبدأ بإثبات نظرية أو نتيجة	يبدأ بنقض نظرية أو نتيجة

27 - اكتب تخمينا، ثم اكتب برهانا غير مباشر لإثبات تخمينك.
المعطيات: ΔABC قائم الزاوية عند A ، $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ ، المطلوب: $\angle B = 45^\circ$
نفرض أن $m < B < 45$ أو $m < B > 45$
$<A = 90$ لأن المثلث قائم الزاوية.
من تعريف المثلث متطابق الضلعين.
نفرض $x = m < B$

$x + x + 90 = 180$ مجموع زوايا مثلث

$2x + 90 = 180$

$2x = 90 \Rightarrow x = 45 = \angle B = 45$

وهذا يتناقض مع الفرض $m\angle B < 45$ أو $m\angle B > 45$

الفرض خاطئ والعبارة المعطاة صحيحة.

28- الحل: نفرض أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي.

نكتبه على الصورة $\frac{a}{b}$: $\frac{\sqrt{2}}{1}$

ولكن $\sqrt{2}$ ليس عدد صحيح بل عدد عشري، $\sqrt{2}$ لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$

الفرض خاطئ ($\sqrt{2}$ عدد نسبي)

العبارة $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي صحيحة.

30- الحل: (D) إذا كانت زاويتان متكاملتين فإن مجموع قياسهما 180°.

31- الحل: $\angle P$ لها أكبر قياس لأنها تقابل $OM = 9$ أطول ضلع.

اكتب برهانا ذا عمودين لكل من السؤالين التاليين:

32-

العبارات	المبررات
$\overline{BD}$ تنصف $\angle B$ وارتفاع للمثلث	معطى
$\angle ABD \cong \angle CBD$	تعريف منصف الزاوية
$\angle BDA \cong \angle BDC = 90^\circ$	تعريف الارتفاع
$\overline{BD} \cong \overline{BD}$	ضلع مشترك (خاصية الانعكاس)
$\Delta BDA \cong \Delta BDC$ ∴	مسلمة ASA
$\overline{BA} \cong \overline{BC}$	تعريف تطابق المثلثات

33-

العبارات	المبررات
$\Delta DEF \cong \Delta ABC$	معطى
$\angle C \cong \angle F$	تعريف تطابق المثلثات
$\angle A \cong \angle D$	تعريف تطابق المثلثات
$\angle B \cong \angle E$	تعريف تطابق المثلثات
$\frac{1}{2}\angle C \cong \frac{1}{2}\angle F$	بضرب في $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\angle A \cong \frac{1}{2}\angle D$	بضرب في $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\angle B \cong \frac{1}{2}\angle E$	بضرب في $\frac{1}{2}$
$\overline{lc} \cong \overline{FO}$	لأن o منصف F، l منصف C
$\overline{An} \cong \overline{DQ}$	لأن Q منصف F، n منصف A
$\overline{Bm} \cong ED$	لأن P منصف F، m منصف B

34- $\angle A + \angle R + \angle S = 180^\circ$

$\angle A = 180 - 41 - 109 \Rightarrow \angle A = 30^\circ$

35- $19 - 10 < 11$

$9 < 11$

المتباينة صحيحة

36- $31 - 17 < 12$

$14 < 12$

المتباينة غير صحيحة

37- $76 + 38 > 109$

$114 > 109$

المتباينة صحيحة

اختبار نصف الفصل

1- الحل: ليست صحيحة أبدا.

2- الحل: صحيحة.

3- الحل: أحيانا.

4- الحل: ليست صحيحة أبدا.

5- الحل: لا يوجد مثلث تتقاطع منصفات زواياه خارج المثلث.

6- الحل: (D)

7- الحل: $2x + 10 + x + 15 + 4x + 15 = 180$

$7x + 40 = 180 \Rightarrow 7x = 140 \Rightarrow x = 20$

$\angle R = 2x + 10 \Rightarrow 2(20) + 10 = 50^\circ$

$\angle Q = x + 15 \Rightarrow (20) + 15 = 35^\circ$

$\angle S = 4x + 15 \Rightarrow 4(20) + 15 = 95^\circ$

8- الحل: الترتيب: $\overline{RS} \leftarrow \overline{QS} \leftarrow \overline{QR}$

9- الحل: $8x + 4 + 11x - 37 + 5x + 21 = 180$

$24x - 12 = 180 \Rightarrow 24x = 192 \Rightarrow x = 8$

عند حفر الباطن $(8x+4) \Rightarrow 8(8) + 4 = 68$

عند المدينة $(11x-37) \Rightarrow 11(8) - 37 = 51$

عند الدمام $(5x+21) \Rightarrow 5(8) + 21 = 61$

الطول من المدينة إلى الدمام ← المدينة إلى حفر الباطن ← الدمام إلى حفر الباطن

10- الحل: $5x + 10 + 4x + 15 + 7x - 5 = 180$

$16x + 20 = 180 \Rightarrow 16x = 160 \Rightarrow x = 10$

علي $(5x+10) \Rightarrow 5(10) + 10 = 60$

عمر $(4x+15) \Rightarrow 4(10) + 15 = 55$

محمد $(7x-5) \Rightarrow 7(10) - 5 = 65$

11- الحل: العدد 117 لا يقبل القسمة على 13.

