« مسائل شاملة تحليل »

(1)

## المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ وفق: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ والمطلوب:

1. أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب للخط C عند $-\infty$ وكذلك عند $+\infty$. ادرس وضع الخط C بالنسبة الى هذا المقارب.
2. عين المقارب الموازي للمحور $yy'$ للخط C في حال وجوده. وادرس وضع الخط C بالنسبة إليه.
3. أثبت أن الدالة f فردية واستنتج الصفة التناظرية للخط C.
4. ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها.
5. ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C.
6. احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحور $x'x$ والمستقيم الذي معادلته $x=2$.

**الحل:** f مستمرة على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}$$

$$\Leftarrow\quad f(x)=x-\frac{1}{x}$$

① حتى يكون $\Delta: y=x$ مقارب مائل في جوار $\infty$ يجب أن تتحقق العلاقة:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)=0$$

$$*\ \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$$

إذاً: $\Delta: y=x$ مقارب مائل في جوار $-\infty$.

$$*\ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$$

إذاً: $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

**الوضع النسبي:** $f(x)-y_\Delta=\dfrac{-1}{x}$

| $x$ | $-\infty$      0 | 0      $+\infty$ |
|---|---|---|
| الفرق $f(x)-y_\Delta$ | + | − |
| الوضع النسبي | C فوق Δ | C تحت Δ |

② $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \frac{0^2-1}{0} = \frac{-1}{0}$

$$* \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$x=0$ مقارب للخط البياني C منطبق على المحور $yy'$ في جوار $-\infty$ .

الوضع النسبي : C يقع يمين المقارب .

$$* \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$x=0$ مقارب للخط البياني C منطبق على المحور $yy'$ في جوار $+\infty$ .

الوضع النسبي: C يقع يسار المقارب .

③ حتى تكون الدالة f فردية يجب أن تتحقق الشروط :

① $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ « محققة ».

②

$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{-x} = \frac{x^2-1}{-x} = -\frac{x^2-1}{x} \; f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

إذاً: الدالة f فردية .

• الخط البياني C متناظر بالنسبة إلى المبدأ O .

④ ادرس تغيرات f :

f معرفة ومستمرة واشتقاقية على المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$ .

النهايات:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) = +\infty - 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) = -\infty - 0 = -\infty$$

الاشتقاق:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x}\right)' = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2}$$

$\boxed{3}$

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2} > 0$$

المشتق لا ينعدم .

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty \,\|\|\, -\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

⑤ الرسم :

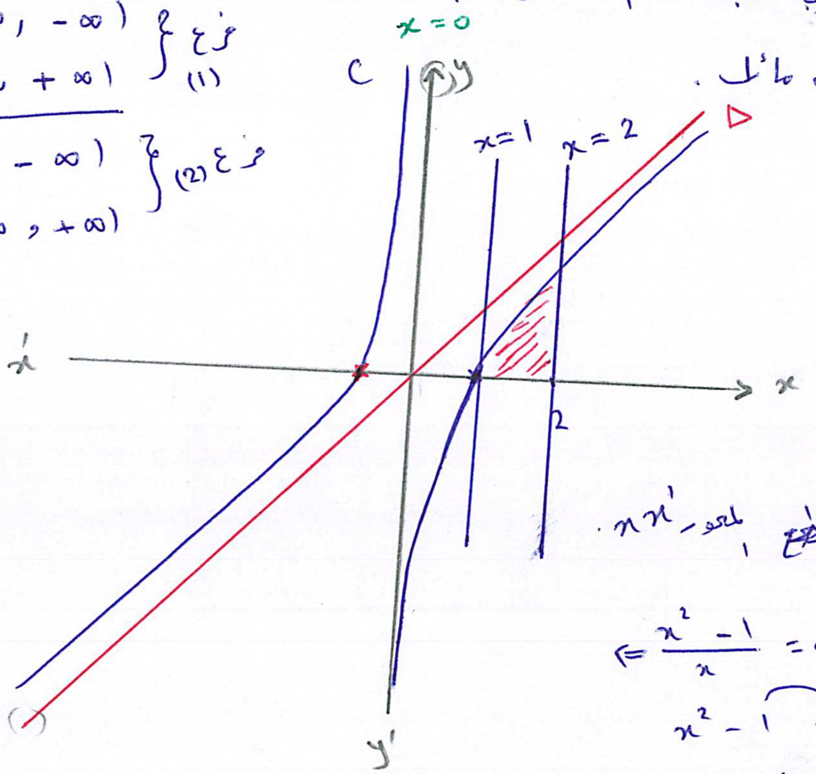
المقاربات : $x = 0$ مقارب منطبق على المحور $yy'$

$\Delta : y = x$ مقارب مائل .

تسمى بالمسودة :

$(-\infty, -\infty)$
$(0, +\infty)$ } فرع (1)

$(0, -\infty)$
$(+\infty, +\infty)$ } فرع (2)




| $x$ | $y$ | نقطة |
|---|---|---|
| 0 | 0 | (0, 0) |
| 1 | 1 | (1, 1) |
| −1 | −1 | (−1, −1) |

للرسم : نلاحظ أن الخط البياني C يقطع المحور $xx'$ .

فنجعل $y=0$ أي $f(x)=0 \Leftarrow \frac{x^2-1}{x} = 0 \Leftarrow$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$

$\Leftarrow x = \mp 1$ $(-1, 0)$ , $(+1, 0)$

⑥

$$S = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2-1}{x}\right) dx$$

$$= \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx$$

($g'$ , $g$)

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \ln|x|\right]_1^2$$

$$= \frac{2^2}{2} - \ln|2| - \left(\frac{1^2}{2} - \ln|1|\right)$$

$$S = \frac{4}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2} - \ln 2$$

## المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}$.

1* ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، ثم دل على القيمة الصغرى محلياً، واستنتج معادلة المقارب الموازي للمحور $yy'$.

2* ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب الذي وجدته، ثم ارسم C.

3* احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح المحصور بين الخط C والمحور $xx'$ والمستقيمين: $x=1$ & $x=2$ دورة كاملة.

4* احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحور $xx'$ والمستقيمين $x=2$ & $x=1$.

5* أعط قيمة تقريبية للمقدار $f(9.1)$.

الحل: 1* f معرفة ومستمرة واشتقاقية على $]0,+\infty[$.

* $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=\frac{0}{2}+\frac{2}{0^+}=+\infty$ النهايات:

$x=0$ مقارب للخط البياني C منطبق على المحور $yy'$.

* $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=\frac{+\infty}{2}+\frac{2}{+\infty}=+\infty+0=+\infty$

* الاشتقاق:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+2\cdot\frac{0\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 1}{\sqrt{x}^{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{x}}+2\cdot\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\frac{x}{1}}$$

$$=\underset{(x)}{\frac{1}{4\sqrt{x}}}-\underset{(2)}{\frac{2}{2x\cdot\sqrt{x}}}=\frac{x-4}{4x\cdot\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{x-4}{4x\sqrt{x}}$$

$\boxed{6}$

نعدم المشتق:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x - 4 = 0$

$\boxed{x = 4}$

$f(2) = \frac{\sqrt{4}}{2} + \frac{2}{\sqrt{4}} = 2$ ~~$\frac{2+4}{2\sqrt{2}} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$~~

~~$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \simeq 2.12$~~

$f(2) = 2$

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f(4) = 2$ قيمة صغرى محلياً.

