الهندسة

الصف العاشر

إعداد المدرس
نزارعبد الحميد القادري

الوحدة الأولى :الهندسة الفراغية

1- الرسم بالمنظور :

إن رسم مجسم على ورقة الدفتر يدعى الرسم بالمنظور .

قواعد رسم مجسم بالمنظور :

- ترسم القطع المستقيمة المرئية بخطوط مستمرة والغير مرئية بخطوط متقطعة
- ترسم المستقيمات المتوازية في الفراغ مستقيمات متوازية
- **بشكل** عام لاتمثل المستقيمات المتعامدة في الفراغ بمستقيمات متعامدة
- **يرسم** الوجه الواقع في المستوي الأمامي بقياسه الحقيقي
- **يرسم** منتصف قطعة مستقيمة في منتصفها
- **ترسم** الخطوط المتقاطعة في الفراغ مستقيمات متقاطعة

والنقط الواقعة على استقامة واحدة على استقامة واحدة

$\left[\text{تدريب } \frac{1+2}{11}\right]$

2- قواعد التلاقي :

خواص :

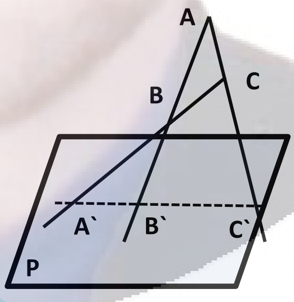
①- بثلاثة نقط A,B,C ليست على استقامة واحدة يمر مستو وحيد نرمز إليه **(A B C)**

②- اذا كانت B , A نقطتين من مستو وحيد p وقع كامل المستقيم **(AB) في p**

③- اذا تقاطع مستويان كان تقاطعهما مستقيماً نسميه فصلهما المشترك

ⵔ- نتيجة : لإثبات وقوع ثلاثة نقط على استقامة واحدة :

يكفي أن نثبت انتماء هذه النقاط معاً الى مستويين مختلفين .



مثال :

ABC مثلث ممددات اضلاعه تقطع المستوي P في النقط `A` , B` , C

- اثبت أن `A`, B` , C` تقع على استقامة واحدة .

الحل :

النقطة `A` تقع على المستوي ABC لأنها نقطة من المستقيم BC

وكذلك النقطتان `B` و `C` هما من المستوي ABC

اذا النقط `A` , B` , C` تنتمي الى المستوي ABC والى المستوى P فهي تنتمي الى تقاطعهما اي (فصلهما المشترك) فهي تقع على استقامة واحدة .

$\left[\text{تدريب } \frac{1+2}{13}\right]$

3- التوازي في الفراغ :

⊙- تعريف :

- **اذا وقع مستقيمان في مستو واحد ولم يشتركا بأية نقطة كانا متوازيان**
- **اذا لم يشترك مستويان بأية نقطة كانا متوازيان**
- **اذا لم يشترك مستقيم مع مستو بأية نقطة كانا متوازيان**

①- مبرهنة : المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان

②- مبرهنة : المستوي القاطع لأحد مستويين متوازيين يقطع الآخر ويكون الفصلان المشتركان متوازيين

③- مبرهنة : ليكن d و `d مستقيمين متوازيين وليكن P يحوي d و `P يحوي `d ولنفرض أن المستويين P و `P يتقاطعان بفصل مشترك △ عندئذ يوازي كلا من d و `d

④- مبرهنة : المستويان الموازيان لثالث متوازيان

⑤- مبرهنة : اذا وازى مستقيمان متقاطعان d_1 و d_2 محتويان في مستو P_1 على التوالي مستقيمين متقاطعين $d`_1$ و $d`_2$ محتويين في مستو P_2 عندئذ يكون المستويان P_1 و P_2 متوازيين .

⑥- مبرهنة : اذا كان d و `d مستقيمين متوازيين عندئذ يكون **المستقيم** d موازيا لكل مستو يحوي المستقيم `d

$\left[\text{تدريب } \frac{1+2+3}{16}\right]$

4- تعامد مستقيم ومستو :

ⵔ- تعريف : نقول إن مستقيم d عمودي على مستو P اذا كان d عمودياً على مستقيمين متقاطعين يحويهما المستوي P

①- مبرهنة : المستويان العموديان على المستقيم ذاته متوازيان .

②- مبرهنة : المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين عمودي على الآخر .

③- مبرهنة : المستقيمان العموديان على مستو واحد متوازيان .