12- الحل: $a^2 + b^2 \neq c^2$ إذا كان ABC قائم.

13- الحل: $\angle JKL \not\cong \angle WXY$

14- الحل: 2n عدد غير زوجي عند n عدد فردي.

15- الحل: نفرض أن في المثلث ΔABC زاويتين منفرجتين $\angle B$ ، $\angle C$

$\angle C + \angle B + \angle A > 180^{\circ}$ مجموع زوايا مثلث
$90 < m\angle B$ لأنها منفرجة
$90 < m\angle C$ لأنها منفرجة
$\angle B + \angle C > 180^{\circ}$ بالجمع
$\angle C + \angle B + \angle A > 180^{\circ}$ لأن الزوايا موجبة دائما.
الفرض خاطئ حيث لا يمكن أن تكون مجموع زوايا مثلث أكبر من 180
والعبارة المعطاة صحيحة.

16- الحل: نفرض $\overline{AD}$ ارتفاع المثلث ΔABC
$\overline{AD}$ عمودي على CB (من تعريف ارتفاع المثلث)
$\angle ADC \cong \angle ADB = 90^{\circ}$ وهذا يتناقض مع العبارة المعطاة.
أي أن الفرض خاطئ والعبارة المعطاة صحيحة.

4-4 متباينة المثلث

المستقيم بين نقطتين هو أقصر مسافة بين النقطتين.

نظرية

- مجموع طولي أي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

مثال،

$AB + BC > AC$

$BC + AC > AB$

$AC + AB > BC$

انتبه نستعمل النظرية السابقة وهي نظرية متباين ة المثلث في تحديد ما إذا كانت ثلاث قطع مستقيمة تشكل مثلثا أم لا.

مثال

حدد ما إذا كانت الأعداد التالية يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث:

1) $6, 8, 14$

$6 + 8 > 14$	$6 + 14 > 8$	$8 + 14 > 6$
$14 > 14$	$20 > 8$	$22 > 6$
×	✓	✓

هناك متباينة غير صحيحة ⇐ لا يمكن أن تمثل أطوال الأضلاع مثلث.

2) $8, 15, 17$

$8+15 > 7$	$8+17 > 15$	$17+15 > 8$
$13 > 7$	$15 > 15$	$32 > 8$
✓	✓	✓

جميع المتباينات صحيحة ⇐ الأعداد تمثل أطوال أضلاع مثلث.

لاحظ جيدا:

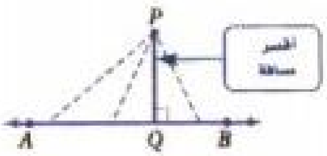
إذا كان مجموع العدد الأصغر والعدد الأوسط أكبر من العدد الأكبر فإن كل تركيبة للمتباينة تكون صحيحة.

مثال

إذا كان طول ضلعين لمثلث 32 , 57 ما أقل طول ممكن للضلع الثالث إذا كان طوله عددا صحيحا.

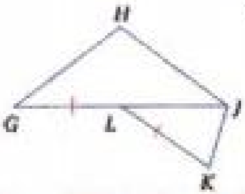
بما أنه يريد الضلع الأقل طول فإن مجموع الضلعين يساوي 32 أو 57 ، ولا يمكن أن يكون 32 لأن 57 أكبر منهما الطول المطلوب $25 = 32 - 57$

انتبه المسافة بين نقطة ومستقيم هي طول القطعة المستقيمة العمودية من النقطة إلى المستقيم.



ملاحظة هامة:

إذا كان المستقيم أفقي فإن أقصر مسافة من نقطة إلى ذلك المستقيم ستكون عبر مستقيم رأسي وبالمثل أقصر مسافة من نقطة إلى مستقيم رأسي تكون عبر مستقيم أفقي



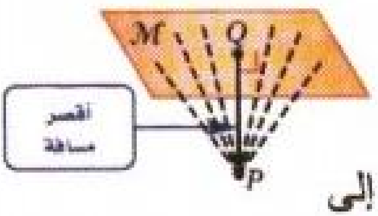
مثال

اكتب برهانا ذا عمودين:

المعطيات: $GL = LK$ المطلوب : إثبات ان: $JH + GH > JK$

المبررات	العبارات
معطى	$\overline{BD}$ تنصف $\angle B$ وارتفاع للمثلث
نظرية متباينة المثلث	$\angle ABD \cong \angle CBD$
نظرية متباينة المثلث	$\angle BDA \cong \angle BDC = 90^\circ$
تساوي القطع المستقيمة	$\overline{BD} \cong \overline{BD}$
بالتعويض	$\therefore \Delta BDA \cong \Delta BDC$
	$\overline{BA} \cong \overline{BC}$

نتيجة:



القطعة المستقيمة العمودية من نقطة إلى مستوى هي أقصر قطعة من تلك النقطة إلى ذلك المستوى.

مثال: QP هي أقصر قطعة مستقيمة من النقطة P إلى المستوى M.

تدريبات وحلول

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث، اكتب نعم أو لا، ووضح إجابتك.

1- $5 , 4 , 3$

$5+4>3$	$5+3>4$	$3+4>5$
$9>3$ ✓	$8>4$ ✓	$7>5$ ✓

جميع المتباينات صحيحة ⇐ الأعداد تمثل أطوال أضلاع مثلث.

