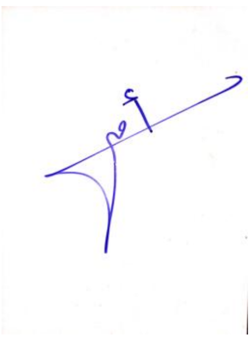
تلخيص المعيار (3 & 4) الهندسة والقياس

المعيار 3. 4. 3: يتعرف مفاهيم الهندسة ونظرياتها	1. يستخدم خصائص الخطوط المتوازية والمتعامدة والزوايا لمعرفة الأشكال 2. يستخدم العلاقات الهندسية (نظرية فيثاغورس، تشابه المثلثات، تقاطع مستقيم مع مستقيمين متوازيين،.....) لحل المسائل 3. يتعرف أنواع المثلثات وحالات تطابق مثلثين 4. يصف خصائص الأشكال الرباعية 5. يشرح صفات الأشكال ثلاثية الأبعاد وخصائصها 6. يوجد ميل ومعادلة مستقيم في المستوي وعلاقته بمستقيم آخر 7. يوجد المسافة بين نقطتين أو نقطة و مستقيم في المستوي 8. يمثل التحويلات الهندسية (التناظر، والانسحاب والدوران ومغير البعد) 9. يحدد العلاقة بين الزوايا الناتجة من تقاطع مستقيمين 10. يستخدم العلاقات المترية في المثلث 11. يتعرف القطوع المخروطية ويميز معادلاتها وخصائصها ويمثلها بيانيا 12. يتعرف الدوال المثلثية والعلاقة بينها 13. يتعرف المتجهات ويجري العمليات عليها 14. يحل مسائل تطبيقية على الهندسة المستوية والفراغية
المعيار 3. 4. 4: يتعرف القياس ووحداته وتطبيقاته	1. يتعرف وحدات القياس (وحدة قياس الزوايا، الطول، المحيط، المساحة، الحجم، درجة الحرارة، الزمن) 2. يحول بين وحدات القياس المختلفة ضمن النظام نفسه 3. يوجد محيط ومساحة المثلث والدائرة والأشكال الرباعية 4. يحسب حجوم بعض المجسمات، ويوجد مساحتها الجانبية والكلية 5. يحل مسائل تتضمن مقياس رسم باستخدام النسبة والتناسب 6. يوظف التقريب في القياس 7. يحل مسائل رياضية تطبيقية على القياس



((معيار 3))

١) يستخدم خصائص الخطوط المتوازية والمتعامدة والزوايا لمعرفة الأشكال

المستقيمات والمستويات :-

– المستقيمان المتوازيان : يقال للمستقيمين أنهما متوازيان إذا كانا في مستوى واحد دون تقاطع .

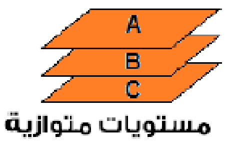
– المستقيمان المتخالفان : يقال للمستقيمين أنهما متخالف إذا كانا لا يقعان في مستوى واحد بلا تلاقى .

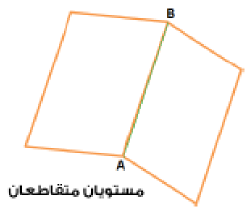
فمثلاً : نقول أن $\overline{AB}$ و $\overline{CG}$ متخالفان وكذلك $\overline{AB}$ و $\overline{HD}$ أنهما متخالفان وذلك لأنهما لا يتقاطعان ولا يجمعهما مستوى واحد .

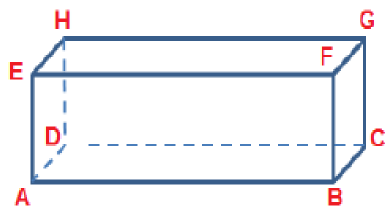
– المستقيم المستعرض : مستقيم يقطع مستقيمين أو أكثر في مستوى في نقاط مختلفة.

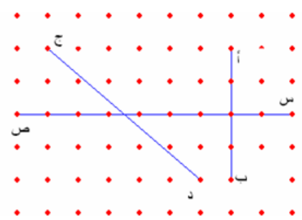
– المستويان المتوازيان : يقال للمستويين أنهما متوازيان إذا كانا لا يتقاطعان.

– المستويان المقاطعان : يتقاطع المستويان في خط مستقيم.







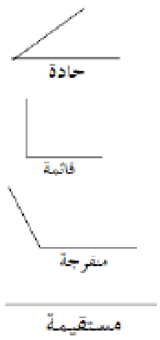


المستقيم أ ب عمودي على المستقيم س ص.

المستقيم جـ د ليس عمودي على المستقيم س ص.

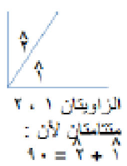
اذا تعامد مستقيم على آخر فإن زاوية التعامد = 90

(١) أنواع الزوايا :-



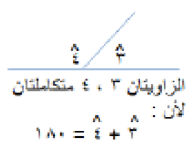
- **الزاوية الحادة : هي زاوية قياسها أقل من ٩٠ درجة .**
- **الزاوية القائمة : هي زاوية قياسها ٩٠ درجة .**
- **الزاوية المنفرجة : هي زاوية قياسها أكبر من ٩٠ درجة وأقل من ١٨٠ درجة .**
- **الزاوية المستقيمة : هي زاوية قياسها ١٨٠ درجة**

(٢) الزوايا المتتامة :-



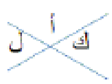
تكون الزاويتان متتامتين إذا كان مجموعهما ٩٠ درجة .

(٣) الزوايا المتكاملة :-



تكون الزاويتان متكاملتين إذا كان مجموعهما ١٨٠ درجة .

(٤) المستقيمات المتقاطعة :-



- **الزوايا المتجاورة متكاملة أي (أ + ل = ١٨٠ درجة)**
- **الزوايا الرأسية متساوية (تقابل بالرأس) أي (ك = ل)**

٢) <u>يستخدم العلاقات الهندسية (نظرية فيثاغورث ، تشابه المثلثات ، تقاطع مستقيم مع مستقيمين متوازيين)</u>

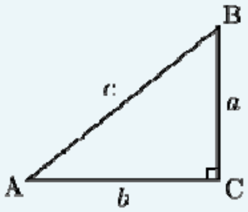
٣) <u>يحدد العلاقه بين الزوايا الناتجه من تقاطع مستقيمين</u>

نظرية فيثاغورث :

نظرية : في أي مثلث قائم الزاوية يكون مجموع مربعي طولي الضلعين المحاذيين للزاوية القائمة يساوي مربع طول الوتر.

في مثلث ABC قائم الزاوية في C ، أي أن $[AB]$ هو الوتر

نضع $AB = c$ و $AC = b$ و $AB = a$ لدينا:



$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

أو

$$c^2 = b^2 + a^2$$

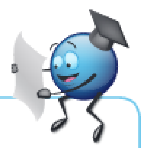
عكس نظرية فيثاغورث "

إذا كان مربع طول ضلع مثلث يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فان المثلث يكون قائم الزاوية"

في مثلث ABC قائم الزاوية في B اذا كان $|BC| = 4\,cm$ ، $|BA| = 3\,cm$

أوجد $|AC|$

تشابه المثلثات:



- المثلثات المتشابهة هي حالة خاصة من المضلعات المتشابهة، لذا في المثلثات المتشابهة، جميع الزوايا متساوية بالتناظر وتوجد نفس النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

مثال: في المهمة 1، المثلثان VDF , ABC متشابهان لأنّ:

زوايا المثلثان متساوية: $\sphericalangle C = \sphericalangle F, \ \sphericalangle B = \sphericalangle D \ , \sphericalangle A = \sphericalangle V$

والنسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية: $\frac{AB}{VD} = \frac{BC}{DF} = \frac{AC}{VF}$ ، نسبة التشابه هي $\frac{3}{2}$.

نرمز للتشابه كالتالي : $\Delta VDF \sim \Delta ABC$

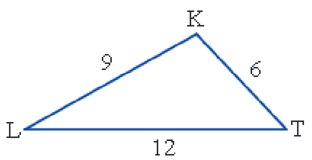
- من الأسهل أن نسجّل أسماء المثلثات، بحيث تظهر الرؤوس المتناظرة في المثلثين بنفس الترتيب. فيما بعد نسجّل كل تشابه حسب تناظر الرؤوس..

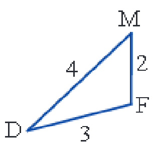
2. معطى المثلثان ΔLKT ,ΔDMF.

