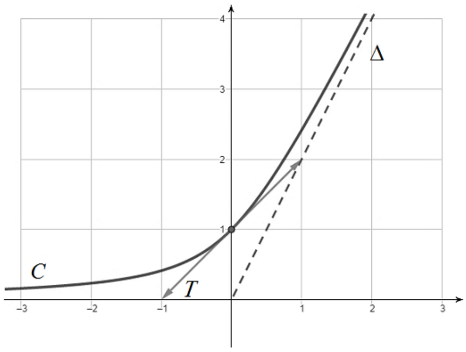
السؤال الأول: نتأمّل جانباً الخط البياني لتابع f معرّف على $\mathbb{R}$. **المطلوب** :



1) أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) عيّن قيمة $f(0)$ و $f'(0)$.

3) اكتب معادلة المقارب المائل Δ .

4) أوجد $f(]-\infty,0])$.

1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

2)

$$f(0)=1$$

باختيار نقطتين من المماس $A(0,1)$, $B(1,2)$

$$f'(0)=m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=1$$

3) المستقيم Δ مار بالمبدأ معادلته من الشكل $y=mx$

و هو مار بالنقطة $B(1,2)$ و بالتالي $2=m\times 1$

$$\boxed{\Delta:\ y=2x}$$

4)

$$f(]-\infty,0])=]0,1]$$

السؤال الثاني: نعتبر العددين $I=\int_3^5 \frac{2x}{x^2-1}dx$ و $J=\int_3^5 \frac{2}{x^2-1}dx$. **المطلوب:**

1) احسب I .

2) احسب $I+J$ و استنتج قيمة J .

1)

$$I=\int_3^5 \frac{2x}{x^2-1}dx=\left[\ln(x^2-1)\right]_3^5$$

$$=\ln(25-1)-\ln(9-1)$$

$$=\ln(\frac{24}{8})=\ln 3$$

2)

$$I+J=\int_3^5 \frac{2x+2}{x^2-1}dx=2\int_3^5 \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}dx$$

3)

$$I+J=2\int_3^5 \frac{1}{x-1}dx=2\left[\ln(x-1)\right]_3^5$$

$$=2\left[\ln 4-\ln 2\right]=2\ln 2$$

$$I+J=\ln 4 \Rightarrow \ln 3+J=\ln 4$$

$$\boxed{J=\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$$

السؤال الثالث: لتكن المجموعة $S=\{1,2,3,\dots,9\}$. **المطلوب** :

1) كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر S ؟

2) ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد 3 ؟

1)

$$9\times 9=81$$

2) نجزّئ المجموعة S إلى ثلاثة مجموعات جزئية حسب باقي قسمة كل عدد على 3 :

$$A_0=\{3,6,9\}\ ,\ A_1=\{1,4,7\}\ ,\ A_2=\{2,5,8\}$$

نختار العناصر الثلاثة من A_0 أو من A_1 أو من A_2

أو نختار عنصر من A_0 و عنصر من A_1 و عنصر من A_2

$$\binom{3}{3}+\binom{3}{3}+\binom{3}{3}+\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1}=\boxed{30}$$

السؤال الرابع: في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطة $A(1,1,1)$ و المستوي $P: x+y+z=0$. **المطلوب:**

1) اكتب معادلة المستوي Q الذي يمر من النقطة A و يوازي المستوي P .

2) تحقّق أنّ المستوي P يمس الكرة ذات المعادلة $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$.

1) $\overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$ $x+y+z+d=0$ نعوض إحداثيات A : $3+d=0 \Rightarrow \boxed{d=-3}$ $\boxed{Q:\ x+y+z-3=0}$	2) الكرة مركزها $A(1,1,1)$ و نصف قطرها $r=\sqrt{3}$ $dist_{(A,P)}=\dfrac{\lvert a x_A+b y_A+c z_A+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ $dist_{(A,P)}=r$ فالمستوي P يمس الكرة المذكورة .