2- $5 , 15 , 10$

$5+15>10$	$5+10>15$	$10+15>5$
$20>10$ ✓	$15>15$ ✗	$25>5$ ✓

هناك متباينة غير صحيحة ⇐ لا يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث.

3- $30.1\ ,\ 0.8\ ,\ 31$

$30.1+0.8>31$ ، $30.9>31$ ✗

$30.1+31>0.8$ ، $61.1>0.8$ ✓

$31+0.8>30.1$ ، $31.8>30.1$ ✓

هناك متباينة غير صحيحة ⇐ لا يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث.

4- الحل: (A)

5- اكتب برهانا للنتيجة $4\text{-}1$:

$\overline{PQ}\perp$ المستوى M

$\overline{PQ}$ يصنع زاوية قائمة مع المستوى 90°

كلما زادت الزاوية مع المستوى يزيد طول $\overline{PQ}$

$\overline{PQ}$ أقصر قطعة مستقيمة من P إلى المستوى M.

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث، اكتب نعم أو لا، ووضح إجابتك.

6- $1\ ,\ 2\ ,\ 3$

$1+2>3$ ، $3>3$ ✗

$1+3>2$ ، $4>2$ ✓

$2+3>1$ ، $5>1$ ✓

هناك متباينة غير صحيحة ⇐ لا يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث.

7- $2\ ,\ 6\ ,\ 11$

$2+6>11$ ، $8>11$ ✗

$2+11>6$ ، $13>6$ ✓

$6+11>2$ ، $17>2$ ✓

هناك متباينة غير صحيحة ⇐ لا يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث.

8- $13\ ,\ 16\ ,\ 29$

$13+16>29$ ، $29>29$ ✗

$13+29>16$ ، $42>16$ ✓

$16+29>13$ ، $45>13$ ✓

هناك متباينة غير صحيحة ⇐ لا يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث.

9- $9\ ,\ 21\ ,\ 20$

$9+21>20$ ، $30>20$ ✓

$9+20>21$ ، $29>21$ ✓

$20+21>9$ ، $41>9$ ✓

جميع المتباينات صحيحة ⇐ الأعداد تمثل أطوال أضلاع مثلث.

أوجد مجال قياس الضلع الثالث لمثلث علم قياسا ضلعين من أضلاعه في كل مما يلي:

10- $11\ ,\ 5$: $11+5>x$ ، $16>x$

- $9\ ,\ 7$: $9+7>x$ ، $16>x$

- $15\ ,\ 10$: $15+10>x$ ، $25>x$

- $61\ ,\ 32$: $61+32>x$ ، $93>x$

لكتب برهانا ذا عمودين لكل من السؤالين التاليين:

العبارات	المبررات
$\angle B\cong\angle ACB$	معطى
$\overline{AC}\cong\overline{AB}$	تعريف مثلث متطابق الضلعين
$AC+AD>CD$	متباينة المثلث
$AB+AD>CD$	بالتعويض

-15

العبارات	المبررات
ΔABC	معطى
في المثلث ΔABD	بعد رسم القطعة المساعدة
$AD + DB > AB$	متباينة المثلث
$AD + DC > AC$	متباينة المثلث
$AD-AD+DB-DC>AB-AC$	بالطرح
$DB-DC>AB-AC$	بالتبسيط
$DB-DC=CB$	من الرسم جمع القطع المستقيمة
$CB > AB - AC$	بالتعويض
$CB + AC > AB$	بإضافة AC للطرفين

حدد ما إذا كانت الإحداثيات المعطاة في كل من الأسئلة 20-17 تمثل رؤوس مثلث:

-17 $A(5,8)$, $B(2,-4)$, $C(-3,-1)$

$$AB = \sqrt{(2-5)^2 + (-4-8)^2} = \sqrt{(9+144)} = \sqrt{153} = 12.36$$
$$BC = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{(25+9)} = \sqrt{34} = 5.83$$
$$AC = \sqrt{(-3-5)^2 + (-1-8)^2} = \sqrt{(64+81)} = \sqrt{145} = 12.04$$

$5.83+12.04 > 12.36$ ✓ $\quad$ $12.36+12.04>5.83$ ✓ $\quad$ $12.36+5.83>12.04$ ✓

جميع المتباينات صحيحة ⇐ الأعداد تمثل رؤوس مثلث.

-18 $L(-24,-19)$, $M(-22,20)$, $N(-5,-7)$

$$LM = \sqrt{(-22+24)^2 + (20+19)^2} = \sqrt{2^2 + 39^2} = 39.05$$
$$MN = \sqrt{(-5+22)^2 + (-7-20)^2} = \sqrt{17^2 + 27^2} = 31.90$$
$$LN = \sqrt{(-5+24)^2 + (-7+19)^2} = \sqrt{19^2 + 12^2} = 22.47$$

$31.90+22.47>39.05$ ✓ $\quad$ $39.05+22.47>31.90$ ✓ $\quad$ $39.05+31.90>22.47$ ✓

جميع المتباينات صحيحة ⇐ الأعداد تمثل رؤوس مثلث.

