المدة :	اختبار في المتتاليات & نهاية المتتالية نموذج (1)	الاسم :

السؤال الأول : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة : $u_0 = 2$ ، $u_{n+1} = 2u_n - 3$

نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ حيث : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

1) اثبت أن (v_n) هندسية ثم عين أساسها و حدها الأول .

2) أكتب u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

السؤال الثاني : ليكن n عدد طبيعي أثبت بالتدريج : $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7 .

السؤال الثالث : ليكن عند كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

1) أوجد عددين حقيقيين b و a يحققان عند كل عدد طبيعي n أن : $u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$

2) ليكن في حالة عدد طبيعي n : $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ عبر عن s_n بدلالة n و استنتج نهاية المتتالية $(s_n)_{n\geq0}$.

السؤال الرابع : لتكن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ & $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتين وفق العلاقتين : $u_n = -\frac{1}{n}$ ، $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

1) ادرس إطراد كل من $(u_n)_{n\geq1}$ & $(v_n)_{n\geq1}$.

2) أثبت أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ & $(v_n)_{n\geq1}$ متجاورتان .

السؤال الخامس : ليكن $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n

ليكن $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

1) أثبت بالتدريج أن : $s_n = \frac{n}{n+1}$ مهما يكن $n \in N^*$

2) أوجد نهاية s_n .

Mohammed Ahmed
Math Teacher
0964848890

انتهت الأسئلة

#مع تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح

أ . محمد أحمد

0964848890

Scanned by CamScanner

حل الاختبار الأول في المتتاليات و نهاية المتتالية ...

السؤال الأول: ①

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{u_{n+1}-3}}{\frac{1}{u_n-3}} = \frac{\frac{1}{2u_n-6}}{\frac{1}{u_n-3}}$$

$$= \frac{u_n-3}{2u_n-6} = \frac{1}{2}$$

و نجد $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{1}{2}}$

وحدها الأول: $v_0 = \frac{1}{u_0-3} = \frac{1}{2-3} = -1$

② $v_n = v_p \cdot q^{n-p}$

$v_n = v_0 \cdot q^{n-0} = -1\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$v_n = -\frac{1}{2^n}$

$v_n = \frac{1}{u_n-3} \Rightarrow u_n - 3 = \frac{1}{v_n}$

$\Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 3$

$\Rightarrow u_n = -2^n + 3$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

لأن:

$q = 2 > 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

السؤال الثاني:

نبرهن صحة القضية من أجل $E(0)$

$2^0 - 1 = 0$ مضاعف للعدد 7

(محققة)

نفرض أن القضية صحيحة من أجل $E(n)$:

أي: $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7

نبرهن أن القضية صحيحة من أجل $E(n+1)$:

أي لنبرهن: $2^{3(n+1)} - 1$ مضاعف للعدد 7

أي: $2^{3n+3} - 1$ مضاعف للعدد 7.

الإثبات:

$2^{3n+3} - 1 = 2^{3n} \cdot 2^3 - 1 =$

$2^{3n} \cdot 8 - 1 = 2^{3n}(1+7) - 1 = 0$

$2^{3n} + 7 \cdot 2^{3n} - 1 =$

$\underbrace{2^{3n} - 1}_{\text{مضاعف للعدد 7 فرضاً}} + \underbrace{7 \cdot 2^{3n}}_{\text{مضاعف للعدد 7}}$

طبيعياً

المجموع مضاعف للعدد 7

Scanned by CamScanner

السؤال الثالث:

① $U_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$ $\quad (2n+1) \quad (2n-1)$

$= \frac{2an + a + 2bn - b}{(2n-1)(2n+1)}$

$U_n = \frac{(2a+2b)n + a - b}{(2n-1)(2n+1)}$

$\Rightarrow \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2a+2b)n + a - b}{(2n-1)(2n+1)}$

$(2a+2b)n + a - b = 1$

$\Rightarrow (2a+2b)n + a - b = 0n + 1$

$2a + 2b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \dots (1)$

$a - b = 1 \dots (2)$

$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} + b = 0$

$\Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

② $U_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1}$

$U_0 = \frac{\frac{1}{2}}{-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{1}$

$U_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{-\frac{1}{2}}{3}$

$U_2 = \frac{\frac{1}{2}}{3} + \frac{-\frac{1}{2}}{5}$

$\vdots$

$U_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1}$

$S_n = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-1}{1}} + \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{2n+1}{1}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}$

$\lim S_n = -\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2}$

السؤال الرابع:

$V_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

نفرض تابع: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

ونشتق:

$f'(x) = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$

$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{(x^2+1)}$

$= \frac{-x}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+1})} < 0$

Scanned by CamScanner

ومنه التابع متناقص تماماً.

$\Leftarrow$ المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً.

$u_n = -\frac{1}{n}$

نفرض تابع: $g(x) = -\frac{1}{x}$

نشتق: $g'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

ومنه التابع متزايد تماماً

$\Leftarrow$ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً.

(2) $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n)$

$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{n} \right)$

$= \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = 0 + 0 = 0$

ومنه: $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

ومنه المتتاليتان v_n و u_n متجاورتان.

السؤال الخامس:

(1) نبرهن صحة القضية من أجل $E(1)$

$S_1 = \frac{1}{1+1}$

$L_1 = S_1 = \frac{1}{2}$

$L_2 = \frac{1}{2}$

$L_1 = L_2$

القضية صحيحة من أجل $n=1$

نفرض أن القضية صحيحة من أجل $E(n)$:

أي: $S_n = \frac{n}{n+1}$ ...(*) "محققة"

نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$:

أي لنبرهن: $S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$S_{n+1} = \underbrace{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}_{} + u_{n+1}$

$= S_n + u_{n+1}$

$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
$\quad (n+2) \qquad (1)$

$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$

$= \frac{n+1}{n+2}$

إذاً العلاقة صحيحة من أجل $E(n+1)$

مما سبق نستنتج أن القضية صحيحة من أجل أي عدد طبيعي غير معدوم.

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

(انتهى الحل)

بكالوريا رياضيات مع الأستاذ:

محمد أحمد

Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner