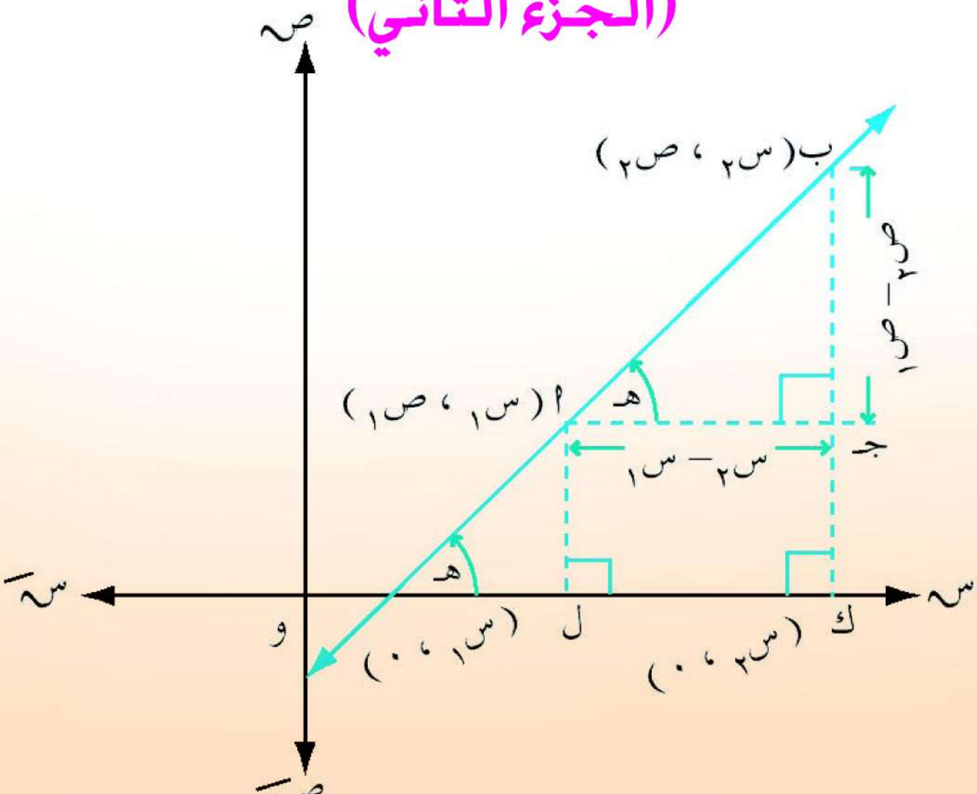
الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

(الجزء الثاني)



١٤٣٦هـ/ ٢٠١٥م

إيماناً منا بأهمية المعرفة ومواكبة لعصر التكنولوجيا تتشرف الإدارة العامــة للتعليم الإلكتروني بخدمــة أبنائنا الطلاب والطالبات في ربوع الوطن الحبيب بهذا العمل آملين أن ينال رضا الجميع

فكرة وإعداد

أ. عادل علي عبدالله البقع

مساعد

أ. زينب محمود السمان

مراجعة وتدقيق

أ. ميسونة العبيدي

أ. فاطمة العجل

أ. أفراح الحزمي

متابعة

أمين الإدريسي

إشراف مدير عام

الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني

أ. محمد عبده الصرمي

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

(الجزء الثاني)

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً.

د. أمة الإله علي حُمد الحوري. | أ. سالمين محمد باسلوم (منسقاً).
د. عوض حسين البكري. | د. محمد علي مرشد.
د. محمد رشاد الكوري. | أ. يحيى بكار مصفر.
د. محمد حسن عبده المسوري. | أ. عبدالباري طه حيدر.
د. عبدالله سالم بن شحنة. | أ. نصر محمد بدر.
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري. | أ. جميلة إبراهيم الرازحي.
د. علي شاهر القرشي. | أ. عادل علي مقبل البنا.
أ. مريم عبدالجبار سلمان. | أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان.
أ. يحيى محمد الكنز.

فريق المراجعة:

أ/ أحمد عبده الصغير الدبعي. | أ/ سميرة حسن فضائل.
أ/ زايد مقبل عبدالخالق الأغبري. | أ/ محمد صالح الخضر.
أ/ خالد محمد القلذي.

تنسيق: أ / سعيد محمد ناجي الشرعبي.

تدقيق: د/ أمة الإله علي حُمد الحوري.

إشراف: د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

الإخراج الفني

صف وتصميم وإخراج : جلال سلطان علي.
إدخال التصويبات : عبدالرحمن حسين المهرس.

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني.

١٤٣٥هـ / ٢٠١٤م

النشيد الوطني

رددي أيتهـــا الدنيــــا نشيدي ردديـــــه وأعـــيـــدي وأعـــيـــدي
واذكري في فـرحتي كـل شهيدِ وامنـحـيـه حُـلَلاً مِنْ ضوءِ عيـدي

رددي أيتـهـا الـدنيـا نشـيدي
رددي أيتـهـا الـدنيـا نشـيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي أنت عـهـدٌ عـالـقٌ فـي كـل ذِمّـة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس اُخْـلُـدِي خَـافِقَـةً فـي كـل قِمَّـة
أمتي .. أمتي .. اِمنحيني البأس يا مصدر بأسي واذخُـرِيـنـي لَـكِ يـا أكـرمَ أمـة

عشـتُ إيمـانـي وحبّـي أُمميًا
ومسيـري فـوق دربـي عـربيـا
وسيبقـى نبـضُ قلـبي يمنيـا
لـن تـرى الـدنيـا على أرضي وصيـا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د. عبدالله عبده الحامدي.
د/ صالح ناصر الصوفي.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.
د/ عبدالله علي أبو حورية.
د/ عبدالله لملس.
أ/ منصور علي مقبل.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.
أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.
أ.د/ محمد حاتم المخلافي.

أ/ علي حسين الحيمي.
د/ أحمد علي المعمري.
أ.د/ صالح عوض عرم.
د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ شكيب محمد باجرش.
أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ/ محمد هادي طواف.
أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ/ محمد عبدالله زبارة.
أ/ عبدالله علي إسماعيل.

د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

في اطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية .

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات .

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها : الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي .

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها .

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية .

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة:

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم المرسلين وآله وصحبه وسلم .

إن إعادة النظر في مناهج الرياضيات وكتبها المدرسية أمر ضروري تحتمه مواكبة التطور العلمي وتحديث تربويات الرياضيات إضافة إلى مسايرة التغيرات الاجتماعية .

واستجابة لذلك يأتي هذا الكتاب « كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي – الجزء الثاني » كحلقة ضمن سلسلة متكاملة على مرحلتين: الأساسية (١ –٩) والثانوية من (الأول الثانوي إلى الثالث الثانوي) .

لقد عُرضت مواضيع الكتاب في تماسك وتكامل وفق تسلسل علمي ونفسي تربوي ومراعاة للفروق الفردية تم تقديم المادة الدراسية بأسلوب سلس واضح لاغموض فيه ولاتعقيد ، حيث أوردنا قدراً كافياً من الأمثلة بعد العرض النظري وأتبعنا ذلك بعدد من التمارين والمسائل آملين إتاحة فرص كثيرة للتعامل مع المادة ليكون الطالب محور التعلم معتمداً على النشاط ويكون النشاط بدافع ذاتي محققاً بذلك الأهداف الوجدانية .

ومقارنة بالكتب السابقة فإن هذا الكتاب وما يرافقه من كتاب التمارين ودليل المعلم يهتم اهتماماً كبيراً بالمفاهيم الأساسية إلى جانب تقديمه معارف سليمة ومراعاته انسجام الموضوعات مع عمليات التعلم الطبيعي للطلبة كما تحفز المدرسين على ابتكار أساليب تدريس جديدة بما يضمن لطلبتهم تعلماً فاعلاً .

ومن أهم أهداف وزارة التربية والتعليم أن يظل التطوير في نمو وتطور مستمرين ، بمتابعة كل جديد في تدريس الرياضيات وهذا لايتأتى إلا بالاستفادة من واقع التطبيق في الميدان التدريسي . فإذا راعينا كل المبادئ المذكورة أعلاه بقدر ما وفقنا المولى عز وجل بإعداد هذه المواد التربوية في ضوء استراتيجيات تهدف إلى تقد يم الأجود ، مادة وطريقة . . فإننا ننظر بشوق بالغ أن يوافينا كافة ذوي العلاقة بملاحظاتهم بغية الاستفادة منها .

نسأل المولى العلي القدير أن نكون قد وفقنا في كل ما نصبو إليه فهو ولي التوفيق والهادي إلى سواء السبيل .

المؤلفون

المحتويات

تابع المحتويات

حل المعـــادلات والمتراجحات

٦ : ١ حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد

تعلم أن الصورة العامة للمعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (والمعادلة التربيعية) هي :

$\text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = ٠$ ؛ حيث أ ، ب ، جـ $\in$ ح ، أ $\neq ٠$.

ولقد سبق لك حل هذه المعادلة بطرق مختلفة منها التحليل ، إكمال المربع والقانون العام ، مع العلم بأن طريقة القانون العام تعتبر طريقة عامة لحل أي معادلة من الدرجة الثانية ويعطى بالصيغة التالية :

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}}$$

حيث أ : معامل $\text{س}^{٢}$ ، ب : معامل س ، جـ : الحد المطلق .

ويسمى المقدار « $\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}$ » مميز معادلة الدرجة الثانية ويرمز له بالرمز « Δ » ويقرأ دلتا .

$\therefore \Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}$ وهو الذي يحدد طبيعة جذري المعادلة التربيعية .

ولحل المعادلة التربيعية يمكننا أن نميز الحالات التالية :

١) إذا كان $\Delta > ٠$ فإن $\sqrt{\Delta} \in$ ح ويكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

هما $\left(\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\,\text{أ}} \right)$.

٢) إذا كان $\Delta = ٠$ فإن $\sqrt{\Delta} = ٠ \in$ ح ، ويكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .

هما $\left(\frac{-\text{ب}}{٢\,\text{أ}} \right)$.

٣) إذا كان $\Delta < ٠$ فإن $\sqrt{\Delta} \notin$ ح ، وبالتالي ليس للمعادلة جذور حقيقية .

مثال (٦ - ١) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية باستخدام القانون العام :

١) $٦\,\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س} - ١ = ٠$. ٢) $\text{س}\,(\text{س} - ٤) = -٤$.

٣) $٢\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٢ = ٠$.

الحـــل

١) أ = ٦ ، ب = ٤ ، جـ = −١ .

Δ = ب² − ٤ أ جـ

$\Delta = ١٦ - ٤ \times ٦ \times (-١) = ١٦ + ٢٤ = ٤٠$.

∴ $\Delta > ٠$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

∵ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$.

∴ $س = \frac{-٤ \pm \sqrt{٤٠}}{٢ \times ٦} = \frac{-٤ \pm ٢\sqrt{١٠}}{١٢} = \frac{\cancel{٢}(-٢ \pm \sqrt{١٠})}{\cancel{١٢}\ ٦}$.

أي أن $س_١ = \frac{-٢ + \sqrt{١٠}}{٦}$ ، $س_٢ = \frac{-٢ - \sqrt{١٠}}{٦}$

∴ مجموعة الحل = $\left\{ \frac{-٢ + \sqrt{١٠}}{٦} ، \frac{-٢ - \sqrt{١٠}}{٦} \right\}$.

٢) س (س − ٤) = −٤

س² − ٤ س = −٤ $\Leftarrow$ س² − ٤ س + ٤ = ٠ .

أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = ٤ .

Δ = ب² − ٤ أ جـ

$\Delta = ١٦ - ٤ \times ١ \times ٤$

$\Delta = ١٦ - ١٦ = ٠$ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان(أو نقول بأن للمعادلة جذراً حقيقياً واحداً) .

∵ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$ ∴ $س = \frac{-ب}{٢أ}$.

∴ $س = \frac{-(-٤)}{٢ \times ١} = \frac{٤}{٢} = ٢$.

∴ مجموعة الحل = { ٢ } .

٣) أ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = ٢ .

Δ = ب² − ٤ أ جـ

$\Delta = ٩ - ٤ \times ٢ \times ٢$

$\Delta = ٩ - ١٦ = -٧$.

∴ $\Delta < ٠$ ليس للمعادلة حلاً في ح .

∴ مجموعة الحل = $\emptyset$.

مثال (٦ – ٢) أوجد قيم $د$ التي تجعل جذرى المعادلة ٧٥ س^٢ + ٧ $د$ س + ١٢ = ٠ متساويان.

الحل

أ = ٧٥ ، ب = ٧ $د$ ، جـ = ١٢ .

Δ = ب^٢ – ٤ أ جـ = (٧ $د$)^٢ – ٤ × ٧٥ × ١٢ = ٤٩ $د^٢$ – ٣٦٠٠

لكي يكون الجذران متساويان يجب أن يكون Δ = ٠ .

أي أن : ٤٩ $د^٢$ – ٣٦٠٠ = ٠ $\Leftarrow$ ٤٩ $د^٢$ = ٣٦٠٠ ،

$د^٢ = \frac{٣٦٠٠}{٤٩}$ $\Leftarrow$ $د = \pm\sqrt{\frac{٣٦٠٠}{٤٩}}$.

$د = \pm\frac{٦٠}{٧} = \pm ٨ \frac{٤}{٧}$.

مثال (٦ – ٣) قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ثلاثة أمتار . فإذا كانت مساحتها تساوي ٤٠ متراً مربعاً ، فأوجد بُعدي قطعة الأرض .

الحل نفرض أن عرض قطعة الأرض بالأمتار = س .

فيكون طولها = س + ٣

$\because$ مساحة قطعة الأرض = ٤٠ م^٢ .

$\therefore$ العرض × الطول = ٤٠

س (س + ٣) = ٤٠ [مساحة المستطيل = الطول × العرض]

س^٢ + ٣ س = ٤٠

س^٢ + ٣ س – ٤٠ = ٠ .

أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = – ٤٠ ، $\because$ Δ = ب^٢ – ٤ أ جـ

$\therefore$ Δ = ٩ – ٤ × ١ × (– ٤٠) = ١٦٩

$\because$ Δ > ٠ $\Leftarrow$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

$\because$ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$.

س = $\frac{-٣ \pm \sqrt{١٦٩}}{٢} = \frac{-٣ \pm ١٣}{٢}$

$\therefore$ س$_١$ = $\frac{-١٦}{٢}$ = – ٨ (مرفوض لأن الطول يكون موجباً) ، س$_٢$ = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥

$\therefore$ عرض قطعة الأرض = ٥ م ، طولها = ٨ م .

تمارين ومسائل (٦ : ١)

[١] أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام :

أ) س^{٢} + ٥ س + ٦ = ٠ ب) ٦ س^{٢} + ٤ س − ٢ = ٠

جـ) س^{٢} + س = −١ ء) ٣ س^{٢} + ٣ س + ١ = ٠

هـ) ٢ س + $\frac{٣}{س}$ = ٧ و) ص^{٢} + ٦ ص + ٩ = ٠

ز) ٩ س^{٢} + ١٢ س + ٢ = ٠ ح) $\frac{س^{٢}}{٣} - \frac{٣}{٤}س + \frac{١}{٢} = ٠$

ط) ل^{٢} − ٩ = ٠ ي) س^{٢} + ٢ س هـ + هـ^{٢} = ٠

ل) ص + ٣ = $\frac{١}{٢ ص}$ ك) م^{٢} − ٧ م = ٠

م) س^{٤} + س^{٢} = ٦ ن) ٢ ص^{٢} − ٣ ص + ٥ = ٠

س) (س − ٣)^{٢} = ٢ س^{٢} ع) ٢ س^{٢} − ٣ س = ١

ف) س^{٢} + ٥ س + ٣ = ٠ ص) ص^{٢} − ٠,٥ ص = ١,٥

[٢] بيّن أنّ س = ٣ جذر المعادلة − س^{٢} + ٤ س − ٣ = ٠ ، ثم أوجد الجذر الآخر

[٣] بيّن أن للمعادلة ٢ س^{٢} − س − ٣ = ٠ جذرين في ح ، وأوجدهما .

[٤] لتكن المعادلة : ب س^{٢} − س + ب − ٣ = ٠ . ما قيمة ب إذا كان أحد جذريها = −١ .

[٥] أوجد قيمة (قيم) م التي تجعل جذري المعادلة ٣ س^{٢} − ٨ س + م = ٠ متساويان .

[٦] أوجد قيمة (قيم) جـ التي تجعل جذري المعادلة س^{٢} + (جـ − ١) س = ٢ جـ + ١ متساويان .

[٧] ثلاثة أعداد متتالية مجموع مربعاتها ١٤٩ . أوجد هذه الأعداد .

[٨] عددان فرديان موجبان متتاليان . مربع مجموعهما يزيد على مجموع مربعيهما بمقدار ١٩٨ . فما العددان؟

[٩] مجموع عدد ومقلوبه يساوى $\frac{٢٩}{١٠}$ أوجد العدد .

٦ : ٢ مجموع وحاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية

أولاً : مجموع جذري معادلة من الدرجة الثانية :

ليكن س$_{١}$ ، س$_{٢}$ جذري المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠ هل يمكن أن نعرف مجموعهما دون أن نحل المعادلة ؟

نعلم أن س$_{١}$ = $\frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{٢أ}$ ، س$_{٢}$ = $\frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{٢أ}$

$\therefore$ مجموع الجذرين $=$ س$_1$ $+$ س$_2$ $= \left(\frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{٢ ا}\right) + \left(\frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{٢ ا}\right)$

$= \frac{-ب - \cancel{\sqrt{\Delta}} - ب + \cancel{\sqrt{\Delta}}}{٢ ا}$.

س$_1$ $+$ س$_2$ $= \frac{-\cancel{٢} ب}{\cancel{٢} ا} = \frac{-ب}{ا}$

$\therefore$ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{ا}$.

نستنتج مما سبق المبرهنة التالية :

مبرهنة (٦ : ١)

للمعادلة ا س^٢ + ب س + جـ = ٠ ، ا $\neq$ ٠ جذران مجموعهما يساوي $\frac{-ب}{ا}$.

مثال (٦ – ٤) أوجد مجموع جذري المعادلة ٢ س^٢ – ٣ س = ٥ .

الحل ٢ س^٢ – ٣ س – ٥ = ٠ ، مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{ا} = \frac{٣}{٢}$.

مثال (٦ – ٥) أوجد مجموع جذري المعادلة ٥ س^٢ + ٨ س + ٤ = ٠ .

الحل مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{ا} = \frac{-٨}{٥}$.

نلاحظ في المثال (٦ – ٤) أن $\Delta > ٠$. لذا للمعادلة جذران حقيقيان .

بينما في المثال (٦ – ٥) نجد أن $\Delta < ٠$. لذا للمعادلة جذران غير حقيقيين .

مما سبق نؤكد على حساب Δ قبل البدء بالحل ، لأن دراستنا فقط على مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) .

ثانياً : حاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية :

ليكن س$_1$ ، س$_2$ جذري المعادلة ا س^٢ + ب س + جـ = ٠ ؛ هل يمكن أن نعرف حاصل ضربهما دون أن نحل المعادلة ؟

نعلم أن س$_1$ $= \frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{٢ ا}$ ، س$_2$ $= \frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{٢ ا}$ ،

$\therefore$ حاصل ضرب الجذرين $=$ س$_1$ $\times$ س$_2$ $= \left(\frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{٢ ا}\right)\left(\frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{٢ ا}\right)$.

نلاحظ أن حاصل ضرب الجذرين هو فرق بين مربعين .

$\therefore$ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{ب^2 - \Delta}{4 أ^2}$

$= \frac{ب^2 - (ب^2 - 4 أ جـ)}{4 أ^2} = \frac{\cancel{ب^2} - \cancel{ب^2} + 4 أ جـ}{4 أ^2} = \frac{\cancel{4} \cancel{أ} جـ}{\cancel{4} أ^{\cancel{2}}} = \frac{جـ}{أ}$

$\therefore$ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$.

نستنتج مما سبق المبرهنة التالية :

مبرهنة (٦ : ٢)

للمعادلة أ س^2 + ب س + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠ جذران حاصل ضربهما يساوي $\frac{جـ}{أ}$.

مثال (٦ – ٦) أوجد حاصل ضرب جذري المعادلة ٥ س^2 + ٩ س + ٢ = ٠

الحـــل حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{2}{5}$

مثال (٦ – ٧) أوجد حاصل ضرب جذري المعادلة ٣ س^2 + ٢ س + ٥ = ٠

الحـــل حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{5}{3}$

نلاحظ في المثال (٦ – ٧) إن حاصل ضرب الجذرين يساوي $\frac{5}{3}$ بالرغم من كون الجذرين غير حقيقيين ، لذا نؤكد مجدداً على حساب Δ قبل البدء في الحل لأن دراستنا على ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) .

مثال (٦ – ٨) بيّن أن س = –٣ جذراً للمعادلة ٣ س^2 + ٤ س – ١٥ = ٠ ، ثم احسب الجذر الآخر.

الحـــل لكي نبيّن أن س = –٣ جذراً للمعادلة فإنه يجب أن يحققها .

نعوض عن س = –٣ في المعادلة .

الطرف الأيمن = ٣ × ٩ – ١٢ – ١٥ = ٢٧ – ٢٧ = ٠ = الطرف الأيسر .

$\therefore$ س = –٣ جذراً للمعادلة .

لحساب الجذر الآخر نستخدم مبرهنة مجموع الجذرين .

$\because$ مجموع الجذرين = س$_1$ + س$_2$ = $\frac{-ب}{أ}$.

$\therefore$ –٣ + س$_2$ = $\frac{-4}{3}$.

$$س_٢ = \frac{-٤}{٣} + ٣$$

$$س_٢ = \frac{-٤ + ٩}{٣} = \frac{٥}{٣} \quad .$$

∴ الجذر الآخر $= \frac{٥}{٣}$.

تمارين ومسائل (٦ : ٢)

[١] أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلات التالية :

أ) $٢ س^٢ + ٣ س + ١ = ٠$.   ب) $-٢ س^٢ + ٥ س + ٧ = ٠$.

جـ) $س^٢ - ٣ س = ١$.   ء) $س^٢ + ١ = ٠$.

هـ) $\frac{١}{٢} س^٢ - ٣ س - ٤ = ٠$.   و) $٢٥ س^٢ - ٦٠ س + ٣٦ = ٠$.

[٢] حدّد نوع جذري كل من المعادلات الآتية :

أ) $س^٢ - ٣ س + ٤ = ٠$.   ب) $٣ س^٢ - ٥ س = ٢$.

جـ) $١٠ س^٢ - ١٣ س - ٣ = ٠$.   ء) $٢ س^٢ - ١١ س + ١٥ = ٠$ ،

ثم أوجد مجموعهما وحاصل ضربهما .

[٣] بيّن أن للمعادلة $٢ س^٢ - ٦ س - ١٥ = ٠$ جذرين حقيقيين مختلفين ، ثم أوجد مجموعهما وحاصل ضربهما .

[٤] بيّن أن $س = \frac{١}{٣}$ جذر للمعادلة $١٥ س^٢ - ٢ س = ١$ ، ثم أوجد الجذر الآخر .

[٥] ما قيمة هـ في المعادلة : $(هـ + ٣) س^٢ + ٢ س + ٢ هـ - ٤ = ٠$ إذا كان أحد جذريها ٢ ثم أوجد الجذر الآخر .

[٦] ما قيمة م في المعادلة : $٢ س^٢ - ٥ (م + ١) س + م - ٣ = ٠$ ، إذا كان أحد جذريها ١ ، ثم أوجد الجذر الآخر .

٦ : ٣ تكوين معادلة من الدرجة الثانية إذا عُلِمَ جذراها

تعرفنا على الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانيــة وهـي : $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ ، $أ \neq ٠$ ؛ ويمكن وضع هذه المعادلة في الصورة الآتية :

$$س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{جـ}{أ} = ٠ \quad \text{(بالقسمة على أ)} \quad .$$

$\therefore$ س^2 $-$ $\left(\frac{-ب}{أ}\right)$ س $+$ $\frac{جـ}{أ}$ $= 0$

$\because$ مجموع الجذرين $=$ $\frac{-ب}{أ}$ ، حاصل ضرب الجذرين $=$ $\frac{جـ}{أ}$.

$\therefore$ **س^2 $-$ (مجموع الجذرين) $\times$ س $+$ حاصل ضرب الجذرين $= 0$.**

بصورة عامة : إذا عُلِم جذرا المعادلة س$_1$ ، س$_2$ فإن المعادلة تكتب بإحدى الصورتين :

1) س^2 $-$ (س$_1$ $+$ س$_2$) س $+$ س$_1$ س$_2$ $= 0$.

2) (س $-$ س$_1$) (س $-$ س$_2$) $= 0$

مثال (٦ – ٩) كوّن المعادلة إذا كان : س$_1$ $+$ س$_2$ $= 7$ ، س$_1$ س$_2$ $=$ $\frac{1}{3}$.

حيث س$_1$ ، س$_2$ جذرا المعادلة .

الحـــل

$\because$ س^2 $-$ (س$_1$ $+$ س$_2$) س $+$ س$_1$ س$_2$ $= 0$

$\therefore$ س^2 $- 7$ س $+$ $\frac{1}{3}$ $= 0$ (بالضرب في ٣) .

$\therefore$ ٣ س^2 $- 21$ س $+ 1 = 0$.

مثال (٦ – ١٠) اكتب المعادلات التي لها جذران في الحالات الآتية :

أ) س$_1$ $= 5$ ، س$_2$ $= -2$. ب) س$_1$ $=$ $\frac{2}{3}$ ، س$_2$ $= -$ $\frac{1}{4}$.

جـ) س$_1$ $= -2 + \sqrt{5}$ ، س$_2$ $= -2 - \sqrt{5}$.

الحـــل

أ) س$_1$ $+$ س$_2$ $= 5 + (-2) = 3$

س$_1$ س$_2$ $= 5 \times -2 = -10$

$\therefore$ س^2 $-$ (س$_1$ $+$ س$_2$) س $+$ س$_1$ س$_2$ $= 0$

$\therefore$ س^2 $- 3$ س $- 10 = 0$.

حل آخر :

يمكن كتابة المعادلة بالصورة: $(س - س_١) (س - س_٢) = ٠$

المعادلة هي : $(س - ٥) (س - (-٢)) = ٠$

$(س - ٥) (س + ٢) = ٠$

$س^٢ + ٢ س - ٥ س - ١٠ = ٠$ بفك الأقواس .

$س^٢ - ٣ س - ١٠ = ٠$

ب) $س_١ + س_٢ = \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٤} = \frac{٨ - ٣}{١٢} = \frac{٥}{١٢}$.

$س_١ س_٢ = \frac{\cancel{٢}^{١}}{٣} \times \frac{-١}{\cancel{٤}_{٢}} = \frac{-١}{٦}$.

$\because س^٢ - (س_١ + س_٢) س + س_١ س_٢ = ٠$

$\therefore س^٢ - \frac{٥}{١٢} س - \frac{١}{٦} = ٠$ (بالضرب في ١٢) .

$\therefore ١٢ س^٢ - ٥ س - ٢ = ٠$.

جـ) $س_١ + س_٢ = -٢ + \sqrt{٥} - ٢ - \sqrt{٥} = -٤$.

$س_١ س_٢ = (-٢ + \sqrt{٥}) (-٢ - \sqrt{٥}) = (-٢)^٢ - ٢ \sqrt{٥} + ٢ \sqrt{٥} - (\sqrt{٥})^٢$.

$= ٤ - ٥ = -١$.

$\because س^٢ - (س_١ + س_٢) س + س_١ س_٢ = ٠$

$\therefore س^٢ + ٤ س - ١ = ٠$.

تمارين ومسائل (٦ : ٣)

[١] كوّن المعادلات التي تتصف بالشروط التالية :

أ) $س_١ + س_٢ = ٣$ ، $س_١ س_٢ = -٦$. ب) $س_١ + س_٢ = \frac{١}{٢}$ ، $س_١ س_٢ = \frac{-١}{٤}$.

جـ) $س_١ + س_٢ = -٣$ ، $س_١ س_٢ = ٠$. ء) $س_١ + س_٢ = ٢$ ، $س_١ س_٢ = \frac{-٢}{٥}$.

هـ) $س_١ + س_٢ = ٠$ ، $س_١ س_٢ = -٣$. و) $س_١ + س_٢ = -٥$ ، $س_١ س_٢ = \frac{٣}{٥}$.

[٢] كوّن المعادلات التي جذراها كما يأتي :

أ) $س_١ = ٣$ ، $س_٢ = -٤$. ب) $س_١ = \frac{١}{٢}$ ، $س_٢ = \frac{-٢}{٣}$.

جـ) $س_١ = ٢$ ، $س_٢ = \frac{١}{٥}$. ء) $س_١ = -٤$ ، $س_٢ = ٠$

[٣] أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة ٦ س^{٢} – ١٣ س – ٥ = ٠ .

[٤] أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة س^{٢} – (هـ + ١) س – هـ^{٢} = ٠ ، بدلالة هـ .

[٥] لدينا المعادلة هـ س^{٢} – ٢ (هـ + ١) س + هـ – ٢ = ٠ ، هـ ≠ ٠ :

أ) أوجد مجموع الجذرين ، وحاصل ضربهما بدلالة هـ .

ب) حل المعادلات في الحالات الآتية : هـ = ١ ، هـ = ٢ ، هـ = –١ .

٦ : ٤ اتحاد وتقاطع الفترات

سبق أن درست في الصف التاسع الأساسي الفترات العددية ، وأنواعها وطريقة تمثيلها ، وللتذكير سوف نوردها بإيجاز على النحو التالي :

بفرض أن أ ، ب ∈ ح ، أ < ب تنقسم الفترات إلى ما يلي:

أولاً : الفترات المحدودة : وهي فترات طرفيها أعداد حقيقية ، ويمكن تصنيفها على النحو التالي :

١ – فترة مغلقة مثل : [أ ، ب] = { س : س ∈ ح ، أ ≤ س ≤ ب } .

٢ – فترة مفتوحة مثل :] أ ، ب [= { س : س ∈ ح ، أ < س < ب } .

٣ – فترات نصف مفتوحة (نصف مغلقة) وهي فترات مفتوحة من طرف ومغلقة من الآخر وتشمل ما يلي:

- فترات مفتوحة من أسفل ومغلقة من أعلى مثل] أ ، ب] = { س : س ∈ ح ، أ < س ≤ ب } .
- فترات مغلقة من أسفل ومفتوحة من أعلى مثل [أ ، ب [= { س : س ∈ ح ، أ ≤ س < ب } .

ثانياً : الفترات غير المحدودة : وهي فترات أحد طرفيها أو كليهما = ± ∞ ويمكن تصنيفها على النحو التالي :

١ – فترة غير محدودة من طرفيها :] –∞ ، ∞ [= { س : س ∈ ح } .

٢ – فترات غير محدودة من أعلى : وهي فترات لها حد سفلى فقط وتنقسم إلى القسمين التاليين :

- فترات محدودة ومغلقة من أسفل مثل [أ ، ∞ [= { س : س ∈ ح ، س ≥ أ } .
- فترات محدودة من أسفل ولكن مفتوحة مثل] أ ، ∞ [= { س : س ∈ ح ، س > أ } .

٣ – فترات غير محدودة من أسفل : وهي فترات لها حد علوى فقط وتنقسم إلى القسمين التاليين :

- فترات محدودة ومغلقة من أعلى مثل] –∞ ، أ] = { س : س ∈ ح ، س ≤ أ } .
- فترات محدودة من اعلى ولكن مفتوحة مثل] –∞ ، أ [= { س : س ∈ ح ، س < أ } .

تـذكـــر أن :

- **عند كتابة الفترات نبدأ بالطرف السفلي دائماً .**
- **نمثل الطرف المفتوح في مجموعة الحل بدائرة (غير مظللة) لتدل على عدم انتمائه إلى مجموعة الحل كما نمثل الطرف المغلق فيها بدائرة (مظللة) لتدل على انتمائه إلى مجموعة الحل .**

تعريف (٦ : ١)

لتكن $ف_{١}$ ، $ف_{٢}$ ، فترتين عدديتين ؛ فإنه يكون :

١) $س \in (ف_{١} \cap ف_{٢}) \Leftrightarrow (س \in ف_{١}) \wedge (س \in ف_{٢})$.

٢) $س \in (ف_{١} \cup ف_{٢}) \Leftrightarrow (س \in ف_{١}) \vee (س \in ف_{٢})$.

ويمكن تعميم ذلك لأكثر من فترتين .

مثال (٦ – ١١) لتكن : $ف_{١} = [٢ ، ٥]$ ، $ف_{٢} =]١ ، ٤[$ ، $ف_{٣} = [٤ ، ٥[$ ، $ف_{٤} = [-٢ ، ١]$ ، $ف_{٥} = [-٣ ، \infty[$ ، $ف_{٦} =]-\infty ، -٣[$. أوجد كلاً من :

١) $ف_{١} \cap ف_{٤}$ ، ٢) $ف_{١} \cap ف_{٢}$ ، ٣) $ف_{٢} \cup ف_{٣}$ ،

٤) $ف_{١} \cap ف_{٣}$ ، ٥) $ف_{١} \cup ف_{٣}$ ، ٦) $ف_{٥} \cup ف_{٦}$ ،

٧) $ف_{٤} \cap ف_{٦}$ ، ٨) $ف_{٣} \cup ف_{٥}$ ، ٩) $ف_{٣} \cap ف_{٥}$.

الحل

١ – $ف_{١} \cap ف_{٤} = [٢ ، ٥] \cap]-٢ ، ١] = \varnothing$.

٢ – $ف_{١} \cap ف_{٢} = [٢ ، ٥] \cap]١ ، ٤[= [٢ ، ٤[$ [شكل (٦–١)] .

شكل (٦ – ١)

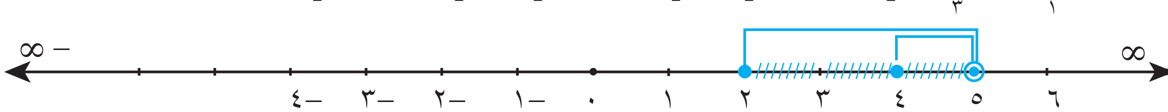
٣ – $ف_{٢} \cup ف_{٣} =]١ ، ٤[\cup [٤ ، ٥[=]١ ، ٥[$.

شكل (٦ – ٢)

٤ – $ف_{١} \cap ف_{٣} = [٢ ، ٥] \cap [٤ ، ٥[= [٤ ، ٥[$.

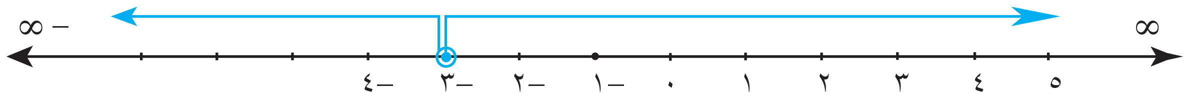
شكل (٦ – ٣)

٥ – $ف_{١} \cup ف_{٣} = [٢ ، ٥] \cup [٤ ، ٥[= [٢ ، ٥]$.



شكل (٦ – ٤)

٦ – ف$_{٥}$ ∪ ف$_{٦}$ =] –٣ ، ∞] ∪ [–∞ ، –٣] = [–∞ ، ∞] .



شكل (٦ – ٥)

٧ – ف$_{٤}$ ∩ ف$_{٦}$ = [–٢ ، ١ [∩ [–∞ ، –٣] = ∅ .

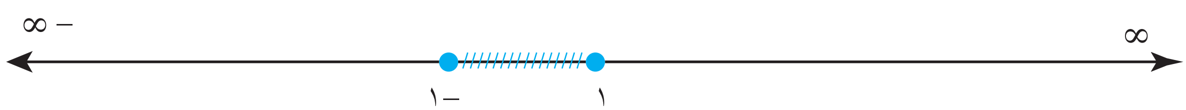
٨ – ف$_{٣}$ ∪ ف$_{٥}$ =] ٤ ، ٥] ∪] –٣ ، ∞] =] –٣ ، ∞] .

٩ – ف$_{٣}$ ∩ ف$_{٥}$ =] ٤ ، ٥] ∩] –٣ ، ∞] =] ٤ ، ٥] .

تمارين ومسائل (٦ : ٤)

[١] عبر عن كلٍ من الأشكال التالية باستخدام الفترات :

أ)

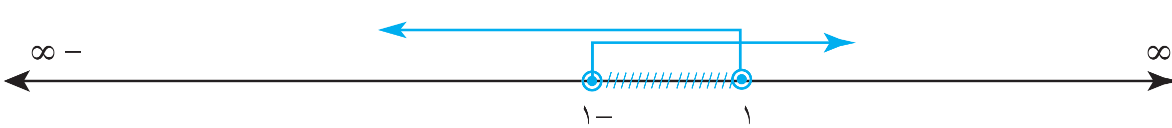


شكل (٦ – ٦)

ب)

شكل (٦ – ٧)

جـ)



شكل (٦ – ٨)

ء)

شكل (٦ – ٩)

[٢] أيَّ العبارات التالية صحيحة وأيها خطأ :

أ) [–٥ ، ∞] ∪ [–∞ ، –٨] = ح / [–٨ ، –٥] .

ب) [–٢ ، ٣ [∩ [٣ ، ∞] = ∅ .

جـ) [–٦ ، ٣] ∪ [٥ ، ∞] = [٥ ، ∞] .

[٣] إذا كانت : $ف_١ =]٥ ، \infty[$ ، $ف_٢ =]٤ ، \infty[$ ، $ف_٣ =]-\infty ، ٣]$ ، $ف_٤ =]-٥ ، ٧]$ ، $ف_٥ =]٣ ، ٦]$ ، $ف_٦ =]-٣ ، ٢]$. فأجب عمّا يأتي :

أ) مثل الفترات السابقة بيانياً .

ب) أوجد كلاً من : ١) ($ف_١ \cup ف_٢$) . ٢) ($ف_٥ \cap ف_٤$) . ٣) ($ف_٦ \cap ف_٣$) .

٤) $ف_١ \cup ف_٥$. ٥) $ف_٣ \cap ف_٤$. ٦) $ف_٢ \cup ف_٣$.

٧) $ف_٦ \cap ف_١$. ٨) $ف_٤ \cap ف_٢$. ٩) $ف_١ \cup ف_٦$.

٦ : ٥ متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد

تعريف (٦ : ٢)

لتكن $حـ_١$ (س) ، $حـ_٢$ (س) حدوديتين من الدرجة الأولى في متغير واحد فإن الصيغ الجبرية التالية :

$حـ_١(س) \le حـ_٢(س)$ ، $حـ_١(س) \ge حـ_٢(س)$ ،

$حـ_٢(س) > حـ_١(س)$ ، $حـ_٢(س) < حـ_١(س)$ ،

تسمى متراجحات من الدرجة الأولى في متغير واحد .

تدريب (٦-١) بيّن أياً من المتراجحات التالية من الدرجة الأولى في متغير واحد ؟

١) $٣ س - ١ > ٤ س + ٢$. ٢) $٣ س - ص > ٤ س + ١$.

٣) $\frac{٤ س - ٣}{٥} \ge ٦$. ٤) $٤ س^٢ - ٣ س \le ٢$.

حل متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد :

حل المتراجحة يعني إيجاد مجموعة جزئية من ح بحيث لو عوّضنا بأي عنصر منها عن متغير المتراجحة نحصل على قضية صائبة .

يقوم حل المتراجحة على الانتقال من المتراجحة المفروضة إلى متراجحات مكافئة على التعاقب باستخدام التحويلات المكافئة إلى أن نصل إلى متراجحة واضحة الحل مثل : $س \le أ$ حيث $أ \in ح$.

فتكون مجموعة الحل = $\{ س : س \in ح ، س \le أ \}$.

ويمكن التعبير عن مجموعة الحل بالصورة : $س \in [أ ، \infty[$ ، وقد نكتفي بالقول أن مجموعة حل المتراجحة = $[أ ، \infty[$.

تمثيل حل متراجحة الدرجة الأولى في متغير واحد بيانياً :

يقصد بتمثيل الحل بيانياً تحديد مجموعة الحل على شكل فترة جزئية من خط الأعداد « بتظليلها أو بإعطائها لون مغاير »

تـذكـــر أن :

- **إضافة أو طرح أي عدد حقيقي إلى طرفي المتراجحة لايعكس ترتيبها**
- **قسمة أو ضرب طرفيها بعدد حقيقي موجب لا يغير ترتيبها ايضاً .**
- **إيجاد مقلوبي طرفيها أو ضربهما في عدد حقيقي سالب يغير ترتيبها .**

مثال (٦ – ١٢) حل المتراجحة : ٣ س + ٢ > ٢ س – ٣ جبرياً .

الحل

٣ س + ٢ > ٢ س – ٣ ⇐ ٣ س – ٢ س + ٢ > ٢ س – ٢ س – ٣ (بطرح ٢س من الطرفين)

⇐ س + ٢ – ٢ > – ٣ – ٢ (بطرح ٢ من الطرفين) .

⇐ س > – ٥

∴ مجموعة الحل =]– ٥ ، ∞ [.

مثال (٦ – ١٣) أوجد مجموعة حل المتراجحة : س + ٤ ≥ ٩ س جبرياً ومثلها بيانياً .

الحل

س + ٤ ≥ ٩ س (بطرح ٩ س من الطرفين)

⇐ س – ٩ س + ٤ ≥ ٩ س – ٩س

⇐ – ٨ س + ٤ – ٤ ≥ – ٤ (بطرح ٤ من الطرفين)

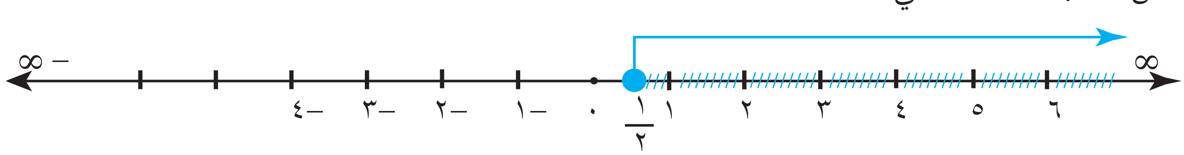
⇐ – ٨ س ≥ –٤ (بضرب الطرفين في – $\frac{١}{٨}$)

⇐ – $\frac{١}{٨}$ × – ٨ س ≤ – $\frac{١}{٨}$ × – ٤

⇐ س ≤ $\frac{١}{٢}$

∴ مجموعة الحل = [$\frac{١}{٢}$ ، ∞ [.

ويمكن تمثيلها بيانياً كالتالي :



شكل (٦ – ١٠)

مثال (٦ – ١٤) حل المتراجحة : $\frac{٣}{٥} - \frac{٢س - ١}{١٥} > \frac{٤س}{٣} + ٢$.

الحل

$\frac{٣}{٥} - \frac{٢س - ١}{١٥} > \frac{٤س}{٣} + ٢$.

$\Rightarrow ١٥ \times \frac{٣}{٥} - ١٥ \left(\frac{٢س - ١}{١٥} \right) > ١٥ \times \frac{٤س}{٣} + ١٥ \times ٢$

$\Rightarrow ٩ - (٢س - ١) > ٢٠س + ٣٠$

$\Rightarrow ٩ - ٢س + ١ > ٢٠س + ٣٠$

$\Rightarrow -٢س + ١٠ > ٢٠س + ٣٠$

$\Rightarrow -٢٢س + ١٠ - ١٠ > ٣٠ - ١٠$

$\Rightarrow -٢٢س > ٢٠$

$\Rightarrow -\frac{١}{٢٢} \times -٢٢س < -\frac{١}{٢٢} \times ٢٠$

$\Rightarrow س < -\frac{٢٠}{٢٢}$.

$\Rightarrow س < -\frac{١٠}{١١}$.

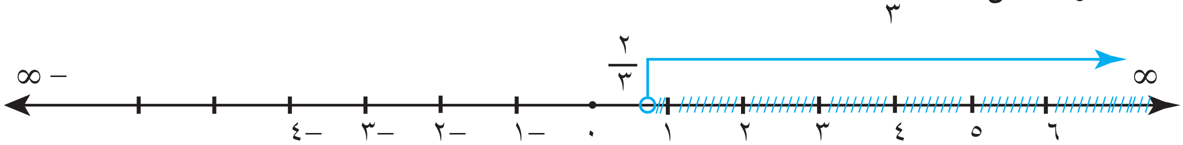
$\therefore$ مجموعة الحل = $]-\infty ، -\frac{١٠}{١١}[$.

مثال (٦ – ١٥) أوجد مجموعة الحل للمتراجحة : $٣س - ٢ > ٠$ ومثلها بيانياً .

الحل

$٣س - ٢ > ٠ \Rightarrow ٣س > ٢ \Rightarrow س > \frac{٢}{٣}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $]\frac{٢}{٣} ، \infty[$.



شكل (٦ – ١١)

ملاحظة : لقد مثلنا العدد $\frac{٢}{٣}$ بدائرة غير مظللة لأنه لاينتمي إلى مجموعة حل المتراجحة .

تمارين ومسائل (٦ : ٥)

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الخيارات المرفقة لكل سؤال مما يأتي : حيث س ∈ ح .

١ – إذا كانت : ٢ س – ٣ > ١ فإن :

أ) س ≤ ٢ . ب) س ∈] ٢ ، ∞ [. جـ) س ∈ [٢ ، ∞ [.

٢ – إذا كانت : ٣ + ٢ س ≤ – س فإن :

أ) س ∈] –١ ، ∞ [. ب) س > ١. جـ) س < –١ .

٣ – إذا كانت : س – ٣ > ٤ س + ١ فإن :

أ) س ∉] – $\frac{٤}{٣}$ ، ∞ [. ب) س < – $\frac{٣}{٤}$. جـ) س < – $\frac{٤}{٣}$.

[٢] حدد بإشارة (√) متراجحة الدرجة الأولى في متغير واحد مما يأتي وما عداها بإشارة (×) :

أ) ١ – ٢ س > ٠ (   ) ب) $\frac{٢ س – ١}{س}$ > $\frac{س + ٢}{٣}$ (   )

جـ) ٢ س + $\frac{٣}{س}$ > ٢ (   ) ء) ٤ س – ٢ ≥ س (س + ١) (   )

[٣] أوجد مجموعة حل كل من المتراجحات التالية ومثلها بيانياً :

أ) س + ٣ ≤ ٠ . ب) ٢ س – ١ > ٥ س + ٢

جـ) ٩ س – ٣ ≥ ٢ س + ٤ . ء) ٥ س < ٦ س – ٣ .

هـ) – س + ٢ ≥ ٢ س – ١ . و) $\frac{٦ س + ١}{٣}$ > $\frac{٥ س}{٣}$.

٦ : ٦ متراجحة الدرجة الثانية في متغير واحد

سبق أن درست في الصف التاسع الأساسي كيف توجد مجموعة حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد، إمَّا بالتحليل ، أو باستخدام القانون العام ، بعد أن تضعها في صورتها العامة :

أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠ .

فإذا استبدلنا إشارة التساوي في المعادلة السابقة بإحدى إشارات التراجح : > ، ≥ ، ≤ ، <

نحصل على متراجحة من الدرجة الثانية في متغير واحد في إحدى صورها العامة :

أ س^{٢} + ب س + جـ ≤ ٠

حل متراجحة الدرجة الثانية في متغير واحد :

لإيجاد مجموعة حل متراجحة الدرجة الثانية في متغير واحد نتبع ما يأتي :

١ – نجعلها بصورة متراجحة صفرية .

٢ – نحدد إشارة المقدار الثلاثي : أ س^{٢} + ب س + جـ

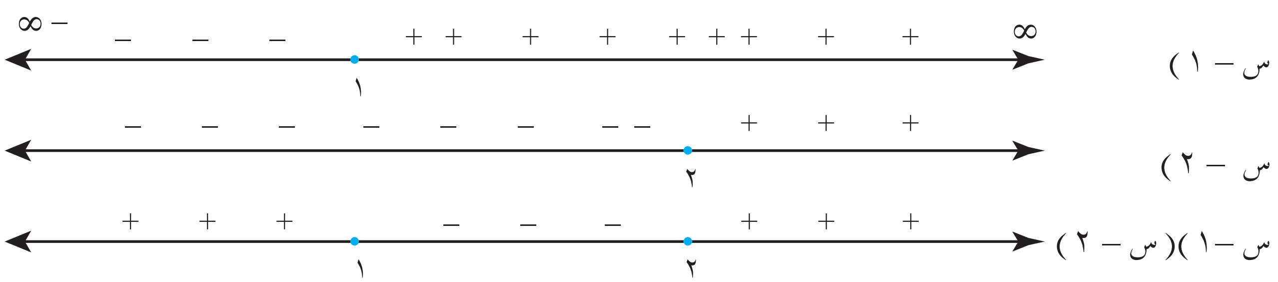
من خلال دراسة إشارة حاصل ضرب عوامله على خط الأعداد قبل وبعد صفر (جذر) كل عامل ، على النحو التالي :

- نرسم خطوط الأعداد (تحت بعض) يزيد عددها عن عدد عوامل المقدار : أ س^{٢} + ب س + جـ بواحد .
- نختار لكل عامل من العوامل خطاً مستقيماً نحدد عليه صفر هـذا العامل وإشاراته قبل وبعـد صفره (جذره) .
- نحدد إشارات حاصل ضرب العاملين على خط الأعداد الأخير قبل وبعد أصفار المقدار (جذوره) فتكون هي إشارات المقدار : أ س^{٢} + ب س + جـ .
- مجموعة حل المتراجحة هي الفترات التي إشارات المقدار فيها تحقق المتراجحة المعطاة .