-19 $X(0,-8)$, $Y(16,-12)$, $Z(28,-15)$

$$XY = \sqrt{(16-0)^2 + (-12+8)^2} = \sqrt{4^2 + 16^2} = 16.49$$
$$MN = \sqrt{(28-0)^2 + (-15+8)^2} = \sqrt{28^2 + 7^2} = 28.86$$
$$LN = \sqrt{(28-16)^2 + (-15+12)^2} = \sqrt{12^2 + 3^2} = 12.36$$

$28.86+12.36>16.49$ ✓ $\quad$ $16.49+12.36>28.86$ × $\quad$ $16.49+28.86>12.36$ ✓

هناك متباينة غير صحيحة ⇐ لا تمثل رؤوس مثلث.

-20 $R(1,-4)$, $S(-3,-20)$, $T(5,12)$

$$RS = \sqrt{(-3-1)^2 + (-20+4)^2} = \sqrt{4^2 + 16^2} = 16.49$$
$$ST = \sqrt{(5+3)^2 + (12+20)^2} = \sqrt{8^2 + 32^2} = 32.98$$
$$RT = \sqrt{(5-1)^2 + (12+4)^2} = \sqrt{4^2 + 16^2} = 16.49$$

$32.98+16.49>16.49$ ✓ $\quad$ $16.49+16.49>32.98$ × $\quad$ $16.49+32.98>16.49$ ✓

هناك متباينة غير صحيحة ⇐ لا تمثل رؤوس مثلث.

21- ما عدد المثلثات المختلفة التي يمكن أن تشكلها فاطمة.

12,6,5	✓ $12+6>5$	✓ $12+5>6$	× $5+6>12$	لا يمثل مثلث
12,6,4	✓ $12+6>4$	✓ $12+4>6$	× $4+6>12$	لا يمثل مثلث
12,6,3	✓ $12+6>3$	✓ $12+3>6$	× $3+6>12$	لا يمثل مثلث
12,3,5	✓ $12+3>5$	✓ $12+5>3$	× $5+3>12$	لا يمثل مثلث
12,4,5	✓ $12+4>5$	✓ $12+5>4$	× $5+4>12$	لا يمثل مثلث
12,4,3	✓ $12+4>3$	✓ $12+3>4$	× $3+4>12$	لا يمثل مثلث
4,6,5	✓ $4+6>5$	✓ $4+5>6$	✓ $5+6>4$	يمثل مثلث
3,6,5	✓ $3+6>5$	✓ $3+5>6$	✓ $5+6>3$	يمثل مثلث
4,3,5	✓ $4+3>5$	✓ $4+5>3$	✓ $5+3>4$	يمثل مثلث
4,3,6	✓ $4+3>6$	✓ $4+6>3$	✓ $6+3>4$	يمثل مثلث

إذن يمكنها صناعة أربعة مثلثات

22- عدد المثلثات التي يقبل محيطها القسمة على 3 ؟

1) $6 + 5 + 4 = 15 \div 3 = 5$

2) $6 + 5 + 3 = 14$ لا يقبل القسمة على 3

3) $3 + 5 + 4 = 12 \div 3 = 4$

4) $6 + 3 + 4 = 13$ لا يقبل القسمة على 3

عدد المثلثات المطلوب = 2

23- أطوال أضلاع المثلثات الممكنة.

$13 < n < 17 \Rightarrow n = \{16, 15, 14\}$

$14 < m < 17 \Rightarrow m = \{16, 15\}$

15,14,2	✓ $15+14>2$	✓ $15+2>14$	✓ $2+14>15$	يمثل مثلث
16,14,2	✓ $16+14>2$	✓ $16+2>14$	× $2+14>16$	لا يمثل مثلث
15,15,2	✓ $15+15>2$	✓ $15+2>15$	✓ $2+15>15$	يمثل مثلث
16,15,2	✓ $16+15>2$	✓ $16+2>15$	✓ $2+15>16$	يمثل مثلث
16,16,2	✓ $16+16>2$	✓ $16+2>16$	✓ $2+16>16$	يمثل مثلث

يمكن أن يكون أربع مثلثات أطوالها هي 15,15,2 أو 16,15,2 أو 16,16,2 أو 15, 14 , 2

24- احتمال مثلث متطابق الضلعين = $\dfrac{\text{عدد المثلثات متطابقة الضلعين}}{\text{عدد المثلثات}} = \dfrac{2}{3}$

25- الحل: لأنه لإيجاد المسافة لا بد من وجود الإحداثي السيني حتى نتمكن من استخدام قانون المسافة.

27- اختيار زيد صحيح واختيار عمرو خاطئ؛ لأنه في مثلث عمرو (X) $8+5>12$ بينما في مثلث زيد $10 + 5 > 13$ (✓).

28- في المثلث ABC فإن:

$AC - BC < AB$, $AB - AC < BC$, $AB - BC < AC$

أي الفرق بين طول أي ضلعين أقل من طول الضلع الثالث.

البرهان: في المثلث ABC ، بما أن الأطوال دائما موجبة فإن الفرق بين أي عددين هو عدد موجب أيضا.

العبارات	المبررات
$AC + CB > AB$	نظرية متباينة المثلث
$-AC - C < -AB$	بالضرب في (-1)
$AC - CB < ABB$	لأن الأطوال دائما موجبة

29 - الحل: لأنه ليس دائما تشكل المسافات بين المدن أطوال مثلث.