السؤال الخامس: في أحد الاختبارات المؤتمتة ، يتضمن الاختبار أربعة أسئلة كل منها مزود بثلاث إجابات مقترحة منها واحدة صحيحة فقط .
يقرر أحد المتقدمين الإجابة عشوائياً عن هذه الأسئلة . ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد الإجابات الصحيحة التي يحققها الطالب . **المطلوب** :

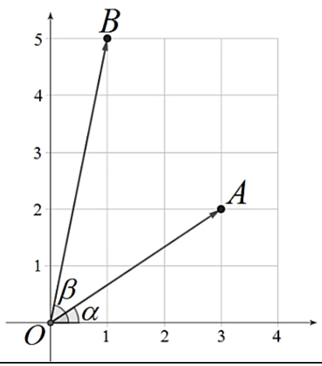
1) عيّن مجموعة قيم X ثم احسب $\mathbb{P}(X\geq 1)$.　　2) احسب $\mathbb{E}(X)$.

1) X متحول عشوائي حداني (تجربة برنولية) $n=4$ و $p=\dfrac{1}{3}$ $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$	$\mathbb{P}(X\geq 1)=1-\mathbb{P}(X=0)=1-\binom{4}{0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{65}{81}$ 2) $\mathbb{E}(X)=np=4\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$

السؤال السادس: ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^x\cos x$. **المطلوب** :

1) أثبت أنّ التابع $y=f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضليّة $y-y'=e^x\sin x$.　　2) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

1) f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ $f'(x)=(e^x)(\cos x)+(-\sin x)(e^x)$ $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$ $f(x)-f'(x)=e^x\cos x-e^x(\cos x-\sin x)$ $=e^x(\cos x-\cos x+\sin x)$ $=e^x\sin x$ أي إنّ التابع $y=f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضليّة $y-y'=e^x\sin x$	2) $-1\leq\cos x\leq 1$ نضرب بـ $e^x>0$: $-e^x\leq e^x\cos x\leq e^x$ $-e^x\leq f(x)\leq e^x$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^x)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x)=0\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ حسب مبرهنة الإحاطة .



التمرين الأول: نُعطى في الشكل المجاور معلماً متجانساً مباشراً $(O,\vec{u},\vec{v})$

α هي القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OA})$ و β هي القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OB})$. **المطلوب:**

1) اكتب بالشكل الجبري العددين العقديّين z_A و z_B اللذان يمثلان النقطتين A و B .

2) احسب العدد العقدي $\frac{z_B}{z_A}$ بالشكلين الجبري و الأسي .

3) استنتج قيمة $\beta-\alpha$.

(1

$$z_A=3+2i \quad , \quad z_B=1+5i$$

(2

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{1+5i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}$$

$$=\frac{3-2i+15i+10}{9+4}=\frac{13+13i}{13}=1+i$$

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{z_B}{z_A}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

3) وجدنا أنّ $\frac{z_B}{z_A}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و من جهة أخرى :

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{\sqrt{1+25}\,e^{i\beta}}{\sqrt{9+4}\,e^{i\alpha}}=\sqrt{\frac{26}{13}}e^{i(\beta-\alpha)}=\sqrt{2}e^{i(\beta-\alpha)}$$

و بالتالي

$$\sqrt{2}e^{i(\beta-\alpha)}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{\beta-\alpha=\frac{\pi}{4}}$$

التمرين الثاني: نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفتين وفق $\begin{cases}u_0=-2\\ u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+4}\end{cases}$ و $v_n=1+\frac{3}{u_n}$. **المطلوب:**

1) أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية ، عيّن أساسها و حدها الأول ، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n .

2) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، و احسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

3) احسب بدلالة n المجموع $s_n=\frac{3}{u_0}+\frac{3}{u_1}+\ldots+\frac{3}{u_n}$.