مثال (٦ – ١٦) أوجد مجموعة حل المتراجحة : (س – ١) (س –٢) ≥ ٠

الحـــل

للمقدار جذران هما س$_{١}$ = ١ أو س$_{٢}$ = ٢ .



شكل (٦ – ١٢)

من الشكل نلاحظ على خط إشارات حاصل الضرب أن : (س – ١) (س – ٢) ≥ ٠ تتحقق في الفترة [١ ، ٢] ∴ مجموعة حل المتراجحة = [١ ، ٢] .

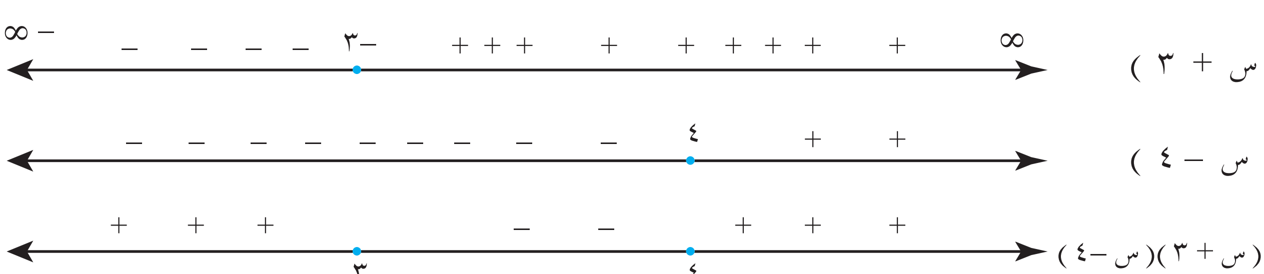
مثال (٦ – ١٧) أوجد مجموعة حل المتراجحة : س + ١٢ ≥ س^{٢} .

الحـــل

س + ١٢ ≥ س^{٢} ⟺ – س^{٢} + س + ١٢ ≥ ٠ ⟸ س^{٢} – س – ١٢ ≤ ٠

⟸ (س – ٤) (س + ٣) ≤ ٠ .

للمقدار س^{٢} – س – ١٢ جذران هما س$_{١}$ = –٣ أو س$_{٢}$ = ٤



شكل (٦ –١٣)

من الشكل نجد أن (س − ٤) (س + ٣) ≤ ٠ تتحقق في الفترتين] ٤ ، ∞ [،] − ∞ ، −٣ [.
مجموعة حل المتراجحة =] − ∞ ، −٣] ∪ [٤ ، ∞ [.

قاعدة هامة :

يمكننا تحديد إشارة المقدار الثلاثي : ﺃ س٢ + ب س + جـ جبرياً ودون اللجوء إلى خطوط الإعداد كما يلي :

- **إذا كان للمقدار جذران حقيقيان مختلفان (أي أن Δ > ٠) فإن إشارته تكون مخالفة لإشارة معامل س٢ أي إشارة (ﺃ) في فترة ما بين الجذرين ، وتكون مساوية لها في الفترات الواقعة خارج الجذرين ، ويضاف الجذران في حالة وجود إشارة التساوي مع علامة التراجح .**
- **إذا لم يكن للمقدار جذران حقيقيان (أي أن Δ < ٠) فإن :إشارته تتبع إشارة معامل س٢(أي إشارة ﺃ) ∀ س ∈ ح.**

مثال (٦ − ١٨) أوجد مجموعة حل المتراجحة : −٢ س٢ + س − ١ > ٠ .

الحل

ﺃ = −٢ < ٠ ، ب = ١ ، جـ = −١ ، Δ = ١ − ٨ = −٧ < ٠ .

∴ مجموعة حل المتراجحة = ∅ .

(إشارة المتراجحة مخالفة لإشارة ﺃ) .

مثال (٦ − ١٩) أوجد مجموعة حل المتراجحة : ٥ س٢ − ٤ س + ١٢ > ٠ .

الحل

ﺃ = ٥ > ٠ ، ب = −٤ ، جـ = ١٢ ، Δ = ١٦ − ٢٤٠ < ٠ .

ليس للمعادلة جذرين حقيقيين

ﺃ > ٠ ، Δ < ٠

∴ مجموعة حل المتراجحة = ح .

مثال (٦ − ٢٠) أوجد مجموعة حل المتراجحة : س٢ − ٣ س + ٢ ≤ ٠ .

الحل

ﺃ = ١ > ٠ ، ب = −٣ ، جـ = ٢ ، Δ = ٩ − ٨ > ٠

⇐ للمقدار جذران حقيقيان

⇐ (س − ١) (س − ٢) ≤ ٠ .

⇐ جذرا المقدار هما $س_١$ = ١ ، $س_٢$ = ٢

∴ مجموعة حل المتراجحة = [١ ، ٢] .

«إشارة المقدار مخالفة لإشارة ﺃ في فترة ما بين الجذرين . وأضفنا الجذرين لأن "=" موجودة مع إشارة التراجح» .

مثال (٦ − ٢١) أوجد مجموعة حل المتراجحة : س٢ − س − ٦ > ٠ .

الحـــل

$أ = ١$ ، $ب = -١$ ، $جـ = -٦$ ، $\Delta = ١ + ٢٤ > ٠$

للمقدار $س^٢ - س - ٦$ جذران حقيقيان $\Leftarrow$ $(س - ٣)(س + ٢) > ٠$

جذرا المقدار هما $س_١ = ٣$ أو $س_٢ = -٢$ ، $أ > ٠$

$\Leftarrow$ مجموعة الحل $=]-\infty ، -٢[\cup]٣ ، \infty[$ (خارج الجذرين) .

المتراجحات الكسرية :

هي المتراجحات التي تحوي كسر في أحد طرفيها أو في كليهما ، بحيث يكون المقام حدودية .

مثال (٦ – ٢٢) حل المتراجحة : $\dfrac{س^٢ - ١}{٢س + ٣} \geq ٢(س + ١)$.

الحـــل

$$\frac{س^٢ - ١}{٢س + ٣} \geq ٢(س + ١) \Leftrightarrow \frac{س^٢ - ١}{٢س + ٣} - ٢(س + ١) \geq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{س^٢ - ١ - ٢(س + ١)(٢س + ٣)}{٢س + ٣} \geq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{س^٢ - ١ - ٤س^٢ - ٦س - ٤س - ٦}{٢س + ٣} \geq ٠$$

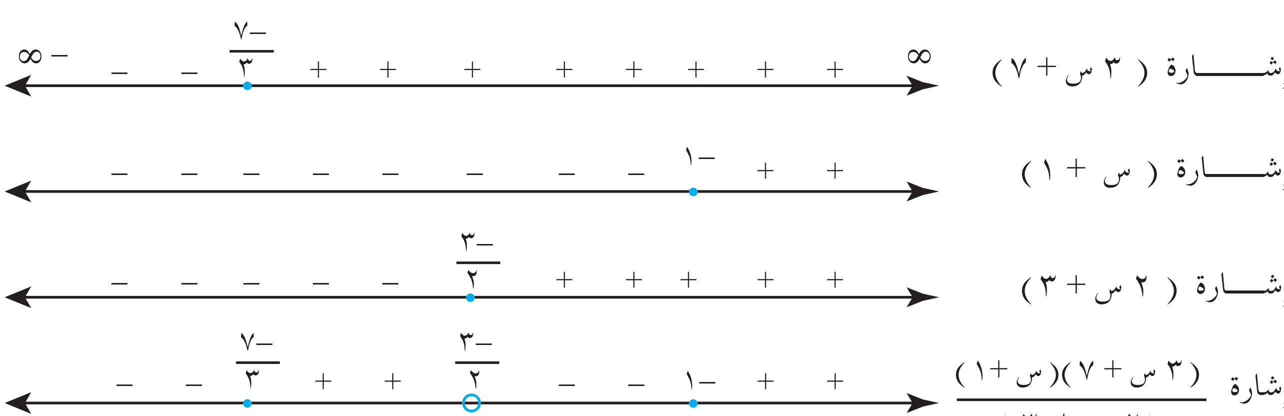
$$\Leftarrow \frac{-٣س^٢ - ١٠س - ٧}{٢س + ٣} \geq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{-(٣س^٢ + ١٠س + ٧)}{٢س + ٣} \geq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{٣س^٢ + ١٠س + ٧}{٢س + ٣} \leq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{(٣س + ٧)(س + ١)}{٢س + ٣} \leq ٠$$

أصفار المقام : $س_١ = -\dfrac{٣}{٢}$ ، أصفار البسط : $س_٢ = -\dfrac{٧}{٣}$ أو $س_٣ = -١$.



شكل (٦ – ١٤)

مـن الشـكل نجـد أن : $\frac{(٣س + ٧)(س + ١)}{٢س + ٣} \geq ٠$ يتحقق في الفترتين $]-\infty ، -\frac{٧}{٣}]$

أو $]-\frac{٣}{٢} ، -١]$.

$\therefore$ مجموعـة الحـل للمتراجحة المعطاة = $]-\infty ، -\frac{٧}{٣}] \cup]-\frac{٣}{٢} ، -١]$

لحل المتراجحات الكسرية التي تحوي في كل من بسطها ومقامها حدودية نتبع ما يلي :

١ – نحولها إلى متراجحة صفرية ، ثم نجمع الطرف الأيمن في كسر واحد .

٢ – نوجد أصفار البسط والمقام ونحددها على خط الإعداد .

٣ – نحدد إشارة كل عامل قبل وبعد جذره (صفره) على خط الإعداد .

٤ – نوجد إشارة حاصل ضرب عوامل البسط وإشارة حاصل ضرب عوامل المقام .

٥ – نوجد ناتج قسمة إشارة البسط على إشارة المقام .

٦ – نحدد الفترات التي تكون فيها الإشارة محققة للمتراجحة المعطاة فتكون هي مجموعة الحل للمتراجحة المعطاة .

مثال (٦ – ٢٣) حل المتراجحة : $\frac{٣س^{٢} - ٣س}{س + ١} \geq ٢س - ٢$.

الحـل

$\frac{٣س^{٢} - ٣س}{س + ١} \geq ٢س - ٢$

$\Leftarrow \frac{٣س^{٢} - ٣س}{س + ١} - ٢س + ٢ \geq ٠ \Leftarrow \frac{٣س^{٢} - ٣س + (س + ١)(-٢س + ٢)}{س + ١} \geq ٠$

$\Leftarrow \frac{٣س^{٢} - ٣س - ٢س^{٢} - ٢س + ٢س + ٢}{س + ١} \geq ٠ \Leftarrow \frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س + ١} \geq ٠ \Leftarrow \frac{(س - ١)(س - ٢)}{(س + ١)} \geq ٠$

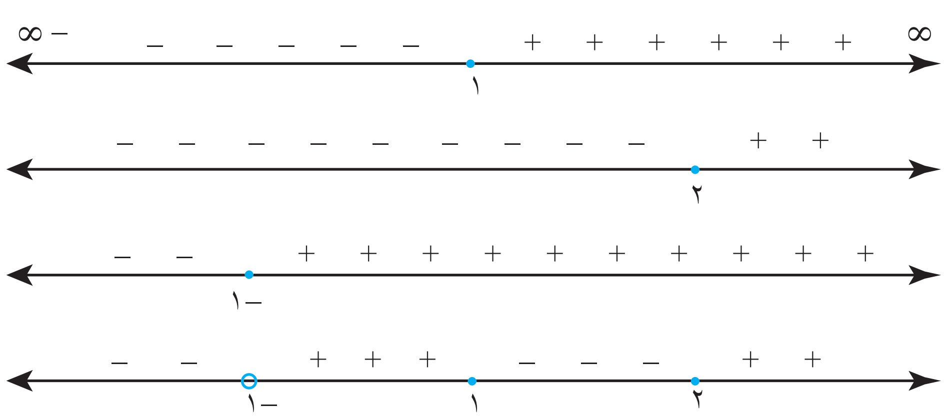
أصفار البسط : س = ١ أو س = ٢ . أصفار المقام : س = −١ .

إشارة (س − ١)

إشارة (س − ٢)

إشارة (س + ١)

إشارة $\frac{(س - ١)(س - ٢)}{(س + ١)}$



شكل (٦ – ١٥)

من الشكل نجد أن : $\frac{(\text{س}-١)(\text{س}-٢)}{(\text{س}+١)} \geq ٠$ يتحقق في]−١ ، ١] أو [٢ ، ∞[.

∴ مجموعة حل المتراجحة المعطاة =]−١ ، ١] ∪ [٢ ، ∞[.

تمارين ومسائل (٦ : ٦)

※ أوجد مجموعة الحل لكل من المتراجحات التالية :

١) $(\text{س}-٣)(\text{س}+٥) > ٠$.

٢) $٣\text{س}^٢ - ٧\text{س} - ٦ \leq ٠$.

٣) $٥\text{س} - ٣ > \frac{-٢\text{س}}{\text{س}-٢}$.

٤) $\frac{١}{\text{س}-٢} \leq \frac{٣}{٣-\text{س}}$.

٥) $\text{س}^٢ - \text{س} - ٢٠ \geq ٠$.

٦) $\frac{١}{\text{س}} \geq \text{س} + ١$.

٧) $٢\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٥ < ٠$.

٨) $٣\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ٥ \geq ٠$.

٩) $-٤\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٣ < ٠$.

١٠) $\text{س}^٢ + \text{س} - ٦ \leq ٠$.

١١ - $٣\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٢ > ٠$.

١٢) $\text{س}^٢ + ١ > ٠$.

١٣ - $-٣\text{س}^٢ + ١٠\text{س} - ٧ \geq ٠$.

١٤) $٢\text{س}^٢ - ٣\text{س} < ٠$.

٦ : ٧ القيمة المطلقة

من الأعداد ما هو سالباً ومنها ما هو موجباً ، ففي الكميات المتجهة مثل القوة والسرعة والإزاحة قد تستعمل الأعداد الموجبة أو الأعداد السالبة ، ولكننا عندما نتعامل مع الكميات غير المتجهة مثل الزمن والمسافة والمساحة والكتلة ، فإننا نستعمل الأعداد الموجبة دائماً ، والقيمة المطلقة تستعمل للدلالة على الكميات غير المتجهة أو لإيجاد موجب الكميات المتجهة .

تعريف (٦ : ٣)

القيمة المطلقة لعدد حقيقي س يرمز لها بالرمز $|\text{س}|$ وهي عدد حقيقي يساوي س إذا كانت س غير سالبة ويساوي − س إذا كانت س سالبة .

ويمكننا توضيح التعريف رمزياً كما يلي :

$$|س| = \begin{cases} س & \text{حيث } س \geq ٠ \\ -س & \text{حيث } س < ٠ \end{cases}$$

∴ $|س|$ = بعد س عن الصفر .

١) $|س| \geq ٠$ ، $\forall\ س \in ح$

٢) $|س| = |-س|$ ، $\forall\ س \in ح$

فمثلاً : $|٣\frac{١}{٤}| = ٣\frac{١}{٤}$ ، $|-٣\frac{١}{٤}| = ٣\frac{١}{٤}$ ،

$|١٫٤| = ١٫٤$ ، $|-١٫٤| = ١٫٤$ ، $|٠| = ٠$

إعادة تعريف القيمة المطلقة :

نفرض أن لدينا المقدار $|س - ٩|$ ، عندما نريد أن نتعامل مع هذا المقدار يجب أن نعيد تعريفه وفقاً لتعريف القيمة المطلقة ، فالمقدار (س − ٩) إما أن يكون سالباً وإما أن يكون موجباً ، وإما أن يكون صفراً .

عندما تكون (س − ٩) موجباً يكون $|س - ٩| = س - ٩$ ،

عندما تكون (س − ٩) سالباً يكون $|س - ٩| = -(س - ٩) = ٩ - س$.

وعندما تكون (س − ٩) صفراً يكون $|س - ٩| = ٠$.

أي أن :

$$|س - ٩| = \begin{cases} س - ٩ & \text{عندما } (س - ٩) > ٠ \\ ٠ & \text{عندما } (س - ٩) = ٠ \\ ٩ - س & \text{عند } (س - ٩) < ٠ \end{cases}$$

ويمكن تقديم التعريف بصورة اخرى :

$$|س - ٩| = \begin{cases} س - ٩ & \text{عند } س > ٩ \\ ٠ & \text{عند } س = ٩ \\ ٩ - س & \text{عند } س < ٩ \end{cases}$$

واضح اننا أعدنا تعريف $|س - ٩|$ حول النقطة س = ٩ ونسمي س = ٩ صفر المقياس أو جذر المقياس وهو ما يجعل قيمة ما بداخل المقياس = ٠ .

مثال (٦ − ٢٤) أعد تعريف المقدار : $|س^{٢} + ٣س - ١٠|$.

الحل

$|\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١٠| = |(\text{س} + ٥)(\text{س} - ٢)|$. أي أن للقيمة المطلقة صفران « جذران » هما :

$\text{س}_{١} = -٥$ ، $\text{س}_{٢} = ٢$

نعيد تعريف المقدار حول الجذرين :

$$|(\text{س} + ٥)(\text{س} - ٢)| = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١٠ & \text{عند } \text{س} \geq ٢ \\ -\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ١٠ & \text{عند } -٥ < \text{س} < ٢ \\ \text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١٠ & \text{عند } \text{س} \leq -٥ \end{cases}$$

لإعادة تعريف القيمة المطلقة يجب أولاً أن نحدد أصفار القيمة المطلقة ، ثم نعيد تعريف القيمة المطلقة (فقط) حول أصفارها (جذورها) .

مثال (٦ − ٢٥) أعد تعريف المقدار : $٢\text{س} - |\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦|$.

الحل

المقدار $= ٢\text{س} - |(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)|$. للقيمة المطلقة صفران هما : $\text{س}_{١} = -٢$ ، $\text{س}_{٢} = ٣$.

وعندما نعيد تعريف المقدار فإننا نعيد تعريف القيمة المطلقة (فقط) حول صفريها ضمن هذا المقدار ، فنحصل على :

$$٢\text{س} - |(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)| = \begin{cases} ٢\text{س} - (\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦) & \text{عند } \text{س} \geq ٣ \\ ٢\text{س} + (\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦) & \text{عند } -٢ < \text{س} < ٣ \\ ٢\text{س} - (\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦) & \text{عند } \text{س} \leq -٢ \end{cases}$$

خواص القيمة المطلقة :

إذا كانت $\text{ا} \in \text{ح}^{+}$ فإن :

١ - $\sqrt{\text{س}^{٢}} = |\text{س}|$ ، $\sqrt{(\text{س} \pm \text{ا})^{٢}} = |\text{س} \pm \text{ا}|$ ، $(|\text{س}|)^{٢} = \text{س}^{٢}$.

٢ - $|\text{س}| = \text{ا} \Leftrightarrow$ إما $\text{س} = \text{ا}$ أو $\text{س} = -\text{ا}$.

٣ - $|\text{س}| \leq \text{ا} \Leftrightarrow -\text{ا} \leq \text{س} \leq \text{ا}$.

$|\text{س}| < \text{ا} \Leftrightarrow -\text{ا} < \text{س} < \text{ا}$.

٤ - $|\text{س}| \geq \text{ا} \Leftrightarrow$ إما $\text{س} \geq \text{ا}$ أو $\text{س} \leq -\text{ا}$.

$|\text{س}| > \text{ا} \Leftrightarrow$ إما $\text{س} > \text{ا}$ أو $\text{س} < -\text{ا}$.

٥ – $\left|\frac{ص}{س}\right| = \frac{|ص|}{|س|}$ ، $|س • ص| = |س| • |ص|$ ، $س \neq$ صفر .

٦ – $|س + ص| \leq |س| + |ص|$ ، $|س - ص| \geq |س| - |ص|$.

ويظهر التباين عندما تكون س وَ ص من إشارتين مختلفتين .

المتراجحات المزدوجة :

نسمي المتراجحات من الشكل $ا < س < ب$ متراجحات مزدوجة ، إذ أنها مكونة من متراجحتين فرديتين، وكما نلاحظ أن المتراجحة $ا < س < ب$ تفرض ترتيباً على المجموعة $\{ا ، س ، ب\}$ حيث $ا ، ب \in ح$ وَ س متغير واقع بين ا ، ب .

حل المتراجحات المزدوجة :

لحل المتراجحات المزدوجة نطبق على المتراجحة المعطاة التحويلات المكافئة بنفس الأسلوب الذي نطبقها به على المتراجحات الفردية ؛ فتكون مجموعة حل المتراجحة المزدوجة مساوية لتقاطع مجموعتي الحل للمتراجحتين الفرديتين المكونة لها .

فمثلاً : $|س - ا| < ب \Leftrightarrow -ب < س - ا < ب$ [$-ب$ أصغر من (س – ا) أصغر من ب].

$\Leftarrow$ $ا - ب < س < ا + ب$

$\Leftarrow$ مجموعة الحل =] ا – ب ، ا + ب [.

آخر خطوات الحل يكون فيها المتغير محصور بين عددين ثابتين .

مثال (٦ – ٢٦) حل المتراجحتان :

ا) $|س| \leq ٥$

ب) $|٢س - ٦| \leq ١$.

الحـــل

ا) $|س| \leq ٥ \Leftrightarrow -٥ \leq س \leq ٥$

$\therefore$ مجموعة الحل = [–٥ ، ٥] .

ب) $|٢س - ٦| \le ١ \Leftrightarrow -١ \le ٢س - ٦ \le ١$

$\Leftarrow ٥ \le ٢س \le ٧$

$\Leftarrow \frac{٥}{٢} \le س \le \frac{٧}{٢}$.

$\therefore$ مجموعة الحل $= [\frac{٥}{٢} ، \frac{٧}{٢}]$.

مثال (٦ – ٢٧) حل المتراجحة : $|س - ٣| > ٤$.

الحل

$|س - ٣| > ٤ \Leftarrow س - ٣ > ٤$ أو $س - ٣ < -٤$

$\Leftarrow س > ٧$ أو $س < -١$

$\Leftarrow$ مجموعة الحل $=]-\infty ، -١[\cup]٧ ، \infty[$.

مثال (٦ – ٢٨) حل المتراجحة : $|س^٢ - س - ١| \le ١$.

الحل

$|س^٢ - س - ١| \le ١ \Leftrightarrow -١ \le س^٢ - س - ١ \le ١$

$\Leftrightarrow ٠ \le س^٢ - س \le ٢$

$\Leftarrow ٠ \le س^٢ - س$

$\Leftarrow ٠ \le س(س - ١)$

جذرا المقدار $س = ٠$ أو $س = ١$

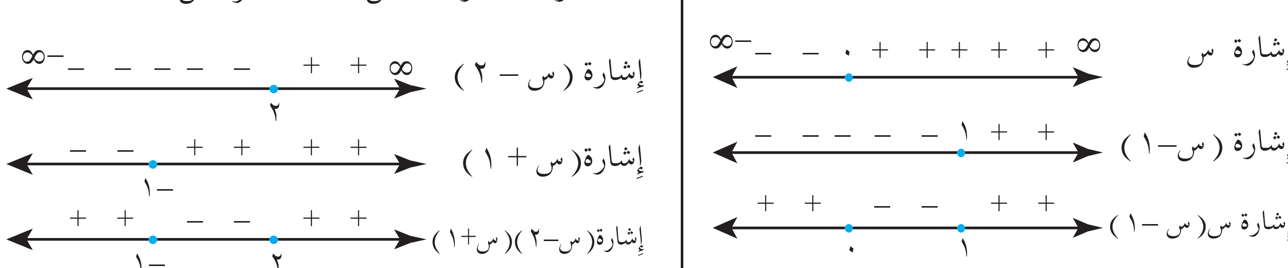
وَ

$س^٢ - س \le ٢$

$\Leftarrow س^٢ - س - ٢ \le ٠$

$\Leftarrow (س - ٢)(س + ١) \le ٠$

أصفار المقدار : $س = -١$ أو $س = ٢$



$\Leftarrow$ مجموعة الحل $=]-\infty ، ٠] \cup [١ ، \infty[$. (١)

$\Leftarrow$ مجموعة الحل $= [-١ ، ٢]$ (٢)

شكل (٦ – ١٦)

من (١) ، (٢) نجد أن :

مجموعة حل المتراجحة : $|س^٢ - س - ١| \le ١ = (]-\infty ، ٠] \cup [١ ، \infty[) \cap [-١ ، ٢]$.

$= [-١ ، ٠] \cup [١ ، ٢]$.

مثال (٦ − ٢٩)

أوجد مجموعة الحل للمتراجحة : $٢ < ٣س - ٧ < ٨$

الحل نفصل المتراجحة المزدوجة إلى متراجحتين غير مزدوجتين

$٢ < ٣س - ٧$ و $٣س - ٧ < ٨$

$٩ < ٣س$ | $٣س < ١٥$

$٣ < س$ | $س < ٥$

مجموعة الحل $=]٣ ، \infty[$ | مجموعة الحل $=]-\infty ، ٥[$.

∴ مجموعة حل المتراجحة هي : $]-\infty ، ٥[\cap]٣ ، \infty[=]٣ ، ٥[$.

مثال (٦ − ٣٠)

أوجد مجموعة الحل للمتراجحة : $٢ \le |٢س - ٣| \le ٨$.

الحل

$٢ \le |٢س - ٣| \le ٨$

إما $٢ \le ٢س - ٣ \le ٨$ أو $٢ \le ٣ - ٢س \le ٨$

$\Leftarrow ٥ \le ٢س \le ١١$ | $\Leftarrow -١ \le -٢س \le ٥$

$\Leftarrow \frac{٥}{٢} \le س \le \frac{١١}{٢}$ | $\Leftarrow \frac{١}{٢} \ge س \ge \frac{-٥}{٢}$.

$\Leftarrow$ مجموعة الحل $= [\frac{٥}{٢} ، \frac{١١}{٢}]$ (١) | $\Leftarrow$ مجموعة الحل $= [\frac{-٥}{٢} ، \frac{١}{٢}]$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

مجموعة حل المتراجحة هي : $[\frac{٥}{٢} ، \frac{١١}{٢}] \cup [\frac{-٥}{٢} ، \frac{١}{٢}]$.

عند فصل المتراجحة المزدوجة إلى متراجحتين غير مزدوجتين تكون مجموعة حل المتراجحة المزدوجة هي تقاطع مجموعتي حل المتراجحتين الفرديتين .

ولنأخذ المثال السابق : $٢ \le |٢س - ٣| \le ٨$

$\Leftarrow ٢ \le |٢س - ٣|$ وَ $|٢س - ٣| \le ٨$

$\Leftarrow ٢ \le ٢س - ٣$ أو $٢س - ٣ \le -٢$ | $\Leftarrow -٨ \le ٢س - ٣ \le ٨$

$\Leftarrow ٥ \le ٢س$ | $\Leftarrow ٢س \le ١$ | $\Leftarrow -٥ \le ٢س \le ١١$

$\Leftarrow \frac{٥}{٢} \le س$ | $\Leftarrow س \le \frac{١}{٢}$ | $\Leftarrow \frac{-٥}{٢} \le س \le \frac{١١}{٢}$.

مجموعة الحل $= [\frac{٥}{٢} ، \infty[$ (١) | مجموعة الحل $=]-\infty ، \frac{١}{٢}]$ (٢) | مجموعة الحل للمتراجحة =

من (١)،(٢) نجد أن مجموعة حل المتراجحة $=]-\infty ، \frac{١}{٢}] \cup [\frac{٥}{٢} ، \infty[$ (٣) | $[\frac{-٥}{٢} ، \frac{١١}{٢}]$ (٤)

من (٣)،(٤) نجد أن : $٢ \le |٢س - ٣| \le ٨ = ( ]-\infty ، \frac{١}{٢}] \cup [\frac{٥}{٢} ، \infty[ ) \cap [-\frac{٥}{٢} ، \frac{١١}{٢}]$

$= [-\frac{٥}{٢} ، \frac{١}{٢}] \cup [\frac{٥}{٢} ، \frac{١١}{٢}]$.

تمارين ومسائل (٦ : ٧)

[١] أعد تعريف كل من المقادير التالية : أ) $|س - ٢|$. ب) $|س^٢ - ٣س - ١٠|$.

جـ) $٢س - |س - ٥|$. ء) $|س - \frac{١}{٢}|$. هـ) $|٢س - ٧|$.

[٢] أوجد مجموعة الحل لكل من المتراجحات التالية :

أ) $|\frac{٣س}{٢} - ٥| \geq ١٢$. ب) $|\frac{٣س}{٢} - ٥| \leq ١٢$.

جـ) $|س - ٣| \leq ٤$. ء) $|س^٢ - س - ٣| \leq ٣$.

هـ) $س^٢ - |س| \geq ١٢$. و) $|س - ١| + |س| \geq ٣٢$.

[٣] لتكن $س \in [-١ ، ٢]$ أثبت أن :

أ) $١ \leq ٢س + ٣ \leq ٧$. ب) $\frac{٣}{٤} \leq \frac{٣}{س + ٢} \leq ٣$.

[٤] إذا كانت $ص = \frac{٣}{س + ٢}$ ، $٠ < س < ٤$ ، وكانت $أ < ص < ب$. أوجد قيمة كل من أ ، ب

٦ : ٨ حل نظام متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد

مثال (٦ − ٣١) أوجد مجموعة حل جملة المتراجحتين التاليتين :

$٥س + ٧ \geq ٠$ ، $\frac{٣ - س}{٥} > ٢س$.

الحل

$٥س + ٧ \geq ٠$

$\Leftarrow ٥س \geq -٧$

$\Leftarrow س \geq -\frac{٧}{٥}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= [-\frac{٧}{٥} ، \infty[$ (١)

$\frac{٣ - س}{٥} > ٢س$.

$\Leftarrow ٣ - س - ١٠س > ٠$.

$\Leftarrow -١١س > -٣$.

$\Leftarrow س < \frac{٣}{١١}$.

$\therefore$ مجموعة الحل $=]-\infty ، \frac{٣}{١١}[$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن مجموعة حل جملة المتراجحتين $= [-\frac{٧}{٥} ، \infty[\cap]-\infty ، \frac{٣}{١١}[$

$= [-\frac{٧}{٥} ، \frac{٣}{١١}[$.

مجموعة حل النظام (جملة المتراجحات) يساوى تقاطع مجموعات حل المتراجحات المكونة للنظام.

مثال (٦ – ٣٢) **أوجد** مجموعة حل جملة المتراجحتين التاليتين جبرياً ، ومثّل ذلك بيانياً :

$$٢\text{س} - ٥ \geq ٠ \quad ، \quad ٣\text{س} - ١١ < ٠ \quad .$$

الحــل

$٢\text{س} - ٥ \geq ٠$

$\Leftarrow \quad ٢\text{س} \geq ٥$

$\Leftarrow \quad \text{س} \geq \frac{٥}{٢}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= [\frac{٥}{٢} ، \infty[\quad (١)$

$٣\text{س} - ١١ < ٠ \quad .$

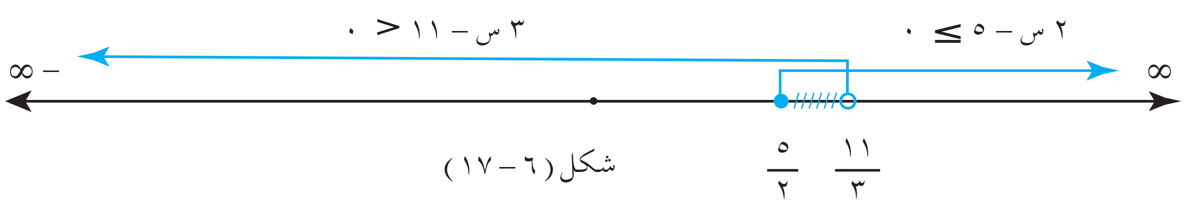
$٣\text{س} < ١١ \quad .$

$\text{س} < \frac{١١}{٣} \quad .$

$\therefore$ مجموعة الحل $=]-\infty ، \frac{١١}{٣}[\quad (٢)$

من (١) ، (٢) نجد أن مجموعة حل جملة المتراجحتين هي :

$$[\frac{٥}{٢} ، \infty[\cap]-\infty ، \frac{١١}{٣}[= [\frac{٥}{٢} ، \frac{١١}{٣}[\quad .$$



شكل (٦ – ١٧)

تمارين ومسائل (٦ : ٨)

أوجد مجموعة الحل لكل من جمل المتراجحات التالية:

أ) $٦\text{س} + ١ > ٥\text{س} \quad ، \quad ٩\text{س} - ٣ > ٧\text{س} + ١ \quad .$

ب) $\text{س} + ٣ > ٤ \quad ، \quad \text{س} - ٢ \leq ٢\text{س} + ٢ \quad .$

جـ) $٢\text{س} + ٣ < \text{س} + ٤ \quad ، \quad \text{س} - ١٢ \leq ٢\text{س} \quad .$

ء) $\frac{\text{س} - ٢}{٣} + \text{س} \leq ٠ \quad ، \quad \text{س} + ٧ > ٠ \quad .$

٦ : ٩ متراجحة الدرجة الأولى في متغيرين

تعرفت في الصف التاسع الأساسي على المعادلة الخطية : ا س + ب ص + جـ = ٠ حيث ا ، ب ، جـ ∈ ح ، ا ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ . وتعلمت كيف تمثل هذه المعادلة بخط مستقيم في مستوى الإحداثيات ، وقد رمز للمستقيم بالرمز $\overleftrightarrow{ل}$.

المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$: ا س + ب ص + جـ = ٠ يقسم المستوى الإحداثي إلى نصفي مستوى مفتوحين يكون على أحدهما ا س + ب ص + جـ > ٠ ، ويكون على الآخر ا س + ب ص + جـ < ٠ .

تعريف (٦ : ٤)

متراجحة الدرجة الأولى في متغيرين يمكن كتابتها بإحدى الصور التالية :

ا س + ب ص + جـ ≥ ٠ أو ا س + ب ص + جـ > ٠

أو ا س + ب ص + جـ ≤ ٠ أو ا س + ب ص + جـ < ٠ .

حيث ا ، ب ، جـ ∈ ح ، ا ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ .

ونسمي هذه الصور بالصور القياسية لمتراجحة الدرجة الأولى في متغيرين « طرفها الأيسر صفراً » .

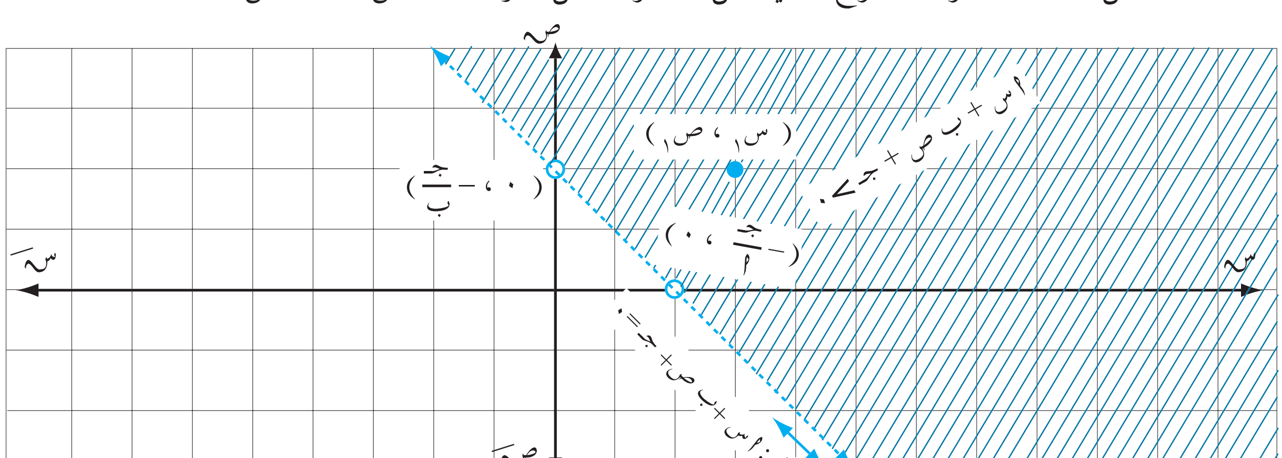
خطوات حل متراجحة الدرجة الأولى في متغيرين :

لحل المتراجحة : ا س + ب ص + جـ > ٠ نتبع الخطوات التالية :

١ – نرسم المستقيم : ا س + ب ص + جـ = ٠ بخط متقطع .

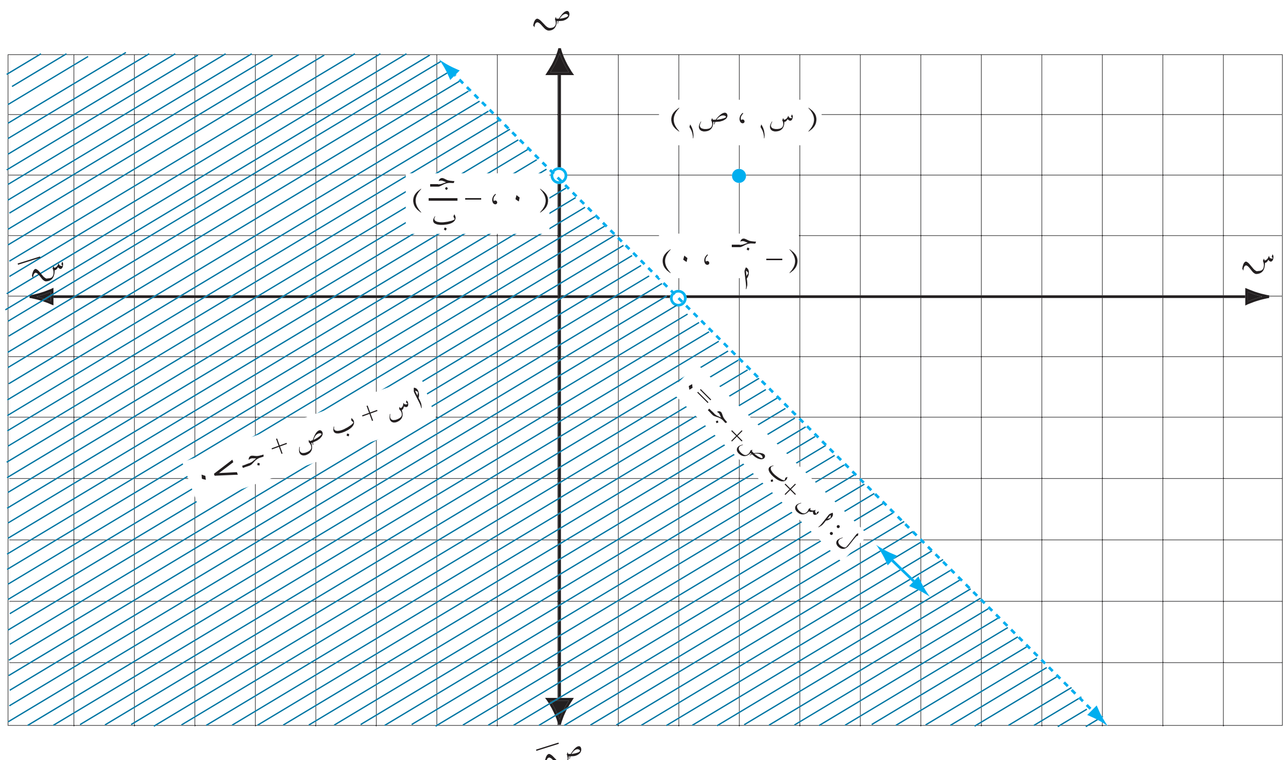
٢ – نختار نقطة ($س_١$ ، $ص_١$) من أحد نصفي المستويين الواقعين على جهتي المستقيم ل ونعوض بها في المتراجحة المعطاة ؛ فإذا كانت ا $س_١$ + ب $ص_١$ + جـ > ٠ تكون النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) واقعة في نصف المستوى الذي يمثل مجموعة حل المتراجحة : ا س + ب ص + جـ > ٠ ، ويسمى نصف مستوى مفتوحاً [لأن نقاط المستقيم ل لاتنتمي إليه] .

٣ – نظلل نصف المستوى المفتوح الذي يمثل مجموعة حل المتراجحة ا س + ب ص + جـ > ٠ .



شكل (٦ – ١٨)

٤ – إذا كانت : أ س$_1$ + ب ص$_1$ + جـ > ٠ . أي أن النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) لم تحقق المتراجحة أ س + ب ص + جـ < ٠ فهذا يعني أن النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) واقعة في نصف المستوى الذي لايمثل مجموعة الحل للمتراجحة : أ س + ب ص + جـ < ٠ ، ويكون نصف المستوى الآخر هو الممثل لمجموعة حل المتراجحة : أ س + ب ص + جـ > ٠ فنقوم بتظليله .



شكل (٦ – ١٩)

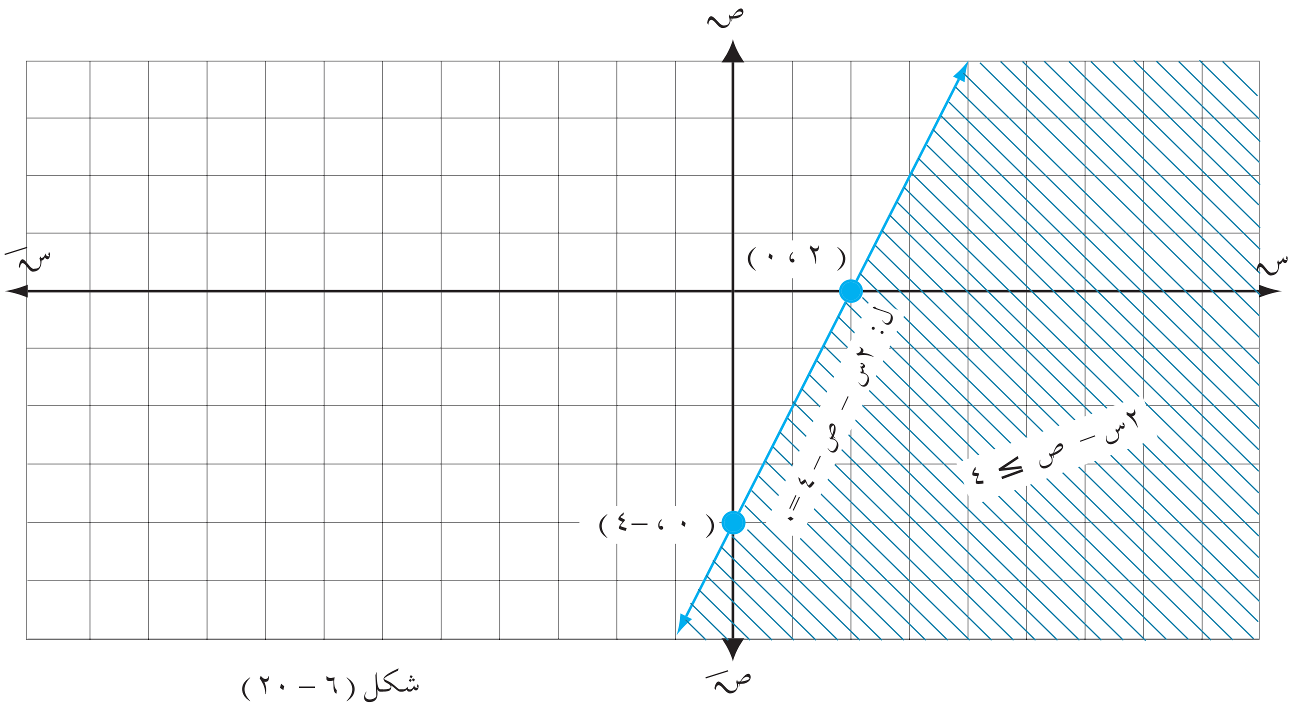
عندما يكون المطلوب إيجاد مجموعة الحل لمتراجحة من الشكل : أ س + ب ص + جـ ≥ ٠ أو أ س + ب ص + جـ ≤ ٠ فاننا نرسم المستقيم : أ س + ب ص + جـ = ٠ بخط متواصل وليس متقطع لأن المستقيم يعتبر جزء من مجموعة الحل ويكون نصف المستوى المغلق هو مجموعة الحل .

مثال (٦ – ٣٣) حل المتراجحة : ٢ س – ص ≥ ٤ .

الحل

٢ س – ص ≥ ٤ ⟺ ٢ س – ص – ٤ ≥ ٠ ، $\overleftrightarrow{ل}$: ٢ س – ص – ٤ = ٠ ولرسم المستقيم نوجد نقطتي تقاطعه مع كل من المحور السيني والمحور الصادي . نضع س = ٠ فنجد أن ص = –٤ ⟸ نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{ل}$ مع المحور الصادات هي (٠ ، –٤) . نضع ص = ٠ فنجد أن س = ٢ ⟸ نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{ل}$ مع محور السينات هي (٢ ، ٠)

نصل النقطتين بمستقيم غير متقطع ونمده من طرفيه إلى ما لانهاية(باستخدام الأسهم) فيكون هو المستقيم المطلوب . $\overleftrightarrow{ل}$: ٢ س – ص – ٤ = ٠ .



شكل (٦ – ٢٠)

نختار النقطة (٠ ، ٠) فنجد أن : ٢ (٠) – (٠) ≥ ٤ ⇐ ٠ ≥ ٤ وهذا غير ممكن

⇐ (٠ ، ٠) لا تحقق المتراجحة : ٢ س – ص ≥ ٤

⇐ (٠ ، ٠) ∌ مجموعة حل المتراجحة : ٢ س – ص ≥ ٤

نظلل نصف المستوى المغلق الذي لايحتوي على النقطة (٠ ، ٠) .

الذي يمثل مجموعة حل المتراجحة ٢ س – ص ≥ ٤ .

يفضل إختيار النقطة (٠ ، ٠) كنقطة اختبار للتحقق من نصف مستوى مجموعة الحل ، بشرط ألاَّ تقع على $\overleftrightarrow{ل}$.

مثال (٦ – ٣٤) حل المتراجحة : ٢ س + ٥ ص > ٥ .

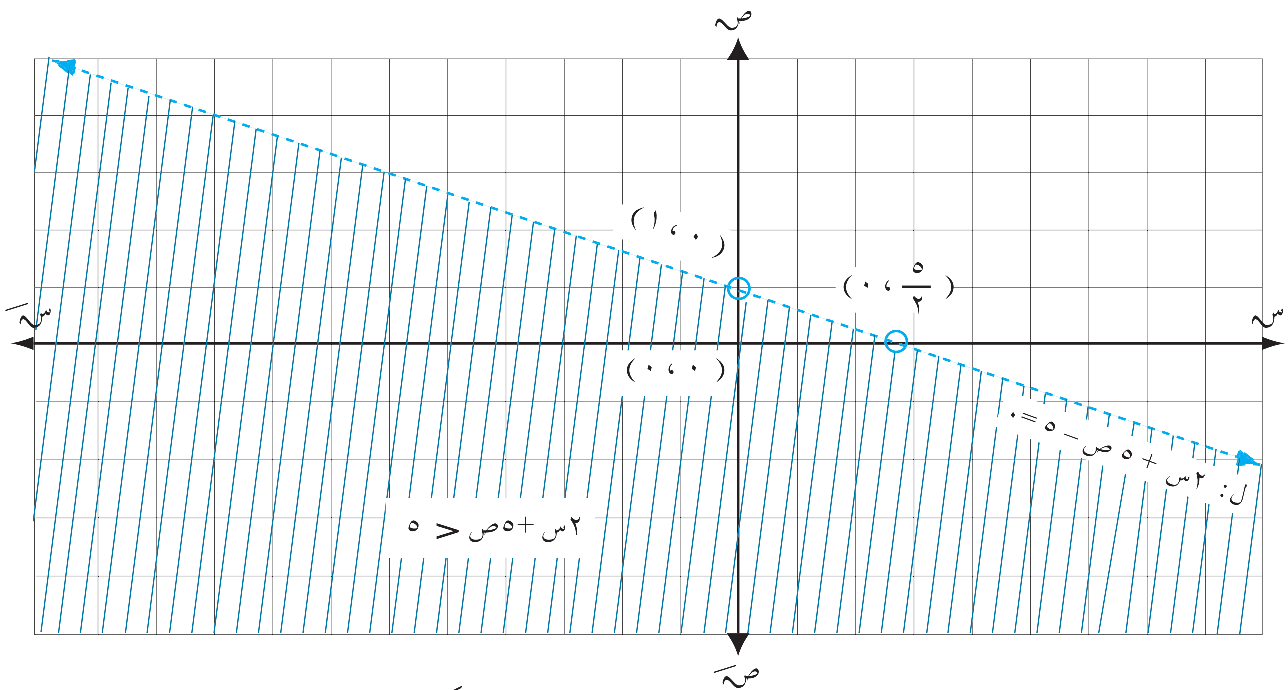
الحـــل

٢ س + ٥ ص > ٥ ⟺ ٢ س + ٥ ص – ٥ > ٠

$\overleftrightarrow{ل}$: ٢ س + ٥ ص – ٥ = ٠

نرسم المستقيم ل بإيجاد نقاط تقاطعه مع المحورين كما في الجدول :

س	٠	$\frac{٥}{٢}$
ص	١	٠
(س،ص)	(٠ ، ١)	($\frac{٥}{٢}$ ، ٠)



شكل (٦ – ٢١)

نختار النقطة (٠ ، ٠)

فنجد أن ٢ (٠) + ٥ (٠) > ٥ ⇐ (٠ ، ٠) ∈ نصف المستوى المفتوح (المظلل) .

∴ مجموعة الحل هي المنطقة المظللة .

تمارين ومسائل (٦ : ٩)

حل المتراجحات التالية :

١) س − ص > ٠ .

٢) ص > − $\frac{س}{٢}$.

٣) س + ص ≤ ٦ .

٤) ص ≥ ٢ .

٥) س > ١ .

٦) ٢ س + ٥ ص > −٥ .

٧) ص − ٢ س > −٣ .

٨) ص ≤ ٠ .

٩) $\frac{٣}{٢}$ س − $\frac{١١}{٥}$ ص > ١ .

١٠) س ≥ ٠ .

٦ : ١٠ حل نظام متراجحات الدرجة الأولى في متغيرين

قد يكون نظام متراجحات الدرجة الأولى في متغيرين يتكون من أكثر من متراجحتين ، ولكننا سنكتفي بنظام المتراجحتين من الدرجة الأولى في متغيرين فقط .

لحل نظام متراجحتين من الدرجة الأولى في متغيرين نقوم بحل كل متراجحة على حده في نظام إحداثي واحد، وتكون منطقة تقاطع مجموعتي حل المتراجحتين هي مجموعة حل نظام المتراجحتين المعطاة.

مثال (٦- ٣٥) حل نظام المتراجحتين: ٢ س − ٢ ص + ٤ > ٠ ، ٢ ص + س − ٤ ≤ ٠ .

الحـــل

أولاً : نحل المتراجحة ٢ س − ٢ ص + ٤ > ٠

⟸ $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$: ٢ س − ٢ ص + ٤ = ٠

⟸ س − ص + ٢ = ٠

نضع س = ٠ ⟸ ص = ٢ ،

نضع ص = ٠ ⟸ س = −٢ .

نحدد النقطتين (٠ ، ٢)، (−٢ ، ٠) ونصل بينهما بخط متقطع يمثل $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$: فنختار النقطة (٠ ، ٠) فنجد انها تحقق المتراجحة ، وتقع على نصف المستوى المفتوح (مجموعة حل المتراجحة) فنظلله ،

ثانياً : نحل المتراجحة ٢ ص + س − ٤ ≤ ٠

⟸ $\overleftrightarrow{\text{ل}}_2$: ٢ ص + س − ٤ = ٠

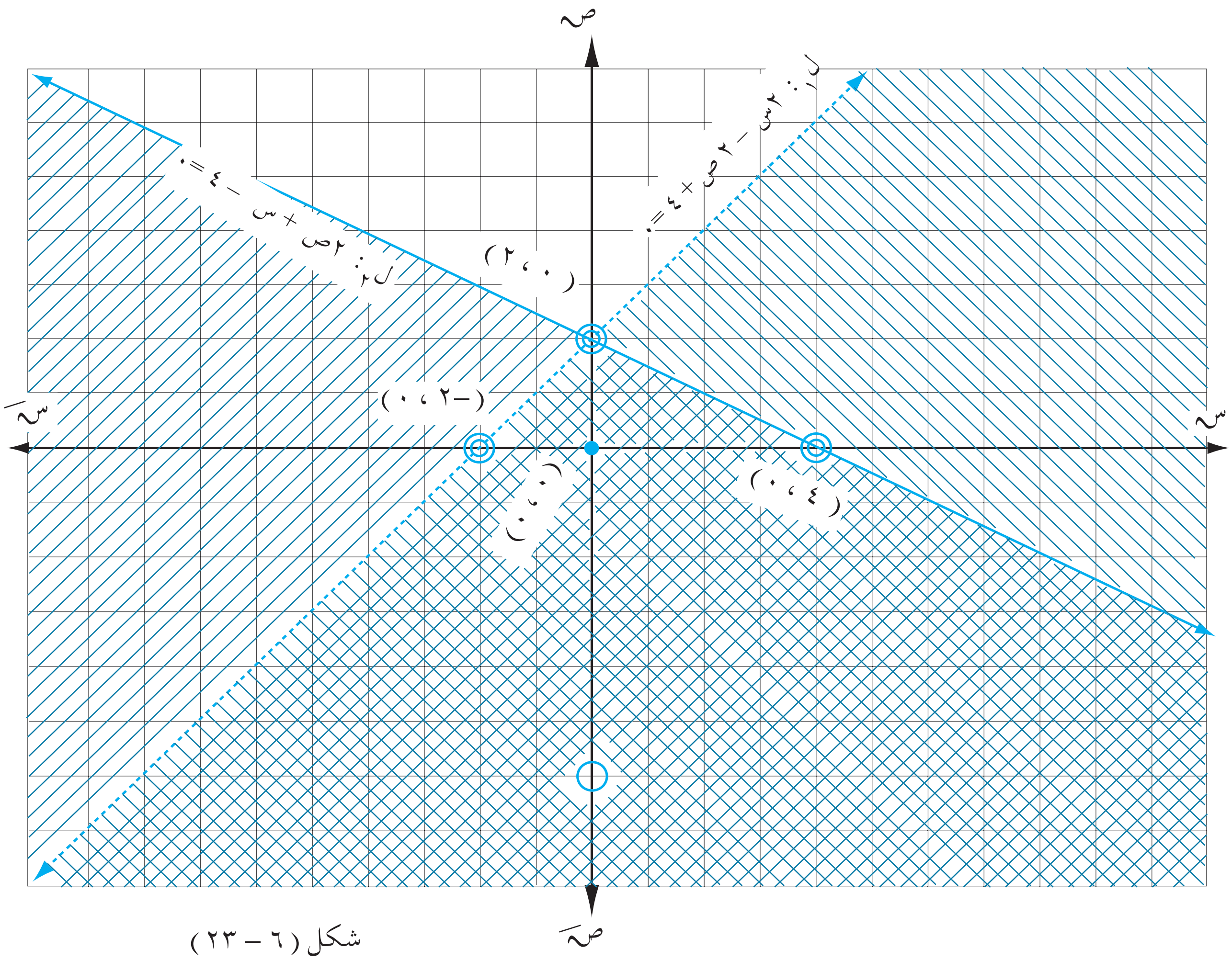
عندما س = ٠ ⟸ ص = ٢

⟸ النقطة الأولى = (٠ ، ٢) ،

عندما ص = ٠ ⟸ س = ٤

⟸ النقطة الثانية = (٤ ، ٠) .

بعد رسم $\overleftrightarrow{\text{ل}}_2$ نختار النقطة (٠ ، ٠) فنجد انها تحقق المتراجحة وتقع على نصف المستوى المغلق الذي يمثل مجموعة حل المتراجحة ٢ ص + س − ٤ ≤ ٠ ، فنظلله .



شكل (٦ – ٢٣)

فتكون المنطقة المشتركة في التظليل هي مجموعة حل جملة المتراجحتين .

نلاحظ أن الأجزاء المحيطة بمنطقة الحل من كل من $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ فنجد أن :

$\overleftrightarrow{ل_١}$ $\not\subset$ في مجموعة حل جملة المتراجحتين .

$\overleftrightarrow{ل_٢}$ $\subset$ في مجموعة حل جملة المتراجحتين .

تمارين ومسائل (٦ : ١٠)

حل جمل المتراجحات التالية :

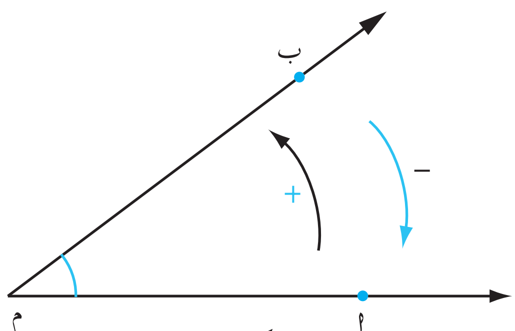
١) س + ٣ > ص ، ٢ س – ص < ٥ .

٢) ٥ س – ص + ٣ ≥ ٠ ، س + ٣ ص > ١ .

٣) س – ص > –٢ ، س ≤ ٠ .

٤) ٢ س + ص < ٥ ، ص > –١ .

٧ : ١ الزاوية الموجَّهة



شكل (٧ – ١)

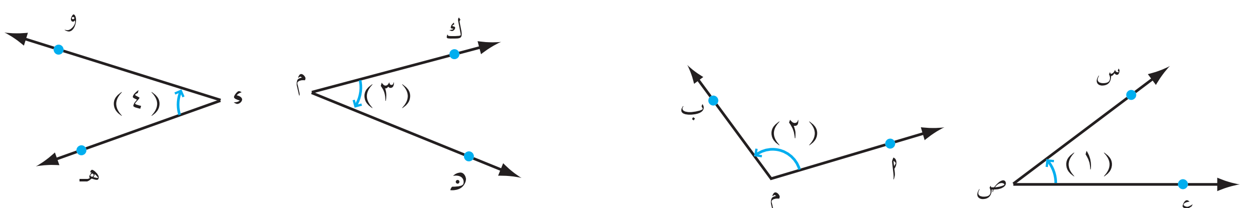
تذكر أن الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نقطة بدء مشتركة تسمى رأس الزاوية .

لاحظ الشكل (٧ – ١) تجد الشعاعين م أ ، م ب متقاطعين في مبدئهما المشترك (م) . والزاوية أ م ب المحددة بضلعها الابتدائي م أ وضلعها النهائي م ب ورأسها نقطة م . تسمى مثل هذه الزاوية زاوية موجَّهة ، ونكتب الزاوية الموجّهة بإحدى الطريقتين : (م أ ، م ب) أو ∡ أ م ب .

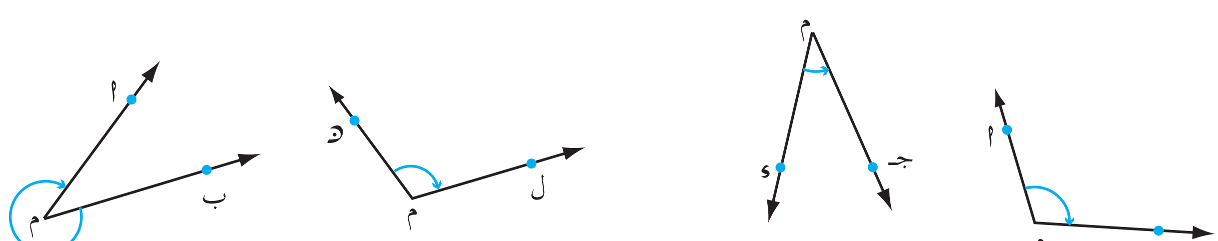
والسهم في [الشكل (٧–١)] يشير إلى اتجاه الدوران سواء أكان مع حركة عقارب الساعة أم عكسها .

يكون قياس الزاوية الموجّهة موجباً إذا كان اتجاه الدوران للضلع النهائي عكس حركة عقارب الساعة ، ويكون قياس الزاوية الموجّهة سالباً إذا كان اتجاه الدوران للضلع النهائي باتجاه حركة عقارب الساعة .

تلاحظ في [الشكل (٧ – ٢)] أن قياس كل من الزاويتين الموجّهتين (١) ، (٢) موجباً بينما يكون قياس كل من الزاويتين الموجّهتين (٣) ، (٤) سالباً .


شكل (٧ – ٢)

تدريب (٧–١) تأمل [الشكل (٧–٣)] تلاحظ أربع زوايا موجهة ، سمّ الضلع الابتدائي والضلع النهائي لكل منها ، وعين نوع إشارة قياس كل زاوية .

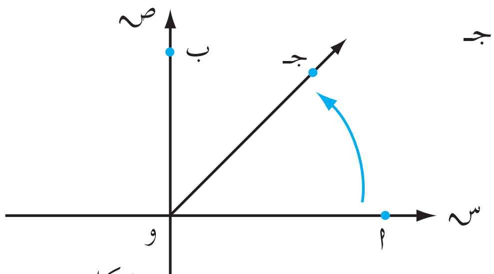

شكل (٧ – ٣)

الوضع القياسي للزاوية الموجّهة :

تعريف (٧ : ١)

يقال أن زاوية موجّهة في الوضع القياسي إذا كان رأسها نقطة الأصل ، وضلعها الابتدائي منطبقاً على محور السينات الموجب .

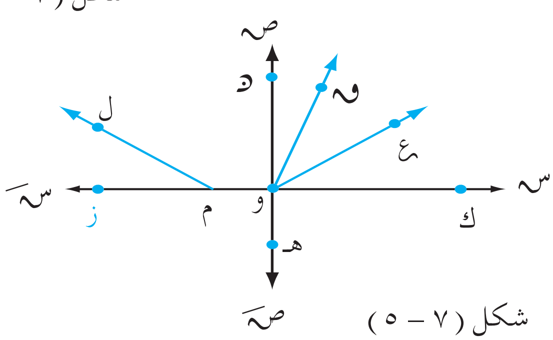
تأمل [الشكل (٧–٤)] تلاحظ أن : الزاوية الموجّهـــة ∡ ا و جـ في وضع قياسي بينما الزاوية الموجّهة ∡ ب و جـ ليست في وضع قياسي . لماذا ؟



شكل (٧ – ٤)

تدريب (٧–٢)

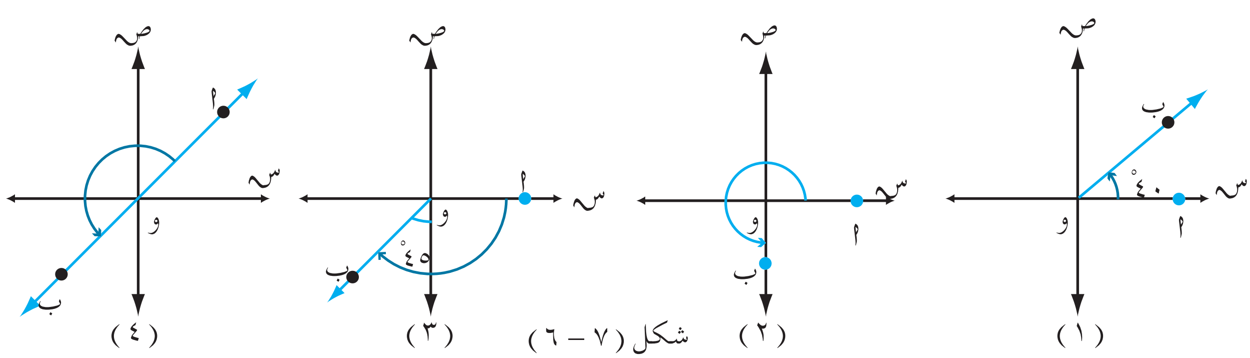
في الشـكل (٧ – ٥) : ســـمِّ ثــلاث زوايـا فــي وضع قياسي ، وثــلاث زوايـا فــي وضــع غير قياسي .



شكل (٧ – ٥)

مثال (٧ – ١)

في [الشكل(٧–٦)] : سمِّ كل زاوية وضلعها الابتدائي ، وضلعها النهائي ، وحدد قياسها ، ثم حدد ايًا من الزوايا الأربع في وضع قياسي .



شكل (٧ – ٦)

الحــل

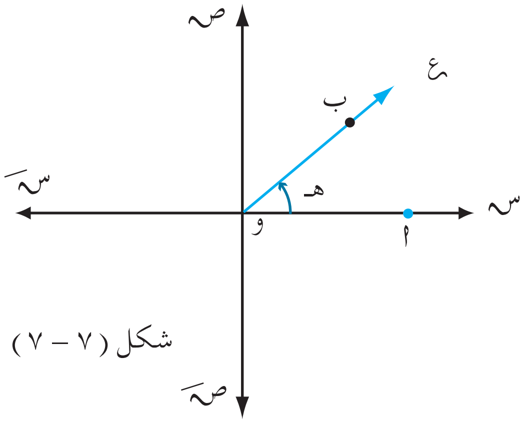
١) ∡ ا و ب زاوية موجهة، ضلعها الابتدائي و ا ، ضلعها النهائي و ب ، قياسها ٤٠ْ ، وهي في وضع قياسي .

٢) ∡ ا و ب زاوية موجّهة ،ضلعها الابتدائي و ا ،ضلعها النهائي و ب ، قياسها ٢٧٠ْ ، وهي في وضع قياسي .

٣) ∡ ا و ب زاوية موجّهة ،ضلعها الابتدائي و ا ،ضلعها النهائي و ب ، قياسها –١٣٥ْ ، وهي في وضع قياسي .

٤) ∡ ا و ب زاوية موجَّهة ، ضلعها الابتدائي و ا ، ضلعها النهائي و ب قياسها ١٨٠ْ ، وهي في وضع غير قياسي .

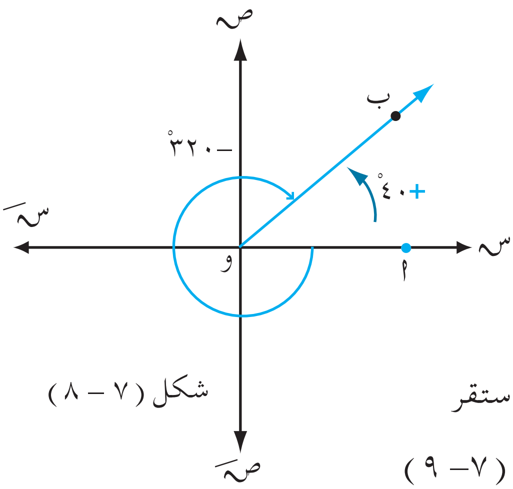
لتحديد قياس الزاوية ا و ب الموضحة في الشكل (٧–٧) تصور شعاعا نقطة بدايته (و) ، وينطبق على محور السينات و ا وهو (الضلع الابتدائي) بدأ يدور باتجاه معاكس لحركة عقارب الساعة حتى ينطبق على ضلعها الاخر و ب (الضلع النهائي) ، وقد قطع هـ من الدرجات ، عندئذ نقول أن : ق (∡ ا و ب) = هـ° .



شكل (٧ – ٧)

في [الشكل (٧–٨)] : تلاحظ أن :

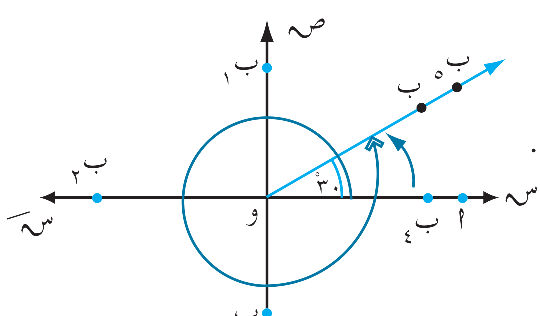
ق (∡ ا و ب) = ٤٠° (موجباً) بينما ق (∡ ا و ب) المنعكسة = –٣٢٠° وهذا القياس (سالباً)، وهناك قياسات أخرى للزاوية ا و ب إذ نتصور أن الشعاع بدأ دورته بعكس حركة عقارب الساعة من الوضع و ا واتخذ الوضع و ب ، ثم استمر في الدوران ماراً بالمواضع و $ب_١$ ، و $ب_٢$ ، و $ب_٣$ ، و $ب_٤$ حتى استقر في الوضع و $ب_٥$ وهو نفسه الوضع و ب . لاحظ الشكل (٧–٩)



شكل (٧ – ٨)

فيكون بذلك قد حدد القياسات للزاوية ٣٠° ، وماراً بالقياسات ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠° ، وفي حالة الوضع و $ب_٤$ نرى أن ق (∡ ا و $ب_٤$) = ٣٦٠° ، ونقول أن الشعاع قد دار دورة كاملة في حين لو استمر الشعاع بالدوران واتخذ الوضع و $ب_٥$ منطبقاً على الوضع و ب يكون بذلك قد حدد قياساً آخر للزاوية ا و ب بدلاً عن ٣٠° .

أي أن : ق (∡ ا و ب) = ٣٦٠° + ٣٠° = ٣٩٠° .

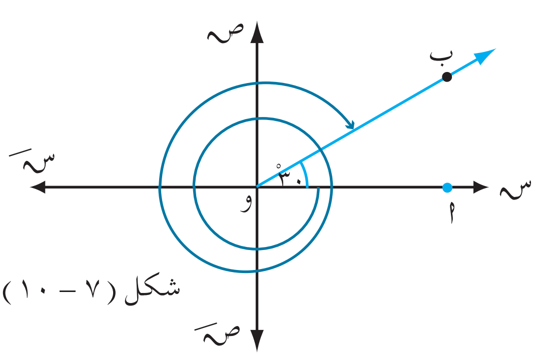


شكل (٧ – ٩)

وإذا دار الشعاع دورتين كاملتين ثم اتخذ الوضع و ب مرة ثالثة فإن :

ق (∡ ا و ب) = ٣٠° + ٢ × ٣٦٠° = ٧٥٠° .. وهكذا

إذا تصورنا أن الشعاع قد بدأ الدوران من الوضع و ا مع حركة دوران عقارب الساعة واتخذ و ب لاحظ الشكل (٧–١٠) فيكون ق (∡ ا و ب) المنعكسة = –٣٣٠° .



شكل (٧ – ١٠)

وأما إذا دار دورة كاملة مع حركة عقارب الساعة ، ثم استمر حتى اتخذ الوضع و ب فإن

$\mathcal{Q}$ ($\measuredangle$ أ و ب) المنعكسة = $-٣٣٠° - ١ \times ٣٦٠° = -٦٩٠°$ ... وهكذا .

مما سبق نستنتج أن : لكل زاوية موجّهة في الوضع القياسي عدداً غير منتهٍ من القياسات .

وعلى العموم فإن :

$\mathcal{Q}$ ($\measuredangle$ أ و ب) = (هـْ + د × ٣٦٠°) حيث د $\in$ صـ .

وإذا كانت د موجبة كان الدوران عكس دوران عقارب الساعة ، وإذا كانت د سالبة كان الدوران مع دوران عقارب الساعة ، ويسمى القياس هـْ القياس الأساسي للزاوية سواء كان موجباً أو سالباً .

مثال (٧ – ٢) أوجد القياس الأساسي للزاوية ٨٤٠°

الحــل

عدد الدورات الكاملة = $\frac{٨٤٠}{٣٦٠}$ = ٢ (دورتين باتجاه عكس عقارب الساعة) ، والباقي = ١٢٠° وهو القياس الأساسي للزاوية .

أي أن هـ = ١٢٠°

ويمكن حسابها حسب القانون بعد معرفة عدد الدورات كما يلي :

٨٤٠° = هـ + د × ٣٦٠°

٨٤٠° = هـ + ٢ × ٣٦٠°

٨٤٠° = هـ + ٧٢٠°

$\therefore$ هـ = ٨٤٠° – ٧٢٠° = ١٢٠°

مثال (٧ – ٣) أوجد القياس الأساسي للزاوية (– ١٤٧٠°).

الحــل

عدد الدورات الكاملة = $\frac{-١٤٧٠}{٣٦٠}$ = – ٤ (٤ دورات باتجاه حركة عقارب الساعة) ، والباقي = –٣٠°

وهو القياس الأساسي للزاوية

أي أن هـ = – ٣٠°

(تحقق من الحل باستخدام القانون) .

أوضاع الزوايا القياسية في النظام الإحداثي :

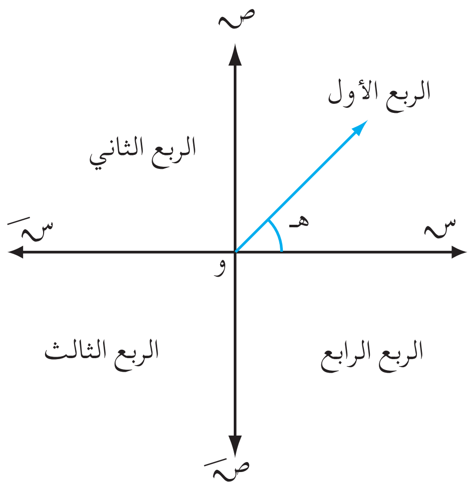
يوضح [الشكل (٧–١١)] الأرباع الأربعة لنظام إحداثي متعامد، لتكن لدينا زاوية في وضع قياسي قياسها هـ .

١ – إذا كانت الزاوية ٠° > هـ > ٩٠° فإنها تكون « زاوية حادة » وتقع في الربع الأول .

٢ – إذا كانت الزاوية ٩٠° > هـ > ١٨٠° فإنها تكون « زاوية منفرجة » وتقع في الربع الثاني .

٣ – إذا كانت الزاوية ١٨٠° > هـ > ٢٧٠° فإنها تكون « زاوية منعكسة » وتقع في الربع الثالث .

٤ – إذا كانت الزاوية ٢٧٠° > هـ > ٣٦٠° فإنها تكون « زاوية منعكسة » وتقع في الربع الرابع .



شكل (٧ – ١١)

أما إذا وقع الضلع النهائي للزاوية الموجّهة في وضع قياسي على أحد محوري الإحداثيات تسمى بالزاوية المحورية.

مثلاً هـ = ٠° زاوية محورية منطبقة على محور السينات الموجب، هـ = ٩٠° زاوية محورية منطبقة على محور الصادات الموجب.

، هـ = ١٨٠° زاوية محورية منطبقة على محور السينات السالب، هـ = ٢٧٠° زاوية محورية منطبقة على محور الصادات السالب.

هـ = ٣٦٠° زاوية محورية منطبقة على محور السينات الموجب .

مثال (٧ – ٤)

حدد في أي ربع أو على أي محور يقع الضلع النهائي لكل من الزوايا الموجّهة في الوضع القياسي ، ثم ارسم كل منها .

أ) ١٨٠° . ب) ٧٥° . جـ) ٢٥٠° . ء) ١٣٥° .

الحـــل

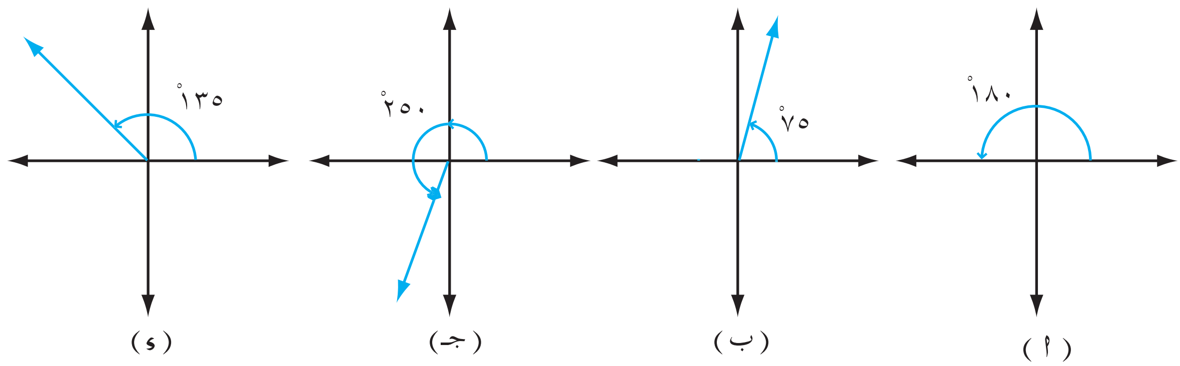
أ) ∵ الزاوية = ١٨٠° فإن الضلع النهائي للزاوية يقع على محور السينات السالب زاوية محورية .

ب) ∵ الزاوية = ٧٥° ، ٠° > ٧٥° > ٩٠° ، فإن الزاوية تقع في الربع الأول .

جـ) ∵ الزاوية = ٢٥٠° ، ١٨٠° > ٢٥٠° > ٢٧٠° ، فإن الزاوية تقع في الربع الثالث .

ء) ∵ الزاوية = ١٣٥° ، ٩٠° > ١٣٥° > ١٨٠° فإن الزاوية تقع في الربع الثاني .

وبذلك يوضح الشكل (٧–١٢) بالترتيب الوضع القياسي للزوايا الموجهة ١٨٠° ، ٧٥° ، ٢٥٠° ، ١٣٥° .



شكل (٧ – ١٢)

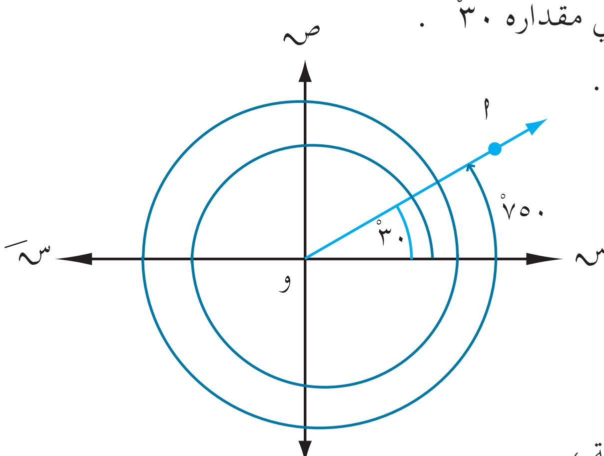
مثال (٧ – ٥) ارسم الزاويتين الموجهتين أ) ٧٥٠ْ . ب) –٤٩٥ْ . في الوضع القياسي مبينا، الربع الذي يقع فيه الضلع النهائي للزاويتين ، ثم أوجد القياس الأساسي لكل منها .

الحـــل

أ) عدد الدورات الكاملة = $\frac{٧٥٠ْ}{٣٦٠ْ}$ = ٢ (دورتين باتجاه عكس حركة عقارب الساعة) ، والباقي = ٣٠ْ .

∴ $\overleftarrow{\text{و أ}}$ دار دورتين حتى استقر على قياس أساسي مقداره ٣٠ْ .

∴ الزاوية ٧٥٠ْ موجبه ، وتقع في الربع الأول .



شكل (٧ – ١٣)

ب) عدد الدورات الكاملة = $\frac{-٤٩٥ْ}{٣٦٠ْ}$ = –١

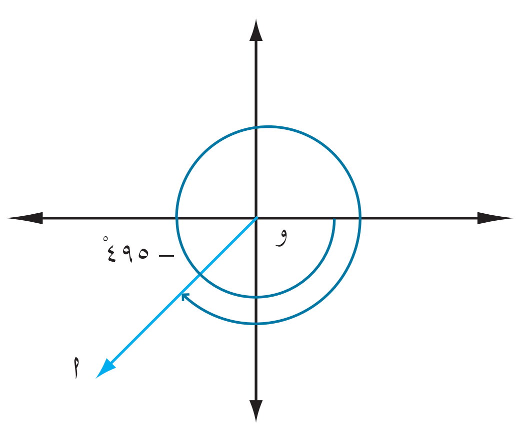
(دورة واحدة باتجاه حركة عقارب الساعة)

والباقي = –١٣٥ْ .

∵ $\overleftarrow{\text{و أ}}$ دار دورة كاملة مع حركة عقارب الساعة ،

حتى استقر على قياس أساسي مقداره –١٣٥ْ .

∴ الزاوية –٤٩٥ْ سالبة ، وتقع في الربع الثالث .



شكل (٧ – ١٤)

تمارين ومسائل (٧ : ١)

[١] تحقق من صحّة موقع الزوايا في وضعها القياسي باختيار الإجابة الصحيحة .

أ) الزاوية التي قياسها ٣٠٠ْ تقع في الربع ... [الأول – الثاني – الثالث – الرابع].

ب) الزاوية التي قياسها ٢٥٠ْ تقع في الربع ... [الأول – الثاني – الثالث – الرابع].

[٢]أوجد القياس الأساسي لكل من الزوايا الموجّهة في وضعها القياسي مبيناً الربع الذي تقع فيه ، ثم ارسمها :

أ) ٤٥ْ . ب) – ٣٠ْ . جـ) –٣٩٠ْ . ء) ٨٥٠ْ .

هـ) ١٩٢٠ْ . و) – ١١٢٥ْ . ي) ٢٩٨١ْ .

[٣] في أي ربع أو على أي محور يقع الضلع النهائي لكل من الزوايا التالية في الوضع القياسي ؟

أ) ٣١٥ْ . ب) – ٢٠٠ْ . جـ) –٥٦٠ْ . ء) –٤٨٠ْ .

هـ) ٢٥٠ْ . و) – ٨٥ْ . ي) ٢٦٠ْ . ح) ٠ْ .

[٤] في أي من الحالات الآتية تكون الزاوية الموجّهة ∢ س ص ع في وضع قياسي .

أ) س (٥ ، ٠) ، ص (٠ ، ٠) ، ع (٠ ، –٥) .

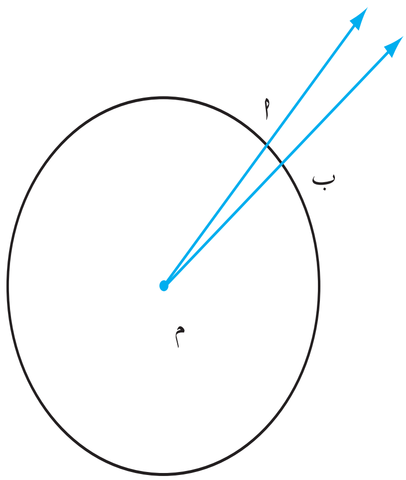
ب) س (٢ ، ٢) ، ص (٠ ، ٠) ، ع (٠ ، ٤) .

٧ : ٢ وحدات قياس الزوايا

هناك نظامان لقياس الزوايا يسمى الأول بالنظام (أو التقدير) الستيني ، ويسمى الآخر النظام (أو التقدير) الدائري .

أولاً – التقدير الستيني :

يلاحظ في الشكل (٧–١٥) دائرة مركزها « م » قسم محيطها إلى ٣٦٠ جزءً متساوياً ، والشعاعان $\overleftarrow{\text{م أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{م ب}}$ يحددان ضلعي $\measuredangle$ أ م ب بحيث يحصران قوساً طوله يساوي $\frac{١}{٣٦٠}$ من محيط الدائرة لتشكل الزاوية الناتجة عن هذا التقسيم وحدة قياس للنظام الستيني بدرجة ستينية واحدة يرمز لها بالرمز (١°) .



شكل (٧ – ١٥)

تعريف (٧ : ٢)

الدرجة الستينية هي قياس الزاوية المركزية التي يحصر ضلعاها قوساً طوله $\frac{١}{٣٦٠}$ ، ويرمز لها بالرمز (١°)

نقسم الدرجة إلى (٦٠) وحدة متساوية القياس كل منها تسمى دقيقة يرمز لها بالرمز ($١'$) ، وبتقسيم الدقيقة إلى (٦٠) وحدة متساوية القياس كل منها تسمى ثانية ويرمز لها بالرمز ($١''$) .

الدرجة = ٦٠ دقيقة ، أي أن : $١^{\circ} = ٦٠'$

الدقيقة = ٦٠ ثانية ، أي أن : $١' = ٦٠''$

ثانياً – التقدير الدائري :

إلى جانب التقدير الستيني لقياس الزوايا يوجد قياس آخر للأقواس والزوايا يسمى بالتقدير الدائري ووحدته هي الراديان .

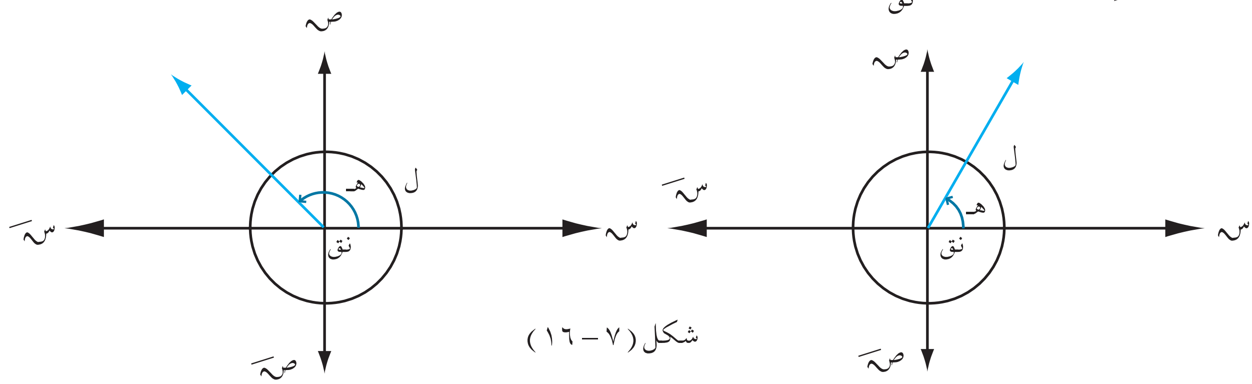
تعريف (٧ : ٣)

الراديان (الزاوية النصف قطرية) : هو قياس زاوية مركزية تقابل قوساً من دائرة طوله مساوٍ لنصف قطر تلك الدائرة ، ويرمز له بالرمز « ر » .

بمعنى أن الزاوية التي قياسها (واحد راديان) تقابل قوساً طوله (نق) .

والزاوية التي قياسها (٢ راديان) تقابل قوساً طوله (٢ نق) ، وبصورة عامة فإن الزاوية التي قياسها هـ ر تقابل قوساً طوله (هـ نق) وحدة طول ، ونستنتج أن طول القوس (ل) المقابل لزاوية مركزية قياسها (هـ ر) = هـ × نق ، وتكتب بالصورة : $\boxed{\text{ل = هـ × نق}}$.

وعليه فإن : $هـ = \frac{ل}{نق}$ ، $نق \neq صفر$.



شكل (٧ – ١٦)

العلاقة بين القياسين الستيني والدائري :

تعرف أن محيط الدائرة يساوي ٢ π نق ، وأن القياس الدائري للزاوية الناتجة عن دورة كاملة بالاتجاه الموجب تساوي $\frac{٢ \pi نق}{نق} = ٢ \pi ر$ ، وهذه الزاوية تساوي ٣٦٠° في التقدير الستيني .

$\therefore ٢ \pi ر = ٣٦٠°$ أو $\pi ر = ١٨٠°$.

ولذلك فإن :

$$١° = \frac{\pi}{١٨٠°} ، \quad ١ ر = \frac{١٨٠°}{\pi} .$$

قاعدة :

١ – عند التحويل من الدرجات إلى راديان تضرب في $\frac{\pi}{١٨٠°}$.

٢ – عند التحويل من الراديان إلى درجات تضرب في $\frac{١٨٠°}{\pi}$.

فعلى سبيل المثال :

التقدير الستيني	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
التقدير الدائري	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π

الجدول (٧ – ١)

مثال (٧ – ٦) أكمل الجدول (٧ – ٢) التالي :

التقدير الستيني	١٢٠°	– ١٥٠°		
التقدير الدائري			$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{-\pi}{٩}$

الجدول (٧ – ٢)

الحـــل

– لتحويل 120° إلى الراديان نضرب في $\frac{\pi}{180^\circ}$

$$120^\circ = 120^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2}{3}\pi \text{ ،}$$

– لتحويل -150° إلى الراديان .

$$\left(-150^\circ = -150^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = -\frac{5\pi}{6} \right)$$

– لتحويل $\frac{3}{2}\pi$ إلى الدرجات نضرب في $\frac{180^\circ}{\pi}$

$$\therefore \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$$

– لتحويل $-\frac{\pi}{9}$ إلى الدرجات :

$$\left(-\frac{\pi}{9} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -20^\circ \right) .$$

مثال (٧ – ٧) أوجد طول القوس الذي يقابل زاوية مركزية قياسها 60° في دائرة طول نصف قطرها ١٢سم . ($\pi \approx 3.14$) .

الحـــل

$$60^\circ = 60^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} .$$

ل = نق × هـ $= 12 \times \frac{\pi}{3} \approx 4 \times 3.14 \approx 12.56$ سم .

تمارين ومسائل (٧ : ٢)

[١] حوّل إلى الراديان كلاً مما يلي :

أ) 360° .　　ب) 90° .　　جـ) 45° .　　ء) 15° .

هـ) -120° .　　و) 300° .　　ز) -540° .　　ح) 0° .

ط) -255°

[٢] حوّل إلى الدرجات كلاً مما يلي :

أ) $\frac{\pi}{2}$ ر .　　ب) $-\frac{\pi}{4}$ ر .　　جـ) $\frac{5\pi}{6}$ ر .　　ء) 2.6π ر .

[٣] أكمل الجدول (٧ – ٣) التالي :

الزاوية بالتقدير الستيني	١٥٠°	٢٢٥°				٣٦٠°
الزاوية بالتقدير الدائري			$\frac{٤\pi}{٣}$ ر	$\frac{٧\pi}{٤}$ ر	$\frac{١١\pi}{٦}$ ر	

الجدول (٧ – ٣)

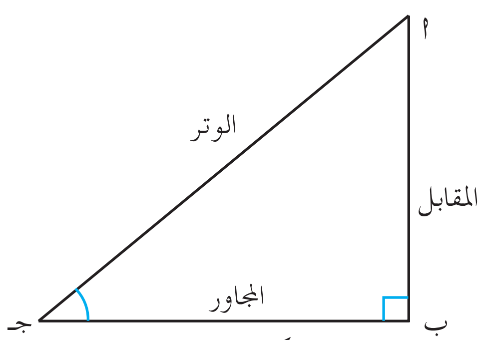
[٤] دائرة طول نصف قطرها يساوي ٢٠سم ، أوجد طول القوس الذي يقابل زاوية مركزية قياسها هـ ، حيث :

أ) هـ = $\frac{٣\pi}{٤}$. ب) هـ = $\frac{٥\pi}{٤}$. جـ) هـ = ١٤٠° . ء) هـ = ٦٠° .

٧ : ٣ النسب المثلثية

سابقاً تعرفت على النسب المثلثية التالية :

جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

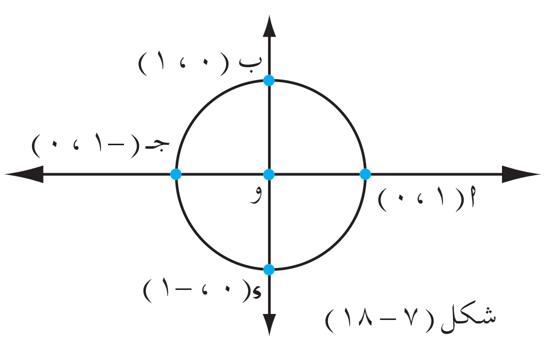


شكل (٧ – ١٧)

كما هو موضح في [الشكل (٧–١٧)] .

والآن يمكن أن نتعرف على النسب المثلثية التالية الأساسية (جا ، جتا ، ظا) من خلال دائرة الوحدة .

لاحظ [الشكل (٧– ١٨)] إذا رسمنا دائرة نصف قطرها وحدة واحدة مركزها نقطة الأصل (و) في المستوى الديكارتي المتعامد الإحداثيات، في هذه الحالة تسمى الدائرة بدائرة الوحدة حيث تقطع محور السينات في النقطتين أ (١ ، ٠) ، جـ (–١ ، ٠) ، وتقطع محور الصادات في النقطتين ب (٠ ، ١) ، ء (٠ ، –١) ، وفي ضوء ذلك نعرف دائرة الوحدة .

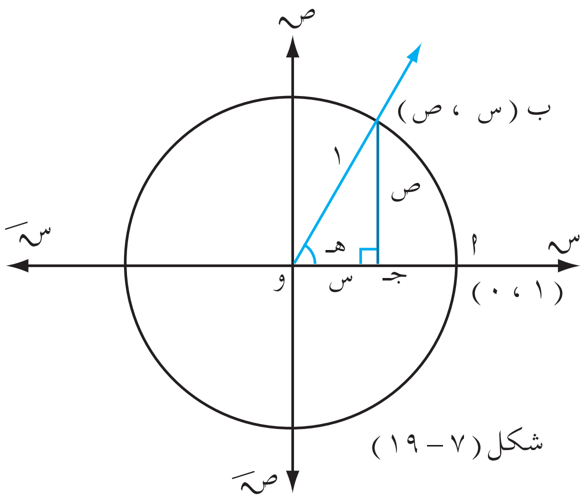


شكل (٧ – ١٨)

تعريف (٧ : ٤)

دائرة الوحدة : هي الدائرة التي مركزها نقطة الأصل (و) في نظام إحداثي متعامد وطول نصف قطرها يساوي وحدة الأطوال . أي | و أ | = ١ وحدة طول

إذا رسمنا في دائرة الوحدة في [الشكل (٧–١٩)] زاوية موجّهة مثل الزاوية هـ في الوضع القياسي حيث يقطع ضلعها الابتدائي الدائرة في النقطة أ (١ ، ٠) ويقطع ضلعها النهائي الدائرة في النقطة ب (س ، ص) .



شكل (٧ – ١٩)

من الشكل (٧ – ١٩) Δ ب جـ و قائم الزاوية

في جـ وبحسب نظرية فيثاغورث :

|و جـ|^{٢} + |ب جـ|^{٢} = |و ب|^{٢} ،

ولكن |و ب| = نق = ١ .

∴ |و جـ|^{٢} + |ب جـ|^{٢} = ١ ،

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ١ ــــ (١)

ونعـرف النسب المثلثيـة الأساسية لهذه الزاوية كالآتي :

تعريف (٧ : ٥)

إذا كانت ب (س ، ص) هي النقطة لزاوية قياسها هـ في دائرة الوحدة فإن :

١ – الإحداثي الصادي للنقطة ب يسمى جيب الزاوية ، ويكتب : جا هـ = ص

٢ – الإحداثي السيني للنقطة ب يسمى جيب تمام الزاوية ، ويكتب : جتا هـ = س .

٣ – ناتج قسمة الإحداثي الصادي على الإحداثي السيني للنقطة ب يسمى ظل الزاوية ويكتب :

ظاهـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$.

وبالتعويض عن س = جتا هـ ، ص = جاهـ في العلاقة (١) نحصل على :

جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ = ١ ــــ (٢) .

بالإضافة إلى النسب المثلثية الأساسية فإننا نعرف نسباً مثلثية أخرى للزاوية التي قياسها هـ على النحو التالي :

تعريف (٧ : ٦)

١ – قاطع تمام الراوية : **قتا هـ** = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$ ، **جا هـ ≠ ٠**

٢ – قاطع الزاوية : **قا هـ** = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ ، **جتا هـ ≠ ٠**

٣ – ظل تمام الزاوية : **ظتا هـ** = $\frac{١}{\text{ظا هـ}}$ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$ ، **جا هـ ≠ ٠**

وفي دائرة الوحدة نجد أن : **قتا هـ** = $\frac{١}{\text{ص}}$ ، **ص ≠ ٠**

قا هـ = $\frac{١}{\text{س}}$ ، **س ≠ ٠**

ظتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، **ص ≠ ٠**

مثال (٧ – ٨) إذا كان جا هـ $= \frac{٥}{١٣}$ ، جتاهـ $= \frac{١٢}{١٣}$ أوجد كلاً من ظاهـ ، قتاهـ ، قاهـ ، ظتا هـ .

الحـــل

$\because$ ظا هـ $= \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ $\therefore$ ظاهـ $= \frac{\frac{٥}{١٣}}{\frac{١٢}{١٣}} = \frac{٥}{١٣} \times \frac{١٣}{١٢} = \frac{٥}{١٢}$ ،

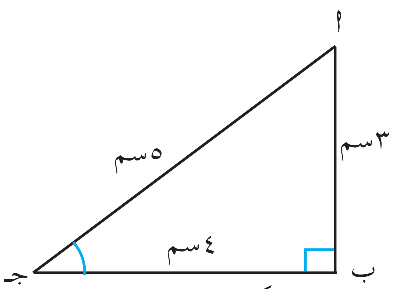
$\because$ قتا هـ $= \frac{١}{\text{جا هـ}}$ $\therefore$ قتاهـ $= \frac{١}{\frac{٥}{١٣}} = \frac{١٣}{٥}$ ،

$\because$ قا هـ $= \frac{١}{\text{جتا هـ}}$ $\therefore$ قاهـ $= \frac{١}{\frac{١٢}{١٣}} = \frac{١٣}{١٢}$ ،

$\because$ ظتا هـ $= \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$ $\therefore$ ظتاهـ $= \frac{١٢}{١٣} \div \frac{٥}{١٣} = \frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٣}{٥} = \frac{١٢}{٥}$

مثال (٧ – ٩) إذا كان جا جـ $= \frac{٣}{٥}$ حيث $°٠ <$ جـ $< °٩٠$ ، فأوجد قيمة جتا^٢ جـ – جا^{٢}جـ .

الحـــل



شكل (٧ – ٢٠)

نستخدم نظرية فيثاغورث

$|\text{أ ب}|^٢ + |\text{ب جـ}|^٢ = |\text{أ جـ}|^٢$.

$(٣)^٢ + |\text{ب جـ}|^٢ = (٥)^٢ \Leftarrow |\text{ب جـ}|^٢ = ٢٥ - ٩ = ١٦$

$\therefore |\text{ب جـ}| = \sqrt{١٦} = ٤$ ، $\therefore$ جتا جـ $= \frac{٤}{٥}$

$\therefore$ جتا^٢ جـ – جا^٢ جـ $= (\frac{٤}{٥})^٢ - (\frac{٣}{٥})^٢$.

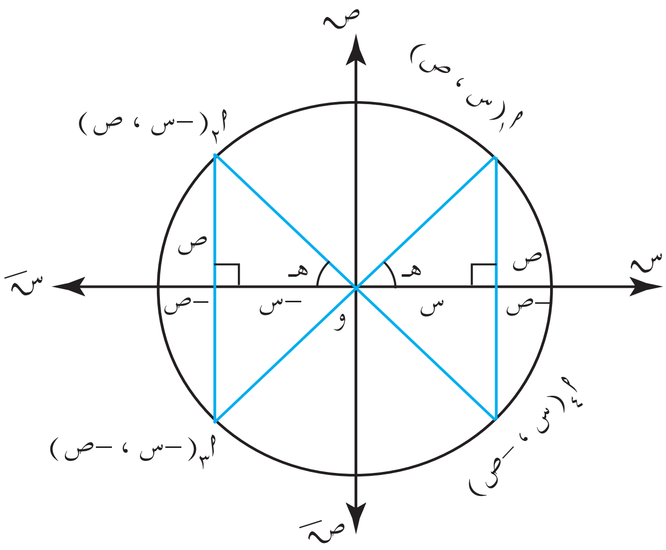
$= \frac{١٦}{٢٥} - \frac{٩}{٢٥} = \frac{٧}{٢٥}$.

حل آخر :

جا^٢ جـ + جتا^٢ جـ = ١ $\therefore$ جتا^٢ جـ = ١ – جا^٢ جـ

$= ١ - \frac{٩}{٢٥} = \frac{١٦}{٢٥}$

$\therefore$ جتا^٢ جـ – جا^٢ جـ $= \frac{١٦}{٢٥} - \frac{٩}{٢٥} = \frac{٧}{٢٥}$



شكل (٧ – ٢١)

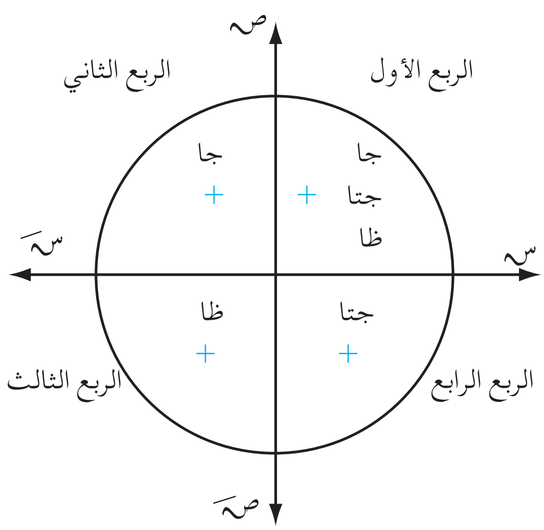
قاعدة الإشارات للنسب المثلثية :

إذا كانت جاهـ = ص ، جتا هـ = س ،

ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ (حيث س ≠ ٠)

لاحظ [الشكل (٧–٢١)] حيث أ (س ، ص) هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية هـ مع دائرة الوحدة ، لذلك فإشارة كل من جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ ، ظتاهـ تتبع إشارة كل من س ، ص .

أدرس الجدول (٧ – ٤) مستخدماً [الشكل (٧–٢٢)] :



شكل (٧ – ٢٢)

الربع	الفترة بالدرجات	قيم س ، ص	إشارة النسب المثلثية للزاوية هـ
الأول	[°٠ ، °٩٠]	س موجبة ، ص موجبة	(جا ، جتا ، ظا) موجبة
الثاني	]°٩٠ ، °١٨٠]	س سالبة ، ص موجبة	جا موجبة ، (جتا ، ظا) سالبة
الثالث	] °١٨٠ ، °٢٧٠]	س سالبة ، ص سالبة	(جا ، جتا) سالبة، ظا موجبة
الرابع	]°٢٧٠ ، °٣٦٠]	س موجبة ، ص سالبة	(جا، ظا) سالبة ،جتا موجبة

الجدول (٧ – ٤)

تدريب (٧–٣) أكمل الجدول (٧ – ٥) التالي :

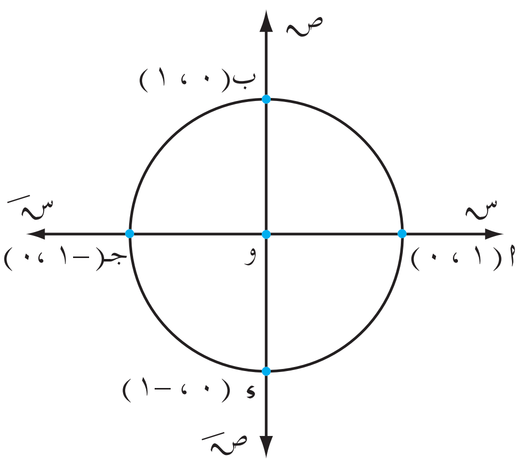
قياس الزاوية الموجهة	الربع الذي تقع فيه	إشــــارة		
		جا هـ	جتا هـ	ظا هـ
°٤٥				
°١١٠				
°٣٠٠				
°٢١٠				
°٧٥٠				

الجدول (٧ – ٥)

النسب المثلثية لبعض الزوايا المحورية:

تعلمت سابقاً إيجاد النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة مثل : ٣٠ْ ، ٦٠ْ ، ٤٥ْ ، ونتعرف الآن على بعض النسب المثلية للزوايا ٠ْ ، ٩٠ْ ، ١٨٠ْ ، ٢٧٠ْ ، ٣٦٠ْ باستخدام دائرة الوحدة .

نرسم دائرة الوحدة في النظام الإحداثي المتعامد [الشكل (٧–٢٣)] .



شكل (٧ – ٢٣)

نلاحظ أن دائرة الوحدة تقطع المحور السيني في النقطتين أ (١ ، ٠) ، جـ(–١ ، ٠) ، وتقطع المحور الصادي في النقطتين ب (٠ ، ١) ، ء (٠ ، –١) ، ومن خلال ذلك نستطيع تحديد بعض النسب المثلثية للزوايا : ٠ْ ، ٩٠ْ ، ١٨٠ْ ، ٢٧٠ْ ، ٣٦٠ْ باستخدام دائرة الوحدة .

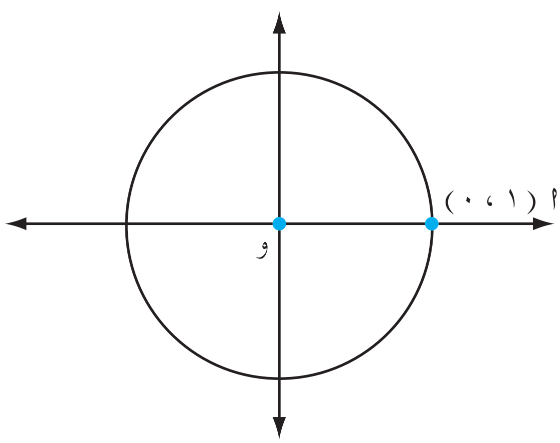
١ – انظر [الشكل (٧–٢٤)] أ هي النقطة (١ ، ٠) ،

ق (∡ أ و أ) = ٠ْ

∴ جا ٠ْ = ٠

جتا ٠ْ = ١

ظا ٠ْ = ٠ .



شكل (٧ – ٢٤)

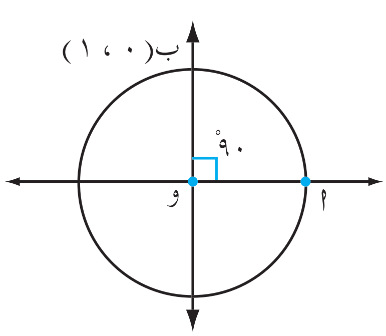
٢ – انظر [الشكل (٧–٢٥)] ب هي النقطة (٠ ، ١) ،

ق (∡ أ و ب) = ٩٠ْ .

∴ جا ٩٠ْ = ١

جتا ٩٠ْ = ٠

ظا ٩٠ْ = غير معرّف (لماذا ؟)



شكل (٧ – ٢٥)

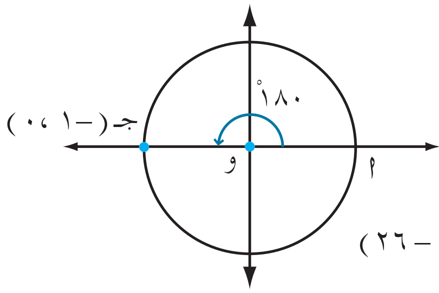
٣ – انظر [الشكل (٧–٢٦)] جـ هي النقطة (–١ ، ٠) ،

ق (∢ أ و جـ) = ١٨٠ْ

∴ جا ١٨٠ْ = ٠

جتا ١٨٠ْ = –١

ظا ١٨٠ْ = ٠



شكل (٧ – ٢٦)

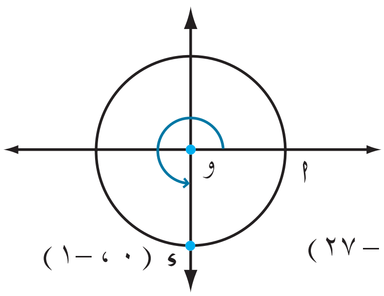
٤ – انظر [الشكل (٧–٢٧)] د هي النقطة (٠ ، –١)،

ق (∢ أ و ء) المنعكسة = ٢٧٠ْ

∴ جا ٢٧٠ْ = –١

جتا ٢٧٠ْ = ٠

ظا ٢٧٠ْ = غير معرّف (لماذا ؟) .



شكل (٧ – ٢٧)

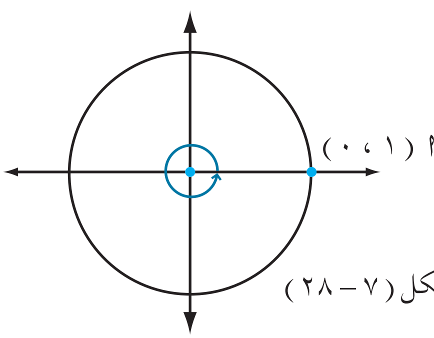
٥ – انظر [الشكل (٧–٢٨)] أ هي النقطة (١ ، ٠) .

ق (∢ أ و أ) = ٣٦٠ْ

∴ جا ٣٦٠ْ = ٠

جتا ٣٦٠ْ = ١

ظا ٣٦٠ْ = ٠



شكل (٧ – ٢٨)

تدريب (٧–٤) قارن النسب المثلثية للزاويتين اللتين قياس كل منهما ٠ْ ، ٣٦٠ْ . ماذا تستنتج ؟

يلخص الجدول (٧ – ٤) النسب المثلثية للزوايا الخاصة السابقة الذكر كالتالي :

النسب المثلثية الزاوية	جا هـ	جتا هـ	ظا هـ	قا هـ	قتا هـ	ظتا هـ
٠ْ	٠	١	٠	١	غير معرّفة	غير معرّفة
٩٠ْ	١	٠	غير معرّفة	غير معرّفة	١	٠
١٨٠ْ	٠	–١	٠	–١	غير معرّفة	غير معرّفة
٢٧٠ْ	–١	٠	غير معرّفة	غير معرّفة	–١	٠
٣٦٠ْ	٠	١	٠	١	غير معرّفة	غير معرّفة

الجدول (٧ – ٤)

مثال (٧ – ١٠) إذا كانت (س ، $\frac{٣}{٥}$) نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجّهة قياسها هـ مع دائرة الوحدة فأوجد جا هـ ، جتا هـ ، ظا هـ ، حيث $٠° < $ هـ $ < ٩٠°$

الحـــل

∵ (س ، $\frac{٣}{٥}$) نقطة على دائرة الوحدة . ، ∴ فهي تحقق معادلتها س^{٢} + ص^{٢} = ١

وبالتعويض عن قيمة ص يكون : س^{٢} + $(\frac{٣}{٥})^{٢}$ = ١ ، ومنها س^{٢} = $\frac{١٦}{٢٥}$.

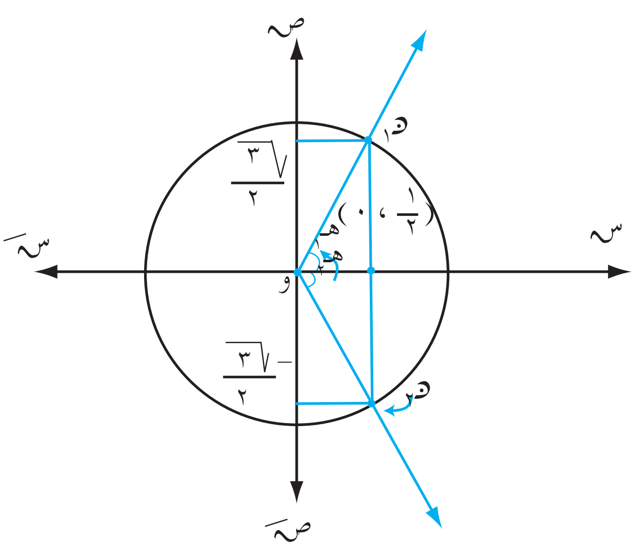
∴ س = ± $\frac{٤}{٥}$ ، ∵ $٠° < $ هـ $ < ٩٠°$

∴ الزاوية هـ واقعة في الربع الأول ، س ، ص موجبتان ، ومنه تكون : جا هـ = ص = $\frac{٣}{٥}$ ،

جتا هـ = س = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{\frac{٣}{٥}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{٤} = \frac{٣}{٤}$.

مثال (٧ – ١١) لتكن د$_{١}$ ($\frac{١}{٢}$ ، ص) هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية الموجّهة هـ$_{١}$ مع دائرة الوحدة . أثبت أنه توجد قيمتان لـ ص ، وبين الزاويتين على دائرة الوحدة، (حيث ٠ < هـ < ٢ π) ، ثم أوجد النسب المثلثية الست لكل من الزاويتين :

الحـــل



شكل (٧ – ٢٩)

∵ د$_{١}$ ($\frac{١}{٢}$ ، ص) تقع على دائرة الوحدة فهي

تحقق معادلتها س^{٢} + ص^{٢} = ١ فيكـــون :

$(\frac{١}{٢})^{٢}$ + ص^{٢} = ١ ، ومنها ص^{٢} = $\frac{٣}{٤}$

، ∴ ص = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ يوجد نقطتان على دائرة الوحدة هما :

د$_{١}$ ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) ، د$_{٢}$ ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$) انظر [الشكل (٧–٢٩)]

∴ يوجد قياسان للزاوية هما : هـ$_{١}$ ، هـ$_{٢}$ حيث هـ$_{١}$ ، هـ$_{٢}$ $\in$ [٠ ، ٢ π [

فيكون جاهـ$_1$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا هـ$_1$ = $\frac{١}{٢}$ ، ظاهـ$_1$ = $\sqrt{٣}$ (لماذا ؟)

∴ قتاهـ$_1$ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، قاهـ$_1$ = ٢ ، ظتاهـ$_1$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ .... (لماذا ؟)

جاهـ$_2$ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتاهـ$_2$ = $\frac{١}{٢}$ ، ظاهـ$_2$ = $-\sqrt{٣}$.

قتاهـ$_2$ = $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ ، قاهـ$_2$ = ٢ ، ظتاهـ$_2$ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ... (لماذا ؟)

مثال (٧-١٢) إذا كان جتاهـ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ، أوجد قيمة كل من جاهـ ، ظاهـ ، قاهـ ، قتاهـ ، ظتاهـ حيث أن ٩٠° < هـ < ١٨٠°

الحل

∵ جتا^٢ هـ + جا^٢ هـ = ١ ، جتاهـ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢$ + جا^{٢}هـ = ١ ⇐ جا^٢ هـ + $\frac{٣}{٤}$ = ١

∴ جا^٢ هـ = $\frac{١}{٤}$ ⇐ جاهـ = ± $\frac{١}{٢}$.

بما أن الجيب في الربع الثاني موجب .

∴ جاهـ = $\frac{١}{٢}$ ⇐ قتا هـ = $\frac{٢}{١}$ = ٢

وعليه ظاهـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{١}{٢}$ ÷ $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ∴ ظتاهـ = $-\sqrt{٣}$ ،

قاهـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$.

تمارين ومسائل (٧ : ٣)

[١] إذا كان جاهـ = $\frac{٣}{٥}$ ، ٩٠° < هـ < ١٨٠° ، فأوجد : جتاهـ ، ظاهـ ، قاهـ ، ظتاهـ .

[٢] إذا كانت جاهـ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ر < هـ < ٢ π ر ، فاحسب كلاً من جتا هـ ، ظاهـ ، ظتاهـ.

[٣] إذا كانت جتا هـ = $\frac{-٢}{٣}$ ، وكانت هـ في الربع الثاني . أوجد قيمة كلٍّ من جا هـ ، ظاهـ ، ظتاهـ.

[٤] أوجد قيمة كلٍّ من :

أ) جا ٣٠° جتا ٦٠° + ظا ٤٥°　　　ب) ظا^{٢} ٦٠° + ٤ جتا^{٢} ٤٥° + ٣ قتا^{٢} ٣٠°

جـ) ٢ جا ٤٥° + $\frac{١}{٢}$ قتا ٤٥°

[٥] إذا كان جتا س = $\frac{\text{جا } ٦٠°}{\text{جا } ٩٠°} - \frac{\text{جا } ٠°}{\text{جا } ٤٥°}$ فما قيمة س بفرض أنها زاوية حادة موجبة ؟

[٦] إذا كانت (س ، $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$) هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية الموجهة هـ مع دائرة الوحدة . فأوجد

جاهـ ، جتاهـ ، ظا هـ ، علماً بأن ١٨٠° < هـ < ٢٧٠° .

[٧] إذا كانت ($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ص) نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية الموجهة هـ مع دائرة الوحدة

حيث ١٨٠° < هـ < ٢٧٠° ، فأوجد جاهـ ، ظاهـ ، قتاهـ ، قا هـ .

[٨] أثبت أن النقطة ن ($-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$) تقع على دائرة الوحدة ، وإذا مر بالنقطة ن الضلع النهائي لزاوية موجّهة في وضع قياسي وكان قياسها ع . فأوجد قيمة جا ع ، جتا ع ، ظا ع .

٧ : ٤ العلاقات بين النسب المثلثية

تعرفنا سابقا على دائرة الوحدة وعلى العلاقة فيها س^{٢} + ص^{٢} = ١ ، ولاحظنا أن س = جتا هـ ، ص = جا هـ ، وبالتعويض في المعادلة السابقة عن قيمة س ، ص نحصل على :

$$\boxed{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ} + \text{جا}^{٢}\text{ هـ} = ١} \quad \text{———} (١)$$

وبقسمة طرفي المعادلة (١) على جتا^{٢} هـ نجد أن : $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}} + \frac{\text{جا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}} = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}$.

ومنه
$$\boxed{١ + \text{ظا}^{٢}\text{ هـ} = \text{قا}^{٢}\text{ هـ}} \quad \text{———} (٢)$$

وبقسمة طرفي المعادلة (١) على جا^{٢} هـ نجد أن :

$$\frac{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جا}^{٢}\text{ هـ}} + \frac{\text{جا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جا}^{٢}\text{ هـ}} = \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{ هـ}} .$$

ومنه
$$\boxed{\text{ظتا}^{٢}\text{ هـ} + ١ = \text{قتا}^{٢}\text{ هـ}} \quad \text{———} (٣)$$

ويمكن استخدام العلاقات المثلثية السابقة في إثبات صحة علاقات مثلثية أخرى .

مثال (٧ – ١٣) إذا كان قياس زاوية موجّهة تقع في الربع الرابع يساوي هـ ، وكان جتا هـ $= \frac{١٢}{١٣}$ ، فأوجد قيمة كلٍّ من : جا هـ ، قتا هـ ، ظا هـ .

الحــل

∵ جا^٢ هـ + جتا^٢ هـ = ١ ∴ جا^٢ هـ = ١ – جتا^٢ هـ .

جا^٢ هـ = ١ – $\left(\frac{١٢}{١٣}\right)^٢$ = ١ – $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ = $\frac{٢٥}{١٦٩}$.

∴ جا هـ = ± $\frac{٥}{١٣}$ ، ∵ الزاوية هـ تقع في الربع الرابع .

∴ جا هـ = – $\frac{٥}{١٣}$ ، ∵ قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$.

∴ قتا هـ = $\frac{١}{\frac{-٥}{١٣}}$ = $\frac{-١٣}{٥}$ ، ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{\frac{-٥}{١٣}}{\frac{١٢}{١٣}}$ = $\frac{-٥}{١٣} \times \frac{١٣}{١٢}$ = $\frac{-٥}{١٢}$.

مثال (٧ – ١٤) إذا كان ظا هـ = ٢ ، ١٨٠° < هـ < ٢٧٠° ، فأوجد كلاً من جتا هـ ، جا هـ ، قتا هـ .

الحــل

∵ ١ + ظا^٢ هـ = قا^٢ هـ .

∴ ١ + (٢)^٢ = قا^٢ هـ ⟸ ٥ = قا^٢ هـ ⟸ قا هـ = ± $\sqrt{٥}$

، حيث أن ١٨٠° < هـ < ٢٧٠° فالزاوية تقع في الربع الثالث .

∴ قا هـ = – $\sqrt{٥}$

، ∵ قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ ⟸ – $\sqrt{٥}$ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ ⟸ – $\sqrt{٥}$ × جتا هـ = ١

∴ جتا هـ = – $\frac{١}{\sqrt{٥}}$.

، ∵ ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ⟸ جا هـ = ظا هـ × جتا هـ .

∴ جا هـ = ٢ × – $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$.

∵ قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$. ⟸ قتا هـ = $\frac{١}{\frac{-٢}{\sqrt{٥}}}$

∴ قتا هـ = $\frac{-\sqrt{٥}}{٢}$.

مثال (٧ – ١٥) أثبت أن : $(\text{قتا هـ} - \text{ظتا هـ})^{٢} = \frac{\text{١} - \text{جتا هـ}}{\text{١} + \text{جتا هـ}}$

الحل

الطرف الأيمن $= (\text{قتا هـ} - \text{ظتا هـ})^{٢} = \left(\frac{\text{١}}{\text{جا هـ}} - \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}\right)^{٢} = \frac{(\text{١} - \text{جتا هـ})^{٢}}{\text{جا}^{٢}\text{ هـ}}$

$= \frac{(\text{١} - \text{جتا هـ})(\text{١} - \text{جتا هـ})}{\text{١} - \text{جتا}^{٢}\text{ هـ}} = \frac{(\cancel{\text{١} - \text{جتا هـ}})(\text{١} - \text{جتا هـ})}{(\cancel{\text{١} - \text{جتا هـ}})(\text{١} + \text{جتا هـ})} = \frac{\text{١} - \text{جتا هـ}}{\text{١} + \text{جتا هـ}} =$ الطرف الأيسر .

مثال (٧ – ١٦) أثبت أن : $(\text{ظا س} + \text{ظتا س})^{٢} = \text{قا}^{٢}\text{ س} + \text{قتا}^{٢}\text{ س}$.

الحل

الطرف الأيمن $= (\text{ظا س} + \text{ظتا س})^{٢} = \text{ظا}^{٢}\text{ س} + \text{ظتا}^{٢}\text{ س} + \text{٢ ظا س ظتا س}$

$= \text{ظا}^{٢}\text{ س} + \text{ظتا}^{٢}\text{ س} + \text{٢} \times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} = \text{ظا}^{٢}\text{ س} + \text{ظتا}^{٢}\text{ س} + \text{٢}$

$= (\text{١} + \text{ظا}^{٢}\text{ س}) + (\text{١} + \text{ظتا}^{٢}\text{ س}) = \text{قا}^{٢}\text{ س} + \text{قتا}^{٢}\text{ س} =$ الطرف الأيسر .

مثال (٧ – ١٧) برهن أن $\text{قا}^{٢}\text{ هـ} + \text{قتا}^{٢}\text{ هـ} = \frac{\text{١}}{\text{جا}^{٢}\text{ هـ جتا}^{٢}\text{ هـ}}$.

الحل

الطرف الأيمن $= \text{قا}^{٢}\text{ هـ} + \text{قتا}^{٢}\text{ هـ} = \frac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}} + \frac{\text{١}}{\text{جا}^{٢}\text{ هـ}} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{ هـ} + \text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ جا}^{٢}\text{ هـ}} = \frac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ جا}^{٢}\text{ هـ}} =$

الطرف الأيسر ، لأن $[\text{جا}^{٢}\text{هـ} + \text{جتا}^{٢}\text{هـ} = \text{١}]$.

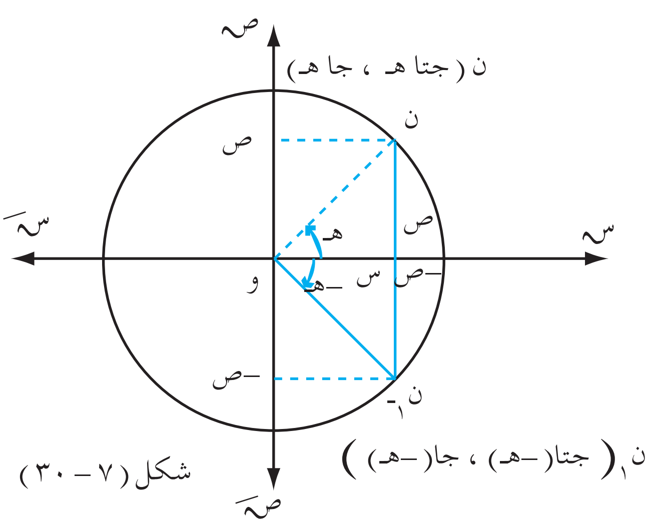
تأمل [الشكل (٧ – ٣٠)] .. ماذا تلاحظ ؟

قارن بين النقطتين ن ، ن$_{١}$ ... ماذا تستنتج .

تلاحظ أن : ن$_{١}$ (جتا (– هـ)، جا (–هـ)) هي نقطة لزاوية موجّهة قياسها (–هـ) ، وهي صورة للنقطة ن (جتا هـ ، جا هـ) بالإنعكاس في محور السينات فإذا كان (س، ص) إحداثيا ن فإن (س ، – ص) إحداثيا ن$_{١}$ ،

$\therefore$ جتا (–هـ) = س = جتا هـ

، جا (–هـ) = – ص = – جا هـ



شكل (٧ – ٣٠)

كذلك فإن :

$$\text{ظا}\,(-\text{هـ}) = \frac{\text{جا}\,(-\text{هـ})}{\text{جتا}\,(-\text{هـ})} = \frac{-\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = -\text{ظاهـ} \,.$$

$$\text{ظتا}\,(-\text{هـ}) = \frac{1}{\text{ظا}\,(-\text{هـ})} = - \frac{1}{\text{ظا هـ}} = -\text{ظتاهـ} \,.$$

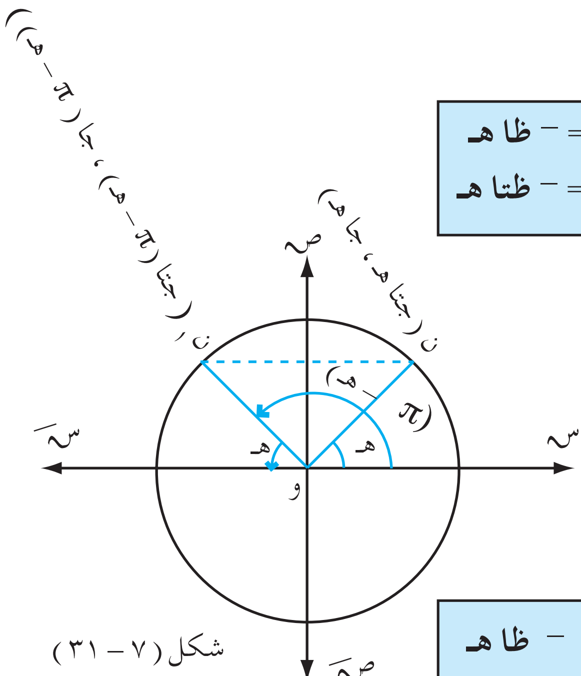
إذن :

$\text{جتا}\,(-\text{هـ}) = \text{جتا هـ}$ ،	$\text{ظا}\,(-\text{هـ}) = -\text{ظا هـ}$
$\text{جا}\,(-\text{هـ}) = -\text{جا هـ}$ ،	$\text{ظتا}\,(-\text{هـ}) = -\text{ظتا هـ}$

تدريب (٧–٥)

في [الشكل (٧ – ٣١)] قم بالمقارنة بين النقطتين ن ، ن_1 ، واستنتج العلاقات الممكنة ، ستحصل على أن :

$\text{جتا}\,(\pi - \text{هـ}) = -\text{جتا هـ}$ ،	$\text{ظا}\,(\pi - \text{هـ}) = -\text{ظا هـ}$
$\text{جا}\,(\pi - \text{هـ}) = \text{جا هـ}$ ،	$\text{ظتا}\,(\pi - \text{هـ}) = -\text{ظتا هـ}$

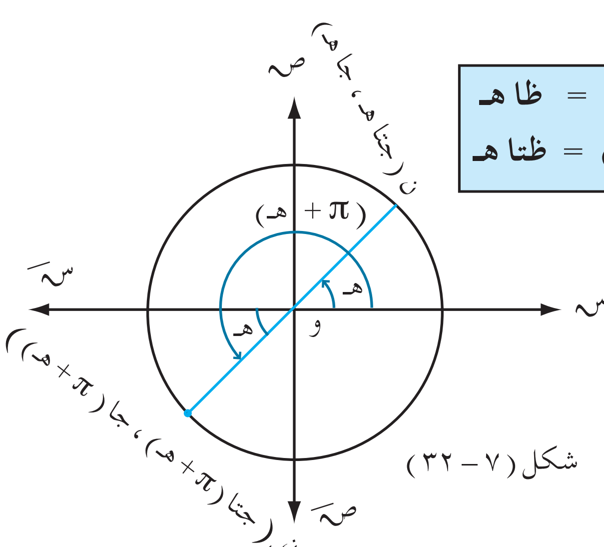


شكل (٧ – ٣١)

تدريب (٧–٦)

أعد النشاط في التدريب بالنسبة للشكل (٧ – ٣٢) تحصل على أن :

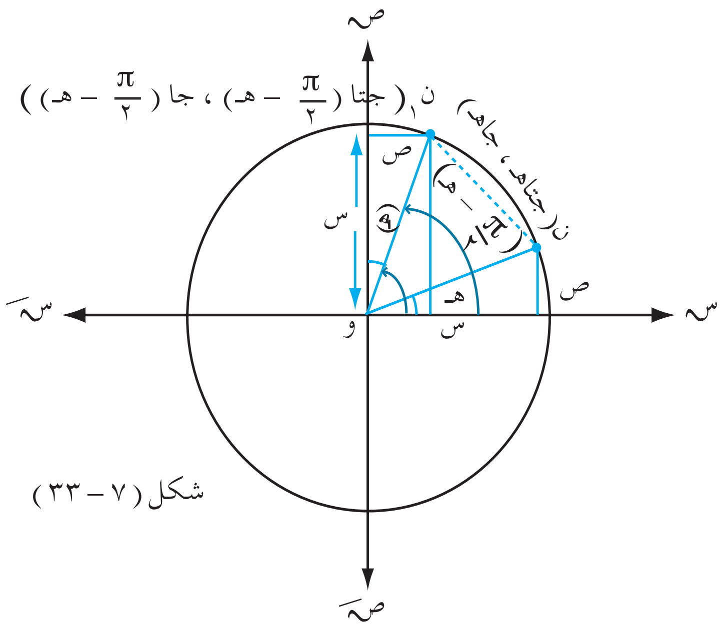
$\text{جتا}\,(\pi + \text{هـ}) = -\text{جتا هـ}$ ،	$\text{ظا}\,(\pi + \text{هـ}) = \text{ظا هـ}$
$\text{جا}\,(\pi + \text{هـ}) = -\text{جا هـ}$ ،	$\text{ظتا}\,(\pi + \text{هـ}) = \text{ظتا هـ}$



شكل (٧ – ٣٢)

تدريب (٧-٧)

أدرس الشكل (٧ – ٣٣) واستنتج العلاقات الممكنة .. تحصل على أن :



شكل (٧ – ٣٣)

جتا ($\frac{\pi}{2}$ – هـ) = س = جا هـ ، ظا ($\frac{\pi}{2}$ – هـ) = ظتا هـ

جا ($\frac{\pi}{2}$ – هـ) = ص = جتا هـ ، ظتا ($\frac{\pi}{2}$ – هـ) = ظا هـ

مثال (٧ – ١٨) أوجد كلاً من القيم التالية :

أ) جتا (–°٣٠) ب) ظا (–°٣٣٠)

جـ) جا ($\frac{5\pi}{6}$) ء) جا (°٢٤٠) هـ) جا $\frac{\pi}{6}$

الحـــل

أ) جتا (– °٣٠) = جتا °٣٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) ظا (–°٣٣٠) = ظا (–°٣٣٠ + °٣٦٠) = ظا °٣٠ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

جـ) جا $\frac{5\pi}{6}$ = جا (π – $\frac{\pi}{6}$) = جا $\frac{\pi}{6}$ = جا °٣٠ = $\frac{1}{2}$

ء) جا °٢٤٠ = جا (°١٨٠ + °٦٠) = – جا °٦٠ = – $\frac{\sqrt{3}}{2}$

هـ) جا $\frac{\pi}{6}$ = جا ($\frac{\pi}{2}$ – $\frac{\pi}{3}$) = جتا $\frac{\pi}{3}$ = $\frac{1}{2}$

مثال (٧ – ١٩)

إذا كان جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، فأوجد س علماً بأن : ٠° < س < ١٨٠° .

الحل

٠° < س < ١٨٠° ، جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ موجبة .

∴ الزاوية س لها قيمتان في الربع الأول والثاني .

في الربع الأول س = ٦٠° لأن جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

وفي الربع الثاني س = ١٨٠° – ٦٠° = ١٢٠° لأن جا ١٢٠° = جا (١٨٠° – ٦٠°) .

= جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

تمارين ومسائل (٧ : ٤)

[١] أوجد النسب المثلثية للزوايا الآتية : –٦٠° ، ٢١٠° ، –٣π ، $\frac{٧\pi}{٣}$ ، ١٣٥° .

[٢] أوجد بدلالة القياس هـ النسب المثلثية التالية : علماً بأن هـ قياس زاوية حادة موجبة .

أ) ظتا (١٨٠° – هـ) . ب) ظتا (١٨٠° + هـ) .

جـ) قا (١٨٠° – هـ) . ء) قتا (١٨٠° – هـ) .

[٣] اختصر لأبسط صورة :

$$\frac{\text{جا}\,(١٨٠° - \text{هـ})}{\text{ظا}\,(١٨٠° + \text{هـ})} \times \frac{\text{ظتا}\,(٩٠° - \text{هـ})}{\text{ظا}\,(٩٠° + \text{هـ})} \times \frac{\text{جتا}\,(٣٦٠° - \text{هـ})}{\text{جا}\,(-\text{هـ})}$$

[٤] أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي : جا ١٥٠° ، جتا ($\frac{٢\pi}{٣}$) ، جا ٢٤٠° ، (جتا $\frac{٥\pi}{٤}$) ، قتا ١٣٥° .

[٥] اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة : (قا^{٤} س – ظا^{٤} س) – ظا^{٢} س .

[٦] أثبت أن : جا^{٢} جـ قتا جـ + جتا^{٢} جـ قا جـ = جا جـ + جتا جـ .

[٧] أثبت أن : (جا أ + قتا أ)^{٢} + (جتا أ + قا أ)^{٢} = ظا^{٢} أ + ظتا^{٢} أ + ٧ .

[٨] برهن ما يلي :

أ) (قتا جـ – ظتا جـ)^{٢} = $\frac{١ - \text{جتا جـ}}{١ + \text{جتا جـ}}$. ب) $\sqrt{\frac{١ + \text{جتا جـ}}{١ - \text{جتا جـ}}} = \frac{\text{ظا جـ}}{\text{قا جـ} - ١}$.

٧ : ٥ استخدام الآلة الحاسبة في حساب المثلثات

يمكن بواسطة الآلات الحاسبة إجراء العمليات الحسابية والحصول على قيم ونتائج نسب مثلثية وتوفر الكثير من الجهد والوقت الذي ممكن أن يضيع عليك إذا استخدمت الجداول المثلثية . لاتنسى أن الآلات الحاسبة أنواع وكل نوع له طريقة خاصة في الاستعمال ، لكن يوجد مع كل آلة دليل الآلة (كتيب) يشرح طريقة استعمالها ، ومع ذلك هناك سمات مشتركة بين الآلات .

قبل استخدام الآلة نفسها : عليك أولاً أن تتعرف على بعض المفاتيح التي تمثل الرموز اللاتينية للنسب المثلثية في الالآت الحاسبة .

Sin مفتاح « جا » ، (Sin) اختصاراً لكلمة (Sine) التي تعني « جيب ».

Cos مفتاح « جتا » ، (Cos) اختصاراً لكلمة (Cosine) التي تعني « جيب تمام » .

tan مفتاح « ظا » ، (tan) اختصاراً لكلمة (tangent) التي تعني « ظل » .

وعند الضغط على أي من هذه المفاتيح الثلاثة بعد إدخال عدد نحصل على قيمة النسبة المثلثية المعنية .

O,,, يستخدم لإدخال أجزاء الدرجة (الدقيقة – الثانية)وللتحويل من دائري إلى ستيني وبالعكس .

Inv يستخدم لمعرفة قياس الزاوية التي عُلمتْ إحدى نسبها المثلثية وله وظائف أخرى .

I\X مفتاح نظير أو مقلوب عدد ≠ صفر .

ab\C d\CI يستخدم للكسر ، والعدد الكسري .

فمثلاً : لإدخال ٤٥ً ١٥َ ٣٥ْ إلى الآلة الحاسبة نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي من اليسار إلى اليمين.

→
3 5 0,,, 1 5 0,,, 4 5 0,,,

فيظهر على الشاشة : 35 15 45

ولإظهار قياس الزاوية بالصورة المطلوبة نستخدم المفتاحين الآتيين على التوالي : Inv 0,,,

35 15 45

تدريب (٧–٨) أدخل إلى الحاسبة قياس كل من الزاويتين : أ) ٥٠َ ٤٠ْ . ب) ٣٥ً ١٥َ ٤٢ْ .

١ – إيجاد النسب المثلثية لزاوية قياسها معلوم :

نستخدم الحاسبــة في إيجـاد النســب المثلثية (جا ، جتا ، ظا) إذا علم قياس الزاوية .

ملاحظة : « عندما يكون قياس الزاوية بالدرجات وأجزائها نجعل الحاسبة على الوضع DEG .

مثال (٧ – ٢٠) أوجد جا ٧٠ْ .

الحــل

لإيجاد جا ٧٠ْ نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي : فيظهر على الشاشة 0,93969 Sin 0 7 ،

نقرب النواتج لأربعة أرقام عشرية . ∴ جا ٧٠ْ ≈ ٠,٩٣٩٦ .

مثال (٧ – ٢١) أوجد ما يأتي : ا) ظا ٢٢ْ ، ب) جا ٤٥,٥ْ .

جـ) قا ٣٠َ ٤٥ْ .

الحــل

ا) لإيجاد ظا ٢٢ْ نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي : $\boxed{\text{tan}}\ \boxed{2}\ \boxed{2}$.

فيظهر على الشاشة : 0,4040

∴ ظا ٢٢ْ = ٠,٤٠٤٠

ب) لإيجاد جا ٤٥,٥ْ نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

$\boxed{\text{Sin}}\ \boxed{5}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{5}\ \boxed{4}$

فيظهر على الشاشة : 0,7133 ∴ جا ٤٥,٥ْ = ٠,٧١٣٣

جـ) لإيجاد قا ٣٠َ ٤٥ْ نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

$\boxed{\text{I}\backslash\text{X}}\ \boxed{\text{Cos}}\ \boxed{0,,,}\ \boxed{0}\ \boxed{3}\ \boxed{0,,,}\ \boxed{5}\ \boxed{4}$

فيظهر على الشاشة 1,4267 إذن قا ٣٠َ ٤٥ْ = ١,٤٢٧

مثال (٧ – ٢٢) إذا كان ٠ْ ≥ سْ ≥ ٩٠ْ ، أوجد قيمة س فيما يأتي :

ا) ظا س = $\sqrt{٣}$ ب) جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جـ) قتا س = $\sqrt{٢}$.

الحــل

ا) لإيجاد قيمة س نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

$\boxed{\text{tan}}\ \boxed{\text{Inv}}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{3}$

فيظهر على الشاشة 60 إذن س = ٦٠ْ .

ب) لإيجاد قيمة س نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

$\boxed{\text{Cos}}\ \boxed{\text{inv}}\ \boxed{=}\ \boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{3}$

فيظهر على الشاشة 30 إذن س = ٣٠ْ .

جـ) لإيجاد قيمة س نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

$\boxed{\text{Sin}}\ \boxed{\text{Inv}}\ \boxed{\text{I}\backslash\text{X}}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{2}$

فيظهر على الشاشة 45 إذن س = ٤٥ْ .

تمارين ومسائل (٧ : ٥)

[١] باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كلٍّ من :

أ) جا ١٥ْ ٤٥َ .   ب) جتا ١٥ْ ٤٥َ .   جـ) ظا ١١٥ْ ٣٠َ ٥٠ً .

د) جا (–٢٢٥ْ) .   هـ) قتا ٣٢٫٥ْ .

[٢] أكمل الجدول (٧ – ٥) مستعيناً بالآلة الحاسبة :

س	جا س	جتا س	ظا س
صفر	صفر	......	......
١٣٠ْ	......	......	– ١٫١٩١٨
٢٥٠ْ	......	......	......
– ٧٠٠ْ	......	......	......

[٣] أوجد قيمة كل مقدار مما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة :

أ) جا ٤٠ْ + ٢ – ٣ جتا ٦٠ْ .   ب) ٣ جتا ٣٣٠ْ ظا ٢٤٠ْ + ٢جتا ١٣٥ْ ظا ٤٥ْ جا ٩٠ْ.

جـ) جا (– ٦٠ْ) ظا ٢١٠ْ + جا ٧٢٠ْ .

[٤] اكتب العملية ، ثم أوجد الناتج وفق استخدام مفاتيح آلة حاسبة على النحو التالي :

$\boxed{\text{tan}}$ $\boxed{0,,,}$ $\boxed{5}$ $\boxed{4}$ $\boxed{0,,,}$ $\boxed{0}$ $\boxed{8}$

[٥] إذا كانت ٠ْ ≤ س ≤ ١٨٠ْ . أوجد قيمة س لكل مما يأتي :

أ) جا س = ٠٫٢٥٦٠ .   ب) قا س = – ٢٫٥٧١٩ .

جـ) ظتا س = ٠٫٤١٤٢ .

٧ : ٦ حل المثلث القائم

تعرفت سابقاً على العلاقات العددية في مثلث قائم الزاوية ، كما تعرفت على مبرهنة فيثاغورث « مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين » .

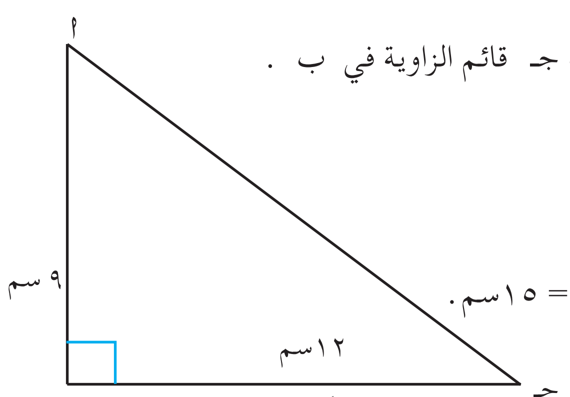
تدريب (٧–٩)

في [الشكل (٧–٣٤)] المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب .

| أ ب | = ٩سم ،

| ب جـ | = ١٢سم ، أوجد | أ جـ | .

لاشك أنك حصلت على أن | أ جـ | = ١٥سم .



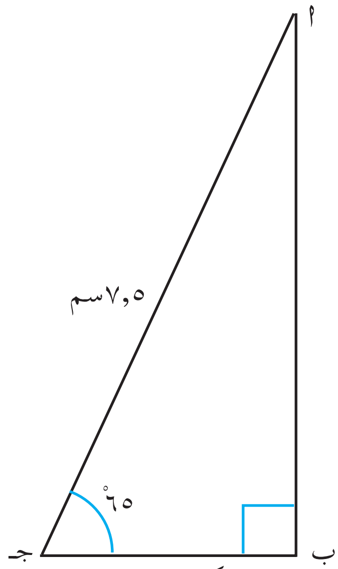
شكل (٧ – ٣٤)

وفي هذا البند ندرس حل المثلث القائم الزاوية ، ونعني بحل المثلث تعيين عناصره السته (٣ أضلاع ، ٣ زوايا، وتعطى عادة ثلاثة عناصر أحدها على الأقل طول ضلع ، ويلزم تعيين العناصر الثلاثة الأخرى .

وسنأخذ في هذا البند حالتين .

أولاً – حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طول ضلع وقياس زاوية .

مثال (٧ – ٢٣) حل المثلث ا ب جـ القائم الزاوية في ب ، والذي فيه ق (∠ جـ) = ٦٥° ، | ا جـ | = ٧,٥سم .



شكل (٧ – ٣٥)

الحـــل

∵ ق (∠ جـ) = ٦٥° .

∴ ق (∠ ا) = ٩٠° – ٦٥° = ٢٥° .

$\frac{|ا ب|}{|ا جـ|}$ = جا جـ . ، | ا جـ | = ٧,٥ سم .

∴ $\frac{|ا ب|}{٧,٥}$ = جا ٦٥° .

ومنه | ا ب | = ٧,٥ جا ٦٥° (باستخدام الآلة الحاسبة ، والتقريب لأربعة أرقام عشرية) .

≈ ٧,٥ × ٠,٩٠٦٣ .

≈ ٦,٨ سم .

$\frac{|ب جـ|}{|ا جـ|}$ = جتا جـ . $\frac{|ب جـ|}{٧,٥}$ = جتا ٦٥° .

∴ | ب جـ | = ٧,٥ جتا ٦٥° = ٧,٥ × ٠,٤٢٢٦ ≈ ٣,٢ سم .

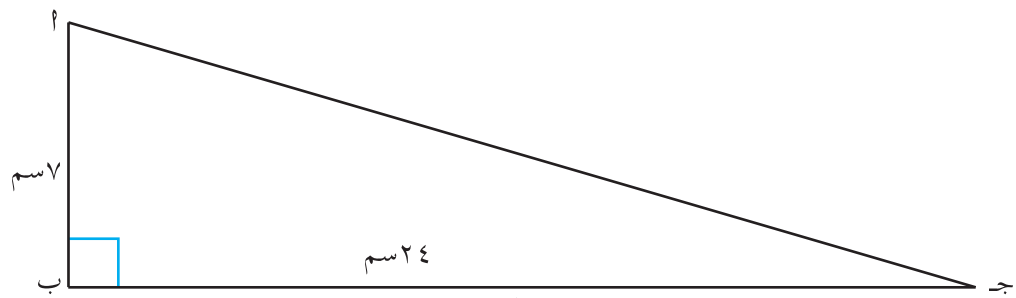
ثانياً – حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طولا ضلعين :

مثال (٧ – ٢٤) المثلث ا ب جـ القائم الزاوية في ب إذا كان | ا ب | = ٧سم ، | ب جـ | = ٢٤سم. فأوجد :

| ا جـ | ، ق (∠ ا) ، ق (∠ جـ) .

الحـــل

لاحظ [الشكل (٧ – ٣٦)] : $|أجـ|^٢ = |أب|^٢ + |ب جـ|^٢$ ... (مبرهنة فيثاغورث) .



شكل (٧ – ٣٦)

$|أجـ|^٢ = (٧)^٢ + (٢٤)^٢$.

$= ٤٩ + ٥٧٦ = ٦٢٥$.

∴ $|أجـ| = \sqrt{٦٢٥} = ٢٥$سم والآن نجد قياسات الزوايا

∵ $جا جـ = \frac{|أب|}{|أجـ|} = \frac{٧}{٢٥} = ٠,٢٨٠٠$.