30 - الحل: (D)

31 - الحل: (H)

32 - الحل: نفرض أن المستقيم $\overleftrightarrow{PQ}$ لا يقطع المستقيم l.
جميع نقاط هذا المستقيم لا تقع على المستقيم l
من الرسم Q تقع على المستقيم l وهذا يتنافى مع الفرض أن PQ لا يقطع المستقيم $l \Leftarrow$ الفرض خاطئ والعبارة المعطاة صحيحة.

33 - الحل: المعطى $3x < 175 \Leftarrow$ إذا كان $x < 60$
نفرض أن $60 \le x \Leftarrow x > 60$ أو $x = 60$ ، $3(60) < 180$
يتناقض مع العبارة المعطاة أي أن الفرض $60 \le x$ خاطئ والعبارة المعطاة صحيحة.

34- $7x + 8 + 8x - 10 + 7x + 6 = 180$

$$22x + 4 = 180 \Rightarrow 22x = 176 \Rightarrow x = 8$$

$$\angle R = 7x + 8 \Rightarrow 7(8) + 8 = 64^{\circ}$$

$$\angle Q = 8x - 10 \Rightarrow 8(8) - 10 = 54^{\circ}$$

$$\angle S = 7x + 6 \Rightarrow 7(8) + 6 = 62^{\circ}$$

الترتيب: $\overline{QR} \leftarrow \overline{PQ} \leftarrow \overline{PR}$

35- $D = \left(\frac{0+a+b}{3}, \frac{0+0+c}{3}\right) \Rightarrow D = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$

36- $l = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{0+c}{2}\right) \Rightarrow l = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

$$m = \left(\frac{0+b}{2}, \frac{0+c}{2}\right) \Rightarrow m = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

$$MD = \sqrt{\left(\frac{a+b}{3} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2a-b}{6}\right)^2 + \left(\frac{c}{6}\right)^2}$$

$$MB = \sqrt{\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

$MD = \frac{2}{3}MB$ مركز المثلث هو D.

37- الحل:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(4-4)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{25} = 5 \qquad \overline{JK} = \sqrt{(0-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(6-4)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{4} = 2 \qquad \overline{KL} = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\overline{PR} = \sqrt{(6-4)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{29} = 5.3 \qquad \overline{JL} = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{29} = 5.3$$

$\overline{JL} \cong \overline{PR}$ ، $\overline{KL} \cong \overline{QR}$ ، $\overline{JK} \cong \overline{PQ} \Leftarrow$ المثلثين متطابقين

-38
$3x+54 < 90$
$3x < 36$
$x < 12$

-39
$8x-14 < 3x + 19$
$5x < 33$
$x < \frac{33}{5}$

-40
$4x + 7 > 180$
$4x > 173$
$x < \frac{173}{4}$

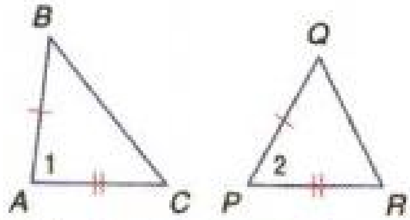
4-5 متباينات تتضمن مثلثين

عزيزي الطالب/ تذكر:

تعلمت في دروس ماضية مسلمة ASA وهي تطابق ضلعين في مثلث والزاوية المحصورة بينهما مع نظائرها في مثلث آخر كذلك مسلمة SSS في حالة تطابق الأضلاع الثلاثة وسوف نتعلم هنا متباينتي SSS , SAS في المثلثات.

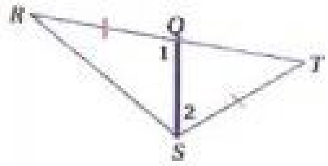
نظرية

- إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعان في مثلث آخر وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول الأكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني فإن الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.



مثال، المعطيات: $AB \cong PQ$ ، $AC \cong PR$،
إذا كان $m\angle 1 > m\angle 2$، فإنّ $BC > QR$.

مثال



اكتب برهانا ذا عمودين:

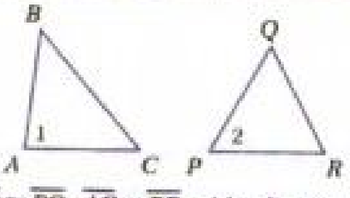
المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: إثبات أن: $RS > TQ$

العبارات	المبررات
$\overline{RQ} \cong \overline{ST}$	معطى
$\overline{QS} \cong \overline{QS}$	ضلع مشترك
$m\angle 2 < m\angle 1$	من الرسم
$TQ < RS$	متباينة SAS

نظرية

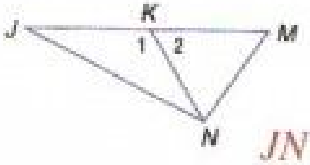
- إذا كان ضلعان في مثلث يطابقان ضلعين في مثلث آخر وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني فإن قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المناظرة لهما في المثلث الثاني.



مثال، المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ ، $\overline{AC} \cong \overline{PR}$

إذا كان $BC > QR$، فإنّ $m\angle 1 > m\angle 2$.

مثال



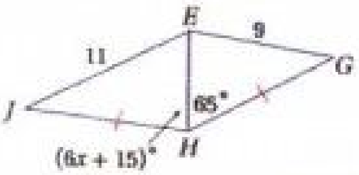
اكتب برهانا ذا عمودين:

المعطيات: $\overline{NK}$ قطعة متوسطة للمثلث MNJ ، $JN > NM$

أثبت أن: $m\angle 2 < m\angle 1$

العبارات	المبررات
NK قطعة متوسطة	معطى
$\overline{JK} \cong \overline{KM}$	تعريف القطعة المتوسطة
$\overline{KN} \cong \overline{KN}$	ضلع مشترك
$JN < MN$	معطى
$m\angle 1 > m\angle 2$	متباينة SSS

مثال



في الشكل المجاور:

a) اكتب متباينة للمقارنة بين $m\angle JHE$ و $m\angle GHE$

$\overline{JH} \cong \overline{GH}$ ، $\overline{EH}$ ضلع مشترك.

بما أن $\angle JHE$ مقابلة للضلع 11.

بما أن $\angle GHE$ مقابلة للضلع 9.

من المتباينة SAS $\Leftarrow$ $m\angle GHE < m\angle JHE$

b) أوجد مجال قيم x

حسب المتباينة SSS: $m\angle GHE < m\angle JHE$

$$65 < m\angle JHE$$

$$6x+15 > 65 \quad \Rightarrow \quad 6x > 50 \quad \Rightarrow \quad x > 8.3$$

مثـــــال

بعد العلاج الطبيعي أمكن لسمير ثني ذراعه اليسرى بحيث تصبح المسافة بين معصمه وكتفه بوصتين، وأمكنه ثني ذراعه اليمنى بحيث تصبح المسافة بين معصمه وكتفه بوصة، فأي الذراعين له مدى حركة أفضل الآن؟ اشرح إجابتك.

المسافة التي تحركها الذراع من وضع الاستقامة توصف بمدى الحركة.

لتحديد مدى حركة ذراع شخص ما، حدد المسافة من المعصم إلى الكتف عند ثني المرفق بأقصى حد ممكن.

المسافة بين معصم الذراع اليمنى والكتف هي الأكبر (2) وعلى فرض أن كلتا الذراعين متساويتين في الطول فحسب المتباينة SSS تكون الزاوية المتكونة عند المرفق اليمين هي الأكبر وهذا يعني أن مدى حركة الذراع الأيسر هو الأكبر.

تدريبات وحلول

اكتب برهانا ذا عمودين للسؤالين $1,2$:

1 -

العبارات	المبررات
$PQ \cong SQ$	معطى
$m\angle R < m\angle Q$	من الرسم
$\overline{QR} \cong \overline{QR}$	ضلع مشترك
$PR > SR$	متباينة SAS

2 -

العبارات	المبررات
$\overline{US} \cong \overline{SV}$, $TU \cong US$	معطى
$\overline{ST} \cong \overline{SU}$	من الرسم
$m\angle TUS < m\angle USV$	ضلع مشترك
$TS > UV$	متباينة SAS

3 - اكتب متباينة المقارنة بين CD , AB

طبقا لمتباينة SAS : $AB < CD$

4 - اكتب متباينة لوصف قيم x الممكنة:

طبقا لمتباينة SAS : $x+5 > 3x-7 \Rightarrow 12 > 2x \Rightarrow 6 > x$

5 - الحل: **في الزرادية ممكن أن نقسمها إلى قسمين المثلث ABC ، المثلث CDQ وكلما ضغطنا عليها كلما زادت المسافة AB وزادت المسافة DQ ومن متباينة SAS فإنه $DQ < AB$**

اكتب برهانا ذا عمودين للسؤالين التاليين:

6 -

العبارات	المبررات
$CD \cong AB$	معطى
$m\angle 1 > m\angle 2$	من الرسم
$\overline{BD} \cong \overline{BD}$	ضلع مشترك
$BC > AD$	متباينة SAS

-7

العبارات	المبررات
$PR \cong PQ$	معطى
$SQ > SR$	معطى
$m\angle 3 < m\angle 4$	طول الضلع الأكبر في مثلث يقابل الزاوية الأكبر
$\angle Q \cong \angle R$	لأنه مثلث متطابق الضلعين
$\angle R \cong \angle 1 + \angle 4$	جمع الزوايا
$\angle Q \cong \angle 2 + \angle 3$	جمع الزوايا
$\angle 1 + \angle 4 = \angle 3 + \angle 2$	بالتعويض
$m\angle 1 < m\angle 2$	بالتعويض

اكتب متباينة تربط بين الزاويتين أو القطعتين المستقيمتين في كل مما يلي:

-8 AB , FD : $AB > FD$

-9 $m\angle BDC , m\angle FDB$: $m\angle BDC < m\angle FDB$

اكتب متباينة تربط بين الزاويتين أو القطعتين المستقيمتين في كل مما يلي:

-10 AD , DC : $AD > DC$

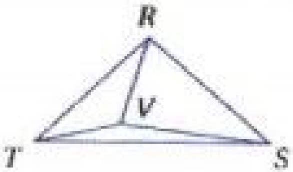
-11 $m\angle AOD , m\angle AOB$: $m\angle AOD > m\angle AOB$

اكتب متباينة تصف قيم x الممكنة في كل مما يلي:

-14 الحل: $3x-2 > 10 \Rightarrow 3x > 12 \Rightarrow x > 4$

-15 الحل: $2x-8 < x+2 \Rightarrow x < 10 \Rightarrow x < 10$

-16 اكتب متباينة تصف قيم x الممكنة في الشكل المجاور:



$\overline{RV} \cong \overline{TV}$ ، $\overline{VS}$ ضلع مشترك.