معطى: $\sphericalangle K = \sphericalangle F \ , \ \sphericalangle T = \sphericalangle M$.

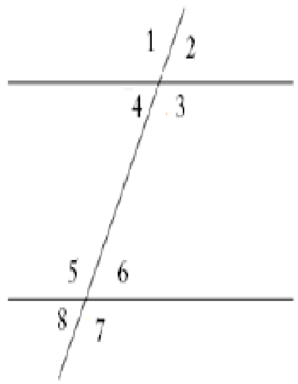
أ. اشرحوا لماذا $\sphericalangle L = \sphericalangle D$ ؟

ب. هل المثلثان متشابهان؟





تقاطع مستقيم مع مستقيمين متوازيين :

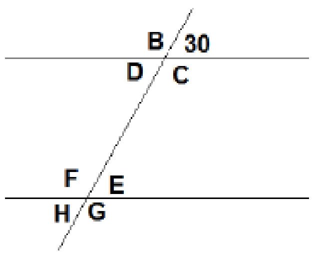


الزوايا الخارجية	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
الزوايا الداخلية	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
الزاويتان الداخليتان المتخالفتان	$\angle 6, \angle 3$ $\angle 4, \angle 5$
الزاويتان الخارجيتان المتبادلتان	$\angle 1, \angle 7$ $\angle 2, \angle 8$
الزاويتان الداخليتان المتبادلتان	$\angle 4, \angle 6$ $\angle 3, \angle 5$
الزاويتان المتناظرتان	$\angle 1, \angle 5$ $\angle 3, \angle 7$ $\angle 2, \angle 6$ $\angle 4, \angle 8$

المتخالفتان : مجموع قياسهما 180

المتبادلتان / المتناظرتان / المتقابلتان بالراس : متساويتان بالقياس

س8/ في الشكل التالي حدد قيم الزوايا المجهولة :



الزاوية B = (180 – 30) = 150 درجة.

الزاوية D = (مقابلة للزاوية 30) إذاً = 30 درجة.

الزاوية C = (مقابلة للزاوية B) = 150 درجة.

الزاوية E = (كل زاويتين داخليتين متبادلتين متطابقتان) (D = E , C = F) = 30 درجة.

الزاوية F = زاوية C = 150

الزاوية G = (كل زاويتين خارجيتين متبادلتين متطابقتان) (A = H , B = G) = 150 درجة.

الزاوية H = زاوية A = 30 درجة.

---

٤) يتعرف أنواع المثلثات وحالات تطابق مثلثين

أنواع المثلثات :

المثلث :-

– يصنف المثلث طبقاً لـ 3 أشياء وهي : 1) زواياه. 2) أضلاعه. 3) رؤوسه.

• تصنيف المثلث حسب الأضلاع :

– مثلث قائم الزاوية : به زاوية واحدة قائمة وقياسها = 90 درجة .

– مثلث حاد الزاوية : مثلث جميع زواياه حادة وقياس كل زاوية أقل من 90 درجة .

– مثلث منفرج الزاوية : به زاوية واحدة منفرجة ، وبه زاوية قياسها أكبر من 90 درجة .

• تصنيف المثلث حسب الأضلاع :

– مثلث متطابق الأضلاع : جميع أضلاع متطابقة وبالتالي زواياه متطابقة ، وكل زاوية = 60 درجة فيه .

– مثلث متطابق الضلعين : يوجد به ضلعان متطابقان على الأقل . وقياس زاويتيه المتطابقتان = 45 درجة ، والأخرى = 90.

– مثلث مختلف الأضلاع : أضلاع غير متطابقة وبالتالي زواياه غير متطابقة .

حالات تطابق المثلثات :

مسلمة SSS , SAS ، AAS ، ASA :-

يقصد بمسلمة SSS : هي وجود 3 أضلاع متطابقة . حيث (S : يرمز لضلع . (side).

يقصد بمسلمة SAS : هي وجود ضلعان مع زاوية محصورة بينهما . حيث A : (Angle).

يقصد بمسلمة AAS : هي وجود زاويتان وضلع .

يقصد بمسلمة ASA : هي وجود زاويتان مع ضلع محصور بينهما.

٥) يصف خصائص الأشكال الرباعية

– متوازي الأضلاع :

* خصائصه :

1) الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة.
2) الزوايا المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة.
3) الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.
4) قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الأخر.
5) كلا قطري متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

تحسب مساحة متوازي الأضلاع بالقانون : **مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة (b) × الارتفاع (a) .**

– المستطيل :

* خصائصه :

1) الأضلاع المتقابلة متطابقة ومتوازية .
2) الزوايا المتقابلة متطابقة.
3) الزوايا المتحالفة متكاملة .
4) القطران متطابقان وينصف كل منهما الآخر.
5) جميع الزوايا الأربع قوائم.

ملاحظة / كل مستطيل يعتبر متوازي أضلاع ، ولكن بعض متوازيات الأضلاع تكون مستطيل .

تحسب مساحة المستطيل بالقانون : **مساحة المستطيل = الطول × العرض .**

– المربع :

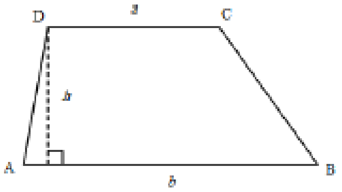
* خصائصه :

1) جميع أضلاعه متطابقة.
2) القطران متعامدان ومتطابقان
3) جميع زواياه قوائم .

ملاحظة / كل مربع معين وليس كل معين مربع .

– تُعطى مساحة المربع بالقانون : **(طول الضلع) × (طول الضلع)**

– شبه المنحرف :



* خصائصه :

1) زاويتا كل قاعدة لشبه المنحرف متطابق الساقين متطابقتان .
2) قطرا شبه المنحرف متطابق الساقين متطابقان .

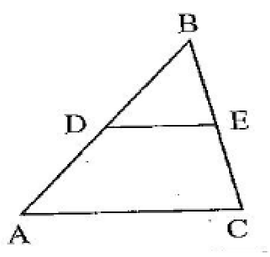
– تُعطى مساحة شبه المنحرف بالقانون : 1/2 (مجموع طولي قاعدتيه) × الارتفاع .

– لحساب القطعة المتوسطة لشبه المنحرف تُعطى بالقانون التالي : 1/2 (مجموع طولي القاعدة).

القطعة الوسطى(קטע אמצעי)

تعريف : القطعة الوسطى هي القطعة التي توصل بين منتصفي أضلاع المثلث

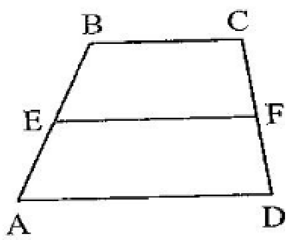
45) قطعة المتوسط (קטע אמצעי) توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه.



46المستقيم الواصل بين منتصف ضلع المثلث والموازي للضلع الثاني ينصف الضلع الثالث.

47) المستقيم الواصل بين ضلعي المثلث والموازي للضلع الثالث ومساو لنصفه هو قطعة المتوسط (קטע אמצעי).

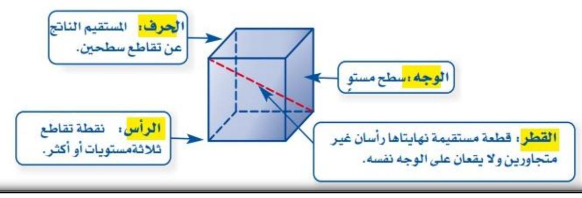
48) القاعدة الوسطى في شبه المنحرف توازي القاعدتين وتساوي نصف حاصل جمعهما.



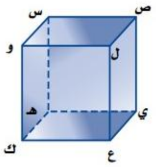
49) في شبه المنحرف مستقيم ينصف إحدى الساقين ويوازي القاعدتين إذا هو ينصف الساق الثاني.

٦) يشرح صفات الأشكال ثلاثية الابعاد وخصائصها

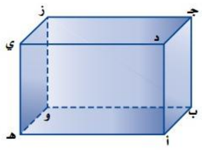
ومتعدد الأسطح مجسّم له أسطح مستوية عبارة عن مضلعات. ومن المفردات المتعلقة بالمجسّمات: الحرف، والوجه، والرأس، والقطر.