(1

$$v_{n+1}=1+\frac{3}{u_{n+1}}=1+\frac{3(u_n+4)}{u_n}$$

$$=4+\frac{12}{u_n}=4\left(1+\frac{3}{u_n}\right)$$

$$\Rightarrow\ v_{n+1}=4v_n$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=4$ و حدها الأول

$$v_0=1+\frac{3}{u_0}=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$v_n=v_0q^n \ \Rightarrow\ \boxed{v_n=-\frac{1}{2}(4)^n}$$

(2

$$v_n=1+\frac{3}{u_n}\ \Rightarrow\ \frac{3}{u_n}=v_n-1\ \Rightarrow\ u_n=\frac{3}{v_n-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n=\frac{3}{-\frac{1}{2}(4)^n-1}=\frac{-6}{4^n+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty}4^n=+\infty$

(3 $s_n = \frac{3}{u_0}+\frac{3}{u_1}+\dots+\frac{3}{u_n}$ $= (v_0-1)+(v_1-1)+\dots+(v_n-1)$ $= (v_0+v_1+\dots+v_n) - \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n+1\ times}$	$s_n = -\frac{1}{2}.\frac{1-4^{n+1}}{1-4}-(n+1)$ $\boxed{s_n = \frac{1}{6}\left(1-4^{n+1}\right)-(n+1)}$

التمرين الثالث: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(0)=0$ و $f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$ في حالة $x \neq 0$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ التابع f مستمر عند $x=0$.
2) أثبت أنّ التابع f اشتقاقي عند $x=0$ ، و عيّن قيمة $f'(0)$.
3) اكتب معادلة المماس T للخط C عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ ، ثم احسب قيمة تقريبية لـ $f(0.2)$.

(1 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right]$ $=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos^2 x}{x}\,\frac{1}{1+\cos x}\right]$ $=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin x}{1+\cos x}\right] = (1)(\frac{0}{2}) = 0$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ فالتابع f مستمر عند $x=0$. (2 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$ $=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x}$ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = (1)^2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$	فالتابع f اشتقاقي عند $x=0$ و $f'(0)=\frac{1}{2}$. (3 $y-y_0 = m(x-x_0)$ $y_0 = f(0)=0\ ,\ m=f'(0)=\frac{1}{2}$ $y-0=\frac{1}{2}(x-0)$ $\boxed{T: y=\frac{1}{2}x}$ $f(a+h)\simeq f(a)+f'(a).h$ باختيار $a=0\ ,\ h=0.2$ $f(0.2)\simeq f(0)+f'(0).(0.2) = 0+\frac{1}{2}(0.2)$ $\boxed{f(0.2)\simeq 0.1}$

المسألة الأولى: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل المستقيم $d: x=2+t\ ,\ y=2\ ,\ z=2-t$

و المستويين $P: x-z=2$ و $Q: x+2y-2z=5$. **المطلوب:**

1) أثبت أنّ المستويين P و Q متقاطعان .
2) اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d' .
3) أثبت أنّ المستقيمين d و d' متعامدان .
4) عيّن إحداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستقيمين d و d' .
5) تحقّق من أنّ الشعاع $\vec{n}(1,-4,1)$ يعامد كلاً من d و d' ، ثم اكتب معادلة المستوي R الذي يشمل d و d' .

1)

$$\overrightarrow{n_P}(1,0,-1)\ ,\ \overrightarrow{n_Q}(1,2,-2)$$

$$\frac{1}{1}\neq\frac{0}{2}\neq\frac{-1}{-2}$$

الناظمان غير مرتبطين خطياً و بالتالي المستويان P و Q متقاطعان .

2) بالحل المشترك

$$\begin{cases} x-z=2 & ....(1) \\ x+2y-2z=5 & ....(2) \end{cases}$$

من (1) : $\boxed{x=z+2}$

نعوض في (2) :

$$z+2+2y-2z=5$$

$$2y-z=3\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}}$$

بفرض $z=\lambda$:

$$d':\begin{cases} x=\lambda+2 \\ y=\frac{1}{2}\lambda+\frac{3}{2} \\ z=\lambda \end{cases} ;\lambda\in\mathbb{R}$$

3)

$$\overrightarrow{u_d}(1,0,-1)\ ,\ \overrightarrow{u_{d'}}(1,\frac{1}{2},1)$$

$$\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_{d'}}=(1)(1)+(0)(\frac{1}{2})+(-1)(1)=0$$

فالمستقيمان d و d' متعامدان .