$m\angle SVT > m\angle RVS$

$10x - 20 > 15 + 5x$

$x > 7 \Leftarrow 5x > 35$

-17 اكتب برهانا لإثبات نظرية المتباينة SAS:

يمكن إثبات هذه النظرية مباشرة من نظرية أخرى وهو أن طول الضلع الأكبر يقابل الزاوية الكبرى في مثلث وطول الضلع الأصغر يقابل الزاوية الصغرى وبما أن $\angle B$ أقل من $\angle B$ فإن الضلع المقابل لـ $\angle B$ وهو AB هو الأصغر أي أن $DE > AB$

-18 اكتب برهانا غير مباشر لإثبات نظرية المتباينة SSS:

نفرض أن $m\angle S < m\angle W$

$RT < UV$ من نظرية الضلع الأكبر في مثلث يقابل الزاوية الأكبر.

يتناقض مع المعطى أي أن العبارة $m\angle S < m\angle W$ خاطئة والعبارة المعطاة صحيحة.

-21 قارن بين نظرية المتباينة SSS ومسلمة SSS لتطابق المثلثات.

نظرية المتباينة SSS	مسلمة SSS
إذا كان ضلعان في مثلث يطابقان ضلعين في مثلث آخر وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني فإن قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول أكبر من قياس	إذا تطابقت الأضلاع الثلاثة في مثلث مع نظائرهما في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقين.

الزاوية المناظرة لهما في المثلث الثاني.	

22- الحل: يقل ارتفاع المثلث كلما زادت زاوية الرأس وزاد طول القاعدة.

24- الحل: $(C)\quad AC > BC$

25- $25 , 1 , 21$

$1 + 25 > 21$ ✓ ، $21 + 1 > 25$ × × ، $25 + 21 > 1$

هناك متباينة خاطئة ⇐ لا تمثل أطوال أضلاع مثلث.

26- $16 , 6 , 19$

$16+6 > 19$ ✓ ، $16+9 > 6$ × ✓ ، $6+9 > 16$

هناك متباينة خاطئة ⇐ لا تمثل أطوال أضلاع مثلث.

27- $8 , 7 , 15$

$7+8 > 15$ × ، $8+15 > 7$ ✓ ، $7+15 > 8$ ✓

هناك متباينة خاطئة ⇐ لا تمثل أطوال أضلاع مثلث.

28- الحل: AD ليست قطعة متوسطة في المثلث ABC

29- الحل: المثلث غير متطابق الضلعين.

اكتب برهانا ذا عمودين:

30-

العبارات	المبررات
$\overline{AD}$ تنصف $\overline{BE}$	معطى
$\overline{CE} \cong \overline{BC}$	تعريف منصف القطعة المستقيمة
$\angle A \cong \angle D$	زاويتان داخليتان متبادلتان
$\angle B \cong \angle E$	زاويتان داخليتان متبادلتان
$\Delta ABC \cong \Delta EDC$	مسلمة AAS

31-

العبارات	المبررات
$\overline{OM}$ تنصف $\angle LMN$	معطى
$\angle OMN \cong \angle LMO$	تعريف منصف الزاوية
$\overline{MO} \cong \overline{MO}$	ضلع مشترك
$\overline{ML} \cong \overline{MN}$	معطى
$\Delta MOL \cong \Delta MNO$	مسلمة SAS

أوجد أطوال أضلاع المثلث EFG وصنفه حسب أضلاعه:

32- $E(4,6)\ ,\ F(4,11)\ ,\ G(9,6)$

$$\overline{EF} = \sqrt{(4-4)^2 + (11-6)^2} = \sqrt{0+25} = 5$$
$$\overline{FG} = \sqrt{(9-4)^2 + (6-11)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$
$$\overline{EG} = \sqrt{(9-4)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{25+0} = 5$$

$\overline{EG} \cong \overline{EF}$ ⇐ المثلث متطابق الضلعين.

33- $E(-7,10)\ ,\ F(15,0)\ ,\ G(-2,-1)$

$$\overline{EF} = \sqrt{(15+7)^2 + (0-10)^2} = \sqrt{(22)^2 + (-10)^2} = 24.1$$

$\overline{FG} = \sqrt{(-2-15)^2 + (-1-0)^2} \quad = \sqrt{(-17)^2 + (-1)^2} = 17.02$

$\overline{EG} = \sqrt{(-2+7)^2 + (-1-10)^2} \quad = \sqrt{(5)^2 + (-11)^2} = 12.08$

المثلث مختلف الأضلاع

استعمل صيغة نقطة - ميل، واكتب معادلة المستقيم في كل من الأسئلة :34-36

34- $m = 2, \ (4,3)$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x - 5$

35- $m = -3, \ (2,-2)$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = -3(x - 2) \Rightarrow y = -3x + 4$

36- $m = 11, \ (-4,-9)$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 9 = 11(x + 4) \Rightarrow y = 11x + 35$

37- الحل: ليس عليها أن تذهب لشراء الزهور البرية لأن صاحب المحل سيجعل لها الهدية زهور برية تلقائيا لأنها تريد هدية خاصة.