② $x = 0$ مقارب للخط البياني $C$ منطبق على المحور $yy'$.

$C$ يقع يمين المقارب لأن $x \xrightarrow{>} 0$.

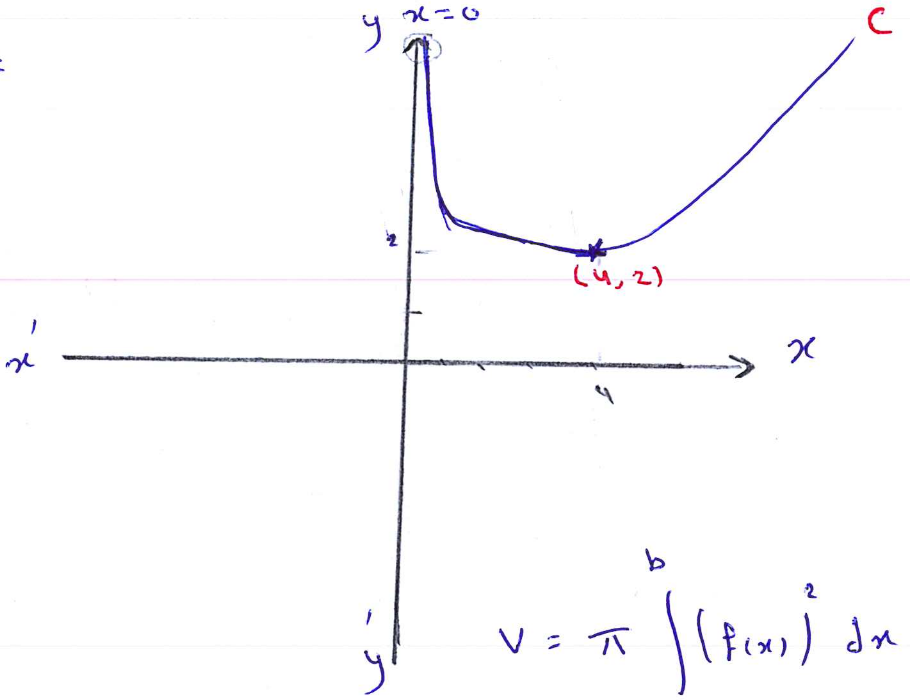
③ الرسم:

تقسيم السورة:

$(0, +\infty)$

$(4, 2)$

$(+\infty, +\infty)$




③ الحجم:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_1^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

$\boxed{7}$

$$V = \pi \int_1^2 \left( \frac{x}{4} + \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{2}} \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{x}}} + \frac{4}{x} \right) dx$$

$$= \pi \int_1^2 \left( \frac{x}{4} + 2 + \frac{4}{x} \right) dx$$

$$= \pi \int_1^2 \left( \frac{1}{4} \cdot x + 4 \cdot \frac{1}{x} + 2 \right) dx$$

g'

g

$$= \pi \left[ \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + 4 \ln|x| + 2x \right]_1^2$$

$$= \pi \left[ \frac{1}{4} \cdot \frac{2^2}{2} + 4 \ln|2| + 2(2) - \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{1^2}{2} + 4 \ln|1| + 2(1) \right) \right]$$

$$= \pi \left[ \frac{4}{8} + 4 \ln 2 + 4 - \frac{1}{8} - 4(0) - 2 \right]$$

$$= \pi \left[ \frac{4}{8} + 4 \ln 2 + 4 - \frac{1}{8} - 2 \right]$$

$$= \pi \left[ \frac{3}{8} + \frac{2}{1} + 4 \ln 2 \right]$$

$$= \pi \left[ \frac{19}{8} + 4 \ln 2 \right]$$

$$V = \left( \frac{19}{8} + 4 \ln 2 \right) \pi$$

$\boxed{4}$

$$S = \int_1^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_1^2 \left( \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \int_1^2 \left( \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx$$

$$= \int \left( \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$S = \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^2$$

$$= \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \sqrt{x} \right]_1^2$$

$$= \left[ \frac{1}{3} \sqrt{x^3} + 4 \sqrt{x} \right]_1^2$$

$$= \left[ \frac{1}{3} \sqrt{2^3} + 4\sqrt{2} - \left( \frac{1}{3} \sqrt{1^3} + 4\sqrt{1} \right) \right]$$

$$= \left[ \frac{1}{3} \cdot \sqrt{8} + 4\sqrt{2} - \frac{1}{3} \cancel{4} - 4 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{1} - \frac{1}{3} - \frac{4}{1}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 1 - 12}{3}$$

$$S = \frac{14\sqrt{2} - 13}{3}$$

④ قيمة تقريبية $: f(9.1)$

$h = 0.1 \quad x = 9.1$

$a = 9$

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a) \cdot h \quad \cdots (*)$$

$$f(a) = f(9) = \frac{\sqrt{9}}{2} + \frac{2}{\sqrt{9}} = \underset{(3)}{\frac{3}{2}} + \underset{(2)}{\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{9}{6} + \frac{4}{6} = \frac{13}{6}$$

$$f'(a) = f'(9) = \frac{9-4}{4 \cdot 9 \cdot \sqrt{9}} = \frac{5}{36 \times 3} = \frac{5}{108}$$

9

نعوض في ( * )

$$f(9+0.1) \simeq f(9) + f'(9)\cdot(0.1)$$

$$f(9.1) \simeq \frac{13}{6} + \frac{\cancel{5}}{108}\cdot\frac{1}{\cancel{10}\ 2}$$

$$\simeq \frac{13}{6} + \frac{1}{216} \simeq \frac{469}{216}$$

$$f(9.1) \simeq \frac{469}{219}$$

## المسألة الثالثة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفقاً: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1) أثبت أن هذه الدالة f فردية واستنتج الصفة التناظرية للخط C.

2) أوجد كل خط مقارب يوازي المحور $xx'$ واستنتج وضع الخط C بالنسبة إلى كل مقارب وجدته.

3) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

4) اكتب معادلة المماس $\Delta$ للخط في المبدأ.

5) ارسم كل مقارب وجدته، وارسم المماس $\Delta$ ثم ارسم الخط C.

6) احسب ~~احسب~~ مساحة السطح المحصور بين الخط C، والمحور $xx'$ والمستقيمين $x = -1$ و $x = 1$.

## الحل:

1) حتى تكون f دالة فردية يجب أن تتحقق الشروط:

① $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ «محققة».

② $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -f(x)$$

$\Leftarrow$ التابع فردي.

C متناظر بالنسبة إلى المبدأ O.