∴ ق (∢ جـ) = ١٦ ْ ١٦ َ (باستخدام الآلة الحاسبة والتقريب إلى الدقائق) .

∵ مجموع زوايا المثلث = ١٨٠ ْ ، ق (∢ ب) = ٩٠ ْ

، ق (∢ جـ) = ١٦ ْ ١٦ َ .

∴ ق (∢ أ) = ٩٠ ْ – ١٦ ْ ١٦ َ = ٧٣ ْ ٤٤ َ .

تمارين ومسائل (٧ : ٦)

(استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد نواتج العمليات لأربعة أرقام عشرية) .

[١] حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب في كل من الحالات الآتية :

أ) $|أجـ| = ٧٠$سم ، ق (∢ جـ) = ٥٠ ْ .

ب) $|أجـ| = ٥٠$سم ، ق (∢ جـ) = ٣٥ ْ .

جـ) $|أجـ| = ١٢$سم ، ق (∢ جـ) = ٣٦ َ ٤٧ ْ .

[٢] س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص . أوجد طول $\overline{\text{س ص}}$ في الحالات التالية :

أ) |ع ص| = ٨٠سم ، ق (∡ ع) = ٦٢° .

ب) |ع ص| = ٤٣,٥ سم ، ق (∡ ع) = ٧٠° .

[٣] حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في جـ في كل من الحالات الآتية :

أ) |أ جـ| = ١٠سم ، |أ ب| = ٢٠سم .

ب) |أ جـ| = ١٢,٥سم ، |أ ب| = ١٨سم .

جـ) |أ ب| = ٨سم ، جا ب = ٠,٧٨٨٠ .

ء) |ب جـ| = ٩سم ، جتا ب = ٠,٢٢٥٠ .

هـ) |أ جـ| = ٢ |ب جـ| ، |أ ب| = ٨٠ .

[٤] ك ل م مثلث قائم الزاوية في ل فيه |ك ل| = ٢٤,٣٧ متراً ، |ك م| = ٦٢,٩٩ متراً . أوجد كلاً من |ل م| ، ق (∡ م) ، ق (∡ ك) .

٧ : ٧ تطبيقات على حل المثلث القائم

هناك تطبيقات كثيرة لحل المثلث القائم الزاوية في كثير من المواقف الحياتية منها : حساب مسافات وارتفاعات وانخفاضات يصعب إيجادها بالقياس العملي المباشر ، وفيما يلي بعض الأمثلة لذلك :

مثال (٧ – ٢٥) شاهد شخص عمود كهرباء من نقطة على سطح الأرض تبعد عن قاعدته ٣٠ متراً ، فكانت زاوية ارتفاع عمود الكهرباء ٣٠° . أوجد ارتفاع العمود عن سطح الأرض .

الحل

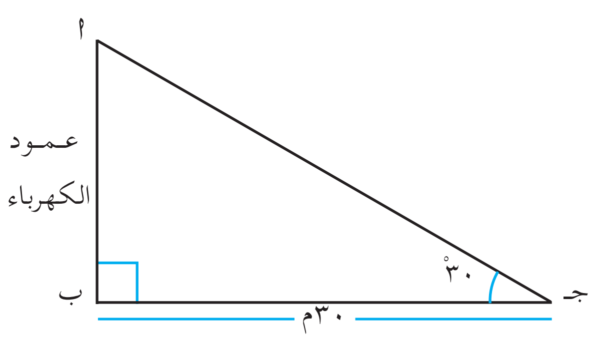
لاحظ [الشكل (٧–٣٧)] حيث أ ب يمثل ارتفاع عمود الكهرباء ، ق (∡ جـ) = ٣٠° (هي زاوية الارتفاع) ، |ب جـ| = ٣٠ م

لإيجاد |أ ب| نستخدم العلاقة :

$\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{ب جـ}|}$ = ظا (∡ جـ) ،

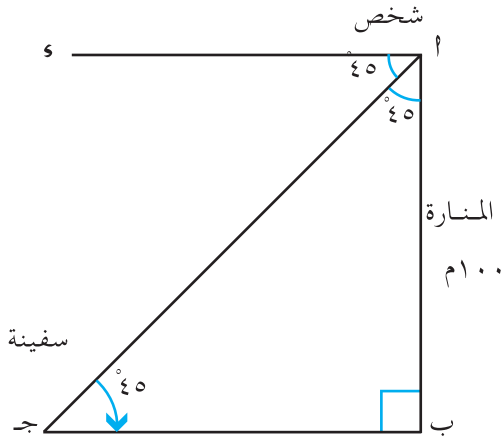
∵ $\frac{|\text{أ ب}|}{٣٠}$ = ظا ٣٠° .

∴ |أ ب| = ٣٠ ظا ٣٠° = $\frac{٣٠}{\sqrt{٣}}$ م = ١٠ $\sqrt{٣}$ م .



شكل (٧ – ٣٧)

مثال (٧ – ٢٦) شخص ينظر إلى سفينة في البحر من خلال منارة ارتفاعها ١٠٠ متر عن سطح البحر ، وجد أن قياس زاوية الانخفاض للسفينة في البحر هي ٤٥° ، فما بعد السفينة عن قاعدة المنارة لأقرب متر .



شكل (٧ – ٣٨)

الحــل

لاحظ [الشكل (٧–٣٨)] أ ب يمثل المنارة ، ∡ جـ أ ء زاوية الانخفاض .

∴ ق (∡ ب أ جـ) = ٤٥° ، ومنه $\frac{|ب جـ|}{|أ ب|}$ = ظا (∡ ب أ جـ) .

∴ $\frac{|ب جـ|}{|أ ب|}$ = ظا ٤٥° . ، ∵ |أ ب| = ١٠٠م

∴ |ب جـ| = ١٠٠ × ظا ٤٥° = ١٠٠ × ١ . ∴ |ب جـ| = ١٠٠ م .

تمارين ومسائل (٧ : ٧)

[١] من نقطة على سطح الأرض على بعد ٦٠ متراً من قاعدة برج وجد أن زاوية ارتفاع قمته ٣٠° . أوجد ارتفاع البرج .

[٢] سلّم يرتكز على حائط رأسي ،، فإذا كان طول السلم ٢٠ قدما ويبعد موقعه عن الحائط ١٠ أقدام . أوجد زاوية ميل السلم عن الأرض ، ثم أوجد (البعد بين نقطة ارتكازه على الجدار والأرض) .

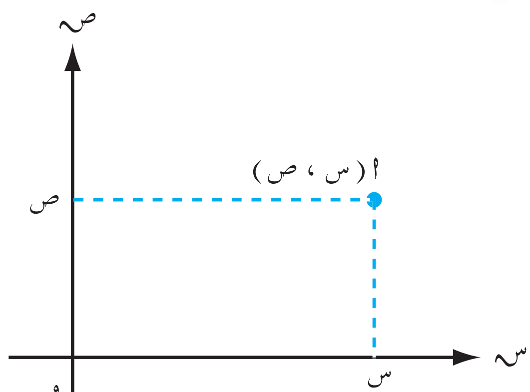
[٣] قيست زاوية انخفاض قارب في البحر من أعلى فنار ارتفاعه عن سطح البحر ٦٠ متراً فوجدت ٢١° ٢٥َ . فما بُـعد القارب عن موقع الفنار مقرباً لأقرب متر .

[٤] من نقطة تبعد ١٥٠ متراً عن قاعدة سارية علم وجــد أن قياس زاوية ارتفـاع قمة السارية ١٠° ٢٥َ . فما ارتفاع السارية لأقرب متر ؟

[٥] من نقطة على سطح الأرض وجد رجل أن زاوية ارتفاع قمة جبل هي ٣٢° ٢١َ ، ولما سار نحو الجبل مسافة ٨٠٠ متراً وجد أن زاوية ارتفاع قمة الجبل ٥٠° . أوجد ارتفاع قمة الجبل عن سطح الأرض .

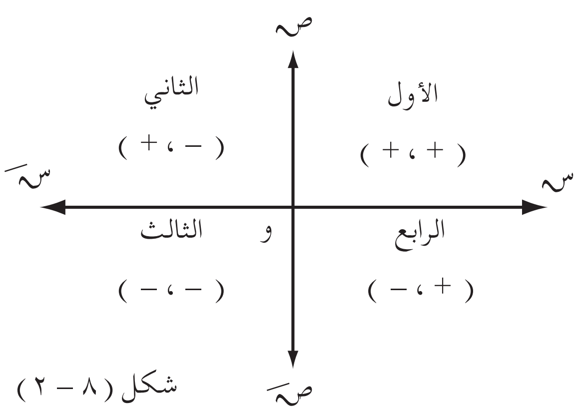
[٦] من نقطة على سطح عمارة ترتفع ١٥م عن سطح الأرض وجد شخص أن زاوية ارتفاع قمة عمارة أخرى تقابله ٣٠° ، وأن زاوية انخفاض قاعدة تلك العمارة ٢٥° . أوجد ارتفاع العمارة المقابلة للشخص والمسافة بين العمارتين .

٨ : ١ مـــراجـــعـــة



شكل (٨ – ١)

تعرفت في المرحلة الأساسية أن كل نقطة على خط الأعداد تمثل عدداً حقيقياً ، كما أن كل عدد حقيقي يمكن أن يمثل بنقطة على خط الأعداد . كذلك كل نقطة في المستوى الديكارتي يمكن تمثيلها بزوج مرتب من الأعداد .
مثل النقطة أ (س ، ص) كما في شكل (٨ – ١)
حيث س الإحداثي السيني للنقطة أ ،
ص الإحداثي الصادي للنقطة أ .

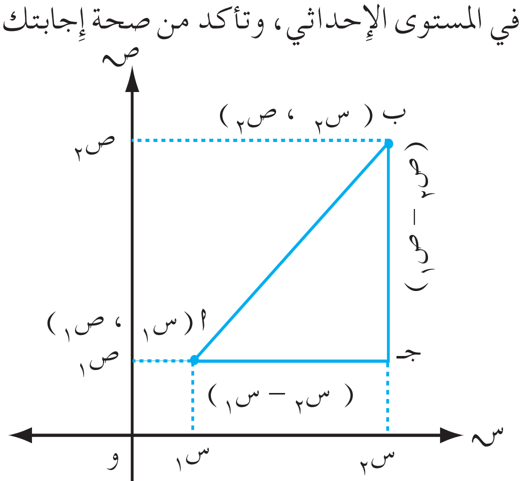


شكل (٨ – ٢)

ومحورا الإحداثيات يقسما المستوى إلى أربعة أجزاء يطلق عليها الأرباع موضحة كما في [الشكل (٨ –٢)]. في الربع الأول الإحداثي السيني والإحداثي الصادي كلاهما موجب ،في الربع الثاني الإحداثي السيني سالب والإحداثي الصادي موجب، في الربع الثالث الإحداثي السيني والإحداثي الصادي كلاهما سالب ، وفي الربع الرابع الإحداثي السيني موجب والإحداثي الصادي سالب .

تدريب (٨–١) حـدد في أي ربع تقع كل من النقاط التالية : (١ ، ٢) ، (–٣ ، ١) ، ($-\frac{٣}{٢}$ ، –٢) ، (٣ ، –١) ، ثم ارسمها في المستوى الإحداثي، وتأكد من صحة إجابتك .

المسافة بين نقطتين :



شكل (٨ – ٣)

لتكن لدينا النقطتان أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب($س_٢$ ، $ص_٢$)انظر [الشكل (٨–٣)]يمكن إيجاد المسافة بينهما باستخدام مبرهنة فيثاغورث .

$$|\text{أب}|^٢ = |\text{أجـ}|^٢ + |\text{جـب}|^٢$$

$$= (\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢$$

ومنه $|\text{أب}| = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$.

ملاحظة : منتصف $\overline{أب}$ هي النقطة $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$.

مثال (٨ – ١) أوجد البعد بين النقطتين أ (–١ ، ٣) ، ب(٢ ، ٧) ، وإحداثي منتصف القطعة الواصلة بينهما .

الحـــل

$| أب | = \sqrt{(٢ - (-١))^٢ + (٧ - ٣)^٢} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول

منتصف $\overline{أب}$ هي النقطة $\left(\frac{-١ + ٢}{٢} ، \frac{٣ + ٧}{٢} \right) = \left(\frac{١}{٢} ، ٥ \right)$.

تمارين ومسائل (٨ : ١)

[١] أوجد البعد بين كل زوج من أزواج النقاط التالية ، ثم أوجد إحداثي نقطة المنتصف :

أ) (٤ ، ١) ، (–٢ ، ٩) ، ب) (٦ ، ٣) ، (١ ، ٥) ،

جـ) (٤ ، ٠) ، (٧ ، ٠) ، ء) (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٦) ،

هـ) (–٣ ، –٢) ، (٤ ، –٢) ، و) (–٣ ، –٤) ، (٣ ، ٤) .

[٢] لتكن أ(٤ ، –٦) ، ب (–٥ ، ٣) . أوجد إحداثي النقطة جـ التي تنصف القطعة أب ، ثم احسب | أجـ | ، | جـ ب | وقارن بينهما .

[٣] أثبت أن النقاط أ(–١ ، ١) ، ب (١ ، –٣) ، جـ(٧ ، ٥) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية .

[٤] أثبت أن أ(١ ، –٤) ، ب (٣ ، ١) ، جـ(–٢ ، ٣) ، ء (–٤ ، –٢) هي رؤوس مربع .

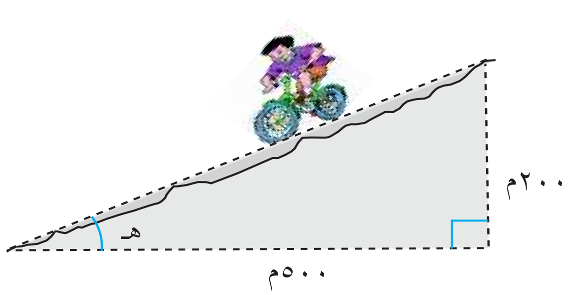
[٥] أوجد الجزء المقطوع من محور السينات ، والجزء المقطوع من محور الصادات للحالات التالية :

أ) ص = س – ١ ، ب) ص + ٢ س – ٣ = ٠ ،

جـ) ص – ٢ س = ٦ ، ء) س – ٣ ص + ٦ = ٠ .

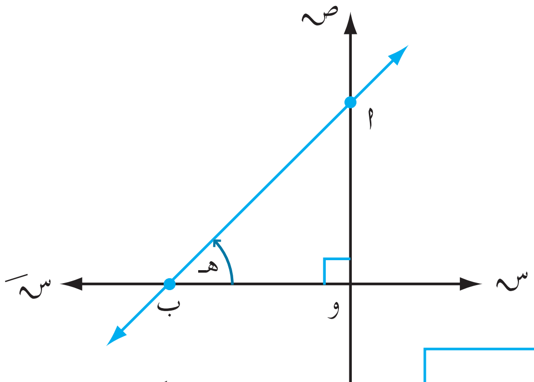
٨ : ٢ ميـــل المستقيـــم

إذا كنت طالعاً جبلاً ما ماشياً ، أو راكباً دراجة ، فإن حركتك تقل تدريجياً ؛ وكلما كان الجبل أكثر انحداراً ، كلما كانت عملية الصعود بطيئة . إن قياس انحدار الجبل أو ميله هو عبارة عن نسبة المسافة العمودية على المسافة الأفقية ، وبالرجوع إلى [الشكل (٨ – ٤)] نجد أن :



شكل (٨ – ٤)

انحدار الجبل أو ميله = $\frac{\text{المسافة العمودية}}{\text{المسافة الأفقية}} = \frac{\text{٢٠٠ متر}}{\text{٥٠٠ متر}}$ ، $= \frac{٢}{٥} =$ ظا هـ .



شكل (٨ – ٥)

لنفرض أن هـ هي الزاوية الموجبة (الاتجاه المضاد لحركة عقارب الساعة) المحصورة بين المستقيم أ ب والاتجاه الموجب لمحور السينات [شكل (٨ – ٥)]

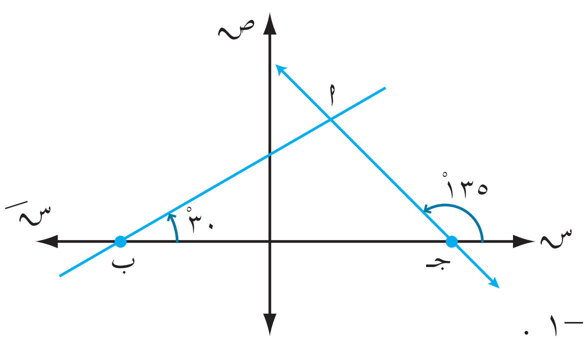
فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{|\text{أ و}|}{|\text{ب و}|}$ = ظا هـ .

تعريف (٨ : ١)

ميل المستقيم : هو ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ويرمز له بالرمز م أي أن م = ظا هـ . ، «هـ قياس زاوية الميل» .

إذا كانت زاوية الميل حادة فإن الميل يكون موجباً ، وإذا كانت منفرجة فإن الميل يكون سالباً .

مثال (٨ – ٢) أوجد ميل كل من المستقيمين أ ب ، أ جـ في [الشكل (٨–٦)]



شكل (٨ – ٦)

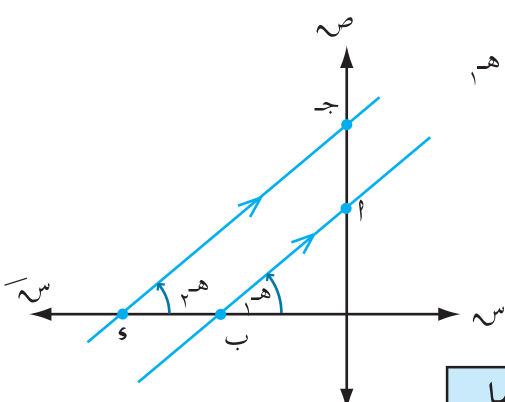
الحل

ليكن $م_١$ ، $م_٢$ ميلي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ على التوالي.

$\therefore$ $م_١$ = ظا °٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ،

$م_٢$ = ظا °١٣٥ = ظا (°١٨٠ – °٤٥) = – ظا °٤٥ = –١ .

المستقيمات المتوازية :



شكل (٨ – ٧)

أنظر [الشكل (٨–٧)] ليكن : ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $م_١$ = ظا $هـ_١$

ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ = $م_٢$ = ظا $هـ_٢$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

$\therefore$ $هـ_١$ = $هـ_٢$ (متناظرتان)

$\therefore$ ظا $هـ_١$ = ظا $هـ_٢$

$\therefore$ $م_١$ = $م_٢$ ، وعليه فإنه :

يتوازى مستقيمان إذا وفقط إذا تساوى ميلاهما

رمزياً : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ $\Leftrightarrow$ م ($\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$) = م ($\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$) .

ملاحظات :

عندما تكون هـ = °٠ فإن ظا هـ = ٠ ، وعليه فإن ميل المحور السيني ، وميل أي مستقيم موازٍ له يساوي صفراً.

المستقيمات المتعامدة :

انظر [الشكل (٨ – ٨)] : ليكن

ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = مـ$_1$ = ظا هـ$_1$

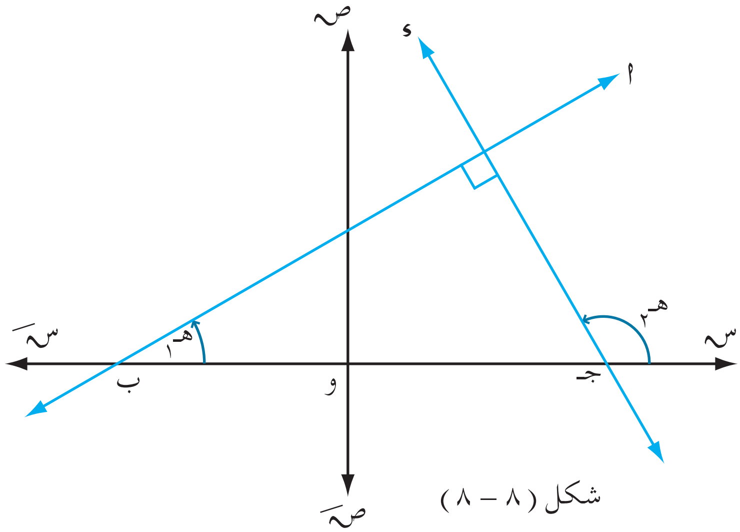
ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ = مـ$_2$ = ظا هـ$_2$

∵ ق (∡ هـ$_2$) = ٩٠° + ق (∡ هـ$_1$)

∴ ظا هـ$_2$ = ظا (٩٠° + هـ$_1$)

$= -$ ظتا هـ$_1$ $= -\dfrac{1}{\text{ظا هـ}_1}$.

∴ ظا هـ$_1$ • ظا هـ$_2$ = −١



شكل (٨ – ٨)

وعليه فإنه :

يتعامد مستقيمان إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي −١

ونعبر عن ذلك رمزياً : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \Leftrightarrow$ مـ ($\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$) • مـ ($\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$) = −١

ملاحظة : عندما تكون هـ = ٩٠° ، فإن ظا هـ غير معرف ، وعليه فإن ميل المحور الصادي ، وأي مستقيم موازٍ له غير معرف .

ميل المستقيم بمعلومية نقطتين عليه :

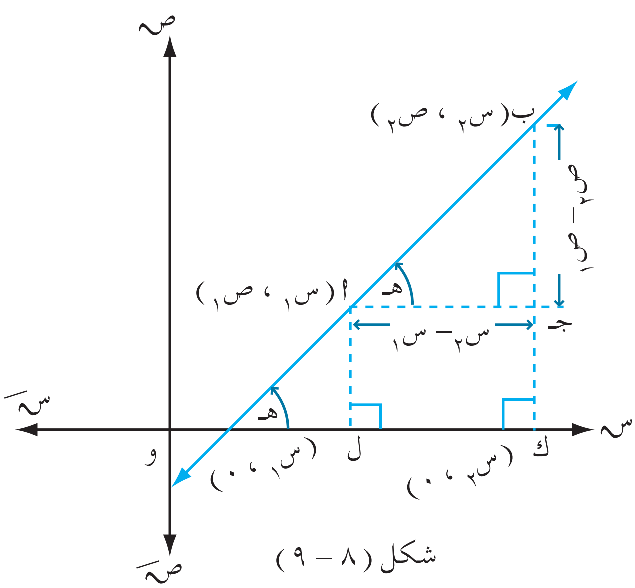
انظر [الشكل (٨–٩)] : ليكن :

أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) نقطتان واقعتان على المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ الذي زاوية ميله هـ .

أسقط $\overleftrightarrow{\text{أ ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ك}}$ عموديين على المحور السيني ، و $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب ك}}$.

∴ ظا هـ = $\dfrac{|\text{ب جـ}|}{|\text{أ جـ}|} = \dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ ؛

حيث س$_2$ − س$_1$ ≠ ٠



شكل (٨ – ٩)

∵ الميل = ظا هـ = $\dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ ؛ حيث س$_2$ − س$_1$ ≠ ٠

أي أن :

ميل مستقيم يمر بنقطتين = $\dfrac{\text{فرق الإحداثيين الصاديين}}{\text{فرق الإحداثيين السينيين}}$

مثال (٨ – ٣)

لتكن أ (٠ ، ٢) ، ب (٣ ، ٠) ، جـ (٢ ، −٣) ، ء (−١ ، −١) ، هـ (٢ ، $\frac{7}{2}$) .

أوجد ميل كل من المستقيمات $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ ، وما العلاقة بينها .

الحـل

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $م_١$ = $\frac{\text{الإحداثي الصادي لـ ب – الإحداثي الصادي لـ أ}}{\text{الإحداثي السيني لـ ب – الإحداثي السيني لـ أ}}$ = $\frac{\text{صفر} - ٢}{٣ - \text{صفر}}$ = $-\frac{٢}{٣}$.

وبالمثل :

ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = $م_٢$ = $\frac{-١ - (-٣)}{-١ - ٢}$ = $-\frac{٢}{٣}$.

ميل $\overleftrightarrow{ء هـ}$ = $م_٣$ = $\frac{\frac{٧}{٢} - (-١)}{٢ - (-١)}$ = $\frac{٩}{٦}$ = $\frac{٣}{٢}$.

نلاحظ أن : $م_١$ = $م_٢$ = $-\frac{٢}{٣}$ ، ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ ء}$.

أيضاً : $م_١ \cdot م_٣$ = $م_٢ \cdot م_٣$ = $-\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢} = -١$

∴ $\overleftrightarrow{ء هـ} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ، وكذلك $\overleftrightarrow{ء هـ} \perp \overleftrightarrow{جـ ء}$.

تمارين ومسائل (٨ : ٢)

[١] أوجد ميل المستقيم الواصل بين كل زوج من أزواج النقاط التالية :

أ) (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ب) (–٢ ، ٤) ، (–٥ ، ٨)

جـ) (–٥ ، –٣) ، (٤ ، ٣) ء) (س ، ص) ، (ع ، س)

هـ) (س ص^٢ ، ٢ س ص) ، (س ع^٢ ، ٢ س ع) .

[٢] لتكن أ(٤ ، –٣) ، ب(٦ ، ٥) ، جـ(٥ ، ١) . أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، ومن ثم أثبت أن النقاط المذكورة تقع على إستقامة واحدة .

[٣] أثبت أن النقاط (٦ ، ٣) ، (–٣ ، ٠) ، (١٢ ، ٥) تقع على استقامة واحدة .

[٤] أوجد قيمة ص التي تجعل النقطة (٣ ، ص) تقع على المستقيم الواصل بين النقطتين (–٢ ، –١) ، (١ ، ٣) .

[٥] أثبت أن المستقيم الواصل بين النقطتين (٠ ، ٠) ، (٤ ، ١١) عمودياً على المستقيم الواصل بين النقطتين (٨ ، ٢) ، (–٣ ، ٦) .

[٦] أثبت أن النقاط التالية هي رؤوس متوازي أضلاع ، ثم بين أياً منهما مستطيلاً :

أ) (–٢ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (–١ ، ٠) .

ب) (٥ ، –٤) ، (–١١ ، ١٦) ، (–١ ، ٤) ، (–٥ ، ٨) .

[٧] أثبت أن النقاط (١ ، –٤) ، (٣ ، ١) ، (–٢ ، ٣) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية .

[٨] أوجد قيمة س بحيث تكون النقاط (–٤ ، –٢) ، (٢ ، ٥) ، (س ، –١) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية عند (٢ ، ٥) .

[٩] النقطة ﺃ (–٣ ، ٠) ، ب (٧ ، –٦) ، جـ (٤ ، ٢) هي رؤوس مثلث . أثبت أن المستقيم الواصل بين منتصفي أي ضلعين يوازي الضلع الثالث .

٨ : ٣ معادلة المستقيم

تعرف أن المعادلة ﺃ س + ب ص + جـ = ٠ حيث ﺃ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ هي معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين ، ويمثلها بيانياً في المستوى الإحداثي خطاً مستقيماً يمر بالنقطتين :

($-\frac{\text{جـ}}{\text{ﺃ}}$ ، ٠) ، (٠ ، $-\frac{\text{جـ}}{\text{ب}}$) الواقعتين على محوري السينات والصادات على التوالي ، ويقدر ميله

بالعدد $-\frac{\text{ﺃ}}{\text{ب}}$ أي أن : هـ = $-\frac{\text{ﺃ}}{\text{ب}}$ = $-\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$.

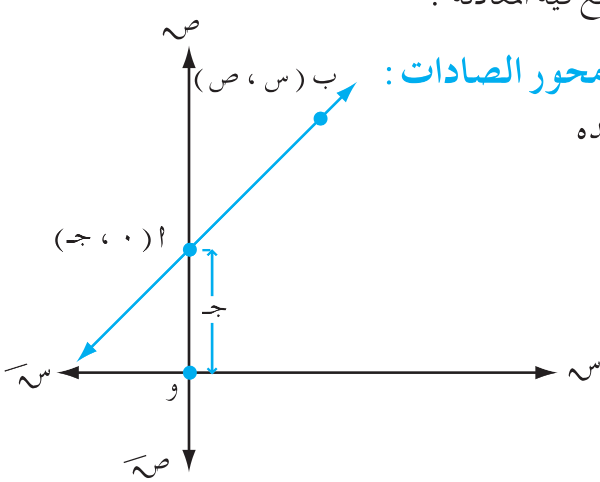
تسمى هذه المعادلة بالمعادلة العامة للمستقيم ، وهناك صور أخرى لكتابة معادلة المستقيم ولكن قد تكون إحداها أكثر ملاءمة من الأخرى وفقاً للاستخدام الذي ستوضع فيه المعادلة .

أولاً : معادلة مستقيم بمعلومية ميله وما يقطعه من محور الصادات :

ليكن ﺃ ب مستقيماً ميله هـ ، ويقطع جـ وحده من محور الصادات [شكل (٨–١٠)] .

فإن (٠ ، جـ) هي إحداثي النقطة ﺃ .

أفرض أن (س ، ص) إحداثي النقطة ب .



شكل (٨ – ١٠)

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ﺃ ب}}$ = هـ = $\frac{\text{ص} - \text{جـ}}{\text{س} - ٠}$

ومنه هـ (س – ٠) = ص – جـ

أو ص = هـ س + جـ

وعليه فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ﺃ ب}}$ بمعلومية ميله هـ ، وما يقطعه من محور الصادات (جـ وحده) هي :

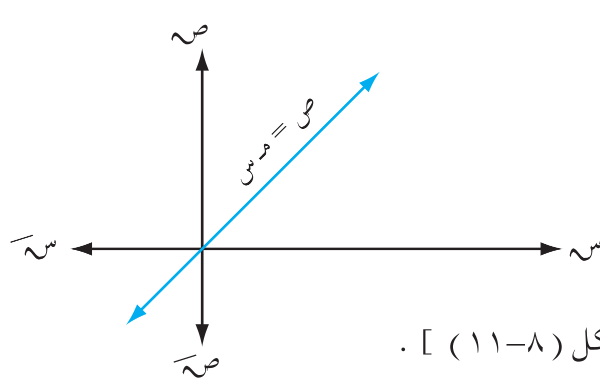
ص = هـ س + جـ ——— (١)

حالات خاصة :

١ – عندما جـ = ٠ ، فإن المعادلة (١) تأخذ الصورة

ص = هـ س .

وهي معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله هـ [شكل (٨–١١)] .

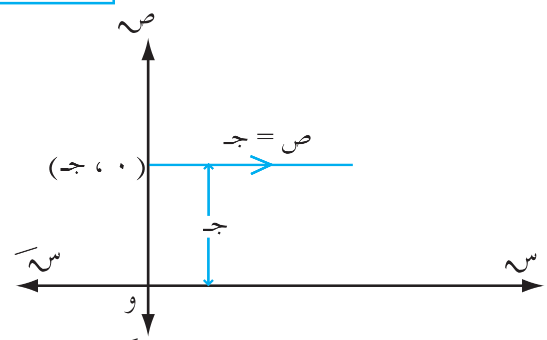


شكل (٨ – ١١)

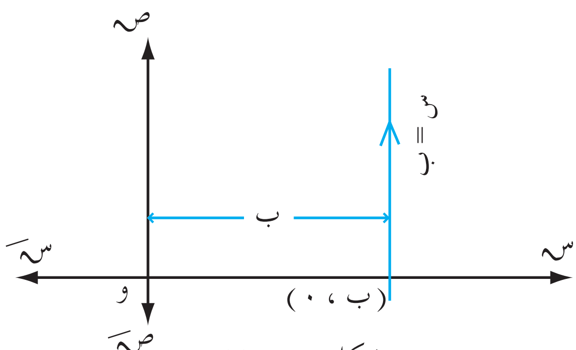
٢ – عندما مـ = ٠ ، فإن المعادلة (١) تأخذ الصورة $\boxed{\text{ص = جـ .}}$

وهي معادلة مستقيم يوازي محور السينات ويبعد عنه جـ وحده [شكل (٨ – ١٢ أ)] . أما معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات وعلى بعد ب وحده منه [الشكل (٨ – ١٢ب)] فهي :

$\boxed{\text{س = ب .}}$



شكل (٨ – ١٢أ)



شكل (٨ – ١٢ب)

٣ – عندما مـ = ٠ ، جـ = ٠ ، فإن المعادلة (١) تأخذ الصورة : ص = ٠ ، وهي معادلة محور السينات .
أما معادلة محور الصادات فهي س = صفر .

مثال (٨ – ٤) أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيمان التاليان :

أ) ص = ٤ س – ٣ ، ب) ٢ ص + ٣ س – ٤ = ٠ .

الحــل

أ) المستقيم ص = ٤ س – ٣ ، ميله ٤ ، ويقطع ٣ وحدات من محور الصادات السالب ، أي يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، –٣) .

ب) المستقيم ٢ ص + ٣ س – ٤ = ٠ يمكن كتابة معادلته على الصورة : ص = – $\frac{٣}{٢}$ س + ٢ .

وعليه فإن ميله – $\frac{٣}{٢}$ ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٢) .

مثال (٨ – ٥) ما العلاقة بين كل زوج من أزواج المستقيمان التاليان :

أ) ص = ٣ س – ٤ ، ب) ص = ٣ س – ٢

ص = ٣ س + ٥ ص = – $\frac{١}{٣}$ س + ٥ .

الحــل

أ) المستقيمان ص = ٣ س – ٤ ، ص = ٣ س + ٥

∵ $مـ_١$ = ٣ ، $مـ_٢$ = ٣ . ∴ المستقيمان متوازيان .

ب) المستقيمان ص = ٣ س – ٢ ، ص = – $\frac{١}{٣}$ س + ٥ متعامدان لأن حاصل ضرب ميليهما يساوي –١

$م_١ \times م_٢ = ٣ \times -\frac{١}{٣} = -١$.

مثال (٨ – ٦) أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع ٥ وحدات من محور الصادات الموجب ومواز للمستقيم: ٤ س – ٦ ص = ٩ .

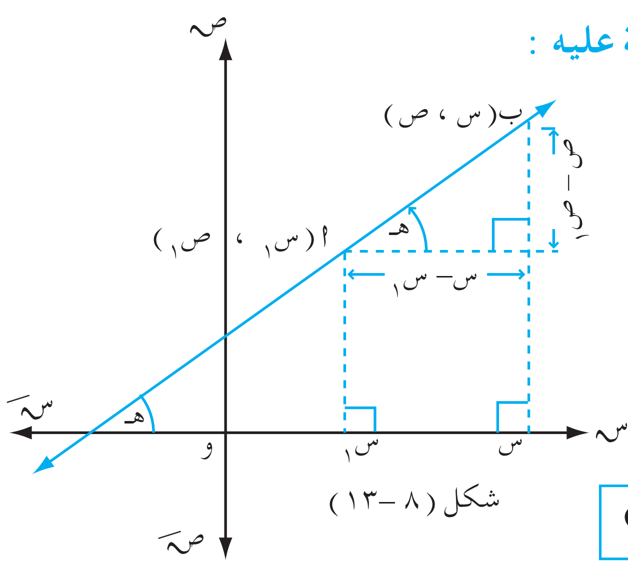
الحل

ليكن $\overleftrightarrow{ل}$ هو المستقيم المطلوب إيجاد معادلته . نكتب معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$: ٤ س – ٦ ص = ٩ بالصورة :

ص = $\frac{٢}{٣}$ س – $\frac{٣}{٢}$ فيكون ميل المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ = $\frac{٢}{٣}$ ، ومعادلته هي ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٥ .

∴ ٣ ص = ٢ س + ١٥ أو ٢ س – ٣ ص + ١٥ = ٠ .

ثانياً : معادلة المستقيم بمعلومية ميله ونقطة واقعة عليه :



شكل (٨–١٣)

المستقيم أ ب يمر بالنقطة (س١، ص١) ، وميله م [شكل (٨–١٣)]. (س ، ص) نقطة واقعة عليه . إذن ميل $\overleftrightarrow{أب}$ بمعلومية نقطتين واقعتين عليه : م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$.

∴ ص – ص١ = م (س – س١) ، وعليه فإن معادلة المستقيم الذي ميله م ، ويمر بالنقطة (س١ ، ص١) هي :

$\boxed{ص - ص_١ = م\ (س - س_١)}$

مثال (٨ – ٧) أوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ، ويمر بالنقطة (١ ، ٢) .

الحل

معادلة المستقيم الذي ميله م ، ويمر بالنقطة (س١ ، ص١) هي : ص – ص١ = م (س – س١) .

من المعطيات فإن م = ٣ ، س١ = ١ ، ص١ = ٢ ،

وبالتعويض في المعادلة نحصل على : ص – ٢ = ٣ (س – ١) = ٣ س – ٣ .

∴ ٣ س – ص – ١ = ٠ هي المعادلة المطلوبة .

مثال (٨ – ٨) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤ ، ٠) ، ومواز للمستقيم ٣ ص – ٦س = ٧ .

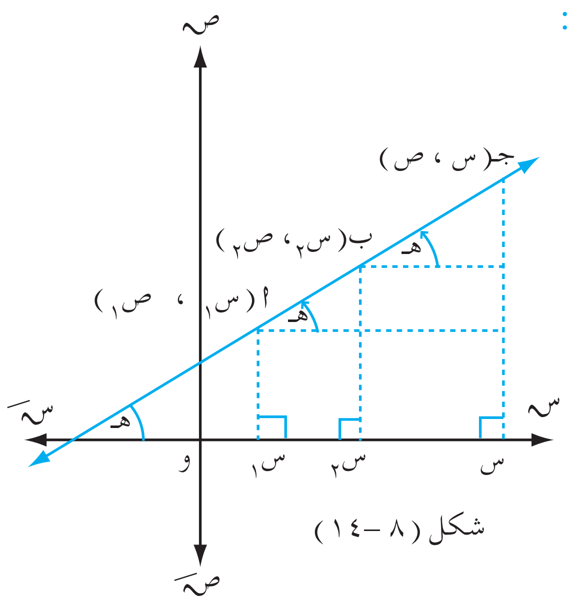
الحل

يمكن كتابة المعادلة ٣ ص − ٦ س = ٧ بالصورة $ص = ٢ س + \frac{٧}{٣}$.

∵ المستقيمان متوازيان ، يكون ميل المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤ ، ٠) يساوي ٢ ، وتكون معادلته :

ص − ٠ = ٢ (س − ٤) ∴ ص = ٢ س − ٨ .

ثالثاً : معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين واقعتين عليه :



شكل (٨ − ١٤)

ليكن $\overleftrightarrow{أ ب}$ مستقيماً يمر بالنقطتين أ ($س_١$ ، $ص_١$)، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) [شكل (٨ − ١٤)] .

لنأخذ النقطة جـ (س ، ص) الواقعة عليه :

∴ ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ بمعلومية أ ، جـ $= \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$.

وميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ بمعلومية النقطتين أ ، ب $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

وعليه فإن : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

أي أن معادلة المستقيم بمعلومية النقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) الواقعتين عليه هي :

$$\boxed{\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}}$$

مثال (٨ − ٩) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (−٣ ، ٥) .

الحل

معادلة المستقيم المار بالنقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) هي : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

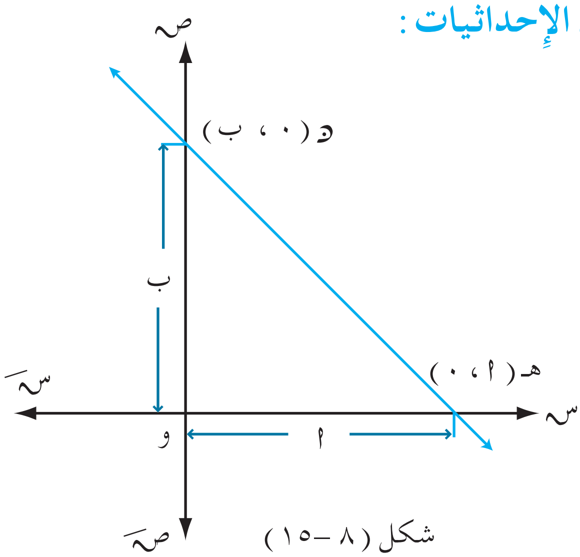
من المعطيات فإن : $س_١ = ١$ ، $ص_١ = ٢$ ، $س_٢ = -٣$ ، $ص_٢ = ٥$ ، وبالتعويض في المعادلة نجد :

$$\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{٥ - ٢}{-٣ - ١} = \frac{٣}{-٤}$$

⇐ −٤ (ص − ٢) = ٣ (س − ١) ⇐ −٤ ص + ٨ = ٣ س − ٣

∴ ٣ س + ٤ ص − ١١ = ٠ هي المعادلة المطلوبة .

رابعاً : معادلة المستقيم بمعلومية ما يقطعه من محوري الإحداثيات :



شكل (٨ – ١٥)

ليكن $\overleftrightarrow{هـ ن}$ مستقيماً يقطع أ وحدة من محور السينات ، ويقطع ب وحدة من محور الصادات [شكل (٨ – ١٥)] .

∴ $\overleftrightarrow{هـ د}$ يمر بالنقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

واستناداً إلى معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين نجد أن :

$$\frac{ص - ٠}{س - أ} = \frac{ب - ٠}{٠ - أ}$$

∴ – أ ص = ب س – أ ب .

∴ ب س + أ ص = أ ب

وبالقسمة على أ ب نحصل على

$$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$$

وعليه فإن معادلة المستقيم الذي يقطع من محور السينات أ وحدة ، ومن محور الصادات ب وحدة هي :

$$\boxed{\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١}$$

مثال (٨ – ١٠) أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع وحدتين من المحور السيني الموجب وثلاث وحدات من المحور الصادي السالب .

الحـــل

صورة المعادلة المطلوبة $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$. من المعطيات نجد أن : أ = ٢ ، ب = –٣ .

∴ $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{-٣} = ١$ (وبضرب طرفي المعادلة في ٦) .

٣ س – ٢ ص = ٦ وهي المعادلة المطلوبة .

مثال (٨ – ١١) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، ٥) ، ويقطع من محور السينات ضعف ما يقطعه من محور الصادات .

الحـــل

نفرض أن ما يقطعه من محور الصادات = أ وحدة .

إذن ما يقطعـــه من محـــور السينـات = ٢ أ وحدة .

وعليه فإن معادلة المستقيم تأخذ الصورة : $\frac{س}{٢أ} + \frac{ص}{أ} = ١$ ——— (١)

النقطة (٢ ، ٥) واقعة على المستقيم فهي تحقق المعادلة (١) .

$\therefore$ $\frac{٢}{٢أ} + \frac{٥}{أ} = ١$ (بضرب الطرفين في أ) .

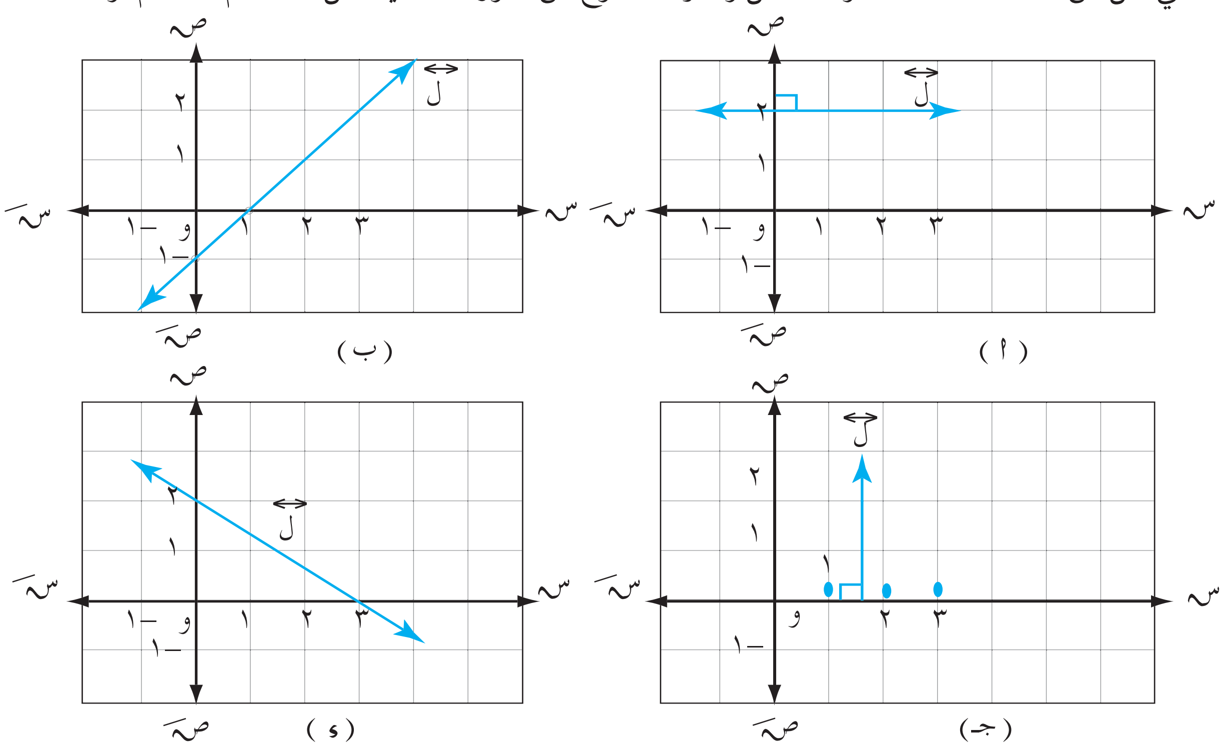
$\therefore$ ١ + ٥ = أ ، ومنه أ = ٦ ، وبالتعويض عن أ = ٦ في المعادلة (١) نحصل على :

$\frac{س}{١٢} + \frac{ص}{٦} = ١$ (بضرب الطرفين في ١٢) .

$\therefore$ س + ٢ ص − ١٢ = ٠ هي المعادلة المطلوبة .

تمارين ومسائل (٨ : ٣)

[١] في كل من الأشكال التالية ، أوجد الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي لكل مستقيم ل ، ثم أوجد معادلته :



شكل (٨ − ١٦)

[٢] أوجد معادلة المستقيم الذي يحقق ما يلي :

أ) ميله ٢ ويمر بالنقطة (−٤ ، −٤) . ب) ميله $\frac{٧}{٤}$ ويقطع وحدتين من محور الصادات الموجب .

جـ) ميله −١ ويقطع ثلاث وحدات من محور السينات السالب .

ء) يمر بالنقطة (٦ ، ١) ويوازي محور السينات . هـ) يمر بالنقطتين (−٤ ، −٣) ، (١ ، −٣) .

و) يقطع وحدتين من محور السينات السالب ويقطع أربع وحدات من محور الصادات .

[٣] لكل من المستقيمات التالية ، أوجد معادلة المستقيم العمودي والمستقيم الموازي له والمارين بالنقطة المعطاة:

أ) ص = س ؛ (−٧ ، ٠) . ب) ٧ س + ٨ ص + ٢٨ = ٠ ؛ (٦ ، −٢) .

جـ) أ س + ب ص + جـ = ٠ ؛ (٠ ، ٥) .

[٤] أوجد الميل والجزئين المقطوعين من محوري الإحداثيات للمستقيمات التالية :

أ) س + ٢ ص = ٦ . ب) ص − ٢ = $\frac{١}{٣}$ (س + ٥)

جـ) ١٢ س − ٥ ص − ١٧ = ٠ . ء) ٧ س + $\frac{٣}{٢}$ ص = ٤ + جـ .

[٥] أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم ٢ ص − س = ٧ ، وينصف القطعة الواصلة بين النقطتين (٣ ، ١) ، (١ ، −٥) .

[٦] أوجد معادلة المنصف العمودي للقطعة $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٣ ، ٢) ، ب (٧ ، ٦) .

[٧] أ ب جـ ء مربع فيه أ (١ ، ٣) ، جـ (٦ ، ٨) . أوجد معادلة القطر $\overline{\text{ب ء}}$.

[٨] أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (−٣ ، ٨) ، ومجموع ما يقطعه من محوري الإحداثيات ٧ وحدات .