اختبار الفصل الرابع

1- الحل: $\overline{HJ} = \overline{HP} + \overline{PJ}$

$\overline{GP}$ قطعة متوسطة $\overline{HP} = \overline{PJ}$

$5x - 16 = 3x + 8 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12$

$\overline{HP} = 5x - 16 = 5(12) - 16 = 44 \ , \ \overline{PJ} = 3x + 8 = 3(12) + 8 = 44$

$\overline{HJ} = 44 + 44 = 88$

2- الحل: $\overline{JN}$ منصف زاوية : $m\angle NJH = m\angle GJN$

$4y + 23 = 6y - 3 \Rightarrow 2y = 26 \Rightarrow y = 13$

$m\angle GJH = m\angle NJH + m\angle GJN$

$= 4(13) + 23 + 6(13) - 3 = 52 + 23 + 78 - 3 = 150$

3- الحل: $\overline{HM}$ ارتفاع للمثلث : $m\angle HMJ = 90^\circ$

$4z + 14 = 90 \Rightarrow 4z = 76 \Rightarrow z = 19$

4- الحل: $m\angle 5$

5- الحل: $m\angle 8$

6- الحل: $m\angle 1$

7- الحل: $2n + 1$ عدد زوجي عندما n عدد طبيعي.

8- الحل: الزوايا غير متطابقة عندما تكون داخلية متبادلة.

-9	7,24,25	✓ 7+24>25	✓ 7+25>24	✓ 25+24>7	يمثل مثلث
-	25,35,60	× 25+35>60	✓ 25+60>35	✓ 25+35>16	لا يمثل مثلث
-	15,18,3	✓ 20+18>3	✓ 20+3>18	✓ 3+18>20	يمثل مثلث
-	6,5,10	✓ 6+5>10	✓ 6+10>5	✓ 10+5>6	يمثل مثلث

13- 4 , 6 , 8

8+6 >4 ✓   8+4 > 6 ✓   6+4 > 8 ✓

جميعها صحيحة ⇐ تمثل أطوال أضلاع مثلث.

14 -الحل: $3x = 90$ ⇐ $x \leq 30$

نفرض أن عدد الأيام x والنصف ساعة 30 دقيقة.

نفرض أن $x > 30$ ⇐ $3x > 3(30)$ ⇐ $3x > 90$

يتناقض مع العبارة المعطاة حيث أنه لم يتكلم بأكثر من 90 دقيقة وهذا يعني أن الفرض $x>30$ خاطئ، والعبارة $x \leq 30$ صحيحة.

15 - الحل: $14 + 1 > x$ ⇐ $15 > x > 0$

16 - الحل: $14 + 11 > x$ ⇐ $25 > x > 0$

17 - الحل: $7 > x$.

18 - الحل: $2x > x$ ⇐ $x > 0$

19 - الحل: $x > 90$

20 - الحل: (B).

اختبار معياري تراكمي

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

1 - الحل: (C) العبارة صحيحة وعكسها خاطئ.

2 - الحل: (F) لأن المستقيم يمر بـ $(3, -3)$

3 - الحل: (D) قائم الزوايا ومختلف الأضلاع.

4 - الحل: (H) $AB = AC$

5 - الحل: (B) إذا كان كل من الزاويتين تكمل الزاوية نفسها فإنهما متطابقتان.

6 - الحل:

$$y + y > 25 \Rightarrow 2y > 25 \Rightarrow y = 12.5$$

إذن 13 هي أقل قيمة.

7 - الحل: (G) $1.6, 3, 4.6$. لأن $3+1.6 > 4.6$ (متباينة خاطئة)

8 - الحل: (B) غير معرف

9 - الحل: محيط الشكل = محيط A + محيط B

= 2(الطول + العرض) + 2 (الطول + العرض)

= $2(6 + 14) + 2(6+4) = 20 + 40 = 60$ سم^2

10 - الحل: (H) $m\angle 1 = m\angle 4$

11 - الحل: (G) 8. لأن القطر يمثل وتر لمثلث داخلي في مربع .

12 - الحل: (H) رسم مثلث مطابق لـ المثلث ABC باستعمال زاويتين والضلع المحصور.

13 - الحل:

$$\overline{AB} = \sqrt{(0+3)^2 + (2-1)^2} \quad = \sqrt{9+1} = 3.1$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-2)^2} \quad = \sqrt{9+4} = 3.6$$
$$\overline{AC} = \sqrt{(3+3)^2 + (4-1)^2} \quad = \sqrt{36+9} = 6.7$$

المثلث مختلف الأضلاع لأن أطوال أضلاعه غير متساوية وهو منفرج الزاوية.

$m\angle A < m\angle B$ لأن $\angle B$ تقابل الضلع الأطول (AC).

$m\angle C < m\angle A$ لأن $\angle A$ تقابل الضلع الأطول (BC).

$m\angle B > m\angle C$ لأن $\angle C$ تقابل الضلع الأقصر (AB).