2)
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

$\Leftarrow$ $y = 1$ مقارب للخط البياني C في جوار $+\infty$ . يوازي المحور $xx'$.

**الوضع النسبي:**

$$f(x) - y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{1} = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$$

$\Leftarrow$ C تحت المقارب.

$\boxed{12}$ * $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$

⇐ $y=-1$ مقارب للخط البياني C يوازي لمحور $xx'$ في جوار $-\infty$.

الوضع النسبي:

$f(x) - y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (-1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{1}$

$= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} > 0$

⇐ C فوق المقارب.

$\boxed{3}$ $f$ معرفة ومستمرة واشتقاقية على $]-\infty,+\infty[$.

النهايات: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ & $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

الاشتقاق:

$f'(x) = \frac{1.\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}.x}{\sqrt{x^2+1}^2}$

$= \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\cancel{\sqrt{\ }}x^2+1}$

$= \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1).\sqrt{x^2+1}} > 0$

⇐ المشتق لا ينعدم. ⇐ التابع متزايد تماماً.

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | ↗ | $+1$ |

4 المماس: نقطة التماس هي مبدأ الإحداثيات $O(0,0)$.

نوجد الميل: " ميل المماس = قيمة المشتقة في نقطة التماس ".

$$m_\Delta = f'(x_0)$$

$$m_\Delta = f'(0) = \frac{1}{1\cdot\sqrt{1}} = 1$$

$$\Leftarrow m_d = 1$$

المماس:

$$\Delta : y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Delta : y - 0 = 1(x - 0)$$

$$\Delta : y = x$$ " وهو منصف الربعين الأول والثالث. "

5 الرسم: المقاربات:

$y = +1$

$y = -1$

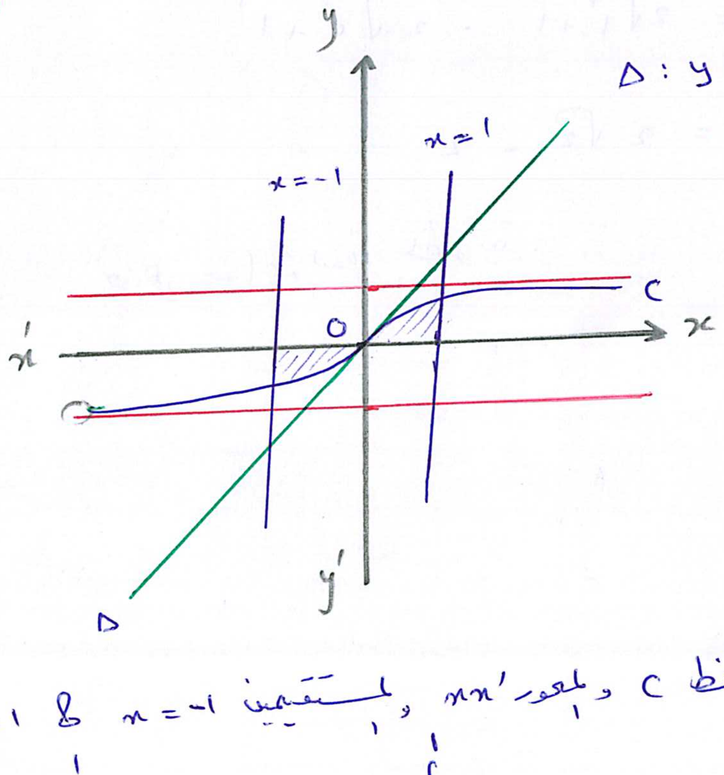
تقسيم المسودة:

$(-\infty, -1)$

$(+\infty, 1)$

المماس: $\Delta : y = x$

| $x$ | $y$ | نقطة |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $(0,0)$ |
| 1 | 1 | $(1,1)$ |
| $-1$ | $-1$ | $(-1,-1)$ |




6 مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحور $xx'$ والمستقيمين $x=-1$ & $x=1$.

$$S = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{2x}_{H'}\cdot\underbrace{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}_{H}\,dx = 2\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]$$

$$S = 2\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x\cdot(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\underbrace{2x}_{U'}\cdot(\underbrace{x^2+1}_{U})^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\left[2\cdot\sqrt{x^2+1}\right]_0^1$$

$$= 2\sqrt{1^2+1} - 2\cdot\sqrt{0^2+1}$$

$$S = 2\sqrt{2} - 2$$

وهي مساحة السطح المطلوبة .

هـ ع

## المسألة الرابعة:

ليكن الخط $C$ للدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x + \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

$\boxed{1}$ برهن أن المستقيم $\Delta_1$ الذي معادلته $\Delta_1 : y = x$ مستقيم مقارب للخط $C$ عند $-\infty$.

ثم ادرس الوضع النسبي بين $C$ و $\Delta_1$.

$\boxed{2}$ برهن أن المستقيم $\Delta_2$ الذي معادلته $\Delta_2 : y = x+1$ مستقيم مقارب للخط $C$ عند $+\infty$.

ثم ادرس الوضع النسبي بين $C$ و $\Delta_2$.

$\boxed{3}$ ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها.

$\boxed{4}$ ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم $C$.

$\boxed{5}$ احسب مساحة السطح المحصور بين $C$ والمحور $x'x$ والمستقيم $x = 1$.

**الحل:** ① حتى يكون $\Delta_1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$ يجب أن يكون $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y_{\Delta_1}) = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y_{\Delta_1}) = \lim_{x\to-\infty} \left( x + \frac{e^x}{e^x+1} - x \right) = \lim_{x\to-\infty} \left( \frac{e^x}{e^x+1} \right) = \frac{0}{0+1} = 0$$

إذاً: $\Delta_1 : y = x$ مقارب مائل للخط $C$ في جوار $-\infty$.

**الوضع النسبي:** ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - y_{\Delta_1} = \frac{e^x}{e^x+1} > 0$$

إذاً: $C$ يقع فوق المقارب $\Delta_1$.

② $\Delta_2 : y = x + 1$ في جوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_{\Delta_2}) = \lim_{x\to+\infty} \left( x + \frac{e^x}{e^x+1} - x - 1 \right) = \lim_{x\to+\infty} \left( \frac{e^x}{e^x+1} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left( \frac{e^x - e^x - 1}{e^x+1} \right) = \lim_{x\to+\infty} \left( \frac{-1}{e^x+1} \right) = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

إذاً: $\Delta_2 : y = x + 1$ مقارب مائل للخط $C$ في جوار $+\infty$.

**الوضع النسبي** : ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y_{\Delta} = \dfrac{-1}{e^x+1} < 0$

C يقع تحت المقارب $\Delta_2$ .

③ f معرفة ومستمرة واشتقاقية على المجال $]-\infty, +\infty[$ .

**النهايات:**

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left( x + \dfrac{e^x}{e^x+1} \right) = -\infty + \dfrac{e^{-\infty}}{e^{-\infty}+1} = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( x + \dfrac{e^x}{e^x+1} \right) = +\infty + \dfrac{+\infty}{+\infty}$ عدم تعيين

$$= \lim_{x \to +\infty} \left( x + \frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left( x + \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} \right)$$

$$= +\infty + \frac{1}{1+0} = +\infty$$

**الاشتقاق:**

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x.(e^x+1) - e^x.e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= 1 + \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

$$= 1 + \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{(e^x+1)^2 + e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

المشتق لا ينعدم ط.ل f متزايد .

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**4** الرسم :

المقاربات :

$D_1 : y = x$

| $x$ | $y$ | نقطة |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $(0,0)$ |
| 1 | 1 | $(1,1)$ |
| $-1$ | $-1$ | $(-1,-1)$ |

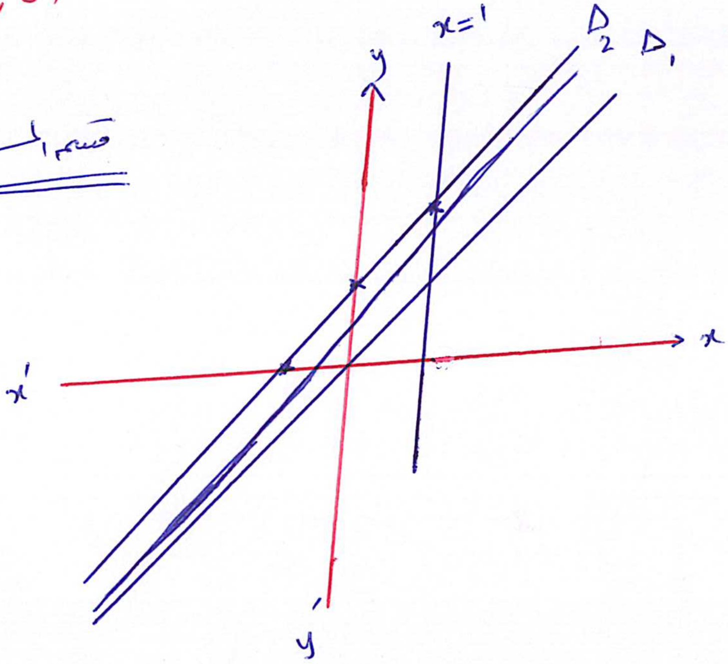
$D_2 : y = x + 1$

| $x$ | $y$ | نقطة |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $(0,1)$ |
| 1 | 2 | $(1,2)$ |
| $-1$ | 0 | $(-1,0)$ |

قسم السودة :

$(-\infty, -\infty)$

$(+\infty, +\infty)$




**5** مساحة السطح :

$$S = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \left( x + \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx$$

$g'$

$g$

$$= \left[ \frac{x^2}{2} + \ln(e^x + 1) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}^2 + \ln(e^1 + 1) - \left( \frac{0^2}{2} + \ln(e^0 + 1) \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \ln(e + 1) - \ln 2$$

$$S = \frac{1}{2} + \ln\left( \frac{e+1}{2} \right)$$

## المسألة الخامسة:

لتكن $f$ الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1) أثبت أن الخط البياني للتابع $f$ متناظر بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات $(0,0)$. «دالة فردية»

2) أوجد معادلة كل مقارب يوازي المحور $x'x$ وعين الوضع النسبي بين $C$ وكل مقارب وجدته.

3) ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها.

4) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم $C$.

5) احسب مساحة السطح المحصور بين $C$ والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=0$ & $x=\ln 2$.

**الحل:** 1) حتى يكون الخط البياني $C$ متناظر بالنسبة إلى المبدأ-يجب أن يتحقق الشرطان:

① $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ "محقق"

② $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1}}{\frac{1}{e^x} + \frac{1}{1}} = \frac{\frac{1 - e^x}{e^x}}{\frac{1 + e^x}{e^x}} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

$$= \frac{-(-1 + e^x)}{e^x + 1} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x)$$

$\Leftarrow f(-x) = -f(x) \Leftarrow$ الخط البياني $C$ متناظر بالنسبة إلى المبدأ.

2) نوجد نهاية التابع $f$ عند $-\infty$ & $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) = \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

$y = -1$ مقارب للخط البياني $C$ يوازي المحور $x'x$ في جوار $-\infty$.

**الوضع النسبي:** ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - (-1)$$

$$= \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{1}{1} = \frac{e^x - 1 + e^x + 1}{e^x + 1} = \frac{2e^x}{e^x + 1} > 0$$

$C$ فوق المقارب.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \cancel{\#} \frac{+\infty}{+\infty}$$ عدم تعيين

$\boxed{20}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right] = \frac{1-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$y=1$ مقارب للخط البياني $C$ موازي لمحور $\cancel{x'x}$ في جوار $+\infty$ .

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{e^x-1}{e^x+1} - \frac{1}{1} = \frac{e^x-1-e^x-1}{e^x+1} = \frac{-2}{e^x+1} < 0$$

$C$ تحت المقارب .

$\boxed{3}$ $f$ معرفة ومستمرة واشتقاقية على المجال $]-\infty, +\infty[$ .

النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \quad \& \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

الاشتقاق:

$$f'(x) = \frac{e^x.(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

المشتق لا ينعدم .

جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+1$ |

**4* الرسم:**

**المقاربات:**

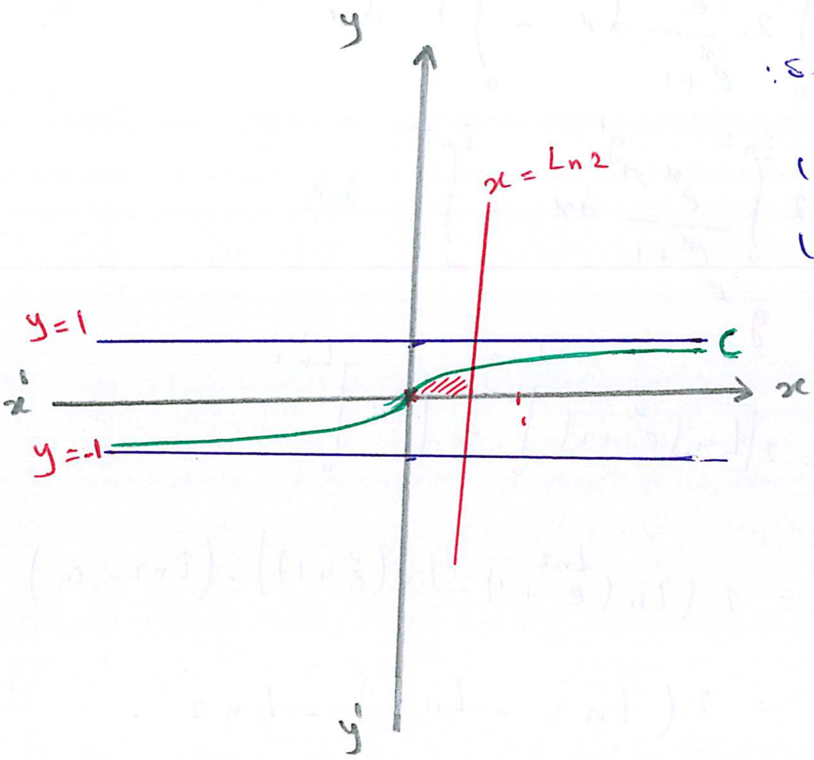
$\Delta_1 : y = -1$

$\Delta_2 : y = 1$

**قسم السودع:**

$(-\infty, -1)$

$(+\infty, +1)$




**5* مساحة السطح المحصور بين $C$ و $x'x$ و $x = 0$ و $x = \ln 2$.**

$$S = \int_0^{\ln 2} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx$$

فقط فكرة نضيف $e^x$ ونطرحه

$$= \int_0^{\ln 2} \frac{e^x - 1 + e^x - e^x}{e^x + 1}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + e^x - 1 - e^x}{e^x + 1}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x - (1 + e^x)}{e^x + 1}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \left[ \frac{2e^x}{e^x + 1} - \frac{1 + e^x}{e^x + 1} \right] dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \left( 2 \cdot \frac{e^x}{e^x + 1} - 1 \right) dx$$

$\boxed{22}$

$$S = \int_0^{\ln 2} 2 \cdot \frac{e^x}{e^x+1}\, dx - \int_0^{\ln 2} 1 \, dx$$

$$= 2 \int_0^{\ln 2} \frac{\overset{g'}{e^x}}{\underset{g}{e^x+1}}\, dx - \int_0^{\ln 2} 1 \, dx$$

$$= 2\left[\ln|e^x+1|\right]_0^{\ln 2} - \left[x\right]_0^{\ln 2}$$

$$= 2.\left(\ln(e^{\ln 2}+1) - \ln(e^0+1)\right) - (\ln 2 - 0)$$

$$= 2(\ln 3 - \ln 2) - \ln 2$$

$$= 2\ln 3 - 2\ln 2 - \ln 2$$

$$= \ln 3^2 - 3\ln 2$$

$$= \ln 9 - \ln 2^3$$

$$= \ln 9 - \ln 8$$

$$S = \ln \frac{9}{8}$$

SAM.omar

## المسألة السادسة:

هام

ليكن الخط البياني $C$ للتابع $f$ المعرف وفق: $C: \quad f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$

1. أوجد $D_f$ . وأوجد معادلة كل مقارب للخط البياني $C$ يوازي المحور $x'x$ أو يوازي المحور $y'y$.

2. ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً.

3. ارسم كل مقارب وجدته للخط $C$ ثم ارسم $C$.

**الحل:** (1) إيجاد $D_f$: $\frac{x}{2-x} > 0$ " ما بعد اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر "

* ندرس البسط: $x$

$\boxed{x = 0}$

* ندرس المقام: $2-x$

$2 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| البسط $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| المقام $2-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الكسر $\frac{x}{2-x}$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | |
| المتراجحة $>0$ | | غير محققة | | محققة | | غير محققة | |

$D_f = \,]0, 2[$

* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)\right) = \ln\left(\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\frac{x}{2-x}\right)\right)$

خطوة ذهنية

$= \ln(0) = -\infty$

$x = 0$ مقارب منطبق على المحور $y'y$ في جوار $-\infty$ ، $C$ يقع يمين المقارب

* $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)\right) = \ln\left(\lim\limits_{x \to 2}\left(\frac{x}{2-x}\right)\right)$

خطوة ذهنية

$= \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$

$x = 2$ مقارب للخط البياني $C$ يوازي المحور $y'y$ في جوار $+\infty$ .

$C$ يقع يسار المقارب

2 $f$ معرفة ومستمرة واشتقاقية على $]0\,,2[$ .

النهايات:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$

الاشتقاق:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{2-x}\right)'}{\left(\frac{x}{2-x}\right)} = \frac{\frac{1\cdot(2-x)-(-1)\cdot x}{(2-x)^2}}{\left(\frac{x}{2-x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2-\cancel{x}+\cancel{x}}{(2-x)^{\cancel{2}}}}{\frac{x}{\cancel{2-x}}} = \frac{\frac{2}{2-x}}{\frac{x}{1}}$$

$$= \frac{2}{x(2-x)} > 0$$

المشتق لا ينعدم ، التابع متزايد تماماً.

جدول التغيرات:

| $x$ | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

25

3 الرسم :

المقاربات :

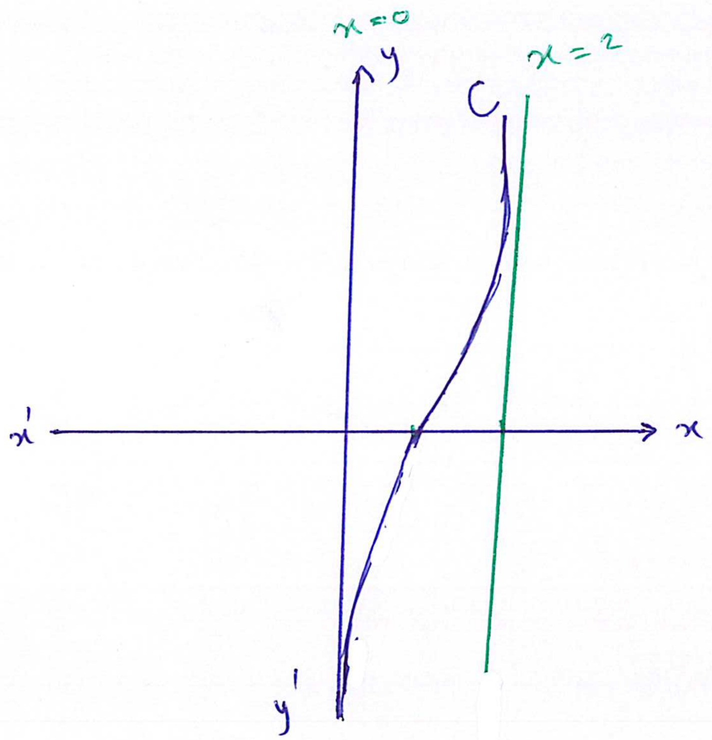
$x = 0$

$x = 2$

قسم المسودة :

$(0 , -\infty)$

$(+2 , +\infty)$




الخط البياني C يقطع المحور $xx'$ . نجعل $y = 0 \Leftarrow f(x) = 0$ .

$$\ln\left(\frac{x}{2-x}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{2-x}\right) = e^0$$

$$\frac{x}{2-x} = \frac{1}{1}$$

$$x = 2 - x$$

$$x + x = 2$$

$$2x = 2$$

نقطة التقاطع $(1 , 0) \Leftarrow \boxed{x = 1}$

$$= \lim_{x\to 0} \ldots$$

$$\frac{5}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

27

## المسألة السابعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ هام

1* أوجد $D_f$ ، ثم أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي المحور $xx'$ أو المحور $yy'$.

2* برهن أن الدالة f فردية واستنتج الصفة التناظرية للخط البياني C.

3* ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

4* ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C.

**الحل:** 1: إيجاد مجموعة التعريف:

$$\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$$

"ما بعد اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر" $\frac{x-2}{x+2} > 0$

* ندرس البسط:

$$x - 2$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

* ندرس المقام:

$$x + 2$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

| | $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| البسط | $x-2$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| المقام | $x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| الكسر | $\frac{x-2}{x+2}$ | | $+$ | ‖ | $-$ | | $+$ | |
| المتراجحة | $>0$ | | محققة | | غير محققة | | محققة | |

$$D_f = ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$$

**المقاربات:** نوجد النهايات:

$$* \lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2^-}\left(\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right) = \ln\left(\frac{-4}{0^-}\right)$$

$$= \ln(+\infty) = +\infty$$

$x = -2$ مقارب للخط البياني C يوازي المحور $yy'$ في جوار $+\infty$.

**الوضع النسبي:** C يقع يسار المقارب.

* $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right) = \ln\left(\frac{2-2}{2+2}\right) = \ln(0) = -\infty$

$\boxed{28}$

$x=2$ مقارب للخط البياني $C$ في جوار $-\infty$ .

التوضيح البياني :

$C$ يقع يمين المقارب..

* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \ln\left(\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right) = \ln\left(\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{x}\right)\right)$

خطوة ذهنية

$= \ln(1) = 0$

$y=0$ مقارب بالخط البياني $C$ في جوار $+\infty$ منطبق على المحور $xx'$.

خطوة ذهنية

* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \ln\left(\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right) = \ln(1) = 0$

$y=0$ مقارب للخط البياني $C$ في جوار $-\infty$ منطبق على المحور $xx'$.

$\boxed{2}$ حتى تكون $f$ دالة فردية يجب أن تتحقق الشروط :

① $\forall\, x \in D \Rightarrow -x \in D$ " محقق ،

② $f(-x) = -f(x)$

$f(-x) = \ln\left(\frac{-x-2}{-x+2}\right) = \ln\left(\frac{-(x+2)}{-(x-2)}\right)$

$= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

$= -\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

$= -f(x)$

$\Leftarrow f(-x) = -f(x)$ محققة

$\Leftarrow$ $f$ تابع فردي $\Leftarrow$ $C$ متناظر بالنسبة إلى المبدأ $O(0,0)$ .

3 - f معرفة ومستمرة واشتقاقية على المجال $]-\infty,-2[$ و $]2,+\infty[$

**النهايات**

$$\lim_{x \to +2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

**الاشتقاق:**

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)'}{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)} = \frac{\frac{1.(x+2)-1.(x-2)}{(x+2)^2}}{\frac{x-2}{x+2}}$$

$$= \frac{\frac{x+2-x+2}{(x+2)^2}}{\frac{x-2}{x+2}} = \frac{\frac{4}{(x+2)^{\cancel{2}}}}{\frac{x-2}{\cancel{x+2}}}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{x^2-4} > 0$$

**جدول التغيرات**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ |

4 الرسم :

المقاربات :

$x = 2$

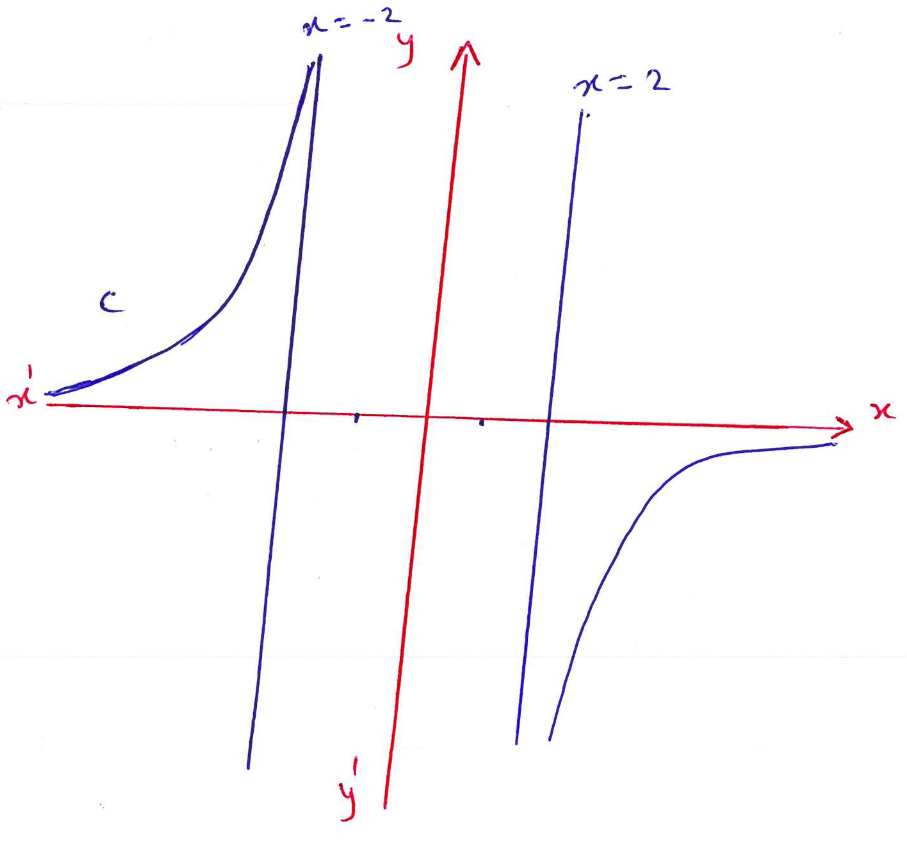
$x = -2$

$y = 0$

قسم المسودة ١

$$\text{تز} \begin{cases} (-\infty, 0) \\ (-2, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{تن} \begin{cases} (2, -\infty) \\ (+\infty, 0) \end{cases}$$



المسألة الثامنة :

(2D)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق : $f(x) = \ln(1+e^{-x})$ .

1. عين مجموعة تعريف f ، ثم أوجد نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$ .

2. أثبت أن المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y = -x$ : $\Delta$ مقارب للخط البياني C .

3. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها .

4. ارسم $\Delta$ ثم ارسم C .

الحل : (1)

$D_f$ : $1+e^{-x} > 0$ محققة دوماً .

$\Leftarrow D_f = ]-\infty, +\infty[$ .

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\ln(1+e^{-x})\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x})\right)$$

$$= \ln\left((1+e^{+\infty})\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$* \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(1+e^{-x})\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x})\right)$$

$$= \ln(1+e^{-\infty}) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0$$

(2) حتى يكون $\Delta$ مقارب مائل في جوار $\infty$ - يجب أن يكون $\lim_{x\to\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$

$$* \lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(1+e^{-x}) + x\right) = 0 + \infty = +\infty$$

إذاً : $\Delta$ ليس مقارب مائل في جوار $+\infty$ .

$$* \lim_{x\to-\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to-\infty} \left(\ln(1+e^{-x}) + x\right) = +\infty - \infty$$ عدم تعيين

$$= \lim_{x \to -\infty} \left( \ln\left(e^{-x}\left(\frac{1}{e^{-x}} + 1\right)\right) + x \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left( \ln e^{-x} + \ln\left(e^{x} + 1\right) + x \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left( -x + \ln\left(e^{x} + 1\right) + x \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left( \ln\left(e^{x} + 1\right) \right) = \ln\left(e^{-\infty} + 1\right)$$

$$= \ln(0 + 1)$$

$$= \ln(1)$$

$$= 0$$

إذاً: $\Delta : y = -x$ مقارب مائل عند جوار $-\infty$ .

$\boxed{3}$ $f$ معرفة ومستمرة ومعرفة على $]-\infty, +\infty[$ .

النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

الاشتقاق:

$$f'(x) = \frac{\left(1 + e^{-x}\right)'}{1 + e^{-x}} = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} < 0$$

المشتق لا ينعدم . التابع متناقص:

جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

4 الرسم :

المقاربات :

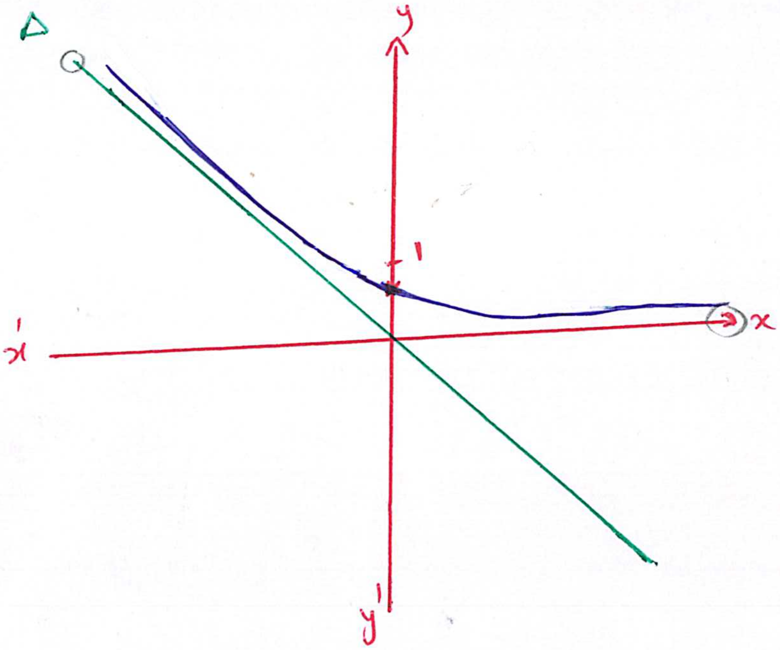
$\Delta : y = -x$

| $x$ | $y$ | نقطة |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $(0,0)$ |
| 1 | -1 | $(1,-1)$ |
| -1 | 1 | $(-1,1)$ |

قسم المسودة :

$(-\infty, +\infty)$

$(+\infty, 0)$




الخط البياني C يقطع المحور y'y بجعل $x=0$

$\ln(1+e^0)$

$= \ln(1+1)$

$= \ln 2$

$\Rightarrow (0, \ln 2)$

## المسألة التاسعة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة وفق : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

$D_f = ]0, +\infty[$

**1*** أوجد معادلة كل مقارب للخط C ، ثم عين وضع الخط C بالنسبة إلى كل مقارب وجدته.

**2*** ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ، ثم دل على القيمة الكبرى محلياً.

**3*** ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C.

**4*** احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيم الذي معادلته $x=e$.

**الحل: 1***

قاعدة

$$* \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

$y=0$ مقارب للخط البياني C منطبق على المحور $x'x$ في جوار $+\infty$ .

**الوضع النسبي :** ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y = \frac{\ln x}{x} - 0$$
$$= \frac{\ln x}{x}$$

نعدم الفرق: $f(x) - y = 0 \Leftarrow \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftarrow \ln x = 0$

$x = e^0 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

هي القيمة التي تعدم الفرق.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| الفرق $f(x)-y$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضع النسبي | | C تحت المقارب | | C فوق المقارب | |

قاعدة

$$* \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$$

$x=0$ مقارب للخط البياني C في جواره - منطبق على المحور $y'y$ .

**الوضع النسبي:** C يقع يمين المقارب.

2* $f$ معرفة ومستمرة وإشتقاقية على $]0, +\infty[$

النهايات:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

الإشتقاق:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$

$$\Leftarrow x = e^1 = e$$

$$\boxed{x = e}$$

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

قيمة كبرى محليا $f(e) = \frac{1}{e}$

3*

الرسم:

المقاربات:

$y=0$

$x=0$

قسم السودة:

$(0, -\infty)$

$(e, \frac{1}{e})$

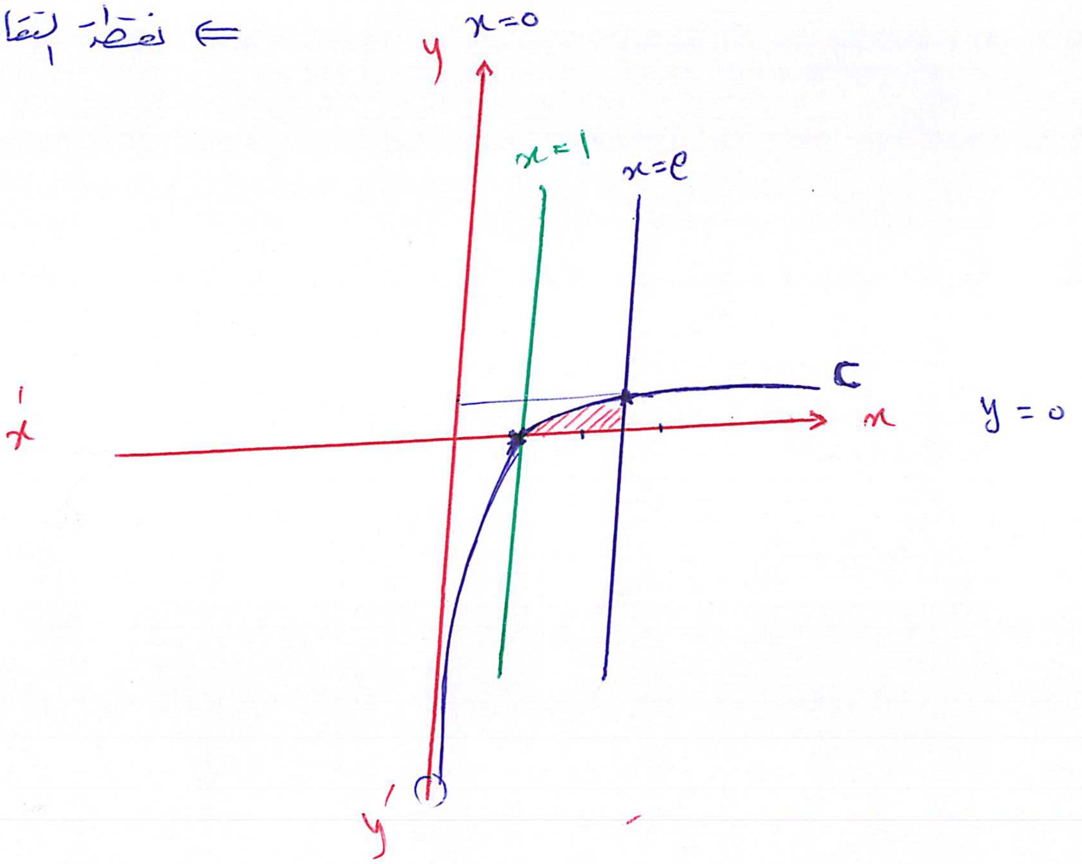
$(+\infty, 0)$

الخط البياني C يقطع المحور $x x'$

نجعل $y=0 \Leftarrow f(x)=0$

$Ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$

$\Leftarrow$ نقطة التقاطع $(1, 0)$




4*

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

$$= \int_1^e \frac{Ln x}{x}\, dx$$

$$= \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{H'} \cdot \underbrace{Ln x}_{H}\, dx$$

X

$$S = \left[\frac{Ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{Ln^2 e}{2} - \frac{Ln^2 1}{2} = \frac{Ln^2 e}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

## المسألة العاشرة:

لتكن $\lambda \in \mathbb{R}$ وليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف على $\mathbb{R}$ وفقاً:

$$f(x) = e^{x} + e^{-x} + \lambda$$

1* عين $\lambda$ ليكون للتابع $f$ قيمة صغرى شمولية «وحيدة» «شاملة» قيمتها 0.

2* في حالة $\lambda = -2$ . برهن أن $f$ دالة زوجية واستنتج الصفة التناظرية للخط $C$.

3* ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها، ودلّ على القيم الصغرى محلياً «وحيدة».

4* ارسم الخط البياني $C$.

5* احسب مساحة السطح المحصور بين $C$ و المحور $x'x$ والمستقيمين $x = \ln 2$ و $x = 0$.

**الحل:**

1* إذا كانت $f(x)=0$ قيمة صغرى شاملة فإن

$$f(x_0) = 0 \quad ...\boxed{1}$$

$$f'(x_0) = 0 \quad ...\boxed{2}$$

من $\boxed{2}$ نشتق:

$$f'(x) = e^{x} - e^{-x}$$

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow e^{x_0} - e^{-x_0} = 0$$

$$\Rightarrow e^{x_0} = e^{-x_0}$$

$$x_0 = -x_0$$

$$2x_0 = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 0}$$

نعوضها في $\boxed{1}$

$$f(0) = 0$$

$$e^{0} + e^{0} + \lambda = 0$$

$$1 + 1 + \lambda = 0$$

$$2 + \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -2}$$

**2*** $f(x) = e^{x} + e^{-x} - 2$

حتى تكون $f(x)$ دالة زوجية يجب أن تتحقق الشرطان:

(1) "محققة" $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

(2) $f(-x) = f(x)$

$$f(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)} - 2$$

$$= e^{-x} + e^{+x} - 2$$

$$= e^{x} + e^{-x} - 2$$

$$= f(x)$$

إذاً: $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ الدالة $f$ زوجية.

* الخط البياني $C$ متناظر بالنسبة إلى المحور $yy'$.

**3*** $f$ معرفة ومستمرة واشتقاقية على $]-\infty, +\infty[$

النهايات:

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{x} + e^{-x} - 2)$

$$= e^{-\infty} + e^{+\infty} - 2$$

$$= 0 + \infty - 2 = +\infty$$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^{x} + e^{-x} - 2)$

$$= e^{+\infty} + e^{-\infty} - 2$$

$$= +\infty + 0 - 2$$

$$= +\infty$$

$\boxed{٣}$

**الاشتقاقات:**

$$f'(x) = e^{x} - e^{-x}$$

نعدم المشتقة:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow e^{x} - e^{-x} = 0$$

$$e^{x} = e^{-x}$$

$$x = -x$$

$$x + x = 0$$

$$2x = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$f(0) = e^{0} + e^{0} - 2$$

$$= 1 + 1 - 2$$

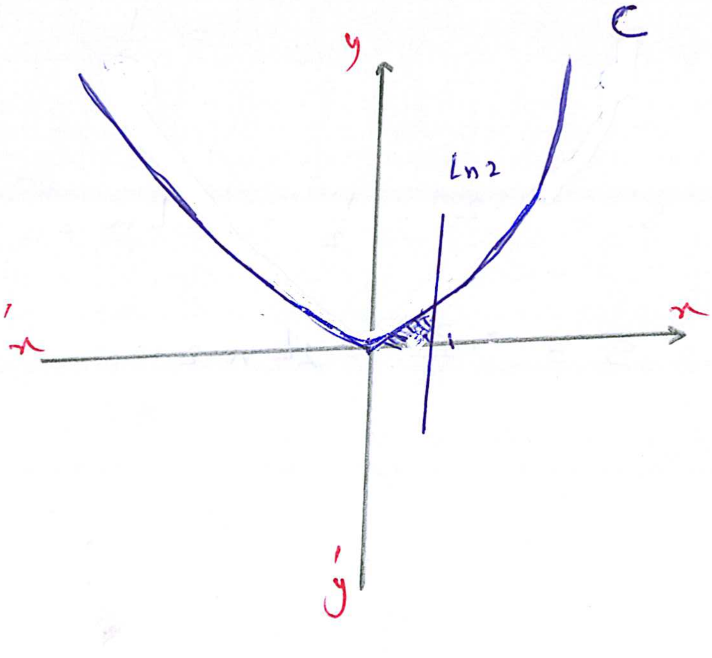
$$= 2 - 2$$

$$\boxed{f(0) = 0}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f(0) = 0$ قيمة صغرى محلياً. (صغرى).

$\boxed{٤}$ الرسم:




قسم المسودة:

$(-\infty, +\infty)$

$(0, 0)$

$(+\infty, +\infty)$

$\boxed{42}$ $$S = \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$$

إلمامة : $\boxed{5}$

$$= \int_0^{\ln 2} (e^{x} + e^{-x} - 2)\,dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} (e^{x} + \underbrace{(-1)}_{g'} . e^{\overbrace{-x}^{g}} - 2)\,dx$$

$$= \left[ e^{x} - e^{-x} - 2x \right]_0^{\ln 2}$$

$$= e^{\ln 2} - e^{-\ln 2} - 2\ln 2 - (e^{0} - e^{0} - 2(0))$$

$$= 2 + 2 - 2\ln 2 - 1 + 1 + 0$$

$$S = 4 - 2\ln 2$$

أحياناً زرني ---
زارد خلصني مشاكل "

$$e^{-\ln 2}$$

$$= e^{\ln(\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$S = 2 - \frac{1}{2} - 2\ln 2$$

$$S = \frac{3}{2} - 2\ln 2$$