الاسم :	مذاكرة (تطبيقات الأعداد العقديّة)	BAC MATHS
المدّة :	الدرجة الكاملة : 300	

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نعرّف النقطتين A و B بحيث : $z_A = 4 + i \ , \ z_B = 2 + 3i$. **المطلوب :**

1) أوجد العدد العقدي z_C الممثّل للنقطة C صورة A وفق دوران مركزه B و زاويته $+\frac{\pi}{2}$.

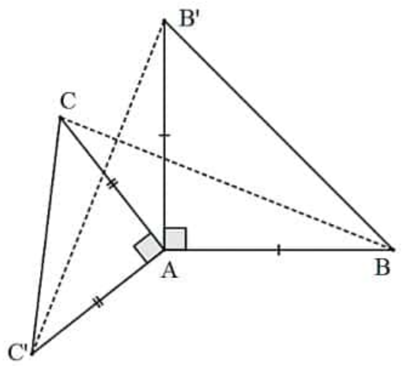
2) أوجد العدد العقدي z_D الممثّل للنقطة D بحيث يكون الرباعي $ADBC$ متوازي أضلاع .

السؤال الثاني: نتأمّل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان $a = 2$, $b = 2e^{5i\pi/6}$, و لتكن I منتصف $[AB]$. **المطلوب :**

1) ارسم شكلاً مناسباً , و بيّن طبيعة المثلث OAB , ثم استنتج قياساً للزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$.

2) احسب العدد العقدي z_I الممثّل للنقطة I بصيغته الجبريّة و الأسيّة , ثم استنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

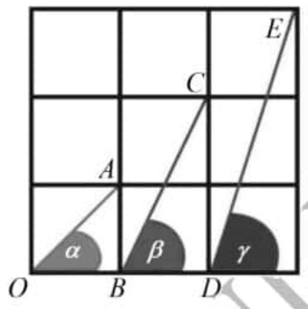


التمرين الأول: في الشكل المجاور المثلّثان ABB' و ACC' كلٌّ منهما قائمٌ في A و متساوي الساقين , تأمّل المعلم المتجانس و المباشر $(A; \vec{u}, \vec{v})$, و المطلوب :

1) اكتب $z_{B'}$ بدلالة z_B, و $z_{C'}$ بدلالة z_C .

2) احسب $\frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_B - z_C}$.

3) استنتج أنّ $(BC) \perp (B'C')$ و $BC = B'C'$.



التمرين الثاني: في الشكل المجاور α و β و γ هي القياسات الأساسيّة للزوايا الموجّهة $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$ و $(\vec{u}, \overrightarrow{BC})$ و $(\vec{u}, \overrightarrow{DE})$ بالترتيب . **المطلوب :**

1) اكتب الأعداد العقديّة الآتية بالشكل الجبري ثمّ بالشكل الأسّي : $z_{\overrightarrow{DE}}$, $z_{\overrightarrow{BC}}$, $z_{\overrightarrow{OA}}$.

2) اكتب العدد العقدي $z_{\overrightarrow{OA}} . z_{\overrightarrow{BC}} . z_{\overrightarrow{DE}}$ بالشكل الجبري ثمّ بالشكل الأسّي .

3) استنتج المجموع $\alpha + \beta + \gamma$.

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

أولاً : في مجموعة الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$, نُعطى كثير الحدود $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$:

1) تحقّق أنّ $P(4) = 0$, ثم عيّن العددين الحقيقيّين α و β ليكون $P(z) = (z - 4)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

2) حل المعادلة $P(z) = 0$.

ثانياً : في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس نعرّف النقاط A , B , C صور الأعداد :

$$z_A = 1 - i\sqrt{3} \quad , \quad z_B = 1 + i\sqrt{3} \quad , \quad z_C = 4$$

3) احسب طويلة و زاوية العدد $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$, ثم استنتج نوع المثلث ABC .

4) احسب z_G الممثّل للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A, |z_A|)$, $(B, |z_B|)$, $(C, |z_C|)$.

-------- انتهت الأسئلة --------

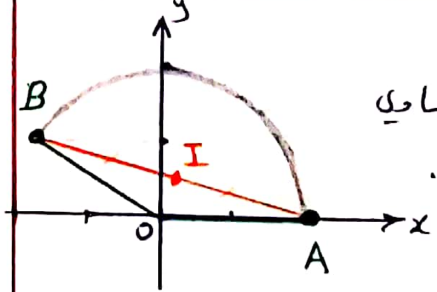
حل مذاكرة تطبيقات الأعداد العقدية "2022-1"

أولاً: السؤال الأول:

1)
$$Z_C - Z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_A - Z_B)$$
$$Z_C - 2 - 3i = i(4 + i - 2 - 3i)$$
$$Z_C - 2 - 3i = i(2 - 2i)$$
$$Z_C - 2 - 3i = 2i + 2$$
$$\boxed{Z_C = 4 + 5i}$$

