اختبار لطلاب الثالث الثانوي العلمي 2022 – 2023
رياضيات (بحث النهايات -1-)

الاسم :
الدرجة : 300
المدّة : ساعتان

السؤال الأوّل : جد نهاية كل من التوابع التالية عند a المُعطاة :

1) $f(x) = \frac{\sin^2(2x)}{x^3 - x^2}$; $a = 0\,,+\infty$

2) $f(x) = \frac{-x^2+x+2}{x^3+1}$; $a = -1\,,-\infty$

السؤال الثاني :

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3 + \frac{3x - \cos(3x)}{3-x}\right)$ ، واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. حيث : $|f(x)+3| < 3 + \frac{3x-\cos(3x)}{3-x}$.

2) أثبت أنَّ : $\frac{1}{x} - \cos^2(\frac{1}{x}) \geq \frac{1-x}{x}$ أيّاً تكن $x \in R_+^*$ ، ثمَّ استنتج $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x} - \cos^2(\frac{1}{x})\right)$.

السؤال الثالث : يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

ليكن f هو التابع المُعرَّف بالعلاقة : $f(x) = \big(x - E(x)\big).E(x) + 1$ **المطلوب :**

1) احسب $f(-1.7)$.
2) اكتب f بصيغة مستقلّة عن $E(x)$ على المجال $I = [0\,,2[$.

3) في معلم متجانس ارسم الخط البياني للتابع f على I .
4) هل f مستمر على I ؟ علّل إجابتك .

السؤال الرابع : ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرَّف على $R\backslash\{-1,1\}$ وفق : $f(x) = \frac{9x^3-7x^2-10x+6}{1-x^2}$. **المطلوب :**

1) اكتب التابع بالشكل : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{1-x^2}$ ، حيث a,b,c,d أعداد حقيقيّة يُطلَب تعيينها .

2) تَحقّق أنَّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب مائل للخط C .

3) ادرس الوضع النسبي بين Δ و C .

السؤال الخامس : ليكن f تابعاً مُعرَّفاً على $]2\,,+\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{3-5x}{2-x}$. **المطلوب :**

1) احسب نهاية التابع عند أطراف مجموعة تعريفه ، واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

2) اكتب معادلة كل مقارب يقبله التابع .
3) ادرس الوضع النسبي بين التابع ومقاربه الأفقي .

4) أعدْ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x .

5) أوجدْ عدداً حقيقيّاً A يحقّق الشرط : إذا كان $x > A$ ، كان $f(x)$ في المجال $]4.7\,;\,5.3[$.

السؤال السادس : ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرَّف على R وفق : $f(x) = \sqrt{x^2+2}$. **المطلوب :**

1) أثبت أنَّ التابع زوجي ، وفسّر النتيجة هندسيّاً .

2) احسب $a = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ ، و $b = \lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - ax\big)$ ، واكتب معادلة المقارب المائل لـ C في جوار $+\infty$.

3) استنتج معادلة المقارب المائل لـ C في جوار $-\infty$.
4) أثبت أنَّ C يقع فوق مقاربيه .

5) ادرس تغيّرات التابع f على المجال $]0\,,+\infty[$ ، ونَظّمْ جدولاً بها .

6) أثبت أنَّ للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد على المجال $]0\,,+\infty[$ ، ثمَّ احسب جبريّاً القيمة الحقيقيّة لذلك الجذر.

7) في معلم متجانس ارسم C مع مقارباته على R .

8) ناقش بحسب قيم $m \in R$ عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

------- انتهت الأسئلة -------

إعداد : محمود المحمود 0936 838 276

السؤال الأول:

1) $f(x)=\frac{\sin^2(2x)}{x^3-x^2}$; $a=0,+\infty$

$$f(x)=\frac{\sin^2(2x)}{4x^2}\cdot\frac{4}{(x-1)}$$

$$=\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2\cdot\frac{4}{x-1}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=(1)^2\cdot\frac{4}{-1}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=-4$$

حيث:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{2x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(t)}{t}=1$$

$$0\leq\sin^2(2x)\leq1$$

نقسم على $(x^3-x^2)>0$ (لأن $x\to+\infty$)

$$0\leq\frac{\sin^2(2x)}{x^3-x^2}\leq\frac{1}{x^3-x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3-x^2}\right)=0\\ \lim_{x\to+\infty}(0)=0\end{array}\right\}$$

حسب مبرهنة الإحاطة يكون:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

2) $f(x)=\frac{-x^2+x+2}{x^3+1}$; $a=-1,-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

$$f(x)=\frac{-(x^2-x-2)}{x^3+1}=\frac{-(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{-(x-2)}{x^2-x+1}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\frac{-(-3)}{1+1+1}=\frac{3}{3}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=1$$

السؤال الثاني:

1) $-1\leq\cos(3x)\leq1$

$$\Rightarrow 1\geq-\cos(3x)\geq-1$$

$$\Rightarrow 3x+1\geq3x-\cos(3x)\geq3x-1$$

نقسم على $(3-x)<0$ (لأن $x\to+\infty$)

$$\Leftarrow \frac{3x+1}{3-x}\leq\frac{3x-\cos(3x)}{3-x}\leq\frac{3x-1}{3-x}$$

$$3+\frac{3x+1}{3-x}\leq3+\frac{3x-\cos(3x)}{3-x}\leq3+\frac{3x-1}{3-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{3x+1}{3-x}\right)=3-3=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{3x-1}{3-x}\right)=3-3=0$$

$\Leftarrow$ حسب مبرهنة الإحاطة يكون:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{3x-\cos(3x)}{3-x}\right)=0$$

$\Leftarrow$ حسب مبرهنة الإحاطة يكون:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-3$$

(2 $0 \le \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$

$0 \ge -\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \ge -1$

$\frac{1}{x} \ge \frac{1}{x} - \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \ge \frac{1}{x} - 1$

$\Rightarrow \frac{1}{x} - \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \ge \frac{1-x}{x}$

$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1-x}{x}\right) = +\infty$

⇐ حسب مبرهنة المقارنة تكون:

$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) = +\infty$

السؤال الثالث:

$f(x) = (x - E(x)).E(x) + 1$

(1 $f(-1,7) = (-1,7 - E(-1,7)).E(-1,7) + 1$

$= (-1,7 - (-2))(-2) + 1$

$= (-1,7 + 2)(-2) + 1$

$= (0,3)(-2) + 1$

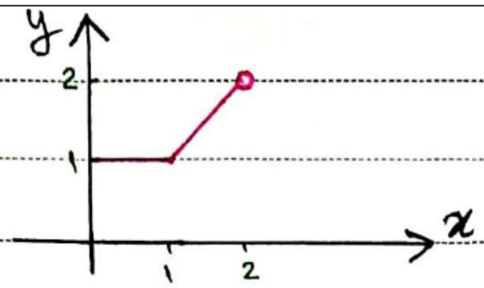
$= -0,6 + 1 = 0,4$

$\Rightarrow f(-1,7) = 0,4$

(2

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [0,1[\\ x & ; x \in [1,2[\end{cases}$$

(3



(4 نعم، لأنّ:

$y = 1$ مستمر على $[0,1[$

$y = x$ مستمر على $[1,2[$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

⇐ f مستمر عند $x = 1$

⇐ f مستمر على $I = [0,2[$

أو لأنّه تمّ رسمه دون رفع القلم (مؤلف من قطعة واحدة على I)

السؤال الرابع:

$f(x) = \frac{9x^3 - 7x^2 - 10x + 6}{1 - x^2}$

(1

$$\begin{array}{r|l} & -9x + 7 \\ \hline 1 - x^2 & 9x^3 - 7x^2 - 10x + 6 \\ & \mp 9x^3 \quad \pm 9x \\ \hline & -7x^2 - x + 6 \\ & \pm 7x^2 \quad \mp 7 \\ \hline & -x - 1 \end{array}$$

$f(x) = -9x + 7 + \frac{-x - 1}{1 - x^2}$

$a = -9 ;\ b = 7 ;\ c = -1 ;\ d = -1$

(2 $\Delta : y = -9x+7$

$$f(x) - y_\Delta = -9x+7+\frac{-x-1}{1-x^2}+9x-7$$

$$= \frac{-x-1}{1-x^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}(f(x)-y_\Delta) = \lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{-x-1}{1-x^2}\right)$$

$$= 0$$

$\Leftarrow$ $\Delta : y=-9x+7$ مقارب مائل لـ C في الجوارين $+\infty$ و $-\infty$

(3 ندرس إشارة الفرق:

$$f(x)-y_\Delta = \frac{-x-1}{1-x^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	0	$-$		$-$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)-y_\Delta$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	
وضع نسبي		C تحت Δ		C تحت Δ		C فوق Δ	

السؤال الخامس:

$$f(x) = \frac{3-5x}{2-x} \;;\; x\in]2,+\infty[$$

(1 $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{-7}{0^-} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to 5} f(x) = f(5)$$

$$= \frac{3-25}{2-5} = \frac{-22}{-3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \frac{22}{3}$$

(2 $x=2$ مقارب شاقولي لـ C

$y=5$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

(3 ندرس إشارة الفرق:

$$f(x)-y = \frac{3-5x}{2-x} - 5$$

$$= \frac{3-5x-10+5x}{2-x}$$

$$f(x)-y = \frac{-7}{2-x}$$

x	2		$+\infty$
-7		$-$	
$2-x$	0	$-$	
$f(x)-y$	$\|\|$	$+$	
وضع نسبي		C فوق المقارب	

(4

$$f(f(x)) = \frac{3-5f(x)}{2-f(x)}$$

$$= \frac{3-5\left(\frac{3-5x}{2-x}\right)}{2-\left(\frac{3-5x}{2-x}\right)}$$

$f(f(x)) = \frac{6-3x-15+25x}{4-2x-3+5x}$

$= \frac{22x-9}{3x+1}$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{22x-9}{3x+1}\right)$

$= \frac{22}{3}$

5) $c = \frac{4,7+5,3}{2} = 5$

1) $r = \frac{5,3-4,7}{2} = 0,3$

$|f(x)-c|<r \Rightarrow$

$\left|\frac{3-5x}{2-x} - 5\right| < 0,3 \Rightarrow$

$\left|\frac{3-5x-10+5x}{2-x}\right| < \frac{3}{10} \Rightarrow$

$\left|\frac{-7}{2-x}\right| < \frac{3}{10} \Rightarrow$

$\frac{7}{|2-x|} < \frac{3}{10}$

بما أن x في غاية الكبر ⇐

⇐ $|2-x| = x-2$

$\frac{7}{x-2} < \frac{3}{10} \Rightarrow 70 < 3x-6$

$\Rightarrow 3x > 76 \Rightarrow x > \frac{76}{3}$

$A = \frac{76}{3}$ ⇐

السؤال السادس:

$f(x)=\sqrt{x^2+2}$; $D_f = \mathbb{R}$

1) $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+2} = \sqrt{x^2+2} = f(x)$

⇐ f زوجي، وهو متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

2) $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} = \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x}$

$= \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} \Rightarrow$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)$

$= 1 \Rightarrow \boxed{a=1}$

$f(x)-ax = \sqrt{x^2+2}-x$

$= \frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}$

$f(x)-ax=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}\right)$

$=0 \Rightarrow \boxed{b=0}$

$y=ax+b \Rightarrow$

$y_1=x$ مقارب مائل لـ C

في جوار $+\infty$

3) بما أنّ f زوجي $\Leftarrow$

هو متناظر بالنسبة لـ $y'y$ $\Leftarrow$

كل (x,y) تتبع $(-x,y)$ $\Leftarrow$

$y_2=-x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

4) دراسة الوضع النسبي

بين C و $y_1=x$:

$f(x)-y_1=\sqrt{x^2+2}-x>0$

لأنّ: $\sqrt{x^2+2}>x$

دراسة الوضع النسبي بين C و $y_2=-x$:

$f(x)-y_2=\sqrt{x^2+2}+x>0$

لأنّ: $\sqrt{x^2+2}>-x$

طريقة ثانية لدراسة الوضع النسبي: نعدم الفرق:

$f(x)-y_1=0 \Rightarrow \sqrt{x^2+2}=x$

$\Rightarrow x^2+2=x^2 \Rightarrow 0=2$

$\Leftarrow$ مستحيلة الحل و الفرق لا ينعدم

فهو من إشارة وحيدة

بأخذ قيمة تجريبية:

$x=0 \Rightarrow f(x)-y_1=\sqrt{2}>0$

$\Leftarrow$ C فوق المقارب $y_1=x$

$f(x)-y_2=0 \Rightarrow \sqrt{x^2+2}=-x$

$\Rightarrow x^2+2=x^2 \Rightarrow 2=0$

$\Leftarrow$ مستحيلة الحل والفرق لا ينعدم

فهو من إشارة وحيدة

بأخذ قيمة تجريبية:

$x=0 \Rightarrow f(x)-y_2=\sqrt{2}>0$

$\Leftarrow$ C فوق المقارب $y_2=-x$

$\Leftarrow$ C فوق المقاربين y_1, y_2

5) f معرّف ومستمر واشتقاقي على $[0,+\infty[$:

$f(0)=\sqrt{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\sqrt{2}$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\nearrow +\infty$

f معرّف ومستمر ومتزايد على المجال $x\in[0,+\infty[$

$f([0,+\infty[)=[\sqrt{2},+\infty[$

$2\in[\sqrt{2},+\infty[\Rightarrow$

للمعادلة $f(x)=2$ حل وحيد

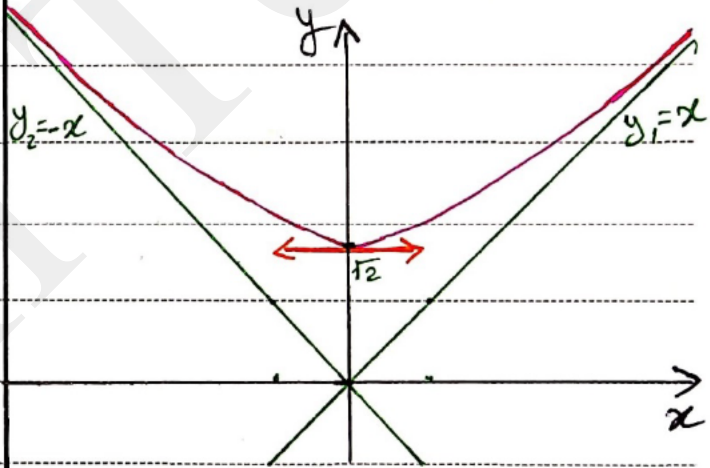
على $x\in[0,+\infty[$

نحل المعادلة $f(x)=2 \Leftarrow$

$\sqrt{x^2+2}=2 \Rightarrow x^2+2=4$

$\Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=-\sqrt{2}$ مرفوض

$x=\sqrt{2}$ مقبول



(8

عندما $m\in]-\infty,\sqrt{2}[\Leftarrow$ لا يوجد أي حل

عندما $m=\sqrt{2} \Leftarrow$ للمعادلة حل وحيد

عندما $m\in]\sqrt{2},+\infty[\Leftarrow$ للمعادلة حلين

#MeEnMathTeam

X_Math πac

تدقيق : إيناس دللي