٨ : ٤ بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم

بعد نقطة معلومة هـ$_١$ (س$_١$ ، ص$_١$) عن مستقيم معلوم أ س + ب ص + جـ = ٠ معطى بالقانون

$$ف = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} .$$

البرهان : لإيجاد النقطة هـ$_٢$ (س$_٢$ ، ص$_٢$) التي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين

أ س + ب ص + جـ = ٠ والعمودي عليه هـ$_١$ هـ$_٢$

نوجد معادلة العمودي أولاً :

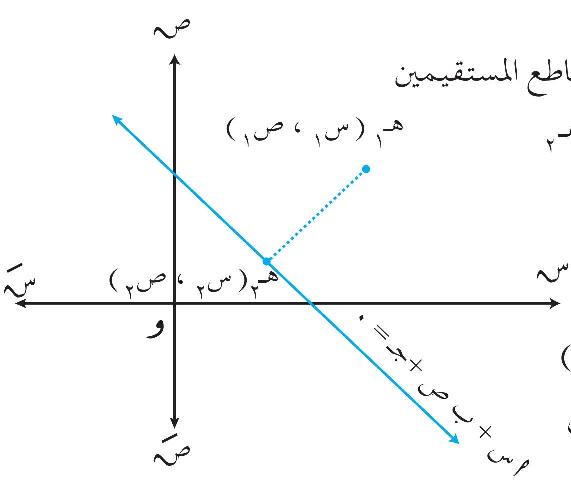
نكتب المعادلة : أ س + ب ص + جـ = ٠

بالصورة :

ص = − $\frac{أ}{ب}$ س − $\frac{جـ}{ب}$ ....(١)

نلاحظ أن المستقيم له ميل يساوي − $\frac{أ}{ب}$ أي أن

مـ = − $\frac{أ}{ب}$



شكل (٨ − ١٧)

ومن المعلوم أن ميل المستقيم المار بالنقطة هـ$_١$ (س$_١$ ، ص$_١$) وعمودي على المستقيم المعطى هو : $\frac{ب}{أ}$

ومعادلته هي :

ص − ص$_١$ = $\frac{ب}{أ}$ (س − س$_١$) .....(٢)

والمستقيمان (١) ، (٢) يتقاطعان في النقطة $هـ_{٢}$ ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$)
وعليه فإنه بحل هاتين المعادلتين بدلالة $س_{٢}$ ، $ص_{٢}$ نجد أن :

$$س_{٢} = \frac{ب\,(ب\,س_{١} - أ\,ص_{١}) - أ\,جـ}{أ^{٢} + ب^{٢}}$$

$$ص_{٢} = \frac{أ\,(-ب\,س_{١} + أ\,ص_{١}) - ب\,جـ}{أ^{٢} + ب^{٢}}$$

وعليه فإن المسافة بين $هـ_{١}$ ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) ، $هـ_{٢}$ ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$) هي :

$$ف = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$$

وبالتعويض عن ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$) من أعلاه نجد أن :

$$ف = \sqrt{\left(\frac{ب^{٢}\,س_{١} - أ\,ب\,ص_{١} - أ\,جـ}{أ^{٢} + ب^{٢}} - س_{١}\right)^{٢} + \left(\frac{-أ\,ب\,س_{١} + أ^{٢}\,ص_{١} - ب\,جـ}{أ^{٢} + ب^{٢}} - ص_{١}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{أ^{٢}\,(أ\,س_{١} + ب\,ص_{١} + جـ)^{٢} + ب^{٢}\,(أ\,س_{١} + ب\,ص_{١} + جـ)^{٢}}{(أ^{٢} + ب^{٢})^{٢}}\right]}$$

$$= \frac{|أ\,س_{١} + ب\,ص_{١} + جـ|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}$$

مثال (٨ − ١٢) أوجد بعد النقطة هـ(−١ ، ٠) عن المستقيم $٢\,س + ٣\,ص - ٥ = ٠$.

الحل

بالتعويض في القانون $ف = \frac{|أ\,س_{١} + ب\,ص_{١} + جـ|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}$

عن $س_{١} = -١$ ، $ص_{١} = ٠$ ، $أ = ٢$ ، $ب = ٣$ ، $جـ = -٥$ نحصل على :

$$ف = \frac{|٢\,(-١) + ٣ \times ٠ - ٥|}{\sqrt{٢^{٢} + ٣^{٢}}} = \frac{|-٢ - ٥|}{\sqrt{٤ + ٩}} = \frac{|-٧|}{\sqrt{١٣}}$$

$$= \frac{٧}{\sqrt{١٣}} \times \frac{\sqrt{١٣}}{\sqrt{١٣}} = \frac{٧\sqrt{١٣}}{١٣}$$ وحدة طولية .

تمارين ومسائل (٨ : ٤)

[١] احسب بعد النقطة هـ عن المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ) هـ (١ ، ١) ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ٢ س + ٣ ص – ٥ = ٠   ب) هـ (٢ ، –١) ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: س – ص + ١ = ٠

جـ) هـ (٣ ، ٤) ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ٢ س + ص – ٢ = ٠   ء) هـ (–٣ ، ٥) ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ٢ س + ٣ ص – ٥ = ٠

هـ) هـ (٠ ، ٠) ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ٨ س + ٦ ص – ١ = ٠ .

[٢] أوجد طول العمود النازل من كل نقطة من النقاط (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٤) ، (–٢ ، ٢) ، (١ ، ٣) على المستقيم ٣ ص = ٤ س + ٥ .

[٣] إذا كانت النقاط أ (–١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٥) ، جـ (٠ ، ٢) تمثل رؤوس مثلث . احسب ارتفاعاته.

[٤] أوجد مساحة :

أ) المثلث الذي رؤوسه النقاط (٤ ، ٤) ، (٨ ، –١٢) ، (١٢ ، ١٠) .

ب) متوازي الأضلاع الذي رؤوسه النقاط (٥ ، –٤) ، (–١ ، ٤) ، (–١١ ، ١٦) ، (–٥ ، ٨) .

جـ) شبه المنحرف الذي رؤوسه النقاط (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (–٢ ، ٣) ، (٣ ، –٢) .

[٥] أوجد المسافة العمودية بين المستقيمين المتوازيين التاليين :

س + ٢ ص + ١٠ = ٠

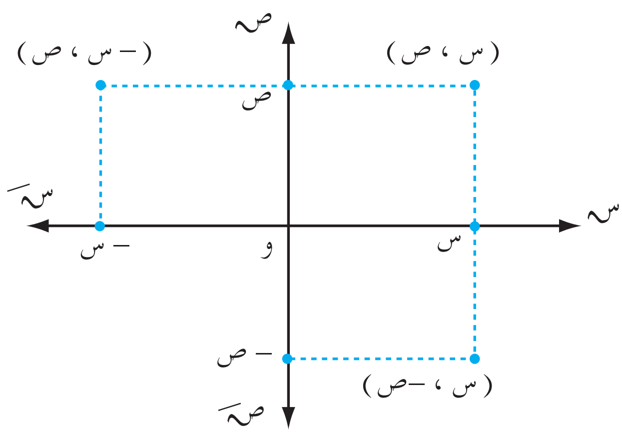
س + ٢ ص + ٤ = ٠ .

٨ : ٥ الانعكاس تحليلياً

سبق أن درست الانعكاس والانسحاب والدوران وكلها عبارة عن تحويلات هندسية حيث أن التحويل الهندسي تطبيق تقابل مجاله ومجاله المقابل مجموعة نقاط المستوى ، وفي هذه الوحدة نتناول الانعكاس والانسحاب تحليلياً .

تذكر أن :

– صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس في محور السينات هي النقطة (س ، – ص) وبالانعكاس في محور الصادات هي النقطة (– س ، ص) . انظر [الشكل (٨ – ١٨)] .



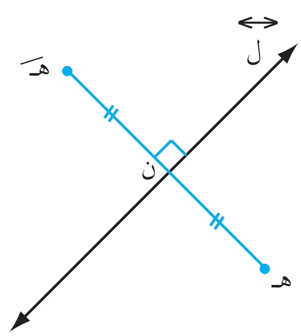
شكل (٨ – ١٨)

– الانعكاس في المحور يحفظ الأطوال وقياس الزوايا .

– هـَ صورة هـ بالإنعكاس في المستقيم ل إذا كان :

١) $\overleftrightarrow{\text{هـ هـَ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$

٢) | هـ ن | = | ن هـَ | . حيث أن ن هي نقطة تقاطع $\overline{\text{هـ هـَ}}$ مع $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ انظر [شكل (٨–١٩)] .

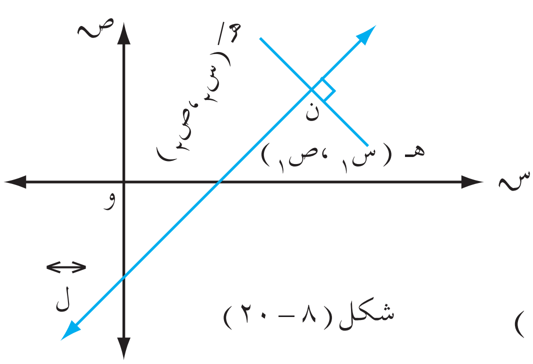


شكل (٨ – ١٩)

وعنــد معالجــة الانعكاس تحليلياً . نفرض أن محور الانعكاس هو المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ الذي معادلته أ س + ب ص + جـ = ٠ والمطلوب إيجاد صورة هـ ($س_1$ ، $ص_1$) بالانعكاس في $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، ولتكن هـَ ($س_2$ ، $ص_2$) .

أولاً – نوجد إحداثي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{هـ هـَ}}$ ، وهي : ن $\left(\dfrac{س_1 + س_2}{٢} \text{ ، } \dfrac{ص_1 + ص_2}{٢} \right)$.

ثانياً – النقطة ن تحقق معادلة المستقيم ل (محور الانعكاس) لأنها واقعة عليه [شكل (٨–٢٠)]



شكل (٨ – ٢٠)

وبالتعويض فيها نحصل على :

$$\text{أ} \left(\frac{س_1 + س_2}{٢} \right) + \text{ب} \left(\frac{ص_1 + ص_2}{٢} \right) + \text{جـ} = ٠$$

أي : $\text{أ } س_1 + \text{أ } س_2 + \text{ب } ص_1 + \text{ب } ص_2 + ٢ \text{ جـ} = ٠$

أو $\text{أ } س_2 + \text{ب } ص_2 = - \text{أ } س_1 - \text{ب } ص_1 - ٢ \text{ جـ}$ ——— (١)

ثالثاً – بما أن : $\overleftrightarrow{\text{هـ هـَ}}$ ومحور الانعكاس متعامدان ، إذن حاصل ضرب ميليهما يساوي – ١ .

∵ ميل محور الانعكاس $\overleftrightarrow{\text{ل}} = - \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{هـ هـَ}} = \dfrac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$.

∴ $\left(\dfrac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \right) \left(\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}} \right) = ١$.

أي $أ\,ص_٢ - أ\,ص_١ = ب\,س_٢ - ب\,س_١$.

أو $أ\,ص_٢ - ب\,س_٢ = أ\,ص_١ - ب\,س_١$ ——— (٢)

رابعاً : نحل المعادلتين (١) ، (٢) آنياً ، وذلك بضرب المعادلة (١) في أ ، والمعادلة (٢) في – ب وجمعهما

نحصل على : $$س_٢ = \frac{(ب^٢ - أ^٢)\,س_١ - ٢\,أ\,ب\,ص_١ - ٢\,أ\,جـ}{أ^٢ + ب^٢} .$$

وبضرب المعادلة (١) في ب والمعادلة (٢) في أ وجمعها نحصل على :

$$ص_٢ = \frac{(أ^٢ - ب^٢)\,ص_١ - ٢\,أ\,ب\,س_١ - ٢\,ب\,جـ}{أ^٢ + ب^٢} .$$

وعليه فإن :

$\bar{هـ}$ ($س_٢$ ، $ص_٢$) هي صورة النقطة هـ($س_١$ ، $ص_١$) بالانعكاس في المستقيم ل : أ س + ب ص + جـ = ٠

حيث إن $$س_٢ = \frac{(ب^٢ - أ^٢)\,س_١ - ٢\,أ\,ب\,ص_١ - ٢\,أ\,جـ}{أ^٢ + ب^٢}$$

$$ص_٢ = \frac{(أ^٢ - ب^٢)\,ص_١ - ٢\,أ\,ب\,س_١ - ٢\,ب\,جـ}{أ^٢ + ب^٢}$$

ويمكن إيجاد إحداثي النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) بدلالة إحداثي صورتها ($س_٢$ ، $ص_٢$) باستبدال $ص_٢$ بـ $ص_١$ ، $س_٢$ بـ $س_١$ في القانونين أعلاه ، أي :

$$س_١ = \frac{(ب^٢ - أ^٢)\,س_٢ - ٢\,أ\,ب\,ص_٢ - ٢\,أ\,جـ}{أ^٢ + ب^٢}$$

$$ص_١ = \frac{(أ^٢ - ب^٢)\,ص_٢ - ٢\,أ\,ب\,س_٢ - ٢\,ب\,جـ}{أ^٢ + ب^٢}$$

مثال (٨ – ١٣) أوجد صورة النقطة هـ(٣ ، ٤) بالانعكاس في المستقيم س – ص = ١ .

الحـــل

بالتعويض في القانون $$س_٢ = \frac{(ب^٢ - أ^٢)\,س_١ - ٢\,أ\,ب\,ص_١ - ٢\,أ\,جـ}{أ^٢ + ب^٢}$$

$$ص_٢ = \frac{(أ^٢ - ب^٢)\,ص_١ - ٢\,أ\,ب\,س_١ - ٢\,ب\,جـ}{أ^٢ + ب^٢}$$

عن أ = ١ ، ب = –١ ، جـ = –١ ، $س_١$ = ٣ ، $ص_١$ = ٤ نحصل على :

$$س_٢ = \frac{(١ - ١)(٣) - (٢)(١)(-١)(٤) - (٢)(١)(-١)}{١ + ١} = \frac{صفر + ٨ + ٢}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥ .$$

$$ص_٢ = \frac{(١ - ١)(٤) - (٢)(١)(-١)(٣) - (٢)(-١)(-١)}{١ + ١} = \frac{صفر + ٦ - ٢}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢ .$$

∴ صورة النقطة (٣ ، ٤) بالانعكاس في المستقيم س − ص = ١ هي النقطة (٥ ، ٢) .

مثال (٨ − ١٤) أوجد إحداثي النقطة التي صورتها النقطة (٢ ، ٤) بالانعكاس في المستقيم ص = س .

الحل

بالتعويض في القانون

$$\text{س}_{١} = \frac{(\text{ب}^{٢} - \text{أ}^{٢})\ \text{س}_{٢} - ٢\ \text{أ ب ص}_{٢} - ٢\ \text{أ جـ}}{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}$$

$$\text{ص}_{١} = \frac{(\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢})\ \text{ص}_{٢} - ٢\ \text{أ ب س}_{٢} - ٢\ \text{ب جـ}}{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}$$

عن أ = ١ ، ب = −١ ، جـ = ٠ ، $\text{س}_{٢}$ = ٢ ، $\text{ص}_{٢}$ = ٤ نحصل على :

$$\text{س}_{١} = \frac{(١ - ١)(٢) - (٢)(١)(-١)(٤) - (٢)(١)(٠)}{١ + ١} = \frac{\text{صفر} + ٨ - \text{صفر}}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤ .$$

$$\text{ص}_{١} = \frac{(١ - ١)(٤) - (٢)(١)(-١)(٢) - (٢)(-١)(٠)}{١ + ١} = \frac{\text{صفر} + ٤ - \text{صفر}}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢ .$$

∴ النقطة (٤ ، ٢) هي النقطة التي صورتها (٢ ، ٤) بالانعكاس في المستقيم ص = س .

مثال (٨ − ١٥) أوجد صورة المستقيم س − ص = ١ بالانعكاس في المستقيم ٣ س − ص − ٥ = ٠

الحل

بما أن المستقيم يتحدد بنقطتين واقعتين عليه ، فإننا نختار أي نقطتين على المستقيم س − ص = ١ مثل (٠ ، −١) ، (١ ، ٠) (بوضع س = ٠ ، ص = ٠ على التوالي) ، ومن ثم نوجد صورتيهما بالانعكاس في المستقيم ٣س −ص − ٥ = ٠ فإن. صورة النقطة (٠ ، −١) هي النقطة :

$$\left(\frac{(١ - ٩)(٠) - (٢)(٣)(-١)(-١) - (٢)(٣)(-٥)}{١ + ٩} ، \frac{(٩ - ١)(-١) - (٢)(٣)(-١)(٠) - (٢)(-١)(-٥)}{١ + ٩} \right)$$

$$= \left(\frac{\text{صفر} - ٦ + ٣٠}{١٠} ، \frac{-٨ - \text{صفر} - ١٠}{١٠} \right) = \left(\frac{٢٤}{١٠} ، \frac{-١٨}{١٠} \right) = \left(\frac{١٢}{٥} ، -\frac{٩}{٥} \right) .$$

وصورة النقطة (١ ، ٠) هي النقطة :

$$\left(\frac{(١ - ٩)(١) - (٢)(٣)(-١)(٠) - (٢)(٣)(-٥)}{١ + ٩} ، \frac{(٩ - ١)(٠) - (٢)(٣)(-١)(١) - (٢)(-١)(-٥)}{١ + ٩} \right)$$

$$= \left(\frac{-٨ - \text{صفر} + ٣٠}{١٠} ، \frac{\text{صفر} + ٦ - ١٠}{١٠} \right) = \left(\frac{٢٢}{١٠} ، \frac{-٤}{١٠} \right) = \left(\frac{١١}{٥} ، \frac{-٢}{٥} \right) .$$

وتكون معادلة المستقيم الواصل بين النقطتين $\left(\frac{١٢}{٥} ، \frac{-٩}{٥} \right)$ ، $\left(\frac{١١}{٥} ، \frac{-٢}{٥} \right)$ هي :

$\because \quad \dfrac{ص - ص_1}{س - س_1} = \dfrac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \quad \therefore \quad \dfrac{ص - (\frac{-٩}{٥})}{س - \frac{١٢}{٥}} = \dfrac{\frac{-٢}{٥} - (\frac{-٩}{٥})}{\frac{١١}{٥} - \frac{١٢}{٥}}$

أي أن : $\dfrac{٥ص + ٩}{٥س - ١٢} = \dfrac{-٢ + ٩}{١١ - ١٢} = \dfrac{٧}{-١}$

$٧ (٥س - ١٢) = -٥ص - ٩$.

$٣٥س - ٨٤ + ٥ص + ٩ = ٠ \quad \Leftarrow \quad ٣٥س - ٧٥ + ٥ص = ٠$

$٧س + ص - ١٥ = ٠$.

وهي معادلة صورة المستقيم $س - ص = ١$ بالانعكاس في المستقيم $٣س - ص - ٥ = ٠$.

مثال (٨ - ١٦) أوجد معادلة محور الانعكاس إذا علمت أن صورة النقطة هـ(٢ ، ١) هي النقطة هـَ(١ ، ٢) .

الحل

بما أن محور الانعكاس ينصف القطعة $\overline{هـ هـَ}$ ، وعمودياً عليها .

إذن إحداثي منتصف القطعة $\overline{هـ هـَ}$ هو $(\frac{٣}{٢} ، \frac{٣}{٢})$ ، وميل محور الانعكاس يساوي سالب مقلوب ميل:

$-١ \times \dfrac{١}{م(\overline{هـ هـَ})} = - \dfrac{١ - ٢}{٢ - ١} = - \dfrac{-١}{١} = ١$.

وعليه فإن معادلة محور الانعكاس هي : $(ص - \frac{٣}{٢}) = ١(س - \frac{٣}{٢})$ أو $ص - س = ٠$.

تمارين ومسائل (٨ : ٥)

[١] أوجد صورة كل نقطة من النقاط :

أ) (١ ، ٣) ، ب) (-٢ ، ٣) ، جـ) (٥ ، -٢) ، ء) (-١ ، -٣) .

بالانعكاس في المستقيم $س + ٢ص - ١ = ٠$.

[٢] ما هي النقاط التي صورها بالانعكاس في المستقيم $ص = ١$ هي :

أ) (٢ ، ٣) ، ب) (١ ، -٢) ، جـ) (-٢ ، -١) ، ء) (٠ ، ٥) .

[٣] أوجد صورة كل مستقيم من المستقيمات :

أ) $س = ٠$ ، ب) $س = ص$ ، جـ) $س - ص - ١ = ٠$ ،

ء) $٣س + ص - ٦ = ٠$

بالانعكاس في المستقيم $س + ٢ص - ٣ = ٠$

[٤] بيِّن جبرياً أن صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس في محور السينات هي النقطة (س ، -ص) .

[٥] ما هو المستقيم الذي صورته $٢س + ص - ١ = ٠$ بالانعكاس في المستقيم $س + ٢ص - ٣ = ٠$.

[٦] أوجد معادلة محور الانعكاس لكل نقطة وصورتها في كل حالة من الحالات التالية :

أ) هـ (١ ، ١) ، هـَ (٣ ، ١) . ب) هـ (٠ ، –١) ، هـَ (٢ ، ١) .

جـ) هـ (–١ ، ١) ، هـَ (٣ ، –١) .

[٧] أثبت أنّ صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس في المستقيم ص = س هي النقطة (ص ، س) ، ومن ثم أوجد صورة النقطة (٢ ، ١) بالانعكاس في المستقيم ص = س .

[٨] أثبت أن صورة النقطة (س، ص) بالانعكاس في المستقيم ص = –س هي النقطة (– ص ، – س) .

[٩] ما هي صورة المستقيم ٢ س + ص – ٢ = ٠ بالانعكاس في المستقيم .

أ) س = ٠ ب) ص = ٠

جـ) س = ٢ ء) ص = –٣

هـ) ص = س و) ص = – س ز) ص + ٢ س = ١ .

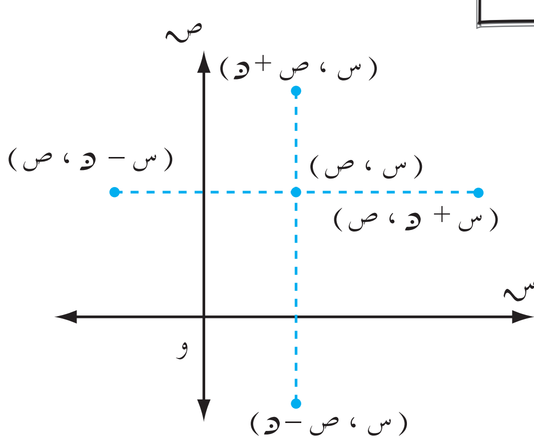
[١٠] أوجد صورة المثلث الذي رؤوسه النقاط (٣ ، –٢) ، (–١ ، ٠) ، (١ ، ٥) بالانعكاس في المستقيم :
ص + ٢ س + ١ = ٠ .

[١١] أوجد صورة المستطيل الذي رؤوسه النقاط (–٢ ، ٣) ، (١ ، ٤)، (٢ ، ١) ، (–١ ، ٠) بالانعكاس في المستقيم ص + س –١ = ٠ .

٨ : ٦ الانسحاب تحليلياً

تذكر أن :

– صورة النقطة (س ، ص) تحت تأثير انسحاب باتجاه محور السينات وبمقدار د من الوحدات هي النقطة (س ± د ، ص) ، وباتجاه محور الصادات وبمقدار د من الوحدات هي النقطة (س ، ص ± د) وتكون إشارة د بحسب اتجاه حركة الانسحاب في الاتجاه الموجب أو السالب لأيّ من المحورين [شكل (٨ – ٢١)] .



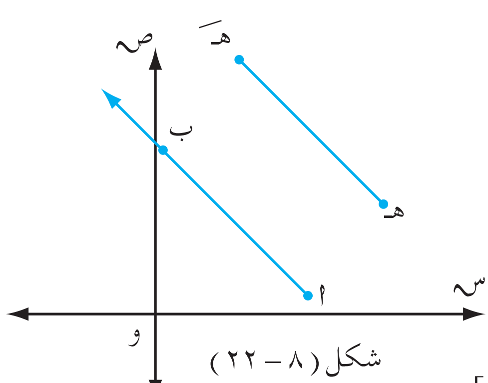
شكل (٨ – ٢١)

– الانسحاب يحافظ على الاطوال وقياس الزوايا .

– هـَ صورة النقطة هـ بانسحاب مقداره د وحدة طولية اتجاهه $\overleftarrow{\text{أب}}$ إذا كان :

١) $\overleftarrow{\text{هـهـَ}}$ // $\overleftarrow{\text{أب}}$.

٢) | هـهـَ | = د [انظر شكل (٨–٢٢)] .

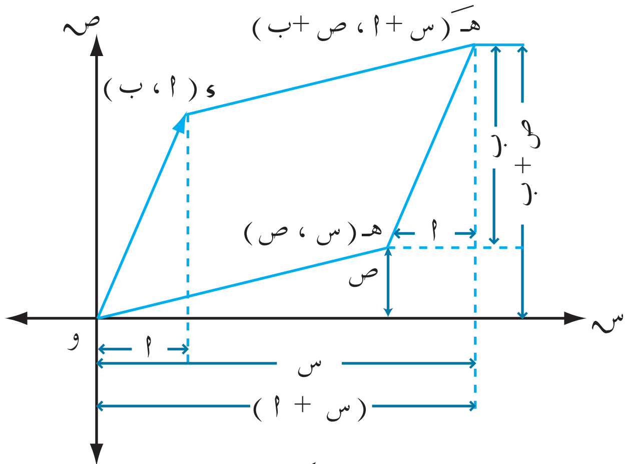


شكل (٨ – ٢٢)

وفي هذ البند سنعالج الانسحاب تحليلياً .

لنفرض أن هـ (س ،ص)نقطة في مستوى الإحداثيات، والمطلوب إيجاد صورة هـ بإنسحاب في اتجاه $\overleftarrow{\text{وء}}$ (أي من و إلى ء) وبمقدار | وء | [انظر شكل (٨–٢٣)] .

إذا أخذنا و نقطة الأصل ، فإنه يمكن تمثيل $\overleftarrow{و ى}$ بالنقطة (أ ، ب) ، أي أن الانسحاب باتجاه $\overleftarrow{و ى}$ وبمقدار | و ى | هو عبارة عن انسحابين أحدهما باتجاه محور السينات بمقدار أ وحدة طولية والآخر باتجاه محور الصادات بمقدار ب وحدة طولية [شكل(٨–٢٤)]، وبالتالي فإن صورة النقطة هـ (س ، ص) هي النقطة هـَ($س_١$، $ص_١$)حيث $س_١$ = س + أ ، $ص_١$ = ص + ب وعليه فإن :



شكل (٨ – ٢٣)

صورة هـ (س ، ص) بانسحاب (أ ، ب) هي هـَ (س + أ ، ص + ب) .
والنقطة هـ بدلالة صورتها هـَ ($س_١$ ، $ص_١$) بانسحاب (أ ، ب) هي :
هـ ($س_١$ − أ ، $ص_١$ − ب) .

مثال (٨ – ١٧) أوجد صورة النقطة (٣ ، ٤) بانسحاب (٢ ، ١) .

الحل

باستخدام القانون أعلاه فإن صورة النقطة (٣ ، ٤) هي النقطة هـَ(٣ + ٢ ، ٤ + ١) = (٥ ، ٥) .

مثال (٨ – ١٨) أوجد النقطة التي صورتها (٧ ، −١) بانسحاب (٢ ، ١) .

الحل

باستخدام القانون أعلاه فإن النقطة التي صورتها (٧ ، −١) هي (٧ − ٢ ، −١ −١) = (٥ ، −٢) .

مثال (٨ – ١٩) أوجد صورة المستقيم س + ٢ ص − ٥ = ٠ بانسحاب (٢ ، ١) .

الحل

لنأخذ أي نقطتين واقعتين على المستقيم س + ٢ ص − ٥ = ٠ ولتكن (١ ، ٢) ، (٥ ، ٠) وبالتالي فإن صورتيهما واقعتان على صورة المستقيم المعطى س + ٢ ص − ٥ = ٠ .

بما أن صورة (١ ، ٢) بانسحاب (٢ ، ١) هي (٣ ، ٣) ، وصورة (٥ ، ٠) بانسحاب (٢ ، ١) هي (٧ ، ١).

إذن معادلة المستقيم الواصل بين النقطتين (٣ ، ٣) ، (٧ ، ١) هي :

$$\frac{ص - ٣}{س - ٣} = \frac{١ - ٣}{٧ - ٣} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$$

أي أن ٢ (ص – ٣) = –١ (س – ٣)

٢ ص – ٦ = – س + ٣

أو س + ٢ ص – ٩ = ٠

وهي معادلة صورة المستقيم س + ٢ ص – ٥ = ٠ بانسحاب (٢ ، ١) .

مثال (٨ – ٢٠) أوجد الانسحاب إذا علمت أن صورة النقطة هـ (١ ، ٢) هي النقطة هـَ (–٢ ، ٥) .

الحل ليكن الانسحاب (أ ، ب) إذن (–٢ ، ٥) = (١ + أ ، ٢ + ب) . ومنه ينتج أن:

–٢ = ١ + أ ⟸ أ = –٣

٥ = ٢ + ب ⟸ ب = ٣

وعليه فإن الانسحاب هو (–٣ ، ٣) .

تمارين ومسائل (٨ : ٦)

[١] أوجد صورة كلّ من النقاط التالية بانسحاب (١ ، ٢) :

أ) (٥ ، –١) ب) (–١ ، ١) . جـ) (٠ ، ٢) ء) (–٣ ، –٤) .

[٢] أوجد النقاط التي صورها بانسحاب (٣ ، –١) هي :

أ) (٥ ، ٥) . ب) (–١ ، ٧) . جـ) (٥ ، –١) . ء) (–٢ ، –٣) .

[٣] أوجد الانسحاب إذا علمت أن صورة النقطة هـ هي هـَ في الحالات التالية :

أ) هـ (٢ ، ٣) ، هـَ (٤ ، ١) . ب) هـ (–١ ، ١) ، هـَ (١ ، ٣) .

جـ) هـ (–٢ ، –١) ، هـَ (٣ ، –١) . ء) هـ (–١ ، ٣) ، هـَ (–١ ، –١) .

[٤] أوجد صورة كلّ من المستقيمات التالية بانسحاب (–١ ، ٢) :

أ) س = ٠ . ب) ص = ٠ . جـ) س = أ .

ء) ص = ب . هـ) ص = س . و) ص = – س .

ز) ٢ س + ٣ ص – ٢ = ٠ .

[٥] أوجد المستقيمات التي صورها بانسحاب (–٢ ، –٣) هي :

أ) ص – ٢ س – ٢ = ٠ . ب) ص = س .

جـ) ص – س = ٢ . ء) ٢ ص = س + ٢ .

[٦] أوجد صورة المثلث الذي رؤوسه النقاط (١ ، ٣) ، (٧ ، ٥) ، (٢ ، ٠) بانسحاب (٣ ، –٢) .

[٧] إذا كانت صورة النقطة (٦ ، ٢) هي النقطة (٢ ، ٧) ، وصورة النقطة (–١ ، ٥) هي هـَ بالانسحاب. أوجد الانسحاب وإحداثي النقطة هـَ .

[٨] إذا كانت صورة النقطة (٩ ، ١) هي النقطة (٢ ، –٣) ، وصورة النقطة هـ هي (–٥ ، ٦) بالانسحاب. أوجد الانسحاب وإحداثي النقطة هـ .

الوحدة التاسعة
المتجهـــات

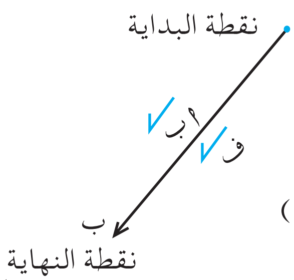
٩ : ١ المتجهـات

سبق وأن درست بعض الكميات الفيزيائية منها : الكتلة – درجة الحرارة – الإزاحة – السرعة – العجلة – القوة ، نجد أن بعض الكميات مثل الكتلة ودرجة الحرارة تتعين تعييناً تاماً بذكر مقدارها العددي فقط، وهذه الكميات تسمى كميات عددية بينما بعض الكميات، مثل الإزاحة، والسرعة، والعجلة، والقوة تتعين تعييناً تاماً بذكر مقدارها واتجاهها ومثل هذه الكميات تسمى كميات متجهة، أو تسمى متجهات .

تعريف (٩ : ١)

المتجه هو كمية لها مقدار واتجاه .

ويرمز للمتجه بالرمز $\overleftarrow{\text{ف}}$ أو $\overleftarrow{\text{س}}$ ونمثله هندسياً بقطعة مستقيمة لها نقطة بداية ولتكن ﺃ ونقطة نهاية ولتكن ب فنكون قد حدّدنا اتجاهاً للقطعة المستقيمة ونرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{ﺃب}}$ (يدل السهم على الاتجاه) .
[شكل (٩ – ١)] .



شكل (٩–١)

فيكون طول القطعة المستقيمة ممثلاً لمقدار المتجه $\overleftarrow{\text{ف}}$ واتجاه القطعة المستقيمة ممثلاً لاتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{ف}}$.

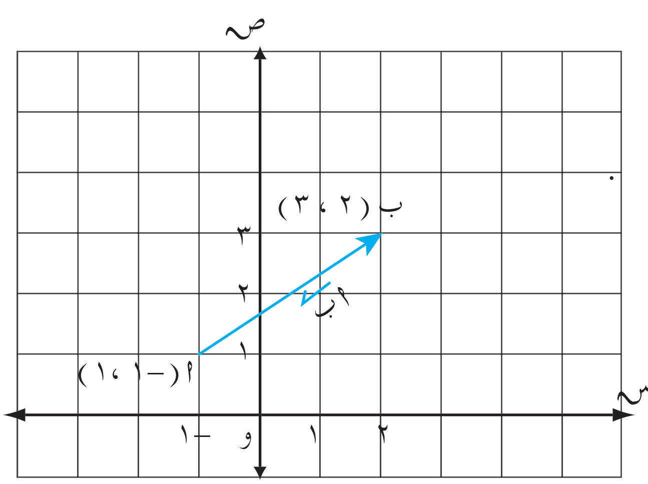
وقد تعرفنا في الهندسة التحليلية كيف نرسم قطعة مستقيمة في المستوى والآن سنعرف كيف نرسم متجهاً معلوماً نقطتا بدايته ونهايته في مستوى الإحداثيات .

مثال (٩ – ١) ارسم المتجه $\overleftarrow{\text{ﺃب}}$ في المستوى الإحداثي حيث ﺃ (–١ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) .

الحـــل

١– نمثل النقطتين ﺃ ، ب في المستوى .

٢ – نرسم سهماً بدايته النقطة ﺃ ونهايته النقطة ب [شكل (٩ – ٢)] .



شكل (٩–٢)

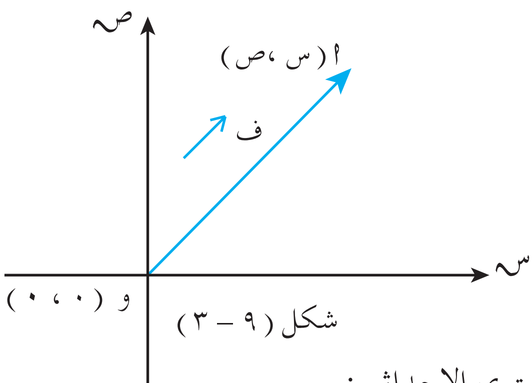
المتجّه القياسي :

المتجه و أ ممثل ف كما في [الشكل (٩ – ٣)] يسمى بالمتجه القياسي (متجه الموضع) .

تعريف (٩ : ٢)

المتجّه القياسي هو متجّه مرسوم في المستوى الإحداثي بحيث تكون بدايته مبدأ تقاطع الإحداثيات و (٠ ، ٠) ونهايته أي نقطة أ (س ، ص) في المستوى ويمثله الزوج المرتب (س ، ص) .

ويكتب المتجه القياسي بدلالة النقطة أ (س ، ص)
كما في الشكل (٩–٣) .



شكل (٩ – ٣)

مثال (٩ – ٢) ارسم المتجهات القياسية التالية في المستوى الإحداثي :

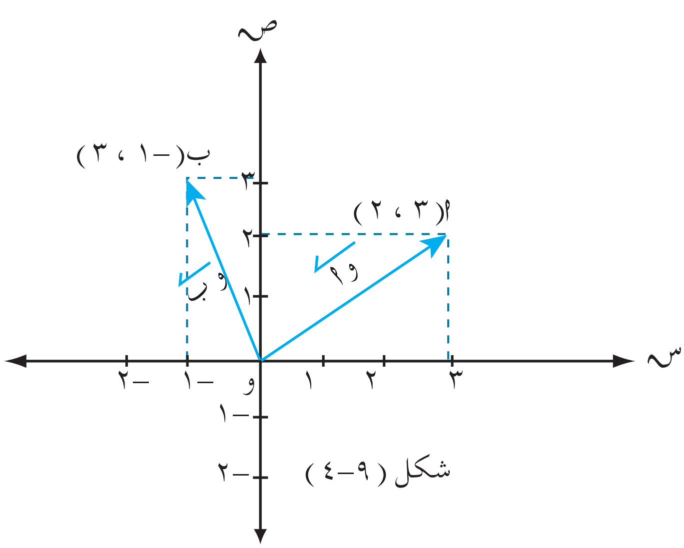
١) و أ = (٣ ، ٢) .

٢) و ب = (–١ ، ٣) .

الحل

١ – تمثل النقطة أ (٣ ، ٢) في المستوى الإحداثي ، ثم نرسم سهماً بدايته و (٠ ، ٠) ونهايته النقطة أ (٣ ، ٢) .

٢ – لتمثيل و ب نتبع الخطوات السابقة نفسها [شكل (٩ – ٤)] .



شكل (٩–٤)

تكافؤ القطع الموجهة :

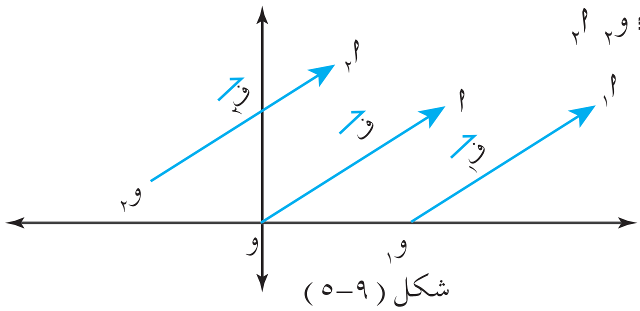
تعريف (٩ : ٣)

تكون القطعتان الموجهتان متكافئتين إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه بمعنى أن لهما متجه الموضع نفسه .

من الشكل (٩–٤) المتجه $\overleftarrow{و_١ ا_١}$ يكافئ المتجه $\overleftarrow{و_٢ ا_٢}$ لأن لهما نفس متجه الموضع $\overleftarrow{ف}$

ونقول أن المتجهات المذكورة متساوية (متكافئة)

ونكتب رمزياً : $\overleftarrow{ف} \cong \overleftarrow{و\, ا} \cong \overleftarrow{ف_١} \cong \overleftarrow{و_١ ا_١} \cong \overleftarrow{ف_٢} \cong \overleftarrow{و_٢ ا_٢}$



شكل (٩–٥)

تساوي المتجهات :

ليكن $\overleftarrow{ف_١}$ = (س١ ، ص١) ، $\overleftarrow{ف_٢}$ = (س٢ ، ص٢) متجهان في المستوى الإحداثي

فإن : $\overleftarrow{ف_١} = \overleftarrow{ف_٢} \Leftrightarrow$ س١ = س٢ ∧ ص١ = ص٢ .

جمع المتجهات وطرحها :

ليكن $\overleftarrow{ف_١}$ = (س١ ، ص١) ، ف٢ = (س٢ ، ص٢) متجهان في المستوى الأحداثي

فإن : $\overleftarrow{ف_١} \pm \overleftarrow{ف_٢}$ = (س١ ، ص١) ± (ص٢ ، ص٢) .

= (س١ ± س٢ ، ص١ ± ص٢) .

ضرب متجهة في عدد حقيقي (عدد قياسي) :

ليكن $\overleftarrow{ف}$ = (س ، ص) ، ك عدد حقيقي

فإن : (ك $\overleftarrow{ف}$) = (ك س ، ك ص) .

خواص ضرب متجه بعدد حقيقي :

١) ك ($\overleftarrow{ف_١}$ + $\overleftarrow{ف_٢}$) = ك $\overleftarrow{ف_١}$ + ك $\overleftarrow{ف_٢}$. ٢) (ك١ + ك٢) $\overleftarrow{ف}$ = ك١ $\overleftarrow{ف}$ + ك٢ $\overleftarrow{ف}$.

٣) ك١ (ك٢ $\overleftarrow{ف}$) = (ك١ ك٢) . $\overleftarrow{ف}$.

مثال (٩ – ٣) أوجد ناتج ما يلي :

١) (٥ ، ٤) + (٣ ، ٢) . ٢) (٢ ، ٧) – (– ٥ ، ٦) . ٣) ٧ × (٢ ، –٣) .

الحـــل

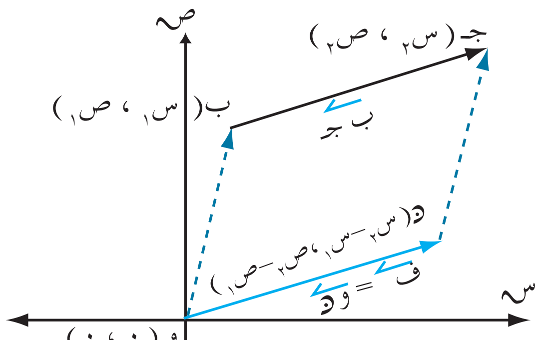
١) (٥ ، ٤) + (٣ ، ٢) = (٥ + ٣ ، ٤ + ٢) = (٨ ، ٦) .

٢) (٢ ، ٧) – (– ٥ ، ٦) = (٢ – (–٥) ، ٧ – ٦) = (٢ + ٥ ، ١) = (٧ ، ١) .

٣) ٧ × (٢ ، –٣) = (٧ × ٢ ، ٧ × –٣) = (١٤ ، –٢١) .

تمثيل متجّه $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ بمتجّه قياسي .

إذا كان $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ متجهاً في المستوى الإحداثي حيث ب (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، جـ (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) فإن :
المتجه القياسي لهذا المتجه $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ هو المتجه القياسي $\overleftarrow{\text{و د}}$ يمثل بالزوج المرتب (س$_{٢}$ − س$_{١}$ ، ص$_{٢}$ − ص$_{١}$)
انظر الشكل (٩–٥) .



شكل (٩ – ٥)

فيكون :

$\overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{و د}} =$ (س$_{٢}$ − س$_{١}$ ، ص$_{٢}$ − ص$_{١}$) .

ويمكن كتابة ذلك بالشكل $\overleftarrow{\text{ب جـ}} =$ (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) − (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ⟸ $\boxed{\overleftarrow{\text{ب جـ}} = \text{جـ} - \text{ب}}$.

مثال (٩ – ٤)

إذا كانت أ (٢ ، ٣) ، ب (٥ ، ٤) ، جـ (−١ ، ٢) ثلاث نقاط في المستوى .
فأوجد :

١) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، وماذا نستنتج ؟ ٢) $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$. ٣) $\overleftarrow{\text{و ب}}$.

الحـــل

١) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = ب − أ = (٥ ، ٤) − (٢ ، ٣) = (٥ − ٢ ، ٤ − ٣) ⟸ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = (٣ ، ١) .
$\overleftarrow{\text{ب أ}}$ = أ − ب = (٢ ، ٣) − (٥ ، ٤) = (٢ − ٥ ، ٣ − ٤) ⟸ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ = (−٣ ، −١) .
نستنتج أن : $\overleftarrow{\text{أ ب}} \neq \overleftarrow{\text{ب أ}}$ ويُسميا متجهين متعاكسين .

٢) $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = جـ − ب = (−١ −٥ ، ٢ −٤) = (−٦ ، −٢) .

٣) ∵ $\overleftarrow{\text{و ب}}$ متجه قياسي ⟸ $\overleftarrow{\text{و ب}}$ = (٥ ، ٤) .

لاحظ أنه : كل متجه $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ في المستوى يُمثل بمتجه قياسي وحيد $\overleftarrow{\text{و د}}$ = (س ، ص) ، وبالتالي نقول أنه كل متجه قياسي $\overleftarrow{\text{و د}}$ = (س ، ص) في مستوى الإحداثيات يقابل زوجا مرتبا وحيداً من الأعداد الحقيقية هو د (س ، ص) والعكس صحيح فكل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية د (س ، ص) يحدِّد متجهاً قياسياً وحيداً $\overleftarrow{\text{و د}}$ حيث د (س ، ص) .

تطابق متجهين :

تعرف أن شرط تطابق (تساوي) متجهين $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ ، وهو عندما يكونا متوازيين ومن اتجاه واحد ولهما نفس الطول ، وبشكل مكافئ .

$\overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{ء هـ}}$ ⟺ جـ − ب = هـ − ء .

مثال (٩ – ٥)

إذا كانت ب (٢ ، –١) ، أ (س ، ص) . فأوجد إحداثي النقطة أ ليكون $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = (٧ ، ٥) .

الحـــل

∵ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = ب – أ ⇐ (٧ ، ٥) = (٢ ، –١) –(س ، ص) ⇐ (٧ ، ٥) = (٢ – س ، –١ – ص)

⇐ ٧ = ٢ – س ، ٥ = –١ – ص

⇐ س = –٥ ، ص = –٦ ⇐ أ(–٥ ، –٦) .

طول المتجه وميله :

تعريف (٩ : ٤)

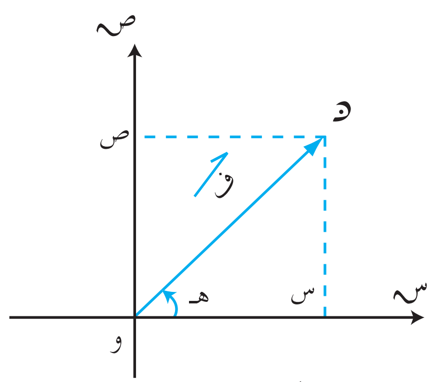
لكل متجه $\overleftarrow{\text{ف}}$ = (س ، ص) طولاً يرمز له | $\overleftarrow{\text{ف}}$ |

ويعطى بالعلاقة :

| $\overleftarrow{\text{ف}}$ | = | $\overleftarrow{\text{و د}}$ | = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$.

وميله يعطى بالعلاقة :

ميل $\overleftarrow{\text{و د}}$ = ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، حيث هـ هي قياس الزاوية التي يصنعها المتجه مع محور السينات الموجب .



شكل (٩ – ٦)

مثال (٩ – ٦)

أوجد طول ، وميل المتجه $\overleftarrow{\text{ف}}$ = (٢ ، ٢ $\sqrt{3}$)

الحـــل

| $\overleftarrow{\text{ف}}$ | = $\sqrt{(٢)^2 + (٢\sqrt{٣})^2}$ = $\sqrt{٤ + ١٢}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ .

وميل المتجه $\overleftarrow{\text{ف}}$ = ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٢}$ = $\sqrt{٣}$.

مثال (٩ – ٧)

لتكن أ (٠ ، ٧) ، ب (٢ $\sqrt{٣}$ ، ٩) فأوجد

١) طول المتجه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$.
٢) ميل المتجه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$.

٣) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الحـــل

أولاً نوجد : $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = ب – أ ⇐ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = (٢ $\sqrt{٣}$ – ٠ ، ٩ – ٧) ⇐ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = (٢ $\sqrt{٣}$ ، ٢)

⇐ س = ٢ $\sqrt{٣}$ ، ص = ٢ .

١) $|\overleftarrow{\text{أ ب}}| = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}} \Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ ب}}| = \sqrt{(٢\sqrt{٣})^{٢} + (٢)^{٢}} = \sqrt{١٢ + ٤} = \sqrt{١٦} = ٤$

٢) ميل المتجه $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \dfrac{\text{ص}}{\text{س}} = \dfrac{٢}{٢\sqrt{٣}} = \dfrac{١}{\sqrt{٣}}$.

٣) $\because$ ظاهـ $= \dfrac{\text{ص}}{\text{س}} \Leftarrow$ ظاهـ $= \dfrac{١}{\sqrt{٣}} \Leftarrow$ هـ $= ٣٠^{\circ}$.

مثال (٩ – ٨) إذا كانت ب (– ٣ ، ٤) ، جـ(–٢ ، ك) ، فأوجد قيمة ك التي تجعل $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع المحور السيني الموجب .

الحل

نوجد $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = جـ – ب $\Leftarrow \overleftarrow{\text{ب جـ}} = (–٢ – (–٣) ، ك – ٤) = (–٢ + ٣ ، ك – ٤)$

$\Leftarrow \overleftarrow{\text{ب جـ}} = (١ ، ك – ٤) \Leftarrow$ س $= ١$ ، ص $=$ ك $– ٤$ ، هـ $= ١٣٥^{\circ}$.

، $\because$ ظاهـ $= \dfrac{\text{ص}}{\text{س}} \Leftarrow$ ظا $١٣٥^{\circ} = \dfrac{\text{ك} – ٤}{١}$.

$\Leftarrow$ ظا $(\pi – ٤٥^{\circ}) =$ ك $– ٤ \Leftarrow$ – ظا $٤٥^{\circ} =$ ك $– ٤ \Leftarrow –١ =$ ك $– ٤ \Leftarrow$ ك $= ٣$.

مثال (٩ – ٩) إذا كان جـ(١ ، ١) ، ء (–٢ ، ٣) ، فأوجد $|\overleftarrow{\text{جـ ء}}|$ ، $|\overleftarrow{\text{ء جـ}}|$ ، ماذا تلاحظ؟

الحل

$\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ = ء – جـ $= (–٣ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ = جـ – ء $= (٣ ، –٢)$

$\Leftarrow |\overleftarrow{\text{جـ ء}}| = \sqrt{(–٣)^{٢} + (٢)^{٢}} = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$ ،

$|\overleftarrow{\text{ء جـ}}| = \sqrt{(٣)^{٢} + (–٢)^{٢}} = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$.

نستنتج أن $|\overleftarrow{\text{جـ ء}}| = |\overleftarrow{\text{ء جـ}}|$.

تمارين ومسائل (٩ : ١)

[١] أكمل ما يأتي : أ) المتجه وممثله لهما نفس .... ، ....

ب) المتجهان $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ متساويان في ..... ومتعاكسان في ....

جـ) نقول أن $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ إذا وفقط إذا كان ب – أ = ...

ء) إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}$ = (٢ ، ١) فإن $\left|\overleftarrow{\text{ف}}\right|$ = ... وميل $\overleftarrow{\text{ف}}$ = ...

هـ) إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}_{١}$ = (٢ ك ، ٣) ، $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$ = (١٢ ، ٣) ، فإن قيمة ك التي تجعل $\overleftarrow{\text{ف}}_{١}$ = $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$ تساوي ....

[٢] ارسم المتجهات التالية في المستوى الإحداثي :

أ) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ (٧ ، ٠) ، ب (–٢ ، ٥) . ب) $\overleftarrow{\text{و د}}$ = (–٣ ، ٧) .

جـ) $\overleftarrow{\text{ف}}$ = (٤ ، ٠) .

[٣] إذا كانت أ (٢ ، ٧) ، ب (٤ ، ٩) ، جـ (١ ، ٣) ، ء (–١ ، ١) اربع نقاط في المستوى الإحداثي والمطلوب :

أ) أوجد $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء ب}}$ ، ثم أوجد أطوالها .

ب) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مع المحور سٓ الموجب ، وكذلك أوجد ميله .

جـ) أثبت أن $\overleftarrow{\text{أب}}$ = $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$.

[٤] إذا كانت أ (٢ ، ١) ، ب (٥ ، ك) ، فأوجد قيم ك في جميع الحالات الآتية :

أ) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = (٣ ، ١٥) . ب) $\left|\overleftarrow{\text{أ ب}}\right|$ = ٥ .

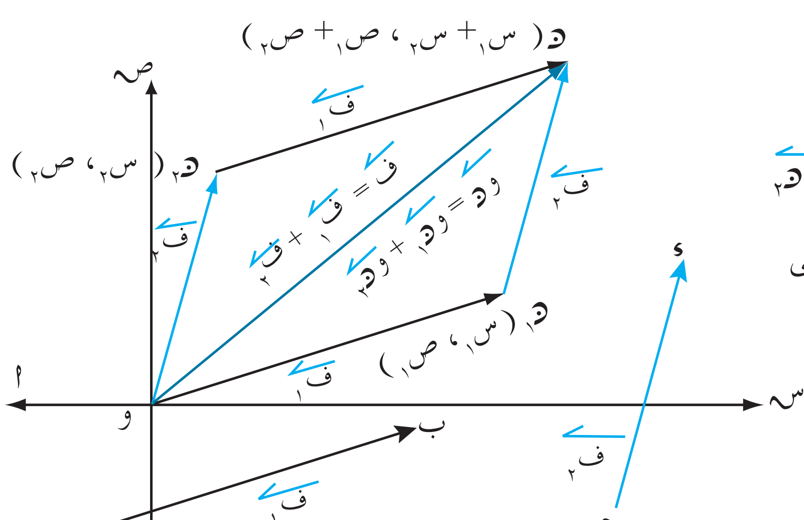
جـ) ميل $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{١}{٣}$. ء) قياس زاوية $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني ٤٥° .

٩ : ٢ تمثيل العمليات على المتجهات هندسياً

أولاً – جمع المتجهات هندسياً :

في [الشكل (٩ – ٧)] $\overleftarrow{\text{و د}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{و د}}_{٢}$ متجهان ممثلان للمتجهين $\overleftarrow{\text{ف}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$ على الترتيب فإن :

$\overleftarrow{\text{و د}}_{١}$ + $\overleftarrow{\text{و د}}_{٢}$ = $\overleftarrow{\text{و د}}$.



شكل (٩ – ٧)

تعريف (٩ : ٥)

مجموع المتجهين $\overleftarrow{ف_{١}}$ ، $\overleftarrow{ف_{٢}}$ هو المتجه $\overleftarrow{ف}$ الذي يمثله حاصل جمع المتجهين $\overleftarrow{و د_{١}}$ ، $\overleftarrow{و د_{٢}}$ الممثلين لـ $\overleftarrow{ف_{١}}$ ، $\overleftarrow{ف_{٢}}$ فيكون : $\overleftarrow{ف} = \overleftarrow{ف_{١}} + \overleftarrow{ف_{٢}} = \overleftarrow{و د_{١}} + \overleftarrow{و د_{٢}} = \overleftarrow{و د}$.

لاحظ أن :

١) المحصلة $\overleftarrow{و د}$ تمثل قطر متوازي الأضلاع و د١ د د٢ ، ولذلك تسمى هذه القاعدة قاعدة متوازي الأضلاع .

٢) من الشكل (٩ – ٧) نجد أن :

$\boxed{\overleftarrow{ف_{١}} + \overleftarrow{ف_{٢}} = \overleftarrow{ف_{٢}} + \overleftarrow{ف_{١}} = \overleftarrow{ف}}$ أي أن عملية جمع المتجهات إبدالية .

٣) من الشكل (٩ –٧) لإيجاد $\overleftarrow{ف_{١}} + \overleftarrow{ف_{٢}}$ نكتفي برسم ضلعين ، وقطر من متوازي الأضلاع ولنأخذ المثلث و د١ د في الشكل (٩–٧)] .

فيكون : $\boxed{\overleftarrow{ف} = \overleftarrow{ف_{١}} + \overleftarrow{ف_{٢}} = \overleftarrow{و د_{١}} + \overleftarrow{د_{١} د} = \overleftarrow{و د}}$.

وسنحصل على نفس النتيجة عندما نأخذ المثلث و د٢ د في نفس الشكل

فيكون : $\boxed{\overleftarrow{ف} = \overleftarrow{ف_{٢}} + \overleftarrow{ف_{١}} = \overleftarrow{و د_{٢}} + \overleftarrow{د_{٢} د} = \overleftarrow{و د}}$.

كلٌ من القاعدتين تسمى قاعدة المثلث .

خواص عملية جمع المتجهات :

١) عملية الجمع ثنائية على مجموعة المتجهات في المستوى .

٢) عملية الجمع إبدالية لأن : $\overleftarrow{ف_{١}} + \overleftarrow{ف_{٢}} = \overleftarrow{ف_{٢}} + \overleftarrow{ف_{١}}$.

٣) عملية الجمع تجمية لأن : $(\overleftarrow{ف_{١}} + \overleftarrow{ف_{٢}}) + \overleftarrow{ف_{٣}} = \overleftarrow{ف_{١}} + (\overleftarrow{ف_{٢}} + \overleftarrow{ف_{٣}})$.

٤) العنصر المحايد الجمعي هو المتجه الصفري $\overleftarrow{٠}$ لأن $\overleftarrow{ف} + \overleftarrow{٠} = \overleftarrow{٠} + \overleftarrow{ف} = \overleftarrow{ف}$.

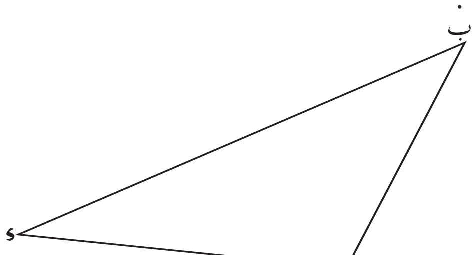
٥) لكل متجه $\overleftarrow{ف}$ نظير جمعي هو ($-\overleftarrow{ف}$) فإذا كان $\overleftarrow{ف} = \overleftarrow{أ ب}$ فإن نظير المتجه $\overleftarrow{ف}$ هو $(-\overleftarrow{ف}) = -(\overleftarrow{أ ب}) = \overleftarrow{ب أ}$ ،

ونجد : $\overleftarrow{ف} + (-\overleftarrow{ف}) = \overleftarrow{٠} \Leftarrow \overleftarrow{أ ب} + \overleftarrow{ب أ} = \overleftarrow{٠}$.

مثال (٩– ١٠)

إذا كان ب جـ د مثلث] شكل (٩–٨)] .

أثبت أن : $\overleftarrow{ب جـ} + \overleftarrow{جـ ء} + \overleftarrow{ء ب} = \overleftarrow{٠}$



شكل (٩ – ٨)

الحــل

الطرف الأيمن $= (\overleftarrow{ب جـ} + \overleftarrow{جـ ء}) + \overleftarrow{ء ب}$

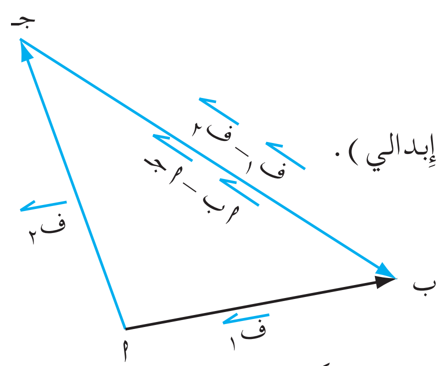
$= \overleftarrow{ب ء} + \overleftarrow{ء ب}$

$= \overleftarrow{ب ء} + (-\overleftarrow{ب ء}) = \overleftarrow{٠}$ = الطرف الأيسر .

ثانياً : طرح المتجهات هندسياً :

تعريف (٩ : ٦)

ناتج طرح متجه $\overrightarrow{\text{ف}_2}$ من المتجه $\overrightarrow{\text{ف}_1}$ هو عبارة عن حاصل جمع المتجه $\overrightarrow{\text{ف}_1}$ مع نظير $\overrightarrow{\text{ف}_2}$
فيكون : $\overrightarrow{\text{ف}_1} - \overrightarrow{\text{ف}_2} = \overrightarrow{\text{ف}_1} + (-\overrightarrow{\text{ف}_2})$.



شكل (٩ – ٩)

ليكن $\overrightarrow{\text{ف}_1} = \overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ف}_2} = \overrightarrow{\text{أ جـ}}$ [شكل (٩ – ٩)]

فإن $\overrightarrow{\text{ف}_1} - \overrightarrow{\text{ف}_2} = \overrightarrow{\text{ف}_1} + (-\overrightarrow{\text{ف}_2})$

$\Leftarrow$ $\overrightarrow{\text{أ ب}} - \overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{جـ أ}} = \overrightarrow{\text{جـ أ}} + \overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{جـ ب}}$. (الجمع إبدالي) .

$\Leftarrow$ $\boxed{\overrightarrow{\text{أ ب}} - \overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{جـ ب}}}$

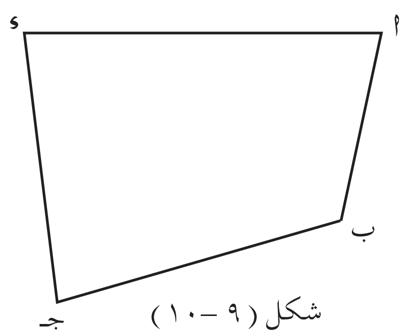
ويمكن الوصول إلى النتيجة نفسها عن طريق تطبيق قاعدة المثلث . فيكون : $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{أ جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ب}}$

وبإضافة نظير $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ إلى الطرفين ينتج : $\overrightarrow{\text{أ ب}} - \overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{جـ ب}}$.

مثال (٩ – ١١) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء أربع نقاط في المستوى [الشكل (٩–١٠)]
أوجد ما يلي :

١) $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}}$

٢) $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}} + \overrightarrow{\text{ء أ}}$



شكل (٩–١٠)

الحـــل

١) $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}} = (\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}}) + \overrightarrow{\text{جـ ء}}$.

$= \overrightarrow{\text{أ جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}} = \overrightarrow{\text{أ ء}}$.

٢) $(\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}}) + \overrightarrow{\text{ء أ}} = \overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء أ}} = \overrightarrow{\text{٠}}$.

مثال (٩ – ١٢) أ ب جـ مثلث ، ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ [شكل (٩–١١)]

الحـــل

اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أ ء}}$.

نكمل رسم متوازي الأضلاع أب هـ جـ [شكل (٩–١١)] فيكون :

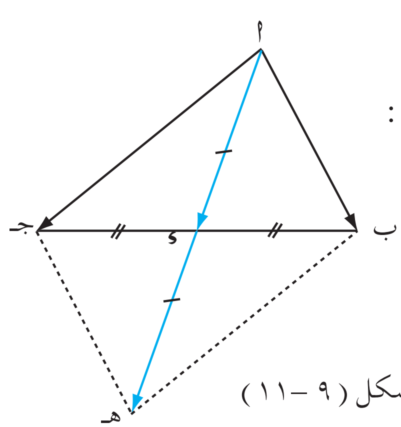
$\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}} = \overrightarrow{\text{أ هـ}}$ (قاعدة متوازي الأضلاع) .

، ∵ القطران في متوازي الأضلاع ينصف كلاً منها الأخر .

∴ $\overrightarrow{\text{أ ء}} = \overrightarrow{\text{ء هـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ هـ}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أ ء}}$.

∴ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ جـ}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أ ء}}$.



شكل (٩–١١)

حل آخر :

∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ——— (١)   ∵ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$ = $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ——— (٢)

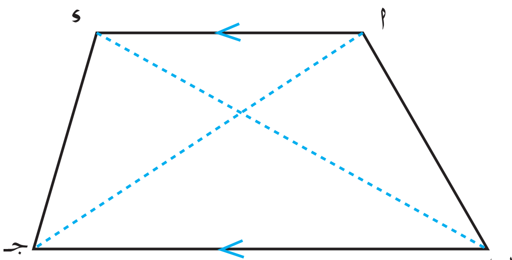
بجمع (١)،(٢) ينتج أن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ + ($\overrightarrow{\text{ب ء}}$ + $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$) = ٢ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$.

، ∵ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ + $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$ = $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ + $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ = $\overrightarrow{٠}$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$.

مثال (٩ – ١٣) أ ب جـ ء شبه منحرف [شكل (٩ – ١٢)] فيه $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$.

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$.



شكل (٩ – ١٢)

الحـــل

∵ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ——— (١)

، ∵ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ——— (٢)

بالجمع ينتج أن :

$\overrightarrow{\text{أجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ ء}}$.

⟸ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = $\overrightarrow{٠}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ لأن $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$

⟸ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$.

تمارين ومسائل (٩ : ٢)

[١] أي العبارات التالية صائبة، وأيها خطأ مع تصويب الخطأ أينما وجد :

١ – إذا كان $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ = (٥ ، –٢) ، $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ = (–١ ، ٤) فإن $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ + $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ = (٦ ، ٢) .

٢ – إذا كان ك (١ ، ٢) = (٣ ، –١) + (–١ ، ٥) فإن قيمة ك = ٤ .

٣ – إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث نقاط في المستوى فإن $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$.

٤ – إذا كان ك $\overrightarrow{\text{ف}}$ + $\overrightarrow{\text{ف}}$ = $\overrightarrow{٠}$ فإن قيمة ك = ١ .

٥ – إذا كان ء منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$.

[٢] إذا كان $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ = (٢ ، –٢) ، $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ = (٠ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ف}}_3$ = ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$) . فأوجد ناتج ما يأتي :

١) ٢ $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ – ٥ $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ ، ٢) $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ + ٣ ($\overrightarrow{\text{ف}}_2$ – ٤ $\overrightarrow{\text{ف}}_3$) ، ٣) | $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ | .

[٣] إذا كان $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ = (٧ ، ١٢) ، $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ = (–١ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ف}}_3$ = (٩ ، ٤) . فأوجد قيمة ك التي تحقق المعادلة : $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ + ك $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ = $\overrightarrow{\text{ف}}_3$.

[٤] إذا كانت أ(٢ ، ٤) ، ب(٥ ، ٧) ، جـ(٠ ، –٢) ، ء(١ ، –١) ، $\overrightarrow{\text{ف}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أب}}$ – ٤ $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$

المطلوب : ١ – أوجد مركبتي $\overrightarrow{\text{ف}}$ ، ثم أوجد طوله وميله .   ٢ – أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$.

[٥] إذا كانت أ(−٢ ، ٤) ، ب (٣ ، ٧) ، جـ(−٣ ، −٢) ، ء(س ، ص) . فأوجد إحداثي النقطة ء في كل من الحالات التالية :

١) $\overleftarrow{\text{أء}} = (٣ ، ١)$ ، ٢) $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} = ٢\,\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ ، ٣) $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{جـ ء}}$.

[٦] أ ب جـ مثلث ، ء $\in \overline{\text{ب جـ}}$ بحيث كان $\overleftarrow{\text{ب ء}} = ٣\,\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ فأثبت أن :

١) $\overleftarrow{\text{ب أ}} + \overleftarrow{\text{أ جـ}} = ٤\,\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ ، ٢) $\overleftarrow{\text{ء أ}} + \overleftarrow{\text{أ ب}} = ٣\,\overleftarrow{\text{ء جـ}}$.

[٧] أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{ب جـ}} \,//\, \overline{\text{أ ء}}$ ، $|\overline{\text{ب جـ}}| = ٣\,|\overline{\text{أ ء}}|$.أثبت أن : $\overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{ب ء}} = ٤\,\overleftarrow{\text{أ ء}}$.

[٨] إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ خمس نقاط في المستوى فأكمل ما يأتي :

١) $\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ء}} + \overleftarrow{\text{ء هـ}} = \ldots\ldots$ ٢) $\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ء}} + \overleftarrow{\text{ء هـ}} + \overleftarrow{\text{هـ أ}} = \ldots\ldots$

٩ : ٣ تــوازي وتعامـــد متجهيــن

في ضوء معرفتك لميل الخط المستقيم سنستنتج شرطي توازي وتعامد متجهين :

فإذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}_١ = \overleftarrow{\text{و د}}_١ = (\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢ = \overleftarrow{\text{و د}}_٢ = (\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢)$ فإنه .

أولاً : يتوازي المتجهان $\overleftarrow{\text{ف}}_١$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢$ إذا وفقط إذا كان :

$$\text{ميل } \overleftarrow{\text{و د}}_١ = \text{ميل } \overleftarrow{\text{و د}}_٢ \Leftarrow \frac{\text{ص}_١}{\text{س}_١} = \frac{\text{ص}_٢}{\text{س}_٢}$$

$$\Leftarrow \text{س}_١\text{ص}_٢ = \text{س}_٢\text{ص}_١ \Leftarrow \text{س}_١\text{ص}_٢ - \text{س}_٢\text{ص}_١ = ٠ \,.$$

$$\therefore \boxed{\overleftarrow{\text{ف}}_١ \,//\, \overleftarrow{\text{ف}}_٢ \Leftrightarrow \text{س}_١\text{ص}_٢ - \text{س}_٢\text{ص}_١ = ٠ \,.}$$

$$\because \frac{\text{ص}_١}{\text{س}_١} = \frac{\text{ص}_٢}{\text{س}_٢} \Leftarrow \frac{\text{س}_٢}{\text{س}_١} = \frac{\text{ص}_٢}{\text{ص}_١} = \text{ك} \Leftarrow \frac{\text{س}_٢}{\text{س}_١} = \text{ك} \Leftarrow \text{س}_٢ = \text{ك س}_١$$

$$\frac{\text{ص}_٢}{\text{ص}_١} = \text{ك} \Leftarrow \text{ص}_٢ = \text{ك ص}_١$$

$$\because \overleftarrow{\text{و د}}_٢ = (\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢) \,.$$

$$\therefore \overleftarrow{\text{و د}}_٢ = (\text{ك س}_١ ، \text{ك ص}_١) = \text{ك}\,(\text{س}_١ ، \text{ص}_١) = \text{ك}\,\overleftarrow{\text{و د}} \Leftarrow \overleftarrow{\text{ف}}_٢ = \text{ك}\,\overleftarrow{\text{ف}}_١ \,.$$

$$\therefore \boxed{\overleftarrow{\text{ف}}_١ \,//\, \overleftarrow{\text{ف}}_٢ \Leftrightarrow \overleftarrow{\text{ف}}_٢ = \text{ك}\,\overleftarrow{\text{ف}}_١ \,.}$$

ثانياً – يتعامد المتجهان $\overleftarrow{\text{ف}}_١$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢$ إذا وفقط إذا كان :

$$\text{ميل } \overleftarrow{\text{و د}}_١ \times \text{ميل } \overleftarrow{\text{و د}}_٢ = -١ \Leftarrow \frac{\text{ص}_١}{\text{س}_١} \times \frac{\text{ص}_٢}{\text{س}_٢} = -١ \Leftarrow \text{ص}_١\text{ص}_٢ = -\text{س}_١\text{س}_٢$$

$$\Leftarrow \text{س}_١\text{س}_٢ + \text{ص}_١\text{ص}_٢ = ٠ \,.$$

نستنتج مما سبق شرط التعامل التالي :

$$\boxed{\overleftarrow{\text{ف}}_1 \perp \overleftarrow{\text{ف}}_2 \Leftrightarrow \text{س}_1\text{س}_2 + \text{ص}_1\text{ص}_2 = 0}$$

مثال (٩ – ١٤) إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}_1 = (2 ، -1)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_2 = (-6 ، 3)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_3 = (1 ، 2)$:

أثبت أن :

١) $\overleftarrow{\text{ف}}_1 \,//\, \overleftarrow{\text{ف}}_2$. ٢) $\overleftarrow{\text{ف}}_2 \perp \overleftarrow{\text{ف}}_3$. ٣) ما علاقة $\overleftarrow{\text{ف}}_1$ بـ $\overleftarrow{\text{ف}}_3$.

الحل

١) $\because \overleftarrow{\text{ف}}_1 = (2 ، -1) \Leftarrow \text{س}_1 = 2$ ، $\text{ص}_1 = -1$.

$\because \overleftarrow{\text{ف}}_2 = (-6 ، 3) \Leftarrow \text{س}_2 = -6$ ، $\text{ص}_2 = 3$.

$\because \text{س}_1\text{ص}_2 - \text{س}_2\text{ص}_1 = 2 \times 3 - (-6) \times (-1) = 6 - 6 = \text{صفر}$.

$\therefore \overleftarrow{\text{ف}}_1 \,//\, \overleftarrow{\text{ف}}_2$

حل آخر :

١) $\because \overleftarrow{\text{ف}}_2 = (-6 ، 3)$ $\therefore \overleftarrow{\text{ف}}_2 = -3\,(2 ، -1)$

$\therefore \overleftarrow{\text{ف}}_2 = -3\,\overleftarrow{\text{ف}}_1$ $\therefore \overleftarrow{\text{ف}}_2 \,//\, \overleftarrow{\text{ف}}_1$ لاحظ ك $= -3$.

٢) $\overleftarrow{\text{ف}}_2 = (-6 ، 3)$ $\therefore \text{س}_1 = -6$ ، $\text{ص}_1 = 3$.

$\overleftarrow{\text{ف}}_3 = (1 ، 2)$ $\therefore \text{س}_2 = 1$ ، $\text{ص}_2 = 2$.

، $\because \text{س}_1\text{س}_2 + \text{ص}_1\text{ص}_2 = -6 \times 1 + 3 \times 2 = -6 + 6 = \text{صفر}$.

$\therefore \overleftarrow{\text{ف}}_2 \perp \overleftarrow{\text{ف}}_3$.

٣) $\because \overleftarrow{\text{ف}}_1 \,//\, \overleftarrow{\text{ف}}_2 \wedge \overleftarrow{\text{ف}}_2 \perp \overleftarrow{\text{ف}}_3$ $\therefore \overleftarrow{\text{ف}}_1 \perp \overleftarrow{\text{ف}}_3$.

مثال (٩ – ١٥) لتكن أ (١ ، –٤) ، ب (٧ ، ٢) ، جـ (٣ ، ٦) ، ء (–٣ ، ٠) أربع نقاط في المستوى . فأثبت أن الشكل أ ب جـ ء مستطيل .

الحل

نأخذ ضلعين متقابلين ونثبت أنهما متوازيان ومتساويان في الطول ، ثم نثبت أن إحدى الزوايا قائمة .

– لنأخذ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء جـ}}$.

$\overleftarrow{\text{أ ب}} = \text{ب} - \text{أ} = (6 ، 6)$ ، $\overleftarrow{\text{ء جـ}} = \text{جـ} - \text{ء} = (6 ، 6)$

∴ $\overleftarrow{\text{أب}}$ = $\overleftarrow{\text{ءجـ}}$ = (٦ ، ٦) ، ∴ أ ب // ء جـ ∧ | أ ب | = | جـ ء | .

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$ ∧ | أ ب | = | جـ ء | .

∴ الشكل أ ب جـ ء متوازي اضلاع ـــــ (١) .

– لنأخذ ∡ أ ب جـ .

$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = (٦ ، ٦) ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = جـ – ب = (–٤ ، ٤) .

∴ $س_١ س_٢ + ص_١ ص_٢$ = ٦ × –٤ + ٦ × ٤ = –٢٤ + ٢٤ = صفر .

∴ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$

∴ ق (∡ أ ب جـ) = ٩٠° ـــــ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

الشكل أ ب جـ ء مستطيل .

تمارين ومسائل (٩ : ٣)

[١] نفرض أن المتجهات المعطاة في كل مما يأتي غير صفرية فأكمل ما يلي :

١ – إذا كان $\overleftarrow{ف_١}$ = ٥ $\overleftarrow{ف_٢}$ فإن المتجهين $\overleftarrow{ف_١}$ ، $\overleftarrow{ف_٢}$ .....

٢ – إذا كان $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = (س ، ص) ، $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ = (– ص ، س) فإن المتجهين ....

٣ – إذا كان ميل المتجه $\overleftarrow{ف_١}$ = ميل المتجه $\overleftarrow{ف_٢}$ فإن المتجهين ....

٤ – إذا كان $\overleftarrow{و_١}$ = (–٢ ، ٣) ، $\overleftarrow{و_٢}$ = (٣ ، ص) فإنه يكون $\overleftarrow{و_١}$ ⊥ $\overleftarrow{و_٢}$ عندما تكون قيمة ص = ... ، $\overleftarrow{و_١}$ // $\overleftarrow{و_٢}$ إذا كانت قيمة ص = ...

[٢] إذا كانت أ (١٠ ، ٤) ، ب (٣ ، ١) ، جـ (–٢ ، ٣) ، ء (٠ ، ٨) . أثبت أنه :

١) $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ // $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$. ٢) $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$.

[٣] إذا كانت أ (٢ ، ٦) ، ب (٤ ، ٤) ، جـ (٢ ، ٢) ، ء (٠ ، ٤) ، فأثبت أن الشكل أ ب جـ ء مربع ، ثم أوجد مساحته .

[٤] إذا كانت أ (٢ ، ٢) ، ب (٤ ، –١) ، جـ (٢ ، –٣) ، ء (٠ ، ٠) ، فأثبت أن الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع .

[٥] أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ، فإذا كانت هـ ، و منتصفى $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ على الترتيب ، فأثبت أن : $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ + $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{و هـ}}$.

٩ : ٤ متجه الوحدة

المتجهات ذات اطوال مختلفة ومنها متجه يسمى متجه الوحدة وهو أي متجه طوله يساوي وحدة الأطوال .

أي إذا كان $|\overleftarrow{\text{ف}}| = ١$ فإن $\overleftarrow{\text{ف}}$ يسمى متجه وحدة ، ولكل متجه $\overleftarrow{\text{ف}}$ متجه وحدة له نفس اتجاه $\overleftarrow{\text{ف}}$ يرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{ف}}^{*}$ ، ويعطى بالقاعدة التالية :

$$\overleftarrow{\text{ف}}^{*} = \frac{١}{|\overleftarrow{\text{ف}}|} \times \overleftarrow{\text{ف}} \; .$$

مثال (٩ – ١٦) بين أياً من المتجهات التالية متجه وحدة وإذا لم يكن . فأوجد له متجه الوحدة باتجاهه .

١) $\overleftarrow{\text{ف}}_{١} = \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$.

٢) $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢} = (٣ ، ٤)$.

٣) $\overleftarrow{\text{أ ب}} = (٠ ، ٢)$.

٤) $\overleftarrow{\text{جـ ء}} = (١ ، ٠)$.

الحل

١) $\overleftarrow{\text{ف}}_{١} = \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -\frac{١}{\sqrt{٢}}\right) \therefore |\overleftarrow{\text{ف}}_{١}| = \sqrt{\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} + \left(-\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}} = \sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}} = \sqrt{١} = ١$

$\therefore \overleftarrow{\text{ف}}_{١}$ متجه وحدة .

٢) $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢} = (٣ ، ٤)$

$\therefore |\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}| = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥ \quad \Leftarrow \quad \overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$ لايمثل متجه وحدة

نوجد متجه الوحدة للمتجه $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$.

$\therefore \overleftarrow{\text{ف}}_{٢}^{*} = \frac{١}{|\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}|} \times \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} = \frac{١}{٥} \times (٣ ، ٤) \Leftarrow \overleftarrow{\text{ف}}^{*} = \left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$.

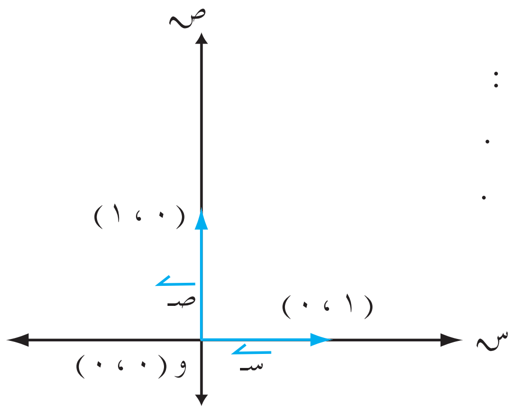
٣) $\overleftarrow{\text{أ ب}} = (٠ ، ٢) \quad \therefore |\overleftarrow{\text{أ ب}}| = \sqrt{(٠)^{٢} + (٢)^{٢}} = \sqrt{٤} = ٢$.

$\therefore \overleftarrow{\text{أ ب}}$ ليس متجه وحدة .

$\therefore \overleftarrow{\text{أ ب}}^{*} = \frac{١}{|\overleftarrow{\text{أ ب}}|} \times \overleftarrow{\text{أ ب}} = \frac{١}{٢} \times (٠ ، ٢) \Leftarrow \overleftarrow{\text{أ ب}}^{*} = (٠ ، ١)$.

٤) $\overleftarrow{\text{جـ ء}} = (١ ، ٠) \Leftarrow |\overleftarrow{\text{جـ ء}}| = \sqrt{(١)^{٢} + (٠)^{٢}} = \sqrt{١} = ١ \Leftarrow \overleftarrow{\text{جـ ء}}$ متجه وحده.

متجها الوحدة الأساسيان :



شكل (٩ – ١٣)

متجها الوحدة الأساسيان هما المتجهان $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ حيث :

$\overleftarrow{س}$ = (١ ، ٠) متجه الوحدة باتجاه المحور السيني الموجب .

$\overleftarrow{ص}$ = (٠ ، ١) متجه الوحدة باتجاه المحور الصادي الموجب .

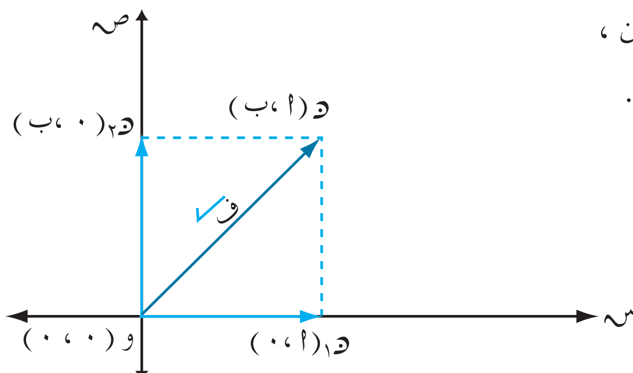
[شكل (٩ – ١٣)]

لاحظ أن المحاور الإحداثية متعامدة .

∴ $\overleftarrow{س} \perp \overleftarrow{ص}$ ، أو استخدم شرط التعامد في إثبات أن $\overleftarrow{س} \perp \overleftarrow{ص}$.

التعبير عن متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين :

إذا كان لدينا المتجه القياسي $\overleftarrow{ف}$ = (ا ، ب) ، فيمكن كتابته بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين ، وذلك عن طريق تحليل المتجه $\overleftarrow{ف}$ إلى حاصل جمع متجهين قياسيين واقعين على المحاور الإحداثية [شكل (٩ – ١٤)].



شكل (٩ – ١٤)

فيكون $\overleftarrow{ف}$ = (ا ، ب) = $\overleftarrow{و د_1}$ + $\overleftarrow{و د_2}$.

⇐ $\overleftarrow{ف}$ = (ا ، ب) = (ا ، ٠) + (٠ ، ب)

⇐ $\overleftarrow{ف}$ = ا (١ ، ٠) + ب (٠ ، ١) .

⇐ $\overleftarrow{ف}$ = ا $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$.

⇐ $\boxed{\overleftarrow{ف} = (\text{ا} ، \text{ب}) = \text{ا}\,\overleftarrow{س} + \text{ب}\,\overleftarrow{ص}}$.

مثال (٩ – ١٧) عبِّر عن المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين : $\overleftarrow{ف}_1$ = (٣ ، ١٢) ، $\overleftarrow{ف}_2$ = (٠ ، –٥) ، $\overleftarrow{جـ}$ ($\frac{٣}{٤}$ ، ٠) .

الحل

∵ $\overleftarrow{ف}_1$ = (٣ ، ١٢) ∴ $\overleftarrow{ف}_1$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ١٢ $\overleftarrow{ص}$.

، ∵ $\overleftarrow{ف}_2$ = (٠ ، –٥) ∴ $\overleftarrow{ف}_2$ = –٥ $\overleftarrow{ص}$.

، ∵ $\overleftarrow{جـ}$ = ($\frac{٣}{٤}$ ، ٠) ∴ $\overleftarrow{جـ}$ = $\frac{٣}{٤}$ $\overleftarrow{س}$.

مثال (٩ – ١٨) إذا كانت ا (١ ، ٢) ، ب (٢ ، –٤) ، $\overleftarrow{ف}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ – ٥ $\overleftarrow{ص}$. فأوجد ناتج ما يلي بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين .

١) $\overleftarrow{ا ب}$ + $\overleftarrow{ف}$ ، ٢) ٣ $\overleftarrow{ا ب}$ – ٢ $\overleftarrow{ف}$.

الحل

$\overleftarrow{\text{أب}}$ = ب − أ = (١ ، −٦) = $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٦ $\overleftarrow{\text{ص}}$.

١) $\overleftarrow{\text{أب}}$ + $\overleftarrow{\text{ف}}$ = ($\overleftarrow{\text{س}}$ − ٦ $\overleftarrow{\text{ص}}$) + (٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$) = ($\overleftarrow{\text{س}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$) − ٦ $\overleftarrow{\text{ص}}$ − ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$

= ٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ١١ $\overleftarrow{\text{ص}}$.

٢) ٣ $\overleftarrow{\text{أب}}$ −٢ $\overleftarrow{\text{ف}}$ = ٣ ($\overleftarrow{\text{س}}$ − ٦ $\overleftarrow{\text{ص}}$) −٢ (٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$) .

= ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ١٨ $\overleftarrow{\text{ص}}$ − ٨ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ١٠ $\overleftarrow{\text{ص}}$ = −٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٨ $\overleftarrow{\text{ص}}$.

تمارين ومسائل (٩ : ٤)

[١] بيّن أياً من المتجهات التالية هو متجه وحدة : $\overleftarrow{\text{أب}}$ = − $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}$ = ($\frac{٣}{٥}$ ، − $\frac{٤}{٥}$) ، $\overleftarrow{\text{وجـ}}$ = − $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{وب}}$ = (١ ، ١) .

[٢] إذا كانت أ(٢ ، −١) ، ب(٥ ، ٥) ، جـ(١ ، ٣) ، ء(٠ ، ٧) ، $\overleftarrow{\text{ف}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ − $\overleftarrow{\text{ص}}$.

فأوجد ناتج ما يلي بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين :

١) $\overleftarrow{\text{أب}}$ + $\overleftarrow{\text{جـء}}$ ، ٢) ٣ $\overleftarrow{\text{أب}}$ − ٢ $\overleftarrow{\text{جـء}}$ + $\overleftarrow{\text{ف}}$ ،

٣) $\overleftarrow{\text{وأ}}$ + $\overleftarrow{\text{وب}}$ + $\overleftarrow{\text{وجـ}}$ + $\overleftarrow{\text{وء}}$ + $\overleftarrow{\text{ف}}$.

[٣] أوجد متجه الوحدة باتجاه المتجهات التالية : $\overleftarrow{\text{ف}}_1$ = (٢ ، ٣) ، $\overleftarrow{\text{ف}}_2$ = $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{بجـ}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{وأ}}$ = (−٦ ، ٨) .

[٤] إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}_1$ = أ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ب $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_2$ = ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$. فأوجد قيمتي أ ، ب اللتين تحققان المعادلة التالية : $\overleftarrow{\text{ف}}_1$ + $\overleftarrow{\text{ف}}_2$ = ٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$.

[٥] عبِّر عن المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين : $\overleftarrow{\text{ف}}_1$ = (١٢ ، ٧) ، $\overleftarrow{\text{ف}}_2$ = ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$) ، $\overleftarrow{\text{أب}}$ = (٦ ، ٠) ، $\overleftarrow{\text{وم}}$ = (٠ ، −٥) .

٩ : ٥ الضرب الداخلي لمتجهين

هناك نوعان من ضرب المتجهات نتناول منها في هذا البند النوع الأول ويسمى بالضرب الداخلي لمتجهين كما يسمى بالضرب العددي لمتجهين .

تعريف (٩ : ٦)

حاصل الضرب الداخلي لمتجهين $\overleftarrow{\text{ف}}_1$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_2$ هو عدد حقيقي يرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{ف}}_1 \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_2$ ويعطى بالعلاقة : $\overleftarrow{\text{ف}}_1 \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_2 = |\overleftarrow{\text{ف}}_1| \times |\overleftarrow{\text{ف}}_2|$ جتاهـ ، ٠ ≤ هـ ≤ π .

حيث هـ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{\text{ف}}_1$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_2$ ،

مثال (٩ – ١٩) إذا كان $|\overleftarrow{ف}_{١}| = ٣$ ، $|\overleftarrow{ف}_{٢}| = ٢$. فأوجد حاصل الضرب الداخلي $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢}$
عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما كالتالي :
١) هـ = ٦٠° ، ٢) هـ = ٠° ، ٣) هـ = ٩٠° .

الحـــل

١) عندما هـ = ٦٠° فإن $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = |\overleftarrow{ف}_{١}| \times |\overleftarrow{ف}_{٢}|$ جتا هـ
$\Leftarrow \overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = ٣ \times ٢ \times$ جتا ٦٠° $= ٣ \times ٢ \times \frac{١}{٢} = ٣$.
٢) عندما هـ = ٠° فإن $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = ٣ \times ٢ \times$ جتا ٠° $= ٣ \times ٢ \times ١ = ٦$.
٣) عندما هـ = ٩٠° فإن $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = ٣ \times ٢ \times$ جتا ٩٠° $= ٣ \times ٢ \times ٠ = ٠$

نتـــائـج :

١) يتعامد متجهان غير صفريين $\overleftarrow{ف}_{١}$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢}$ إذا كان حاصل ضربهما الداخلي يساوي صفراً أي أن :

$$\boxed{\overleftarrow{ف}_{١} \perp \overleftarrow{ف}_{٢} \Leftrightarrow \overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = ٠}$$

٢) يتوازي $\overleftarrow{ف}_{١}$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢}$ إذا كان : $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = \pm |\overleftarrow{ف}_{١}| \bullet |\overleftarrow{ف}_{٢}|$.

أي أن $$\boxed{\overleftarrow{ف}_{١} \parallel \overleftarrow{ف}_{٢} \Leftrightarrow \frac{\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢}}{|\overleftarrow{ف}_{١}| \bullet |\overleftarrow{ف}_{٢}|} = \pm ١}$$.

مع ملاحظة أنه إذا كان الناتج + ١ فإن هـ = ٠° ، والمتجهان لهما نفس الاتجاه ،
وإذا كان الناتج – ١ فإن هـ = ١٨٠° ، والمتجهان متعاكسان .

٣) حاصل الضرب الداخلي لمتجه في نفسه يساوى مربع طوله أي أن : $\overleftarrow{ف} \bullet \overleftarrow{ف} = |\overleftarrow{ف}|^{٢}$.
الإثبات : $\because$ هـ = ٠° $\therefore \overleftarrow{ف} \bullet \overleftarrow{ف} = |\overleftarrow{ف}| \times |\overleftarrow{ف}|$ جتا ٠° $= |\overleftarrow{ف}|^{٢} \times ١ = |\overleftarrow{ف}|^{٢}$.

٤) $\overleftarrow{س} \bullet \overleftarrow{س} = \overleftarrow{ص} \bullet \overleftarrow{ص} = ١$ ، $\overleftarrow{س} \bullet \overleftarrow{ص} = \overleftarrow{ص} \bullet \overleftarrow{س} = ٠$.

٥) إذا كان $\overleftarrow{ف}_{١} = (س_{١} ، ص_{١})$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢} = (س_{٢} ، ص_{٢})$ فإنه يمكن إيجاد علاقة تكافئ العلاقة السابقة
في إيجاد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\overleftarrow{ف}_{١}$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢}$ ، وهذه العلاقة هي :

$$\boxed{\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = س_{١} س_{٢} + ص_{١} ص_{٢}}$$.

الاثبات : $\because \overleftarrow{ف}_{١} = س_{١} \overleftarrow{س} + ص_{١} \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢} = س_{٢} \overleftarrow{س} + ص_{٢} \overleftarrow{ص}$.
$\therefore \overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = (س_{١} \overleftarrow{س} + ص_{١} \overleftarrow{ص}) \bullet (س_{٢} \overleftarrow{س} + ص_{٢} \overleftarrow{ص})$

$= س_{١} س_{٢} \overleftarrow{س} \bullet \overleftarrow{س} + س_{١} ص_{٢} \overleftarrow{س} \bullet \overleftarrow{ص} + ص_{١} س_{٢} \overleftarrow{ص} \bullet \overleftarrow{س} + ص_{١} ص_{٢} \overleftarrow{ص} \bullet \overleftarrow{ص}$
$= س_{١} س_{٢} |\overleftarrow{س}|^{٢} + س_{١} ص_{٢} \times ٠ + ص_{١} س_{٢} \times ٠ + ص_{١} ص_{٢} |\overleftarrow{ص}|^{٢}$.

$\therefore \overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} = \text{س}_{١}\,\text{س}_{٢} \times ١ + ٠ + ٠ + \text{ص}_{١}\,\text{ص}_{٢} \times ١$.

$\therefore \overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} = \text{س}_{١}\,\text{س}_{٢} + \text{ص}_{١}\,\text{ص}_{٢}$.

مثال (٩ – ٢٠) إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}_{١} = (٢ ، ٥)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢} = (٣ ، -٤)$. فأوجد حاصل الضرب الداخلي $\overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{١}$. وماذا تستنتج ؟

الحل

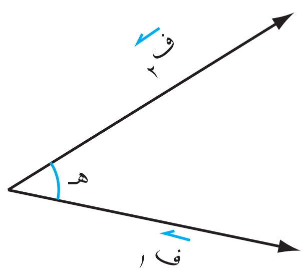
$\overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} = ٢ \times ٣ + ٥ \times -٤ = ٦ - ٢٠ = -١٤$ ،

$\overleftarrow{\text{ف}}_{٢} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{١} = ٣ \times ٢ + -٤ \times ٥ = ٦ - ٢٠ = -١٤$

نجد أن : $\overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} = \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{١}$. الضرب الداخلي إبدالي .

٦) نستطيع تحديد قياس الزاوية هـ المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{\text{ف}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$.
[شكل (٩ – ١٥)] عن طريق العلاقة التالية :

$$\text{جتا هـ} = \frac{\overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢}}{|\overleftarrow{\text{ف}}_{١}| \bullet |\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}|} \quad ، \quad ٠^{\circ} \le \text{هـ} \le ١٨٠^{\circ} .$$



شكل (٩ – ١٥)

مع ملاحظة أنه إذا كان :

١) $\overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} > ٠$ فإن الزاوية المحدَّدة بالمتجهين هي زاوية حادة .

٢) $\overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} < ٠$ فإن الزاوية المحدَّدة بالمتجهين هي زاوية منفرجة .

مثال (٩ – ٢١) إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}_{١} = (٣ ، ٠)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢} = (٥ ، ٥)$. فأوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{\text{ف}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$.

الحل

$\because \overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} = ٣ \times ٥ + ٠ \times ٥ = ١٥$ ، $|\overleftarrow{\text{ف}}_{١}| = ٣$ ، $|\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}| = ٥\sqrt{٢}$.

، $\because \text{جتا هـ} = \frac{\overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢}}{|\overleftarrow{\text{ف}}_{١}| \bullet |\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}|} = \frac{١٥}{٣ \times ٥\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$.

$\therefore \text{هـ} = ٤٥^{\circ}$.

مثال (٩ – ٢٢) إذا كانت النقاط أ(١ ، ٢) ، ب (–٢ ، ٦) ، جـ(٢ ، ٩) هي رؤوس المثلث أ ب جـ . فأحسب قياس زواياه الداخله .

الحل

$$\because \text{جتا أ} = \frac{\overleftarrow{\text{أ ب}} \bullet \overleftarrow{\text{أ جـ}}}{|\overleftarrow{\text{أ ب}}| \bullet |\overleftarrow{\text{أ جـ}}|}$$

∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ب − أ = (−٣ ، ٤) ⇐ $|\overrightarrow{\text{أب}}|$ = ٥

∵ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = جـ − أ = (١ ، ٧) ⇐ $|\overrightarrow{\text{أجـ}}|$ = ٥ $\sqrt{\text{٢}}$.

∴، $\overrightarrow{\text{أب}}$ • $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = −٣ × ١ + ٤ × ٧ = −٣ + ٢٨ = ٢٥ .

∴ جتا أ = $\dfrac{\text{٢٥}}{\text{٥} \times \text{٥}\sqrt{\text{٢}}}$ = $\dfrac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}$ ⇐ ق(∡ أ) = ٤٥° .

∵، جتا ب = $\dfrac{\overrightarrow{\text{بأ}} \bullet \overrightarrow{\text{بجـ}}}{|\overrightarrow{\text{بأ}}| \bullet |\overrightarrow{\text{بجـ}}|}$.

∵، $\overrightarrow{\text{بأ}}$ = أ − ب = (٣ ، −٤) ⇐ $|\overrightarrow{\text{بأ}}|$ = ٥ .

∵، $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ = جـ − ب = (٤ ، ٣) ⇐ $|\overrightarrow{\text{بجـ}}|$ = ٥ .

∵، $\overrightarrow{\text{بأ}}$ • $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ = ٣ × ٤ + (−٤) × ٣ = ١٢ − ١٢ = ٠ .

∴ $\overrightarrow{\text{بأ}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ ⇐ ق(∡ب) = ٩٠° ⇐ ق(∡جـ) = ٤٥° .

مثال (٩ − ٢٣) إذا كان $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{١}}$ = (س ، $\sqrt{\text{٣}}$) ، $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{٢}}$ = (٢ ، −٢ $\sqrt{\text{٣}}$) . فأوجد قيمة س إذا علمت أن قياس الزاوية المحددة بالمتجهين $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{١}}$ ، $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{٢}}$ تساوي ٦٠° .

الحــل

∵ $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{١}}$ • $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{٢}}$ = ٢ س − ٦ ، $|\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{١}}|$ = $\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣}}$ ، $|\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{٢}}|$ = ٤ .

، ∵ هـ = ٦٠° نعوض في العلاقة $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{١}}$ • $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{٢}}$ = $|\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{١}}|$ • $|\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{٢}}|$ جتاهـ .

⇐ ٢ س − ٦ = $\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣}}$ × ٤ × جتا ٦٠° ⇐ ٢ (س − ٣) = $\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣}}$ × ٤ × $\dfrac{\text{١}}{\text{٢}}$.

⇐ (س − ٣) = $\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣}}$ بتربيع الطرفين

⇐ س² − ٦ س + ٩ = س² + ٣ ⇐ −٦س = −٦ ⇐ $\boxed{\text{س = ١}}$

مثال (٩ − ٢٤) إذا كان $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{١}}$ ، $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{٢}}$ متجهين وكان $|\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{١}}|$ = ٤ ، $|\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{٢}}|$ = $\sqrt{\text{٣}}$ ، وقياس الزاوية بينهما ٣٠° المطلوب :

١ − أوجد $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{١}}$ • $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{٢}}$.   ٢ − أوجد $|\overrightarrow{\text{أ}}|$ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{١}}$ − $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{٢}}$.

الحــل

١ − ∵ $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{١}}$ • $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{٢}}$ = $|\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{١}}|$ × $|\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{٢}}|$ جتا ٣٠° .

⇐ $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{١}}$ • $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{٢}}$ = ٤ × $\sqrt{\text{٣}}$ × $\dfrac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{١}}$ • $\overrightarrow{\text{ف}}_{\text{٢}}$ = ٦

٢ – $\because \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{ف}}_{١} - \overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$ بتربيع الطرفين ينتج أن : $(\overleftarrow{\text{أ}})^{٢} = (\overleftarrow{\text{ف}}_{١} - \overleftarrow{\text{ف}}_{٢})^{٢}$.

$\Leftarrow \overleftarrow{\text{أ}} \bullet \overleftarrow{\text{أ}} = (\overleftarrow{\text{ف}}_{١} - \overleftarrow{\text{ف}}_{٢})(\overleftarrow{\text{ف}}_{١} - \overleftarrow{\text{ف}}_{٢})$

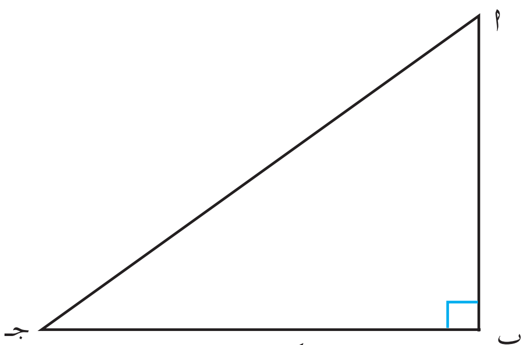
$\Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} = \overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{١} - \overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} - \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{١} + \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$

$\Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} = |\overleftarrow{\text{ف}}_{١}|^{٢} - ٢\,\overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} + |\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}|^{٢}$.

$\Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} = (٤)^{٢} - ٢ \times ٦ + (\sqrt{٣})^{٢} = ١٦ - ١٢ + ٣ \Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} = ٧ \Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ}}| = \sqrt{٧}$

مثال (٩ – ٢٥)

أثبت مبرهنة فيثاغورث باستخدام المتجهات .



شكل (٩ – ١٦)

الحـــل

ليكن المثلث أ ب جـ قائم في ب

[شكل (٩ –١٦)] المطلوب : إثبات أن :

$|\text{أ جـ}|^{٢} = |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب جـ}|^{٢}$.

الإثبات : $\because \overleftarrow{\text{أ جـ}} = \overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}$ بتربيع الطرفين .

$\Leftarrow (\overleftarrow{\text{أ جـ}})^{٢} = (\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}})^{٢}$

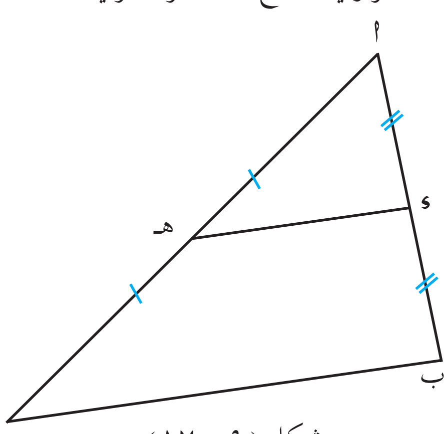
$\Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ جـ}}|^{٢} = |\overleftarrow{\text{أ ب}}|^{٢} + ٢\,\overleftarrow{\text{أ ب}} \bullet \overleftarrow{\text{ب جـ}} + |\overleftarrow{\text{ب جـ}}|^{٢}$

$\Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ جـ}}|^{٢} = |\overleftarrow{\text{أ ب}}|^{٢} + ٢ \times ٠ + |\overleftarrow{\text{ب جـ}}|^{٢}$ (لأن $\overleftarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftarrow{\text{ب جـ}}$)

$\Leftarrow |\text{أ جـ}|^{٢} = |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب جـ}|^{٢}$.

مثال (٩ – ٢٦)

أثبت أن المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه.



شكل (٩ – ١٧)

المعطيات : أ ب جـ مثلث [شكل (٩ – ١٧)] ،

ء ، هـ منتصفي $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ على الترتيب .

المطلوب : إثبات ان : $\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، $|\text{ء هـ}| = \frac{١}{٢}|\text{ب جـ}|$.

البرهان : $\because \overleftarrow{\text{ء هـ}} = \overleftarrow{\text{ء أ}} + \overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ـــــ (١) ،

$\overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{ب أ}} + \overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ـــــ (٢) بجمع (١) ، (٢) ينتج :

$\overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{ء هـ}} = \overleftarrow{\text{ء أ}} + \overleftarrow{\text{ب أ}} + \overleftarrow{\text{أ هـ}} + \overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ،

$\because \overleftarrow{\text{ب أ}} = ٢\,\overleftarrow{\text{ء أ}}$ ، $\because \overleftarrow{\text{أ جـ}} = ٢\,\overleftarrow{\text{أ هـ}}$.

$\therefore \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{ء هـ}} = \overleftarrow{\text{ء أ}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ء أ}} + \overleftarrow{\text{أ هـ}} + ٢\,\overleftarrow{\text{أ هـ}}$.

$\therefore \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{ء هـ}} = ٣\,\overleftarrow{\text{ء أ}} + ٣\,\overleftarrow{\text{أ هـ}} = ٣(\overleftarrow{\text{ء أ}} + \overleftarrow{\text{أ هـ}})$ ، $\because \overleftarrow{\text{ء أ}} + \overleftarrow{\text{أ هـ}} = \overleftarrow{\text{ء هـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ ، ∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$.

∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ // $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ ، | $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ | = ٢ | $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ |

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$ ، | ب جـ | = ٢ | ء هـ | ∴ | ء هـ | = $\frac{1}{2}$ | ب جـ | .

تمارين ومسائل (٩ : ٥)

[١] أكمل ما يلي :

١ – إذا كان $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ = (٥ ، ١٢) ، $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ = (–١١ ، ٤) فإن $\overrightarrow{\text{ف}}_1 \bullet \overrightarrow{\text{ف}}_2$ = ...

٢ – إذا كان $\overrightarrow{\text{ا ب}} \bullet \overrightarrow{\text{جـ ء}}$ = ٠ فإن المتجهان .....

٣ – إذا كان $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ // $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ فإن $\overrightarrow{\text{ف}}_1 \bullet \overrightarrow{\text{ف}}_2$ = ...

٤ – حاصل ضرب المتجة $\overrightarrow{\text{ف}}$ في نفسه يساوي .....

[٢] أوجد حاصل الضرب الداخلي $\overrightarrow{\text{ف}}_1 \bullet \overrightarrow{\text{ف}}_2$ في كل من الحالات التالية :

١) $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ = (١ ، –١) ، $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ = ٩ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ١٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$.

٢) $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ = ($\sqrt{3}$ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$.

٣) $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ = $\overrightarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ = $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$ حيث ا (–١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٥) ، جـ (–٤ ، ٩) ، ء (٧ ، ١١)

٤) $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ = (–$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$) ، $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ = $\sqrt{2}$ $\overrightarrow{\text{س}}$ – $\sqrt{6}$ $\overrightarrow{\text{ص}}$.

٥) $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ = –٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ = ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$.

[٣] أوجد جيب تمام الزاوية المحدَّدة بالمتجهين $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ ، ثم استنتج قياسها حيث :

$\overrightarrow{\text{ف}}_1$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ = ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$.

[٤] أثبت أن المثلث ا ب جـ قائم الزاوية في ب ، ثم أوجد قياس زاويتي ا ، جـ الداخلتين . إذا علمت أن :

ا (٤ ، ٢) ، ب (٢ ، ٠) ، جـ (–١ ، ٣) .

[٥] إذا كان | $\overrightarrow{\text{ف}}$ | = | $\overrightarrow{\text{ص}}$ | وقياس الزاوية المحددة بالمتجهين $\overrightarrow{\text{ف}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ تساوي ٦٠° . فأوجد $\overrightarrow{\text{ف}}$.

[٦] أثبت أن ($\overrightarrow{\text{ف}}_1$ – $\overrightarrow{\text{ف}}_2$) • ($\overrightarrow{\text{ف}}_1$ + $\overrightarrow{\text{ف}}_2$) = | $\overrightarrow{\text{ف}}_1$ |^2 – | $\overrightarrow{\text{ف}}_2$ |^2 .

[٧] ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، $\overline{\text{ب ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ا جـ}}$ أثبت أن :

١) | ا ب |^2 = | ا ء | × | ا جـ | ، ٢) | ب ء |^2 = | ا ء | × | ء جـ | .

الوحدة العاشرة الرمز مجـ مدلوله وخواصه

١٠ : ١ الرمز (مجـ) مدلوله وخواصه

تعرفت في الصف التاسع على الرمز **مجـ** للدلالة على المجموع ويعبر عنه في بعض الكتب العربية والأجنبية بالرمز **E** وهو حرف أغريقي يقرأ سجماء .

فمثلاً :

$\underset{ر=١}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}\ ر = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥$ وهذا يعني مجموع حالة المتغير (ر) من ر = ١ إلى ر = ٥

وكذلك $\underset{ر=٤}{\overset{٩}{\text{مجـ}}}\ ر = ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩$ ، $\underset{ر=١٢}{\overset{٢٨}{\text{مجـ}}}\ ر = ١٢ + ١٣ + ١٤ + \ldots + ٢٨$

$\underset{ر=١}{\overset{د}{\text{مجـ}}}\ ر = ١ + ٢ + ٣ + \ldots + د$ ، $\underset{ر=٠}{\overset{د}{\text{مجـ}}}\ ر^{٢} = (٠)^{٢} + (١)^{٢} + (٢)^{٢} + \ldots + (د)^{٢}$

$\underset{ر=١}{\overset{د}{\text{مجـ}}}\ س_{ر} = س_{١} + س_{٢} + س_{٣} + \ldots + س_{د}$

مثال (١٠ – ١) عبر عن كل مما يأتي باستخدام الرمز مجـ

أ) $١ + ٢ + ٣ + \ldots + ١٢$.

ب) $ل_{١} + ل_{٢} + ل_{٣} + \ldots + ل_{(د-١)}$

جـ) $٥ \times ٣^{٢} + ٥ \times ٤^{٢} + ٥ \times ٥^{٢} + \ldots + ٥ \times د^{٢}$

ء) $١ \times ٣ + ٣ \times ٥ + ٥ \times ٧ + \ldots + (٢د - ١)(٢د + ١)$

الحــل

أ) $١ + ٢ + ٣ + \ldots + ١٢ = \underset{ر=١}{\overset{١٢}{\text{مجـ}}}\ ر$

ب) $ل_{١} + ل_{٢} + ل_{٣} + \ldots + ل_{د-١} = \underset{ر=١}{\overset{د-١}{\text{مجـ}}}\ ل_{ر}$

جـ) $٥ \times ٣^{٢} + ٥ \times ٤^{٢} + ٥ \times ٥^{٢} + \ldots + ٥ \times د^{٢} = \underset{ر=٣}{\overset{د}{\text{مجـ}}}\ ٥ ر^{٢}$

ء) $١ \times ٣ + ٣ \times ٥ + ٥ \times ٧ + \ldots + (٢د - ١)(٢د + ١) = \underset{ر=١}{\overset{د}{\text{مجـ}}}\ (٢ر - ١)(٢ر + ١)$

خواص الرمز مجـ :

١ – $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{د}} (\text{س}_{\text{ر}} + \text{ص}_{\text{ر}}) = (\text{س}_1 + \text{ص}_1) + (\text{س}_2 + \text{ص}_2) + (\text{س}_3 + \text{ص}_3) + \ldots + (\text{س}_{\text{د}} + \text{ص}_{\text{د}})$

$= (\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 + \ldots + \text{س}_{\text{د}}) + (\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \ldots + \text{ص}_{\text{د}})$

$= \sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{د}} \text{س}_{\text{ر}} + \sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{د}} \text{ص}_{\text{ر}}$

$$\boxed{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{د}} (\text{س}_{\text{ر}} + \text{ص}_{\text{ر}}) = \sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{د}} \text{س}_{\text{ر}} + \sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{د}} \text{ص}_{\text{ر}} \ ، \ \text{د} \in \text{ص}^+}$$

٢ – $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{د}} \text{أ}\,\text{س}_{\text{ر}} = \text{أ}\,\text{س}_1 + \text{أ}\,\text{س}_2 + \text{أ}\,\text{س}_3 + \ldots + \text{أ}\,\text{س}_{\text{د}}$

$= \text{أ}(\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 + \ldots + \text{س}_{\text{د}}) = \text{أ} \sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{د}} \text{س}_{\text{ر}}$

$$\boxed{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{د}} \text{أ}\,\text{س}_{\text{ر}} = \text{أ} \sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{د}} \text{س}_{\text{ر}} \ ، \ \text{د} \in \text{ص}^+ \ \text{أ} \in \text{ح}}$$

٣ – $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{د}} \text{ل} = \text{ل} + \text{ل} + \text{ل} + \ldots + \text{ل}$ (إلى د من الحدود) = د ل

$$\boxed{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{د}} \text{ل} = \text{د}\,\text{ل} \ ، \ \text{د} \in \text{ص}^+ \ ، \ \text{ل} \in \text{ح}}$$

مثال (١٠ – ٢) أوجد قيمة كل مما يلي :

أ) $\sum\limits_{\text{ر}=3}^{6} (\text{ر} + 4)$ ب) $\sum\limits_{\text{ر}=0}^{3} 2^{\text{ر}}$ جـ) $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{8} 5$

الحـــل

أ) $\sum\limits_{\text{ر}=3}^{6} (\text{ر} + 4) = (3+4) + (4+4) + (5+4) + (6+4) = 7 + 8 + 9 + 10 = 34$

ب) $\sum\limits_{\text{ر}=0}^{3} 2^{\text{ر}} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

جـ) $\sum\limits_{\text{ر}=1}^{8} 5 = 8 \times 5 = 40$

مثال (١٠ – ٣) عبّر عن كل مما يأتي باستخدام خواص الرمز مجـ :

أ) $(ل_١ + م_١) + (ل_٢ + م_٢) + (ل_٣ + م_٣) + \dots + (ل_ن + م_ن)$

ب) $ل_١ م_١ + ل_٢ م_٢ + ل_٣ م_٣ + \dots + ل_{ن-١} \times م_{ن-١}$

جـ) $(س_١^٣ - ص_١) + (س_٢^٣ - ص_٢) + (س_٣^٣ - ص_٣) + \dots + (س_ن^٣ - ص_ن)$

الحــل

أ) $(ل_١ + م_١) + (ل_٢ + م_٢) + (ل_٣ + م_٣) + \dots + (ل_ن + م_ن)$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} (ل_ر + م_ر) = \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ل_ر + \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} م_ر$$

ب) $ل_١ م_١ + ل_٢ م_٢ + ل_٣ م_٣ + \dots + ل_{ن-١} \times م_{ن-١} = \underset{ر=١}{\overset{ن-١}{\text{مجـ}}} ل_ر م_ر$

جـ) $(س_١^٣ - ص_١) + (س_٢^٣ - ص_٢) + (س_٣^٣ - ص_٣) + \dots + (س_ن^٣ - ص_ن)$

$$= \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} (س_ر^٣ - ص_ر) = \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} س_ر^٣ - \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ص_ر$$

مثال (١٠ – ٤) لتكن $س_١ = ٣١$ ، $س_٢ = ٢٧$ ، $س_٣ = ٣٥$ ،

$ع_١ = ٥$ ، $ع_٢ = ٧$ ، $ع_٣ = ٨$ ،

استعن بالقيم السابقة في إيجاد قيمة ما يلي :

أ) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} س_ر$ ب) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} (س_ر + ع_ر)$ جـ) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} (ع_ر + ٢)^٢$

الحــل

أ) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} س_ر = س_١ + س_٢ + س_٣ = ٣١ + ٢٧ + ٣٥ = ٩٣$

ب) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} (س_ر + ع_ر) = \underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} س_ر + \underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} ع_ر = ٩٣ + ٢٠ = ١١٣$

جـ) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} (ع_ر + ٢)^٢ = (٥ + ٢)^٢ + (٧ + ٢)^٢ + (٨ + ٢)^٢ = ٤٩ + ٨١ + ١٠٠ = ٢٣٠$

تمارين ومسائل (١٠ : ١)

[١] اكتب المقادير التالية باستخدام الرمز مجـ :

أ) ١ + ٢ + ٣ + ... + ٣٠ .

ب) ١ + ٢ + ٣ + ... + د .

جـ) ٥ + ٦ + ٧ + ... + ١٢ .

ء) $(٥ + ٣)^{٢} + (٦ + ٣)^{٢} + (٧ + ٣)^{٢}$.

هـ) $\text{أ س}_{١} + \text{أ س}_{٢} + \text{أ س}_{٣} + \ldots + \text{أ س}_{\text{د}}$.

و) $\text{ع}_{١}^{٢} + \text{ع}_{٢}^{٢} + \text{ع}_{٣}^{٢} + \ldots + \text{ع}_{\text{د}}^{٢}$.

ح) ٠ + ٢ + ٤ + ٦ + ... + ٢ د .

ط) ٢ + ٦ + ١٠ + ١٤ + ... + ٢ (٢د − ١).

[٢] اكتب ما يلي بدون استخدام الرمز مجـ :

أ) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}\ \text{ر}$.

ب) $\underset{\text{ر}=٥}{\overset{٨}{\text{مجـ}}}\ \text{ص}_{\text{ر}}$.

جـ) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}}\ \text{س}_{\text{ر}}\text{ص}_{\text{ر}}$.

ء) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٦}{\text{مجـ}}}\ ٧$.

هـ) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}\ \text{أ}$.

و) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ \frac{١}{٤}$.

ح) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}}\ (\text{س}_{\text{ر}}^{٢}\text{ع}_{\text{ر}}^{٢})$.

ط) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ (\text{س}_{\text{ر}} + ٤\text{أ})$.

ي) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}\ \text{س}_{\text{ر}} + \underset{\text{ر}=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ ٢$.

[٣] لتكن $\text{س}_{١} = ٥$ ، $\text{س}_{٢} = ٦$ ، $\text{س}_{٣} = ١٢$ ، $\text{س}_{٤} = ١٥$ ،

$\text{ع}_{١} = ٢$ ، $\text{ع}_{٢} = ٣$ ، $\text{ع}_{٣} = ٧$ ، $\text{ع}_{٤} = ٨$ ،

استعن بالقيم السابقة في إِيجاد قيمة ما يلي :

أ) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ (\text{س}_{\text{ر}} + \text{ع}_{\text{ر}} + ٣)$.

ب) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ \text{ع}_{\text{ر}}^{٢}$.

جـ) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٢}{\text{مجـ}}}\ (\text{س}_{\text{ر}} + ٥)^{٢}$.

ء) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٢}{\text{مجـ}}}\ (\text{ع}_{\text{ر}} - ٢)^{٢}$.

هـ) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}}\ \text{س}_{\text{ر}}\text{ع}_{\text{ر}}$.

و) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}}\ (\text{س}_{\text{ر}} - ٣\text{ع}_{\text{ر}})^{٢}$.

١٠ : ٢ مقاييس النزعة المركزية

تعد مقاييس النزعة المركزية في طليعة المقاييس الوصفية الهامة وهي مقاييس لتحديد موضع أو موقع أو مكان تمركز القيم حول قيمة معينة لذلك سميت بمقاييس النزعة المركزية ، وبوجه عام ما هي إِلاَّ محاولة لتلخيص البيانات الإِحصائية عن غيرها ، ومن مقاييس النزعة المركزية نذكر :

– المتوسط الحسابي .

– الوسيط وهو يتوسط القيم من حيث رتبها .

– المنوال وهو القيمة التي تظهر تكرارها أكثر من غيرها بين القيم ، وهو أقل أهمية من المقياسين السابقين .

أولاً : المتوسط الحسابي ($\bar{س}$) :

المتوسط الحسابي لمجموعة (ن) من القيم $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... ، $س_ن$ يساوي مجموع هذه القيم مقسوماً على عددها ، أي أن :

$$\bar{س} = \frac{س_١ + س_٢ + س_٣ + \ldots + س_ن}{ن}$$

وهذا يكافئ التعبير :

$$\boxed{\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن}}$$

حيث $\bar{س}$ المتوسط الحسابي ، ن عدد القيم ، $س_ر$ القيم المختلفة ، ر دليل رقم القيم ، وفي حالة البيانات التي نظمت في جداول تكرارية (البيانات المبوبة) يكون المتوسط الحسابي :

$$\boxed{\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{م} ك_ر \times س_ر}{\sum_{ر=١}^{م} ك_ر}}$$

حيث $\sum_{ر=١}^{م} ك_ر$ هو مجموع التكرارات ، $ك_ر$ تكرار الفئات ، $س_ر$ مركز الفئة .

ثانياً : الوسيط :

الوسيط لمجموعة من القيم مرتبة تصاعدياً أو تنازلياً هو العدد الأوسط منها ويحدد ذلك في حالتين :

١ – إذا كان عدد القيم ن فردية فهناك وسيط واحد رتبته هي $\frac{ن + ١}{٢}$.

٢ – إذا كان عدد القيم ن زوجياً فهناك وسيطين رتبتاهما هي $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢} + ١$ ويكون الوسيط هو المتوسط الحسابي لهذين الوسيطين ، وفي حالة الجداول التكرارية يكون الوسيط و :

أ) في حالة التكرار المتجمع الصاعد :

$$\boxed{\text{الوسيط (و)} = أ + \frac{\frac{ن}{٢} - ك_١}{ك_٢} \times ل}$$

حيث أ = الحد الأدنى للفئة الوسيطية ، ن التكرار الكلي .

$ك_١$ = التكرار المتجمع التصاعدي للفئة السابقة للفئة الوسيطية .

$ك_٢$ = تكرار الفئة الوسيطية ، ل = طول الفئة .

ب) في حالة التكرار المتجمع النازل :

$$\boxed{\text{الوسيط (و)} = ب - \frac{\frac{ن}{٢} - ك_٣}{ك_٢} \times ل}$$

حيث ب = الحد الأعلى للفئة الوسيطية .

$د$ = التكرار الكلي ، $ك_٣$ = التكرار المتجمع التنازلي للفئة اللاحقة للفئة الوسيطية ، $ك_٢$ تكرار الفئة الوسيطية ، ل = طول الفئة الوسيطية .

ثالثاً : المنوال :

المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً في التوزيع وفي حالة الجداول التكرارية يكون المنوال هو مركز الفئة المنوالية (المناظرة لأكثر تكرار) .

مثال (١٠ - ٥) فيما يلي درجات ١٠ طلاب في مادة اللغة العربية (الدرجة العظمى ٣٠)

١٥ ، ١٢ ، ١٩ ، ٢٥ ، ١٨ ، ٢٧ ، ١٨ ، ٢٢ ، ٢١ ، ١٨ .

أوجد كلاً من المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لهذه الدرجات .

الحل

المتوسط الحسابي : $\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{١٠} س_ر}{د} = \frac{١٥ + ١٢ + ١٩ + \ldots + ١٨}{١٠} = \frac{١٩٥}{١٠} = ١٩{,}٥$

ولإيجاد الوسيط نرتب درجات الطلبة تصاعدياً كما يلي :

١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٨ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٧ حيث إن عدد القيم زوجية فيكون رتب العددين الأوسطيين هي $\frac{د}{٢}$ ، $\frac{د}{٢} + ١$ أي أن رتب هذين العددين هي ٥ ، ٦ ، وبالتالي ، فإن العددين هما ١٨ ، ١٩ .

$\therefore$ الوسيط $= \frac{١٨ + ١٩}{٢} = \frac{٣٧}{٢} = ١٨{,}٥$.

المنوال = ١٨ وهي الدرجة الأكثر تكراراً .

مثال (١٠ - ٦) أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لبيانات الجدول التكراري التالي والتي تمثل أعمار ٣٠ مريضاً زاروا طبيب العيون .

الفئة العمرية	١٢ – ٢٠	٢١ – ٢٩	٣٠ – ٣٨	٣٩ – ٤٧	٤٨ – ٥٦	٥٧ – ٦٥
التكرار	٤	٢	٣	٧	٩	٥

الحــل

نكوّن الجدول التالي :

الفئات	مركز الفئة $س_ر$	التكرارات $ك_ر$	مركز الفئة × التكرارات $س_ر \times ك_ر$	التكرار المتجمع الصاعد
١٢ – ٢٠	$\frac{١٢ + ٢٠}{٢} = ١٦$	٤	٦٤	٤
٢١ – ٢٩	٢٥	٢	٥٠	٦
٣٠ – ٣٨	٣٤	٣	١٠٢	$\boxed{٩} \leftarrow ك_١$
				$\boxed{\frac{د}{٢} = ١٥} \rightarrow$
$أ \leftarrow \boxed{٣٩}$ – ٤٧	٤٣	$\boxed{٧} \leftarrow ك_٢$	٣٠١	١٦
٤٨ – ٥٦	٥٢	٩	٤٦٨	٢٥
٥٧ – ٦٥	٦١	٥	٣٠٥	٣٠
المجموع		٣٠	١٢٩٠	

المتوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{٦} س_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=١}^{٦} ك_ر} = \frac{١٢٩٠}{٣٠} = ٤٣$.

ولإيجاد الوسيط في الجدول التكراري نحدد أولاً رتبة الوسيط (و) $= \frac{د}{٢} = \frac{٣٠}{٢} = ١٥$.

$ك_١ = ٩$ التكرار المتجمع الصاعد والسابق للفئة الوسيط .

$ك_٢ = ٧$ التكرار للفئة الوسيطية. الفئة التي تناظر $ك_٢$ هي (٣٩ – ٤٧) فتكون : $أ = ٣٩$ ، $ل = ٩$.

$\therefore$ الوسيط (و) $= أ + \frac{\frac{د}{٢} - ك_١}{ك_٢} \times ل = ٣٩ + \frac{١٥ - ٩}{٧} \times ٩$

$= ٣٩ + \frac{٦}{٧} \times ٩ = ٣٩ + \frac{٥٤}{٧} = ٤٦{,}٧$.

المنوال = مركز الفئة المناظرة الأكثر تكراراً ، وهي (٤٨ – ٥٦) .

$\therefore$ المنوال $= \frac{٤٨ + ٥٦}{٢} = \frac{١٠٤}{٢} = ٥٢$.

تمارين ومسائل (١٠ : ٢)

[١] أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكل مما يأتي :

أ) ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٢ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣١ ، ٣٢ .   ب) ٣ ، ٤٢ ، ٤٠ ، ٤٢ ، ٤٤ ، ٤١ .

جـ) ٦٠ ، ٥٥ ، ٥٢ ، ٦٢ ، ٥٥ ، ٦٠ ، ٦٣ ، ٥٧ .

[٢] أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال للتوزيع التالي :

المشاهدة	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
التكرار	٤	٣	٩	٥	٢	١

[٣] جدول التكرار التالي يبين أطوال ١٠٠ طالب مقاسة بالسنتميترات .

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لأطوال هؤلاء الطلبة .

الفئة	التكرار
١٤١ – ١٤٥	٥
١٤٦ – ١٥٠	٢٠
١٥١ – ١٥٥	٤٢
١٥٦ – ١٦٠	٢٥
١٦١ – ١٦٥	٨
المجمـــوع	١٠٠

[٤] حصل (٣٠) طالباً على الدرجات التالية في اختبار لمادة الرياضيات (الدرجة العظمى ١٥ درجة) وكان توزيع الدرجات على النحو التالي :

١١	١٢	٦	٦	١٣	١٢	١٢	٩	١٠	١١
٩	٩	١٠	٦	١١	١١	١٠	١٠	٨	١٣
٨	٧	٦	٦	٧	٧	١١	٦	١٣	١١

أ) كوِّن جدول توزيع تكراري لدرجات الطلبة .

ب) أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لتوزيع درجات هؤلاء الطلبة .

١٠ : ٣ مقاييـــس الـتـشـــتـــت

رغم أهمية مقاييس النزعة المركزية (المتوسط والوسيط والمنوال) لإعطاء وصفٍ أو مؤشرٍ للظواهر أو البيانات من خلال نقطة واحدة تتمركز عليها القيم تعبر عن تلك المشاهدات أو المفردات ضمن مجموعة من البيانات ، إلاّ أن هذه المقاييس وحدها قد لاتكفي فمثلاً إذا كان لدينا مجموعتان من القيم :

قيم المجموعة الأولى هي ٢٣ ، ٦٠ ، ١٠١ ، ٦٠

قيم المجموعة الثانية هي ٥٧ ، ٦٠ ، ٦٦ ، ٦٠

نلاحظ أن المجموعتين لهما المتوسط الحسابي نفسه وهو (٦١) ، وكذلك لهما الوسيط نفسه وهو (٦٠) ولهما منوال واحد هو (٦٠) .

وعلى الرغم من ذلك فلانستطيع القول بأن المجموعتين متكافئتان فقيم المجموعة الأولى متباعدة بينمـا قيـم

المجموعة الثانية متقاربة ، وفي هذه الحالة فإن مقاييس النزعة المركزية لاتعطي وصفاً متكاملاً ، لذا لابد من استخدام مقاييس أخرى تسمى مقاييس التشتت ، والتشتت هو تباعد أو تبعثر القيم في التوزيع عن بعضها البعض ، وكلما تباعدت القيم عن بعضها يكون التوزيع أكثر تشتتاً ، وكلما تقاربت من بعضها يكون التوزيع أقل تشتتاً .

ومن أهم مقاييس التشتت المدى والانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري وفيما يلي نقدم تعريفاً وامثله لكل من هذه المقاييس .

أولاً – المدى :

تعريف (١٠ : ١)

المدى هو الفرق بين أعلى قيمة وأدنى قيمة في التوزيع ويعطى بالعلاقة :

المدى = أعلى قيمة – أصغر قيمة.

وفي حالة الجداول التكرارية يكون :

المدى هو الفرق بين الحد الأعلى لآخر فئة والحد الأدنى لأول فئة في التوزيع أي أن :

المدى = الحد الأعلى لآخر فئة – الحد الأدنى لأول فئة .

مثال (١٠ – ٧) اكتب المدى لكل مما يلي :

أ) ٤ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ .   ب) ٢ ، ٤ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٩ .

الحل أ) المدى = ١٠ – ٤ = ٦ .   ب) المدى = ١٩ – ٢ = ١٧ .

مثال (١٠ – ٨) الجدول التالي يمثل أعمار ٥٤ طالباً لأقرب سنة :

فئة الأعمار	٦ – ٨	٩ – ١١	١٢ – ١٤	١٥ – ١٧
التكرار	١٢	١٧	١٥	١٠

أوجد المدى لأعمار الطلبة الموضحة في الجدول أعلاه .

الحل

الحد الأعلى للفئة الأخيرة = ١٧,٥

الحد الأدنى للفئة الأولى = ٥,٥

∴ المدى = ١٧,٥ – ٥,٥ = ١٢ .

يعطي حساب المدى فكرة سريعة عن تقارب أو تباعد القيم إلاّ أنه يتأثر بالقيم المتطرفة لذلك فهو أقل مقاييس التشتت دقه وكفاءة ، وبالتالي أقلها ثباتاً وصدقاً .

وللحصول على دقة في القياس والتخلص من أثر القيم المتطرفة لابد من أخذ مقاييس أخرى من مقاييس التشتت هي الانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري ، وهي أهم مقاييس التشتت وأكثرها دقة لأنها تتعامل مع كل قيمة من قيم المشاهدات .

ثانياً – الانحراف المتوسط :

هو مقياس يستدل منه على الشكل الذي تتوزع به المشاهدات حول متوسطها الحسابي وفي الحقيقة أن هذا المقياس يستخدم لقياس التباين ونحن عند دراستنا للإحصاء قد نحتاج أحياناً إلى إجراء بعض التحويلات الخطية على العلامات الخام والتعبير عنها بصورة أخرى والعلامة الانحرافية هي بعد العلامة الخام عن المتوسط الحسابي للتوزيع ويرمز لها بالرمز ($ح_ر$) أي أن $ح_ر = س_ر - \bar{س}$ والعلامات الانحرافية ($ح_ر$) قد تكون موجبة أو سالبة أو صفر ويكون المجموع الجبري لها يساوي صفراً دائماً .

ويتم حساب الانحرافات المتوسطة بأخذ القيم المطلقة لانحراف كل مشاهدة (أو مركز الفئة) عن المتوسط الحسابي أي أن $|ح_ر| = |س_ر - \bar{س}|$ لكل مشاهدة ثم بعد ذلك نوجد المتوسط الحسابي لهذه الانحرافات المطلقة فيكون هذا المتوسط الناتج لكل الانحرافات هو متوسط انحرافات المشاهدات عن متوسطها الحسابي ويرمز لها بالرمز ($\bar{ح_ر}$)

أي أن : $$\bar{ح_ر} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} |س_ر - \bar{س}|}{ن} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} |ح_ر|}{ن} .$$

حيث $ن$ = عدد المشاهدات ، $\bar{س}$ المتوسط الحسابي للمشاهدات وكلما صغرت قيمة هذا المتوسط كلّما اقتربت المشاهدات من متوسطها الحسابي وكلّما كبرت كلّما ابتعدت عنه أي أن هذا المتوسط (متوسط الانحرافات) يعتبر بمثابة دليل أو مؤشر على قرب أو بعد المشاهدات عن متوسطها الحسابي .

مثال (١٠ – ٩) أوجد متوسط انحرافات البيانات التالية :

١٥ ، ٣١ ، ٢٨ ، ٤٣ ، ٢٢ ، ٥٠ ، ١٩ ، ٣٧ ، ٢٥ ، ١٧ .

الحــل

أولاً : نحسب المتوسط الحسابي لهذه البيانات .

$$\bar{س} = \frac{١٥ + ٣١ + ٢٨ + ٤٣ + ٢٢ + ٥٠ + ١٩ + ٣٧ + ٢٥ + ١٧}{١٠} = \frac{٢٨٧}{١٠} = ٢٨,٧ .$$

ثانياً : نوجد الانحرافات المطلقة لكل قيمة من القيم عن متوسطها الحسابي :

$|ح_١| = |١٥ - ٢٨,٨| = ١٣,٧$ ، $|ح_٢| = |٣١ - ٢٨,٨| = ٢,٣$ ،

$|ح_٣| = |٢٨ - ٢٨,٨| = ٠,٧$ ، ... وهكذا حتى $|ح_{١٠}| = |١٧ - ٢٨,٨| = ١١,٧$.

ثالثاً – نوجد المتوسط الحسابي للانحرافات المطلقة $|ح_١|$ ، $|ح_٢|$ ، ... ، $|ح_{١٠}|$ ،

$$\therefore \quad \bar{ح} = \frac{\sum_{ر=١}^{١٠} |ح_ر|}{١٠} = \frac{١٣,٧ + ٢,٣ + ٠,٧ + ١٤,٣ + ٦,٧ + ٢١,٣ + ٩,٧ + ٨,٣ + ٣,٧ + ١١,٧}{١٠}$$

$$= \frac{٩٢,٤}{١٠} = ٩,٢٤ \ .$$

وفي حالة التوزيعات التكرارية نحسب متوسط الانحراف بالعلاقة :

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر \times س_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر} \ .$$

حيث $س_ر$ مركز الفئة ، $ك_ر$ تكرار الفئة ، ثم نحسب الانحراف المتوسط من العلاقة :

$$\bar{ح}_ر = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر |ح_ر|}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر} \ .$$

مثال (١٠–١٠) الجدول التالي يمثل توزيع أعمار ٣٠ معلماً بالسنوات أكمل الجدول ، ثم احسب انحراف المتوسط لأعمار هؤلاء المعلمين :

العمر بالسنة	التكرار $ك_ر$	مركز الفئة $س_ر$	$س_ر \times ك_ر$	$\|ح_ر\|$	$ك_ر \times \|ح_ر\|$
٢٥ – ٢٧	١				
٢٨ – ٣٠	٣				
٣٠ – ٣٣	٤				
٣٤ – ٣٦	٧				
٣٧ – ٣٩	٥				
٤٠ – ٤٢	٤				
٤٣ – ٤٥	٣				
٤٦ – ٤٨	٢				
٤٩ – ٥١	١				
المجموع	٣٠				

العمر بالسنة	التكرار $ك_ر$	مركز الفئة $س_ر$	$ك_ر \times س_ر$	$\lvert ح_ر \rvert$	$ك_ر \times \lvert ح_ر \rvert$
٢٥ – ٢٧	١	٢٦	٢٦	١١٫٢	١١٫٢
٢٨ – ٣٠	٣	٢٩	٨٧	٨٫٢	٢٤٫٦
٣١ – ٣٣	٤	٣٢	١٢٨	٥٫٢	٢٠٫٨
٣٤ – ٣٦	٧	٣٥	٢٤٥	٢٫٢	١٥٫٤
٣٧ – ٣٩	٥	٣٨	١٩٠	٠٫٨	٤
٤٠ – ٤٢	٤	٤١	١٦٤	٣٫٨	١٥٫٢
٤٣ – ٤٥	٣	٤٤	١٣٢	٦٫٨	٢٠٫٤
٤٦ – ٤٨	٢	٤٧	٩٤	٩٫٨	١٩٫٦
٤٩ – ٥١	١	٥٠	٥٠	١٢٫٨	١٢٫٨
المجموع	٣٠		١١١٦		١٤٤

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{٩} (ك_ر \times س_ر)}{\sum_{ر=١}^{٩} ك_ر} = \frac{١١١٦}{٣٠} = ٣٧٫٢$$

انحراف المتوسط $\bar{ح} = \frac{\sum_{ر=١}^{٩} ك_ر \times \lvert ح_ر \rvert}{\sum_{ر=١}^{٩} ك_ر} = \frac{١٤٤}{٣٠} = ٤٫٨$.

التباين والانحراف المعياري :

تعريف (١٠ : ٢)

يعرَّف التباين بأنه مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي مقسوم على عدد القيم ناقص واحد ويرمز له بالرمز ($ع^٢$) .

ويعبر عنه رمزياً بالصورة : $ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢}{ن - ١}$.

حيث $ع^٢$ التباين ، $س_ر$ القيم المختلفة ، $\bar{س}$ المتوسط الحسابي ، $ن$ عدد القيم .

أما الانحراف المعياري فهو الجذر التربيعي الموجب للتباين .

الانحراف المعياري $= \sqrt{ع^٢} = ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢}{ن - ١}}$

وفي حالة البيانات المنظمة في جداول التكرار نجد أن التباين هو : $ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢ \times ك_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر - ١}$

حيث $ك_ر$ هو التكرار .

مثال (١٠-١١) أوجد التباين والانحراف المعياري للقيم التالي : ١٢ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٧ ، ١٨ .

الحــل

لحساب التباين نوجد أولاً الوسط الحسابي للقيم $\bar{\text{س}} = \frac{١٢ + ١٣ + ١٥ + ١٧ + ١٨}{٥} = \frac{٧٥}{٥} = ١٥$.

ثم نكوّن الجدول التالي :

قيمة $\text{س}_{\text{ر}}$	$\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}}$	$(\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})^٢$
١٢	٣−	٩
١٣	٢−	٤
١٥	٠	٠
١٧	٢	٤
١٨	٣	٩
$\text{مجـ}(\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})^٢$		٢٦

$$\text{التباين} = \frac{\text{مجـ}(\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})^٢}{\text{ن} - ١} = \frac{٢٦}{٤} = ٦{,}٥ \ .$$

$$\therefore \ \text{الانحراف المعياري} = \sqrt{٦{,}٥} \approx ٢{,}٥٥$$

مثال (١٠-١٢) الجدول التكراري التالي يمثل درجات ٢٠ طالباً في اختبار لمادة الرياضيات (الدرجة العظمى ١٠ درجات) .

	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
	١	٤	٣	٣	٥	٣	١

أوجد التباين والانحراف المعياري لدرجات هؤلاء الطلبة

الحــل

لحساب التباين والانحراف المعياري نكوّن الجدول التالي :

الدرجة $\text{س}_{\text{ر}}$	التكرار $\text{ك}_{\text{ر}}$	$\text{س}_{\text{ر}} \times \text{ك}_{\text{ر}}$	$(\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})$	$(\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})^٢$	$(\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})^٢ \times \text{ك}_{\text{ر}}$
٣	١	٣	٣−	٩	٩
٤	٤	١٦	٢−	٤	١٦
٥	٣	١٥	١−	١	٣
٦	٣	١٨	٠	٠	٠
٧	٥	٣٥	١	١	٥
٨	٣	٢٤	٢	٤	١٢
٩	١	٩	٣	٩	٩
المجموع	٢٠	١٢٠		٢٨	٥٤

$$\text{المتوسط الحسابي } \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} \times \text{ك}_{\text{ر}}}{\text{مجـ} \ \text{ك}_{\text{ر}}}$$

$$= \frac{١٢٠}{٢٠} = ٦$$

$$\text{التباين } \text{ع}^٢ = \frac{\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{س} - \bar{\text{س}})^٢ \times \text{ك}_{\text{ر}}}{\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ر}} - ١}$$

$$= \frac{٥٤}{١٩} \approx ٢{,}٨$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\text{ع}^٢} \approx \sqrt{٢{,}٨} \approx ١{,}٧ \ .$$

مثال (١٠–١٣) يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٣٠ طالباً . احسب التباين والانحراف المعياري لدرجة هؤلاء الطلبة .

	٣ – ٥	٦ – ٨	٩ – ١١	١٢ – ١٤	١٥ – ١٧	١٨ – ٢٠
	١	٣	٦	١٠	٨	٢

الحـــل

نكوّن الجدول التالي :

الفئـة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ك_ر$	$س_ر \times ك_ر$	$(س_ر - \bar{س})$	$(س_ر - \bar{س})^٢$	$(س_ر - \bar{س})^٢ \times ك_ر$
٣ – ٥	٤	١	٤	−٨,٧	٧٥,٦٩	٧٥,٦٩
٦ – ٨	٧	٣	٢١	−٥,٧	٣٢,٤٩	٩٧,٤٧
٩ – ١١	١٠	٦	٦٠	−٢,٧	٧,٢٩	٤٣,٧٤
١٢ – ١٤	١٣	١٠	١٣٠	٠,٣	٠,٠٩	٠,٩
١٥ – ١٧	١٦	٨	١٢٨	٣,٣	١٠,٨٩	٨٧,١٢
١٨ – ٢٠	١٩	٢	٣٨	٦,٣	٣٩,٦٩	٧٩,٣٨
المجموع		٣٠	٣٨١		١٦٦,١٤	٣٨٤,٣

أولاً :
$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{٦} (س_ر \times ك_ر)}{\sum_{ر=١}^{٦} ك_ر} = \frac{٣٨١}{٣٠} = ١٢,٧$$

ثانياً : التباين
$$ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{٦} (س_ر - \bar{س})^٢ \times ك_ر}{\sum_{ر=١}^{٩} ك_ر - ١} = \frac{٣٨٤,٣}{٣٠} \approx ١٣,٢٥ \ .$$

$$\therefore \text{الانحراف المعياري} = \sqrt{ع^٢} = \sqrt{١٣,٢٥} \approx ٣,٦٤ \ .$$

تمارين ومسائل (١٠ : ٣)

[١] أوجد المدى والتباين والانحراف المعياري للقيم التالية :

أ) ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٣ . ب) ٢٢ ، ١٨ ، ٢٥ ، ١٩ ، ٦ .

جـ) ٤ ، ٦ ، ٦ ، ٧ ، ٧ ، ٦ . ء) ٥٢ ، ٥٦ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٢ .

[٢] أضف العدد ٣ إلى كل من الأعداد الآتية : ٣ ، ٦ ، ٢ ، ١ ، ٧ ، ٥ أثبت أن هذه الإضافة لاتؤثر على قيمة التباين .

[٣] احسب الانحراف المتوسط لكل من القياسات التالية :

أ) ٦٥ ، ٦٣ ، ٦٢ ، ٦٧ .   ب) ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٩ .

جـ) ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٢ .   ء) ٤٥ ، ٤٢ ، ٤٥ ، ٤٣ .

[٤] الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري لوزن ٣٠ طفلاً لأقرب كيلوجرام .

الدرجة	٢ – ٤	٥ – ٧	٨ – ١٠	١١ – ١٣
التكرار	٥	٨	١٢	٥

أوجد أ) المدى .   ب) الانحراف المتوسط .

جـ) التباين والانحراف المعياري لأوزان الأطفال .

[٥] أوجد المدى والتباين والانحراف المعياري لدرجات ١٠٣ طالباً موزعة كما يلي :

الدرجة	٢٥	٢٧	٣١	٣٣	٣٨	٤٠	٤٢	٤٥	٤٦	٥٠
التكرار	٥	١٠	١٢	١٥	١٩	١٥	١١	٨	٦	٢

[٦] البيانات التالية درجات ٦٠ طالب في مادة العلوم (الدرجة العظمى ٣٠ درجة) .

١٢ ، ١٩ ، ١٦ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢٥ ، ٢٠ ، ١٨ ، ٢٠ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ١٩

٢٥ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ٢٢ ، ٢٧ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٧ ، ١١ ، ١٨ ، ٢٢ ، ١٨ ، ١٩

٢٠ ، ٢٠ ، ٢٦ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ١٢ ، ١٠ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٥ ، ٢٨ ، ١٦ ، ١٥ ، ١٧

٢٢ ، ١٦ ، ٢١ ، ٢٥ ، ٢٩ ، ٢٤ ، ١٩ ، ١٧ ، ١٣ ، ١٢ ، ٢٨ ، ١٦ ، ١٧ ، ٢٧

١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ .

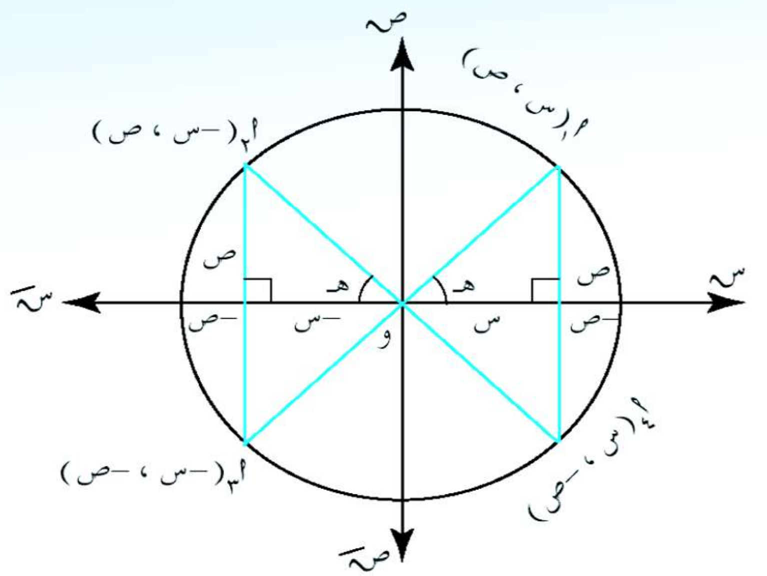
كوّن جدولاً تكرارياً لدرجات الطلبة بالفئات بحيث يكون طول الفئة = ٥ ، ثم أوجد المدى والتباين لدرجات هؤلاء الطلبة .

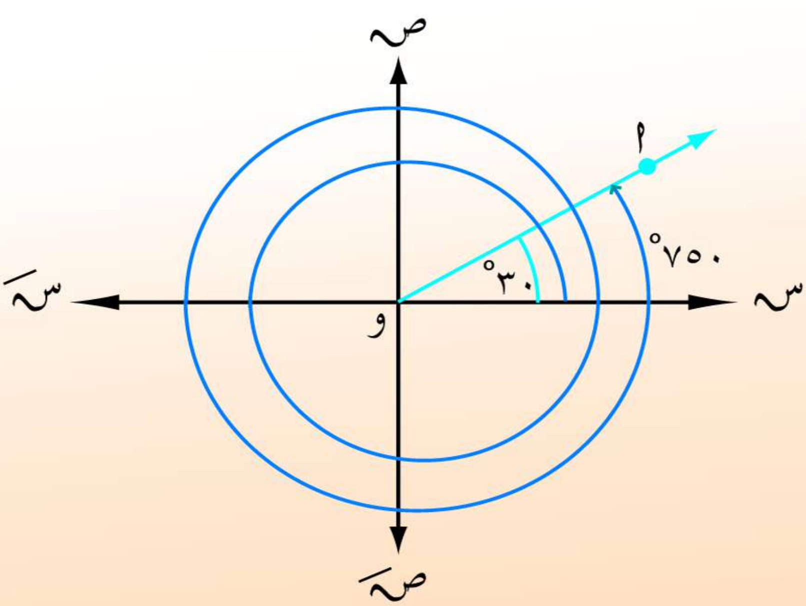
تمت بحمد الله

e-learning

الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني

el-online.net


ص
أ١(س ، ص)
أ٢(−س ، ص)
س
س̄
هـ
هـ
ص
ص
س
−س
−ص
−ص
و
أ٣(−س ، −ص)
أ٤(س ، −ص)
ص̄


ص
أ
°٧٥٠
°٣٠
س
س̄
و
ص̄