2)
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$$
$$Z_{\overrightarrow{AD}} = Z_{\overrightarrow{CB}}$$
$$Z_D - Z_A = Z_B - Z_C$$
$$Z_D = Z_A + Z_B - Z_C$$
$$= (4+i) + (2+3i) - (4+5i)$$
$$\boxed{Z_D = 2 - i}$$

السؤال الثاني:



1) المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O.
فيه OI متوسط
فهو منصّف للزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$
أي إنَّ:
$$(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{1}{2}(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$$
$$(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{5\pi}{12} \quad (2\pi)$$

2)
$$b = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$
$$Z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

بما أنَّ $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{5\pi}{12}$ وإذن:
$$\arg(Z_I) = \frac{5\pi}{12}$$
$$Z_I = re^{i\theta}$$
$$r = |Z_I| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 - 4\sqrt{3} + 3 + 1}{4}}$$
$$r = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$\theta = \frac{5\pi}{12}$$
$$\Rightarrow Z_I = \sqrt{2-\sqrt{3}}\, e^{i\frac{5\pi}{12}}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$
ونقبل: $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow$$
$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$
$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$
ونقبل: $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ثانياً: التمرين الأول:

1) B' صورة B وفق دوران مركزه A زاويته $+\frac{\pi}{2}$
$$Z_{B'} - Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_A)$$
$$\boxed{Z_{B'} = iZ_B}$$
C' صورة C وفق دوران مركزه A زاويته $+\frac{\pi}{2}$
$$Z_{C'} - Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_C - Z_A)$$
$$\boxed{Z_{C'} = iZ_C}$$

(2
$$\frac{z_{B'}-z_{C'}}{z_B-z_C}=\frac{iz_B-iz_C}{z_B-z_C}=\frac{i\cancel{(z_B-z_C)}}{\cancel{z_B-z_C}}$$

$$\frac{z_{B'}-z_{C'}}{z_B-z_C}=i$$

(3
$$\frac{z_{B'}-z_{C'}}{z_B-z_C}=i\ \begin{cases}\left|\dfrac{z_{B'}-z_{C'}}{z_B-z_C}\right|=1 \\ \dfrac{B'C'}{BC}=1 \Rightarrow \boxed{B'C'=BC} \\ \arg\left(\dfrac{z_{B'}-z_{C'}}{z_B-z_C}\right)=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow (\vec{BC},\vec{B'C'})=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(BC)\perp(B'C')}$$

التمرين الثاني :

(1
$$z_{\vec{OA}}=z_A-z_O=1+i$$
$$=\sqrt{1^2+1^2}\,e^{i\alpha}=\sqrt{2}\,e^{i\alpha}$$

$$z_{\vec{BC}}=z_C-z_B=(2+2i)-(1)=1+2i$$
$$=\sqrt{1^2+2^2}\,e^{i\beta}=\sqrt{5}\,e^{i\beta}$$

$$z_{\vec{DE}}=z_E-z_D=(3+3i)-(2)=1+3i$$
$$=\sqrt{1^2+3^2}\,e^{i\gamma}=\sqrt{10}\,e^{i\gamma}$$

(2
$$z_{\vec{OA}}\cdot z_{\vec{BC}}\cdot z_{\vec{DE}}=(1+i)(1+2i)(1+3i)$$
$$=(1+2i+i-2)(1+3i)=(-1+3i)(1+3i)$$
$$=(3i)^2-(1)^2=-9-1=-10$$

$$z_{\vec{OA}}\cdot z_{\vec{BC}}\cdot z_{\vec{DE}}=\sqrt{2}\,e^{i\alpha}\cdot\sqrt{5}\,e^{i\beta}\cdot\sqrt{10}\,e^{i\gamma}$$
$$=10\,e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$$

(3
$$10\,e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}=-10$$
$$e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}=e^{i\pi}$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha+\beta+\gamma=\pi}$$

الثالث :

(1
$$P(4)=64-96+48-16=0$$

$$P(z)=(z-4)(z^2+\alpha z+\beta)$$
$$=z^3+\alpha z^2+\beta z-4z^2-4\alpha z-4\beta$$
$$=z^3+(\alpha-4)z^2+(\beta-4\alpha)z-4\beta$$

بالمطابقة :

$$-4\beta=-16 \Rightarrow \boxed{\beta=4}$$
$$\alpha-4=-6 \quad \boxed{\alpha=-2}$$

(2
$$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-4)(z^2-2z+4)=0$$

إما $z_1=4$

أو $z^2-2z+4=0$

$$\Delta=b^2-4ac=4-16=-12$$
$$\sqrt{-\Delta}=2\sqrt{3}$$

$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2+i2\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$$
$$z_3=\overline{z_2}=1-i\sqrt{3}$$

(3
$$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{(3+i\sqrt{3})^2}{(3-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}$$
$$=\frac{9+6i\sqrt{3}-3}{9+3}=\frac{6+6i\sqrt{3}}{12}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع .

(4
$$|z_A|=|z_B|=2\ ,\ |z_C|=4$$

$$z_G=\frac{2(1-i\sqrt{3})+2(1+i\sqrt{3})+4(4)}{2+2+4}=\frac{5}{2}.$$