لاحظ أن القطعتين المستقيمتين $\overline{س ص}$ و $\overline{ل ع}$ في الشكل المجاور غير متقاطعتين، وغير متوازيتين؛ لأنهما لا تقعان في المستوى نفسه. ويُسمى المستقيمان اللذان لا يتقاطعان ولا يقعان في المستوى نفسه **مستقيمين متخالفين**.



أمثلة: تحديد العلاقات



① سمِّ مستوًى يوازي المستوى أ ب جـ.

المستوى هـ و ز يوازي المستوى أ ب جـ.

② حدّد قطعة مستقيمة مخالفة للقطعة $\overline{جـ ز}$.

$\overline{جـ ز}$ و $\overline{هـ ي}$ متخالفتان.

③ حدّد نقطتين يمكن رسم قطر بينهما.

القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين ب، ي تشكّل قطرًا.

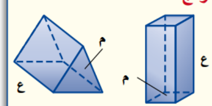
تحقق من فهمك:

أ) حدّد تقاطع المستويين أ ب جـ، جـ د ي.

حجم المنشور

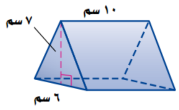
التعبير اللفظي: حجم المنشور (ح) هو ناتج ضرب مساحة القاعدة (م) بالارتفاع (ع).

نموذج:



بالرموز: ح = م ع

② أوجد حجم المنشور الثلاثي المجاور.



ح = م × ع   حجم المنشور.

ح = ($\frac{1}{2}$ × ٦ × ٧) ×ع   القاعدة مثلثة، لذلك م = $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٧.

ح = ($\frac{1}{2}$×٦×٧)×١٠   ارتفاع المنشور=١٠.

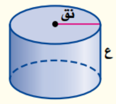
ح = ٢١٠   بسّط.

الحجم هو ٢١٠ سم^3.

حجم الأسطوانة

التعبير اللفظي: حجم الأسطوانة (ح) هو ناتج ضرب مساحة القاعدة (م) بالارتفاع (ع).

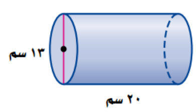
نموذج:



بالرموز: ح= م ع.

مثال: إيجاد حجم الأسطوانة

③ أوجد حجم الأسطوانة المجاورة، مقربًا الجواب إلى أقرب جزء من عشرة.



بما أن القطر يساوي ١٣ سم، فإن نصف القطر يساوي ٦,٥ سم.

ح = ط نق^{2}ع   حجم الأسطوانة.

ح = ط (٦,٥)^2×٢٠   عوض عن نق بـ ٦,٥ وعن ع بـ ٢٠.

ح ≈ ٢٦٥٤,٦   بسّط.

حجم الهرم

التعبير اللفظي: حجم الهرم (ح) يساوي ثلث ناتج ضرب مساحة القاعدة (م) بالارتفاع (ع).

نموذج:

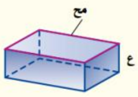
بالرموز: ح = $\frac{1}{3}$ م ع.

ارتفاع الهرم أو المخروط هو البعد العمودي بين الرأس والقاعدة.

المساحة الجانبية لسطح المنشور

التعبير اللفظي: المساحة الجانبية (جـ) لسطح منشور تساوي حاصل ضرب محيط القاعدة (مح) في الارتفاع (ع).

نموذج:

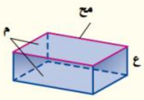


بالرموز: جـ= مح ع

المساحة الكلية لسطح المنشور

التعبير اللفظي: المساحة الكلية (ك) لسطح منشور هي مجموع المساحة الجانبية ومساحة القاعدتين.

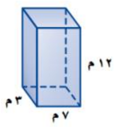
نموذج:



بالرموز: ك = جـ + ٢م = مح ع + ٢م

أمثلة: مساحة سطح المنشور

① جد المساحة الجانبية والكلية لسطح المنشور الرباعي المجاور. قاعدتاه مستطيلان بعدا كل منهما ٣م، ٧م.



نبدأ بإيجاد المحيط والمساحة للقاعدتين.

مساحة القاعدة	محيط القاعدة
ق = الطول × العرض	مح = ٢ الطول + ٢ العرض
ق = ٧×٣ = ٢١	مح = ٢(٧) + ٢(٣) = ٢٠

استعمل هذه المعلومات لإيجاد المساحة الجانبية والكلية للمنشور.

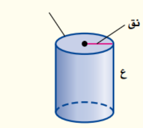
المساحة الكلية	المساحة الجانبية
ك = جـ + ٢م	جـ = مح ع
ك = ٢٤٠ + ٢×٢١ = ٢٨٢	جـ = ٢٠×١٢ = ٢٤٠

فتكون المساحة الجانبية ٢٤٠م^2، والمساحة الكلية ٢٨٢م^2.

المساحة الجانبية لسطح الأسطوانة

التعبير اللفظي: المساحة الجانبية (جـ) لسطح أسطوانة ارتفاعها (ع) ونصف قطر قاعدتها (نق) هي حاصل ضرب محيط القاعدة (مح) في الارتفاع (ع).

نموذج: محيط الدائرة=٢ط نق

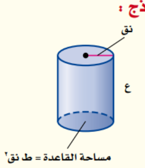


بالرموز: جـ = مح ع = ٢ط نق ع

المساحة الكلية لسطح الأسطوانة

التعبير اللفظي: المساحة الكلية (ك) لسطح أسطوانة ارتفاعها ع ونصف قطر قاعدتها نق هي مجموع المساحة الجانبية ومساحة القاعدتين.

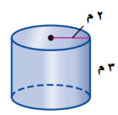
نموذج:



بالرموز: ك = جـ+٢ ط نق^2 = ٢ط نق ع + ٢ط نق^2

أمثلة: مساحة سطح الأسطوانة

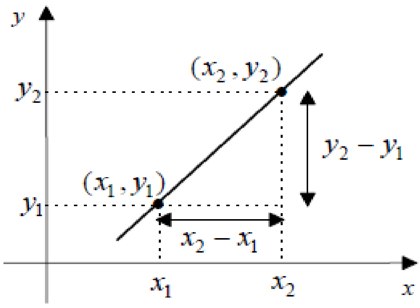
③ جد المساحة الجانبية والكلية لسطح الأسطوانة المجاورة.



المساحة الكلية	المساحة الجانبية
ك = جـ + ٢ط نق^2	جـ = ٢ط نق ع
ك = ٣٧,٧ + ٢ط (٢)^2	جـ = ٢ط × ٢ × ٣
ك ≈ ٦٢,٨	جـ ≈ ٣٧,٧

المساحة الجانبية للأسطوانة ٣٧,٧م^2 تقريبًا، والمساحة الكلية ٦٢,٨م^2 تقريبًا.

٧) يوجد ميل ومعادلة مستقيم في المستوى و علاقته بمستقيم اخر



قانون الميل:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

عند استخدام القانون نلاحظ أن: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

معادلة المستقيم :

١) طريقة الميل و النقطة :

يمكن كتابة معادلة الخط المستقيم إذا كان الميل وإحداثيات نقطة معينة على الخط معروفين. لنفرض أن m هو ميل الخط والنقطة هي (x_1, y_1). إذا كانت (x, y) نقطة أخرى على الخط إذن من قانون الميل: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ ومن هذا القانون نصل إلى معادلة الخط المستقيم كالتالي:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

مثال٣ : أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله 3 ويمر بالنقطة $(1, -2)$

الحل:

مثال٤ : أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4,3)$ و $(2,5)$

الحل:

٢) طريقة الميل والجزء المقطوع :

عادة ما نحتاج إلى كتابة معادلة الخط المستقيم بطريقة أخرى تسمى طريقة الميل والجزء المقطوع. وفي هذه الحالة يكون شكل المعادلة كالتالي:

$$y = mx + b$$

حيث m هو ميل الخط و b يمثل الجزء (أو المسافة) المقطوع (ة) على المحور y عند النقطة $(0, b)$.

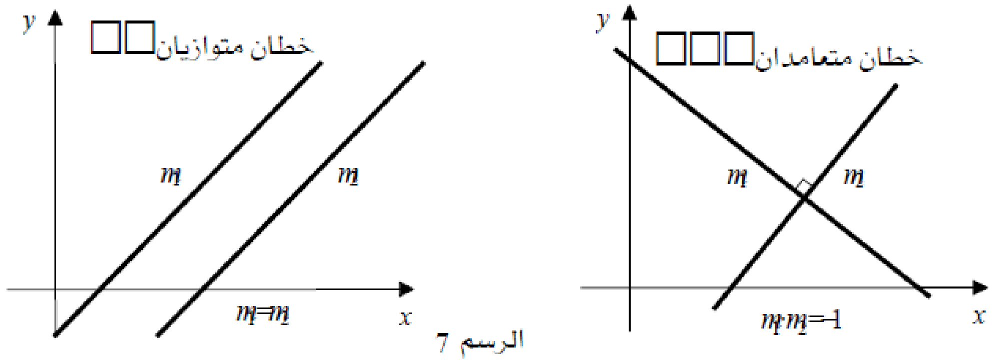
وكذلك يمكن استخدام هذا الشكل من المعادلة لإيجاد معادلة الخط المستقيم كما هو موضح في المثال التالي

مثال٥ : أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي 2 ويمر بالنقطة $(1,3)$

الحل:

علاقة مستقيم بمستقيم اخر :

يمكن استخدام ميل الخط المستقيم لمعرفة هل خطان هما متوازيين أو متعامدين كما هو موضح في الرسم 8. وبالتحديد فيكون الخطان غير عموديين ومتوازيين إذا وفقط إذا كان ميلاهما متساويين $(m_1 = m_2)$ ويكونان متعامدين إذا وفقط إذا كان ميل أحد الخطوط يساوي معكوس الثاني مع تغيير الإشارة $(m_1 = -\frac{1}{m_2})$.



الرسم 7

مثال ٦: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر من خلال النقطة $(2,-1)$ في كل من الحالات التالية:

a) الخط موازي للخط المستقيم $2x-3y=5$

b) الخط متعامد على الخط المستقيم $2x-3y=5$

الحل:

نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحور x والمحور y :

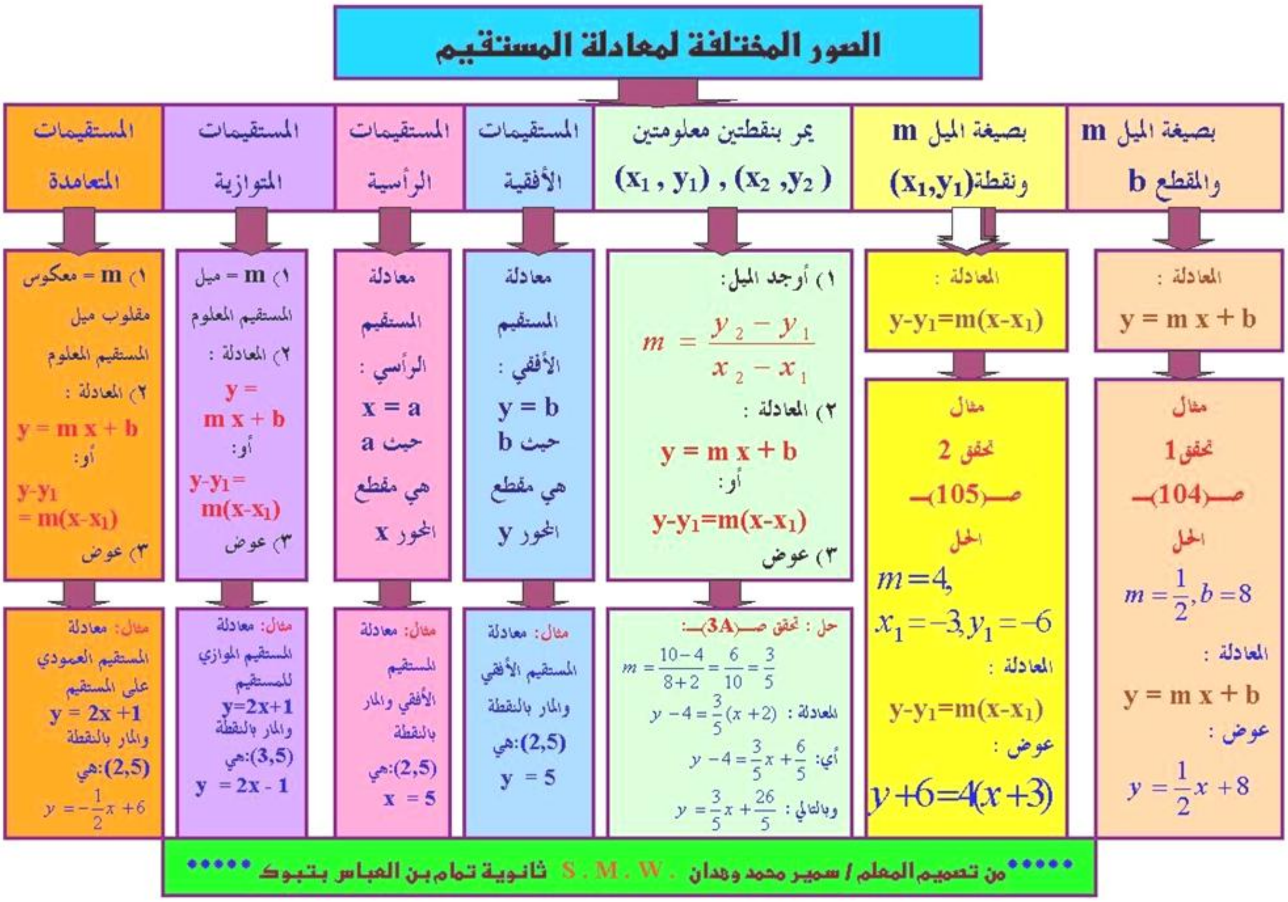
عادة ما نحتاج إلى معرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور. تكون إحداثية y تساوي الصفر لنقطة تقاطع الخط مع المحور x وتكون إحداثية x تساوي الصفر لنقطة تقاطع الخط مع المحور y. أي نعوض في المعادلة بـ $x=0$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع مع المحور y ثم بـ $y=0$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع مع المحور x.

مثال ٧: أوجد إحداثيات نقاط تقاطع الخط المستقيم التالي: $y=2x+3$ مع المحاور.

الحل:

خلاصة معادلات الخطوط المستقيمة

- شكل المعادلة (الميل ونقطة): $y = m(x - x_1) + y_1$
- شكل المعادلة (الميل والجزء المقطوع): $y = mx + b$
- شكل المعادلة (الخط يمر بنقطة الأصل): $y = mx$
- الخط الأفقي(الميل يساوي صفر): $y = b$
- الخط العمودي (الميل غير معرف): $x = a$



٨) يوجد المسافه بين نقطتين او نقطه ومستقيم في المستوى

المسافة بين نقطتين : $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ هي:

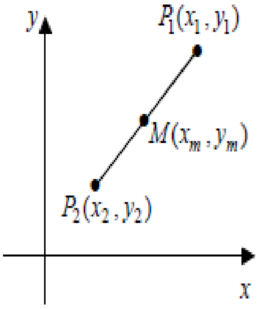
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

مثال١: أوجد المسافة بين النقطتين $P_1(-3,4)$ و $P_2(7,2)$

الحل:

نقطة منتصف القطعة المستقيمة :

$$(x_m,y_m)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



مثال٢: أوجد إحداثيات نقطة الوسط للخط المربوط بالنقطتين $P_1(-3,4)$ و $P_2(7,2)$

الحل:

المسافة بين نقطة ومستقيم :

بعد النقطه (x_1,y_1) عن المستقيم $a\,x+b\,y+c=0$

مثال : أوجد بعد النقطه $(-5,1)$ عن المستقيم $3x-4y+4=0$

الحل:

٩) يمثل التحويلات الهندسية (التناظر ، الانسحاب ، الدوران ، مغير البعد)

قواعد التحويلات الهندسية

صورة النقطة (x , y)

بالإنعكاس حول

محور X **هي** : $(x , -y)$
محور Y **هي** : $(-x , y)$
المستقيم $y = x$ **هي** : (y , x)

بدوران مركزه نقطة الأصل وبزاوية

$90°$ **هي** : $(-y , x)$
$270°$ **هي** : $(y , -x)$
$180°$ **هي** : $(-x , -y)$

بالإزاحة (a , b)

$(x + a , y + b)$

يتمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله k

(kx , ky)

ملاحظات

1) الدوران المذكور أعلاه عكس اتجاه عقارب الساعة

2) الدوران بزاوية قياسها $180°$ يكافئ تحويل مركب (انعكاس في محور X ثم انعكاس في محور Y)

3) الإزاحة تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين . (مقدارها يساوي مثلي المسافة بين المستقيمين المتوازيين) .

4) الدوران تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين . (بزاوية قياسها مثلي قياس الزاوية الحادة أو القائمة بين المستقيمين)

١٠) يستخدم العلاقات المترية في المثلث

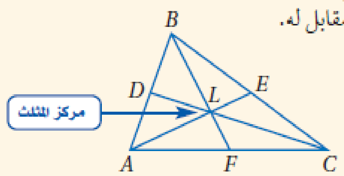
القطع المتوسطة وارتفاعات المثلث: **القطعة المتوسطة** في مثلث هي قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتقاطع في نقطة واحدة. تسمّى نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث **مركز المثلث**. ومركز المثلث هو نقطة توازن ذلك المثلث.

نظرية 4.7 نظرية مركز المثلث

يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثُلثي طول القطعة المتوسطة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

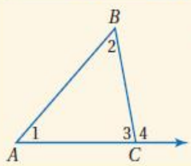
مثال: إذا كانت L مركز $\triangle ABC$, فإنّ
$AL = \frac{2}{3}AE,\ BL = \frac{2}{3}BF,\ CL = \frac{2}{3}CD$



نظرية 4.8 متباينة الزاوية الخارجية

قياس الزاوية الخارجيّة للمثلث أكبر من قياس كلٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين المناظرتين لها.

مثال: $m\angle 4 > m\angle 1$
$m\angle 4 > m\angle 2$

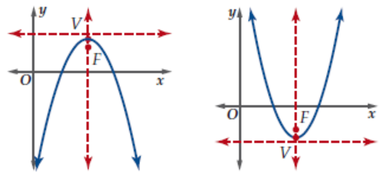


١١) يتعرف القطوع المخروطية ويميز معادلاتها وخصائصها ويمثلها بيانيا

١) القطع المكافئ

مفهوم أساسي — **خصائص القطع المكافئ**

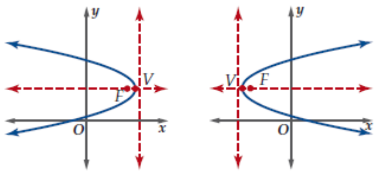
المعادلة في الصورة القياسية: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$



$c > 0$ ، $c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح رأسيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h, k+c)$
معادلة محور التماثل:	$x = h$
معادلة الدليل:	$y = k - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

المعادلة في الصورة القياسية: $(y-k)^2 = 4c(x-h)$



$c > 0$ ، $c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح أفقيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h+c, k)$
معادلة محور التماثل:	$y = k$
معادلة الدليل:	$x = h - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

كيف نحدد خصائص القطع :

إذا كان x^2 والـ y من الدرجه الأولى

↓

قطع مكافئ والمنحنى مفتوح رأسياً

للأعلى ← معامل الـy موجب

للاسفل ← معامل الـy سالب

إذا كان y^2 والـ x من الدرجه الأولى

↓

قطع مكافئ والمنحنى مفتوح أفقياً

لليمين ← معامل الـx موجب

لليسار ← معامل الـx سالب

مثال 7.4: **أثبت أن المعادلة $y^2 - 8x + 2y + 9 = 0$ تمثل قطعًا مكافئًا وأوجد البؤرة والدليل والرأس والمحور وارسم المنحنى.**

الحل : **بإكمال المربع لـ y نحصل على:**

$$y^2 + 2y = 8x - 9$$

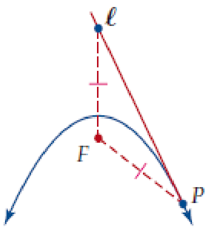
وبالتالي فإن $p = 2$، $h = 1$، $k = -1$ وبذلك يكون القطع المكافئ في الاتجاه القياسي ورأسه $(1, -1)$ ومفتوح لليمين ومن ثم فالبؤرة عند $(h+p, k) = (2+1, -1) = (3, -1)$. ويكون دليل القطع المكافئ هو الخط $x = h - p = 1 - 2 = -1$ ويكون المحور هو الخط $y = -1$، والمنحنى

معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

مفهوم أساسي — **مماس منحنى القطع المكافئ**

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.



مثال : أكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ عند النقطة المعطاة

$$-4x = (y+5)^2 ; (0, -5)$$

أولا: نضع معادلة المنحنى في الصورة القياسية ونحدد الرأس والبؤرة :

المنحنى مفتوح افقيا $(y-k)^2 = 4c\,(x-h)$ # بما أن $4c = -4 \;\therefore\; c = -1$

$(y-(-5))^2 = -4\,(x-0)$ # الرأس $(0, -5) = (h, k)$ ،

البؤرة $(-1, -5) = (h+c, k)$

ثانيا: نوجد المسافة بين البؤرة F ونقطة التماس P :

$$d = \sqrt{(-1-0)^2 + (-5-(-5))^2} = \sqrt{1} = 1$$

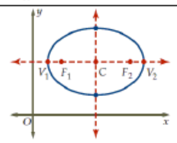
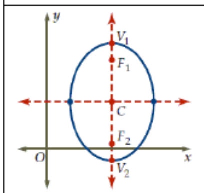
ثالثا : النقطة الاخرى للمماس $(h+c-d, k) = (-1-1, -5) = (-2, -5)$

رابعا: ميل المماس $m = \frac{-5-(-5)}{-2-0} = 0$

$$y = -5$$

٢) القطع الناقص :

خصائص القطع الناقص :

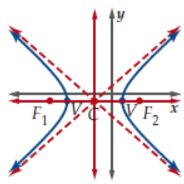
الصورة القياسية :	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	الصورة القياسية :	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
الشكل البياني :		الشكل البياني :	
الاتجاه :	المحور الأكبر أفقي	الاتجاه :	المحور الأكبر رأسي
المركز :	(h, k)	المركز :	(h, k)
البؤرتان :	$(h \pm c, k)$	البؤرتان :	$(h, k \pm c)$
الرأسان	$(h \pm a, k)$	الرأسان :	$(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان :	$(h, k \pm b)$	الرأسان المرافقان	$(h \pm b, k)$
المحور الأكبر :	$y = k$	المحور الأكبر :	$x = h$
المحور الأصغر :	$x = h$	المحور الأصغر :	$y = k$
العلاقة بين a,b,c	$c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	العلاقة بين a,b,c	$c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

٣)القطع الزائد :

مفهوم أساسي خصائص القطع الزائد

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع أفقي

المركز: (h, k)

الرأسان: $(h \pm a, k)$

البؤرتان: $(h \pm c, k)$

المحور القاطع: $y = k$، وطوله $2a$

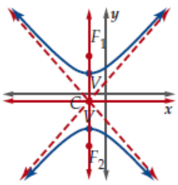
المحور المرافق: $x = h$، وطوله $2b$

خطا التقارب: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع رأسي

المركز: (h, k)

الرأسان: $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(h, k \pm c)$

المحور القاطع: $x = h$، وطوله $2a$

المحور المرافق: $y = k$، وطوله $2b$

خطا التقارب: $y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

كيف نحدد نوع القطع من المعادله المعطاه :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

يكون قطع مخروطي وتكون الأشكال الممكنة كما يلي:

(A) إذا كان معامل $(xy = 0)$ أي أن $(B = 0)$

- إذا كانت $A = C$ سيكون المنحنى دائرة. فإذا كان $A \neq C$ فإن
- إذا كان $AC = 0$ فهو منحنى قطع مكافئ.
- إذا كان $AC > 0$ فهو منحنى قطع ناقص.
- إذا كان $AC < 0$ فهو منحنى قطع زائد.

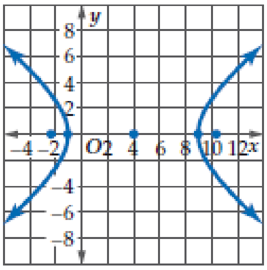
(B) وبصفة عامة:

- إذا كانت $B^2 - 4AC = 0$ فهو منحنى قطع مكافئ.
- إذا كانت $B^2 - 4AC < 0$ فهو منحنى قطع ناقص.
- إذا كانت $B^2 - 4AC > 0$ فهو منحنى قطع زائد.

مثال 1 كتابة المعادلة العامة لقطع مخروطي على الصورة القياسية

اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله، ومثِّل منحناه بيانيًّا:

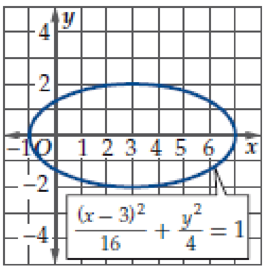
a) $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$



المعادلة الأصلية	$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$
جمِّع الحدود المتشابهة، وأخرج العامل المشترك	$16(x^2 - 8x + \blacksquare) - 25y^2 = 144 + 16(\blacksquare)$
حلِّل وبسِّط	$16(x^2 - 8x + 16) - 25y^2 = 144 + 16(16)$
مربع كامل	$16(x-4)^2 - 25y^2 = 400$
اقسم كل حدٍّ على 400	$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

بما أن المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع زائد مركزه $(4, 0)$.

b) $x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$



المعادلة الأصلية	$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$
جمِّع الحدود المتشابهة	$(x^2 - 6x) + 4y^2 = 7$
أكمل المربع	$(x^2 - 6x + 9) + 4y^2 = 7 + 9$
حلِّل وبسِّط	$(x-3)^2 + 4y^2 = 16$
اقسم كلا الطرفين على 16	$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

بما أنّ المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع ناقص مركزه $(3, 0)$.

الدائرة

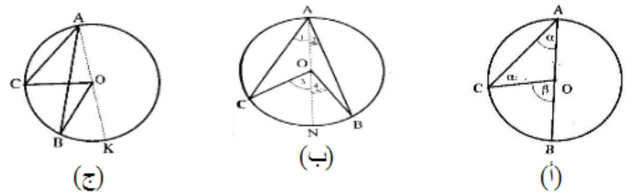
تعريف : الدائرة هي المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تبعد بعد ثابت عن نقطة معينة .
تسمى هذه النقطة مركز الدائرة
52) طريق ثلاث نقاط ليست على مستقيم واحد يمر محيط دائرة واحد

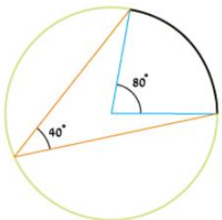
تعريف: الزاوية المركزية هي الزاوية التي رأسها في مركز الدائرة وضلعاها نصفا قطرين.

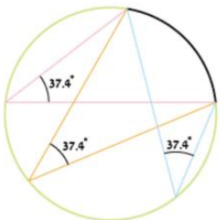
تعريف: الزاوية المحيطية هي الزاوية التي رأسها على محيط الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة

64) الزاوية المحيطية تساوي نصف الزاوية المركزية المرتكزة على نفس القوس

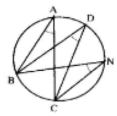
$$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$$





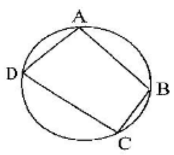


65) الزوايا المحيطية المرتكزة على أقواس متساوية في نفس الدائرة هي أيضا زوايا متساوية فيما بينها والعكس صحيح



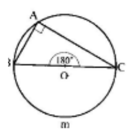
79) مجموع كل زاويتين متقابلتين في شكل رباعي محصور داخل دائرة يساوي 180°

80) كل شكل رباعي فيه مجموع كل زاويتين متقابلتين 180° يمكن حصره داخل دائرة



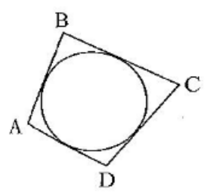
66) الزاوية المحيطية المرتكزة على القطر تساوي 90° (أي قائمة)والعكس صحيح

BC قطر ⟷ <BAC=90°



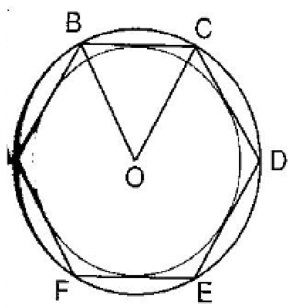
81) مجموع أي ضلعين متقابلين قي الشكل الرباعي الذي يحصر دائرة يساوي مجموع الضلعين المتقابلين الآخرين

82)إذا ا كان مجموع ضلعين متقابلين في شكل رباعي يساوي مجموع الضلعين المتقابلين الآخرين فيمكن حصر دائرة داخله



تعريف: المضلع المنتظم هو المضلع الذي فيه الأضلاع متساوية والزوايا متساوية أيضا

83) كل مضلع منتظم يمكن حصره في دائرة, ويمكن حصر دائرة داخله. وللدائرتين مركز مشترك.



مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع :-

تُعطى بالعلاقة : $S = 180(n-2)$ **ولحساب عدد الأضلاع يُعطى بالعلاقة** $Sn = 180(n-2)$

– لحساب زاوية من زواياه المنتظمة نطبق القانون : $\frac{180(n-2)}{n}$

مفهوم أساسي الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال 5 كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 2)$ وقطرها 8 .

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$(x-(-1))^2+(y-2)^2=4^2$ $(h, k)=(-1, 2),\ r=\frac{8}{2}=4$

$(x+1)^2+(y-2)^2=16$ بسّط

تحقق من فهمك

5A) المركز $(0, 0)$، ونصف القطر 3

5B) المركز $(5, 0)$، والقطر 10

مثال 6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(-1, -8)$, $(7, 6)$.

الخطوة 1: أوجد المركز.

$(h, k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ صيغة نقطة المنتصف

$=\left(\frac{7+(-1)}{2}, \frac{6+(-8)}{2}\right)$ $(x_1, y_1)=(7, 6),\ (x_2, y_2)=(-1, -8)$

$=\left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right)$ اجمع

$=(3, -1)$ بسّط

الخطوة 2: أوجد طول نصف القطر.

$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

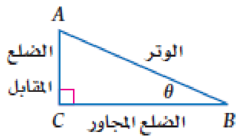
$=\sqrt{(3-7)^2+(-1-6)^2}$ $(x_1, y_1)=(7, 6),\ (x_2, y_2)=(3, -1)$

$=\sqrt{(-4)^2+(-7)^2}$ اطرح

$=\sqrt{65}$ بسّط

١٢) يتعرف الدوال المثلثية والعلاقة بينها

مثلثية.



يُستعمل الرمز الإغريقي θ (ويقرأ ثيتا) عادة للدلالة على قياس زاوية حادة في المثلث القائم الزاوية. حيث يُستعمل الوتر والضلع المقابل للزاوية التي قياسها θ والضلع المجاور لها في تعريف الدوال المثلثية الست.

مفهوم أساسي: جميع الدوال المثلثية في مثلث قائم الزاوية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

الرموز:

$\csc\theta$ (θ قاطع تمام) $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ $\sin\theta$ (θ جيب) $= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

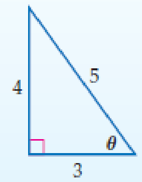
$\sec\theta$ (θ قاطع) $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ $\cos\theta$ (θ جيب تمام) $= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\cot\theta$ (θ ظل تمام) $= \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ $\tan\theta$ (θ ظل) $= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

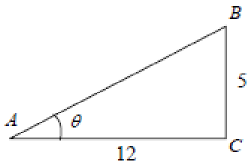
أمثلة:

$\tan\theta = \frac{4}{3}$ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ $\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\cot\theta = \frac{3}{4}$ $\sec\theta = \frac{5}{3}$ $\csc\theta = \frac{5}{4}$



مثال ٥: احسب قيم مثلثات الزاوية θ



الحل:

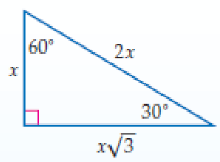
أولا نحتاج إلى إيجاد طول الوتر وهذا ممكن باستخدام قانون فيثاغورث للمثلث القائم الزاوية ABC :

تتكرر الزوايا التي قياساتها $30°, 45°, 60°$ كثيرًا في حساب المثلثات.

مفهوم أساسي: بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

أضف إلى مطويتك

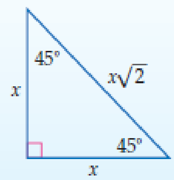
نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه $30°-60°-90°$ أن:



$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\tan 60° = \sqrt{3}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه $45°-45°-90°$ أن:



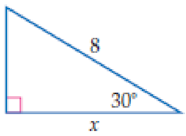
$\tan 45° = 1$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

طريقة سهلة لحفظ الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصه

	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	1	2	3	4
Cos	4	3	2	1	0

$$\frac{\sqrt{\ \ }}{2}$$

مثال 3 إيجاد طول ضلع مجهول



استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

طول الوتر يساوي 8. والطول المجهول هو الضلع المجاور للزاوية °30 .

استعمل دالة جيب التمام لإيجاد قيمة x .

$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ دالة جيب التمام

$\cos 30^\circ = \frac{x}{8}$ بالتعويض عن θ بـ °30 ، المجاور بـ x، الوتر بـ 8

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8}$ $\quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{8\sqrt{3}}{2} = x$ بضرب كلا الطرفين في 8

$6.9 \approx x$ باستعمال الآلة الحاسبة

ملخص المفهوم القياس بالدرجات وبالراديان

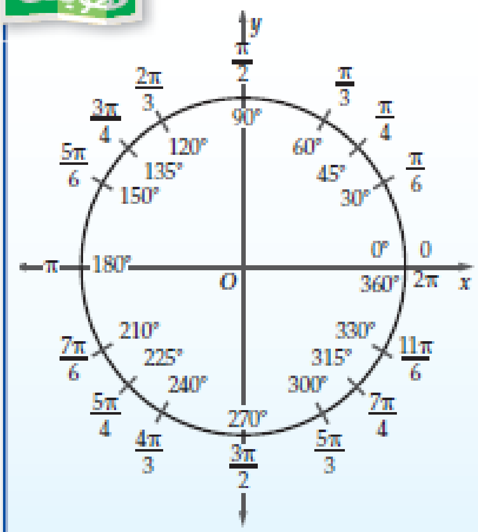
أضف إلى مطويتك

يُظهر الشكل المجاور قياسات الزوايا الخاصة بالدرجات وبالراديان.

من المفيد أن تحفظ قياسات الزوايا الخاصة الآتية بالدرجات وبالراديان؛ فقياسات الزوايا الخاصة الأخرى ما هي إلا مضاعفات لقياسات هذه الزوايا.

$30^\circ = \frac{\pi}{6}$ $\qquad 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

$60^\circ = \frac{\pi}{3}$ $\qquad 90^\circ = \frac{\pi}{2}$



وهناك العديد من العلاقات المثلثية الهامة:

1. متطابقات فيثاغورث. لجميع قيم t المعرفة لكل من الطرفين فإن:

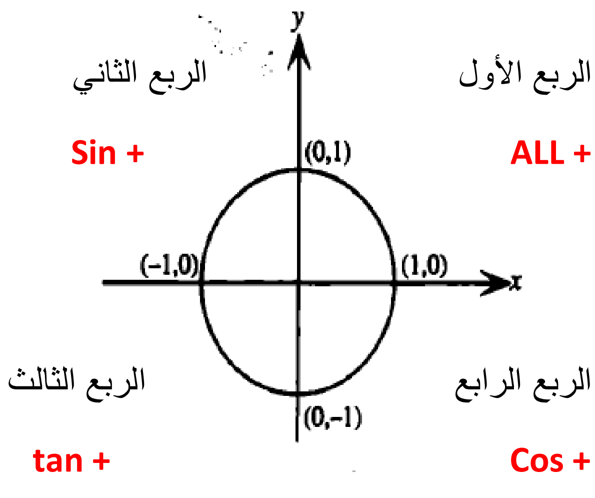
$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad 1 + \tan^2 t = \sec^2 t \quad \cot^2 t + 1 = \csc^2 t$$

2. متطابقات المقلوب. لجميع قيم t المعرفة لكل من الطرفين فإن:

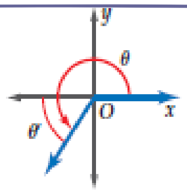
$$\csc t = \frac{1}{\sin t} \quad \sec t = \frac{1}{\cos t} \quad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

3. متطابقات خارج القسمة. لجميع قيم t المعرفة لكل من الطرفين فإن:

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$



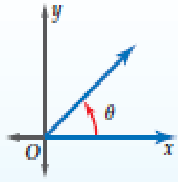
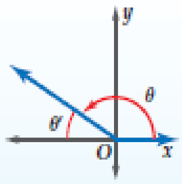
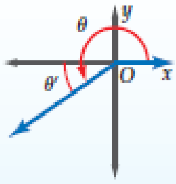
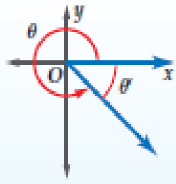
أ.م



الدوال المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية: إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن **زاويتها المرجعية** θ' هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x. والجدول الآتي يُبيّن قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها، حيث $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$.

مفهوم أساسي — الزوايا المرجعية

أضف إلى مطويتك

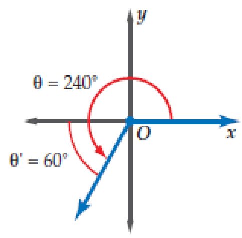
الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$ $\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$ $\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 360° - \theta$ $\theta' = 2\pi - \theta$

مثال 4 استعمال الزاوية المرجعية لإيجاد قيمة دالة مثلثية

أوجد قيمة الدالة المثلثية في كلٍّ ممَّا يأتي:

(a $\cos 240°$

يقع ضلع الانتهاء للزاوية $240°$ في الربع الثالث.



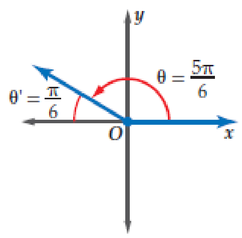
$\theta' = \theta - 180°$ بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

$= 240° - 180° = 60°$ $\theta = 240°$

$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ دالة جيب التمام سالبة في الربع الثالث

(b $\csc \frac{5\pi}{6}$

يقع ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{5\pi}{6}$ في الربع الثاني.



$\theta' = \pi - \theta$ بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

$= \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$\csc \frac{5\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6}$ دالة قاطع التمام موجبة في الربع الثاني

$= \csc 30°$ $\frac{\pi}{6}\text{ rad} = 30°$

$= 2$ $\csc 30° = \frac{1}{\sin 30°}$

تحقق من فهمك

أوجد قيمة الدالة المثلثية في كلٍّ ممَّا يأتي:

(4A $\cos 135°$ (4B $\tan \frac{5\pi}{6}$

بما أن طول الدورة لكلٍّ من الدالتين هو $360°$، فإن قيم كلٍّ من الدالتين تتكرر كل $360°$.
لذلك فإن $\cos (x + 360°) = \cos x$, $\sin (x + 360°) = \sin x$

مثال 4 حساب قيم الدوال المثلثية

أوجد قيم كل دالة ممّا يأتي:

(a $\cos 480°$

$\cos 480° = \cos (120° + 360°)$

$= \cos 120°$

$= -\frac{1}{2}$

(b $\sin \frac{11\pi}{4}$

$\sin \frac{11\pi}{4} = \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right)$

$= \sin \frac{3\pi}{4}$

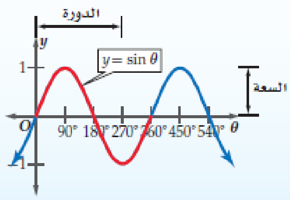
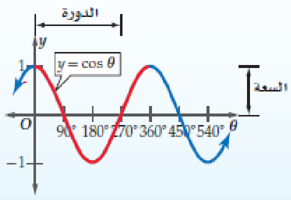
$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

تحقق من فهمك

(4A $\sin 420°$ (4B $\cos \left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

مفهوم أساسي — دالتا الجيب وجيب التمام

أضف إلى مطويتك

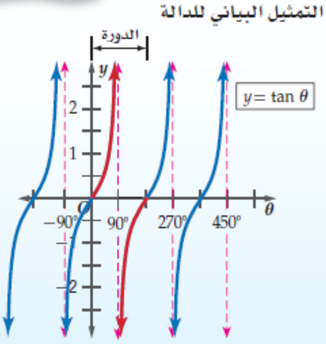
الدالة المولدة (الأم)	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	360°	360°

مفهوم أساسي — دالة الظل

أضف إلى مطويتك

الدالة المولدة (الأم)	$y = \tan \theta$
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90° + 180° n, n \in Z\}$
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرَّفة
طول الدورة	180°

التمثيل البياني للدالة



المتطابقات المثلثية

المتطابقات النسبية		$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
متطابقات المقلوب	$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$	$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$ $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين	$\sec \theta = \csc \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\csc \theta = \sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan \theta = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cot \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$ $\cot(-\theta) = -\cot \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\sec(-\theta) = \sec \theta$	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ $\csc(-\theta) = -\csc \theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$		$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$	$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ $\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
متطابقات نصف الزاوية	$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$	$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$	$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$

١٣) يتعرف المتجهات ويجري العمليات عليها

مفهوم أساسي — العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجه في عدد حقيقيّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

مثال 3 — العمليات على المتجهات

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

a) $\mathbf{c} + \mathbf{a}$

مفهوم أساسي — طول المتجه في المستوى الإحداثي

إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال 2 — إيجاد طول متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

مفهوم أساسي — الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

البرهان

إثبات أن: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

افترض أن: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$ الضرب الداخلي

$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$ اكتب على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$

$= |\mathbf{u}|^2$ $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |\mathbf{u}|$

ستبرهن الخصائص الثلاث الأولى في الأسئلة 37–35

مثال 2 — استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle$.

بما أن: $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ ، فإن: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

$|\langle -5, 12 \rangle| = \sqrt{\langle -5, 12 \rangle \cdot \langle -5, 12 \rangle}$ $\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle$

$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ بسّط

مثال 3 — إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

$\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$ الزاوية بين متجهين

١٤) يحل مسائل تطبيقية على الهندسة المستوية والفراغية

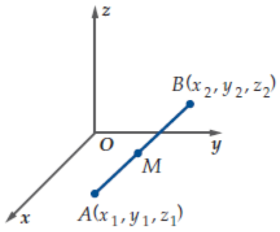
مفهوم أساسي — صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



مفهوم أساسي — العمليات على المتجهات في الفضاء

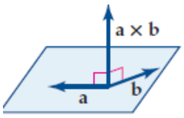
إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 , b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًّا ، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجه في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1 , ka_2 , ka_3 \rangle$

الضرب الاتجاهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب الداخلي، فإن الضرب الاتجاهي لمتجهين a, b هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز a × b، ويُقرأ a cross b ، ويكون المتجه a × b عموديًّا على المستوى الذي يحوي المتجهين a , b .



مفهوم أساسي — الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين a, b

هو المتجه: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

((معيار 4))

١) يتعرف وحدات القياس (وحدة قياس الزوايا ، الطول ، المحيط ، المساحة ، الحجم ، درجة الحرارة ، الزمن)
٢) يحول بين وحدات القياس المختلفة ضمن النظام نفسه

(١) وحدات قياس الزمن :-
السنة = ١٢ شهر
الشهر = ٤ أسابيع
الشهر = ٣٠ يوم
الأسبوع = ٧ أيام
اليوم = ٢٤ ساعة
الساعة = ٦٠ دقيقة
الدقيقة = ٦٠ ثانية

(٢) وحدات قياس الطول :-
١ كيلو متر = ١٠٠٠ متر
١ متر = ١٠ دسم
١ متر = ١٠٠ سم
١ دسم = ١٠ سم
١ سم = ١٠ ملم

(٣) وحدات قياس المساحة :-
١ كيلو متر مربع = ١٠٠٠٠٠٠ متر مربع
١ متر مربع = ١٠٠ دسم مربع
١ متر مربع = ١٠٠٠٠ سم مربع
١ دسم مربع = ١٠٠ سم مربع
١ سم مربع = ١٠٠ ملم مربع

(٤) وحدات قياس الحجم :-
١ كيلو متر مكعب = ١٠٠٠ × ١٠٠٠ × ١٠٠٠ متر مكعب
١ متر مكعب = ١٠٠٠ دسم مكعب
١ متر مكعب = ١٠٠٠ × ١٠٠٠ سم مكعب
١ دسم مكعب = ١٠٠٠ سم مكعب
١ سم مكعب = ١٠٠٠ ملم مكعب

(٥) وحدات قياس الوزن :-
١ طن = ١٠٠٠ كيلو غرام
١ كيلو غرام = ١٠٠٠ غرام
١ ملغم = ٠.٠٠١ غرام

(٦) وحدة قياس حجم السائل :-
١ متر مكعب = ١٠٠٠ لتر
١ لتر = ١ دسم مكعب

(٧) السنة الكبيسة :-
هي السنة التي تقبل القسمة على ٤ وعدد أيامها ٣٦٦ يوم ويكون فيها فبراير ٢٩ يوم .

(٨) السنة البسيطة :-
هي السنة التي لا تقبل القسمة على ٤ وعدد أيامها ٣٦٥ يوم ويكون فيها فبراير ٢٨ يوم .

ملاحظة: التحويل من وحدة الى أخري:

<u>عند التحويل الكيلومترات الى سنتيمترات</u>
- اذا كان كل ١ كيلو متر = (١٠٠٠) متر
- اذا كان كل ١ متـــــر = (١٠٠) سم
- اذن اذا أردنا ان نعرف عدد **السنتيمترات في ١ كيلو متر** يمكننا معرفة ذلك كالتالي:
- نقوم بضرب ١٠٠٠ متر × ١٠٠ سم
- اذن:

(١) كيلومتر = ١٠٠٠ × ١٠٠ = ١٠٠٠٠٠ سم

<u>عند التحويل من سنتيميترات الى متر</u>
- كل ١ متـــــر = (١٠٠) سم
- اذن اذا كان لدينا ١٠٠٠٠٠ سم واردنا ان نحولهم الى **أمتار** فلابد من القسمة على ١٠٠ سم كالتالي:
- ١٠٠٠٠٠ سم ÷ ١٠٠ متر = ١٠٠٠ متر
- **<u>اذن ١٠٠٠٠٠سم = ١٠٠٠ متر</u>**

<u>التحويل من سنتيميتر الى كيلو متر</u>
- فاذا كان كل ١ كيلومتر = ١٠٠٠٠٠ سنتيمتر
- اذن فاذا كان لدينا ١٠٠٠٠٠ سم و اردنا تحوليهم **الى كيلومتر** فلابد من القسمة على **١٠٠٠٠٠سم**
- **<u>١٠٠٠٠٠سم ÷ ١٠٠٠٠٠سم = ١ كلومتر</u>**

٣) يوجد محيط ومساحة المثلث والدائرة والأشكال الرباعية

٤) يحسب حجوم بعض المجسمات ويوجد مساحتها الجانبية والكلية

b القاعده

h ارتفاع

l طول

w عرض

d قطر

r نصف قطر

s ضلع

الصيـغ

الهندسة الإحداثية

نقطة المنتصف

على خط الأعداد:
$$M = \frac{a+b}{2}$$

في المستوى الإحداثي:
$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

في الفراغ:
$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

المسافة بين نقطتين

على خط الأعداد:
$$d = |a-b|$$

في المستوى الإحداثي:
$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

في الفراغ:
$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

الميل
$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2 \neq x_1$$

المحيط

المربع	$P = 4s$	الدائرة	$C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$
المستطيل	$P = 2\ell + 2w$		

المساحة

المربع	$A = s^2$	المُعيَّن	$A = bh$ أو $A = \frac{1}{2}d_1 d_2$
المستطيل	$A = bh$ أو $A = \ell w$	المثلث	$A = \frac{1}{2}bh$
متوازي الأضلاع	$A = bh$	الدائرة	$A = \pi r^2$
شبه المنحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1+b_2)$	القطاع الدائري	$A = \frac{N}{360} \cdot \pi r^2$

المساحة الجانبية

المنشور	$L = Ph$	الهرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
الأسطوانة	$L = 2\pi rh$	المخروط	$L = \pi r\ell$

المساحة السطحية

المنشور	$T = Ph + 2B$	المخروط	$T = \pi r\ell + \pi r^2$
الأسطوانة	$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$	الكرة	$T = 4\pi r^2$
الهرم	$T = \frac{1}{2}P\ell + B$		

الحجم

المكعب	$V = s^3$	الهرم	$V = \frac{1}{3}Bh$
متوازي المستطيلات	$V = \ell wh$	المخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
المنشور	$V = Bh$	الكرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
الأسطوانة	$V = \pi r^2 h$		

٥) يحل مسائل تتضمن مقياس رسم بإستخدام النسبه والتناسب

٦) يوظف التقريب في القياس

٧) يحل مسائل رياضية تطبيقية على القياس

مقياس الرسم = $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$

مع مراعاة تحويل الطولين إلى وحدة واحدة

مثال (١) : المسافة بين بلدين ٣٥ كيلو متراً ، فإذا كانت المسافة بين البلدين على الخريطة ٥ سنتيمترات . أوجد مقياس الرسم الذي رُسمت به هذه الخريطة ؟

الحل :-

مقياس الرسم = $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$

مقياس الرسم = $\frac{٥}{٣٥ \times ١٠٠٠ \times ١٠٠} = \frac{١}{٧٠٠٠٠٠}$

مقياس الرسم = ١ : ٧٠٠٠٠٠