4) بالحل المشترك :

$$2+t=\lambda+2 \quad ....(1)$$

$$2=\frac{1}{2}\lambda+\frac{3}{2} \quad ....(2)$$

$$2-t=\lambda \quad ....(3)$$

من (2) نجد أنّ $\lambda=1$ نعوض في (1) فنجد $t=1$

نعوض في (3) فنجد أنها محققة .

أي إنّ المستقيمين متقاطعان .

لتعيين نقطة التقاطع نعوض $t=1$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d :

$$x=3\ ,\ y=2\ ,\ z=1$$

$$\Rightarrow \boxed{I(3,2,1)}$$

5)

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_d}=(1)(1)+(-4)(0)+(1)(-1)=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_{d'}}=(1)(1)+(-4)(\frac{1}{2})+(1)(1)=0$$

فالشعاع $\vec{n}(1,-4,1)$ عمودي على d و d' .

المستوي R يقبل الشعاع $\vec{n}(1,-4,1)$ ناظماً له و هو يمر من النقطة $I(3,2,1)$:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$(x-3)-4(y-2)+(z-1)=0$$

$$\boxed{R:\ x-4y+z+4=0}$$

المسألة الثانية:

$A-$ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $I=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$. **المطلوب:**

1) أثبت أنّ f تابع زوجي .

2) ادرس تغيّرات التابع f على المجال $]1,+\infty[$.

3) في معلم متجانس ارسم مقاربات C ثم ارسم C .

$B-$ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq2}$ التي حدها العام $u_n=\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ ، و لتكن $(s_n)_{n\geq2}$ المتتالية التي حدها العام $s_n=u_2+u_3+...+u_n$

4) أثبت أنّ $s_n=\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$ أياً كان العدد الطبيعي $n\geq2$.

5) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n$.

1)
أياً كان $x \in I$ فإنّ $(-x) \in I$.

$$f(-x) = \ln\left(1 - \frac{1}{(-x)^2}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(-x) = f(x)$$

فالتابع زوجي و خطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

2) f معرف و مستمر و اشتقاقي على $]1, +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

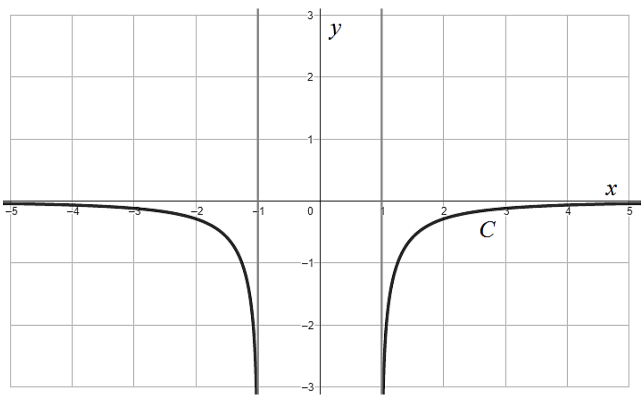
لأنّ $\lim_{t \to 0^+} \ln t = -\infty$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3 - x}$$

$$= \frac{2}{x(x^2 - 1)} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)} > 0 \quad \forall x \in I$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+ \ + \ +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

3)



4)

$$E(n) : \ll \ s_n = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) \ \gg$$

نثبت صحة القضية من أجل $n = 2$:

$$s_2 = u_2 = \ln\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$E(2)$ محقّقة .

نفرض صحة $E(n)$ و نبرهن صحّة $E(n+1)$:

من الفرض لدينا :

$$s_n = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

نضيف للطرفين u_{n+1} :

$$\underbrace{s_n + u_{n+1}} = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) + u_{n+1}$$

$$s_{n+1} = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$s_{n+1} = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) + \ln\left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)$$

$$s_{n+1} = \ln\left(\frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$$

$$s_{n+1} = \ln\left(\frac{n+2}{2(n+1)}\right)$$

$E(n+1)$ محقّقة . فالقضية $E(n)$ محقّقة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 2$.

5)

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

– – – – – – – انتهى الحل – – – – – – –

إعداد المدرس: عبد الملك خير الله