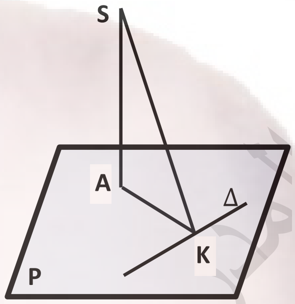
5- تعامد مستقيمين في الفراغ :

O- تعريف : نقول إن المستقيمين d و △ متعامدان ، اذا كان المستقيم `d المار بنقطة ما ( M ) موازياً d عمودياً على المستقيم `△ المار بالنقطة (M) ذاتها موازيا △

①- مبرهنة : اذا كان المستقيم d عمودي على المستوي P فهو عمودي على كل مستقيم △ محتوى في المستوي P

②- مبرهنة : كل مستقيم عمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر .

تمرين :



SA مستقيم عمودي على مستو P في A

Δ مستقيم في P ولا يمر من A

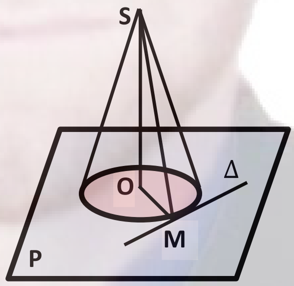
K المسقط القائم للنقطة A على Δ

برهن أن Δ عمود على المستوي SAK

الحل :

- **Δ عمودي على AK فرضاً**
- **Δ عمودي على SA لأن SA عمودي على المستوي P فهو عمودي على جميع مستقيماته ومنها Δ (مبرهنة)**
- **اذا Δ عمودي على المستوي SAK لأنه عمودي على المستقيمين المتقاطعين AK و SA من المستوي SAK (مبرهنة)**

تمرين :



ليكن C مخروطاً دورانياً رأسه S

O مركز قاعدته الواقعة في المستوي P

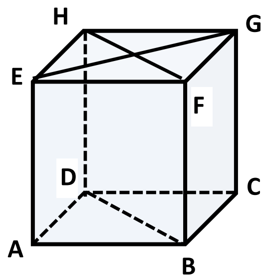
Δ مستقيم من المستوي P ويمس قاعدة المخروط في النقطة M

أثبت أن Δ عمودي على المولد SM

الحل :

- **Δ عمودي على OM لأن مماس الدائرة عمودي على نصف قطرها**
- **Δ عمودي على SO لأن SO عمودي على المستوي P فهو عمودي على جميع مستقيماته ومنها Δ (مبرهنة)**
- **اذا Δ عمودي على المستوي SOM لأنه عمودي على المستقيمين المتقاطعين OM و SO من المستوي SOM (مبرهنة)**
- **وبالتالي Δ عمودي على جميع مستقيمات المستوي SOM ومنها SM**

تمرين :



ليكن المكعب ABCDEFGH

أثبت أن المستقيم EG عمودي على المستوي DBFH

الحل :

- **EG عمودي على HF لأن قطرا المربع متعامدان**
- **المستقيم BF عمودي على المستوي EFGH فهو عمودي على جميع مستقيماته ومنها EG . اذاً EG عمود على FB**
- **وبما أن EG عمودي على المستقيمين المتقاطعين HF و FB اذا EG عمودي على المستوي DBHF**

تدريب 19

﴿ تمرينات الوحدة الأولى ﴾

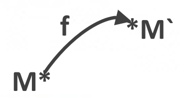
الوحدة الثانية:التحويلات الهندسية في المستوي

❶- التحويلات المألوفة في المستوي :

نسمي تحويلا ًمألوفاً كلا من (التناظر المحوري ، التناظر المركزي ، الإنسحاب ، الدوران)

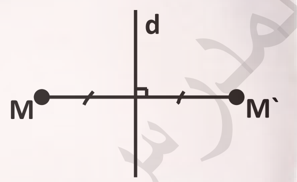
⊙- نرمز للتحويل الذي يقرن كل نقطة مثل M بالنقطة M\` من المستوي :

$f(M) = M`$ : ونقول أن M\` صورة M وفق التحويل f



❷- التناظر المحوري (الإنعكاس) :-

ان انعكاس النقطة M وفق المحور d هو النقطة M\` الذي يجعل المستقيم d محور للقطعة [ MM\`] نرمز له : $S_d(M) = M`$



⊙- نتائج :

●- اذا كانت M واقعة على d كان : $M = M`$

●- اذا كانت M\` صورة M وفق انعكاس فإن M\` صورة M وفق هذا الإنعكاس

●- اذا كان المستقيم $\Delta`$ نظير المستقيم $\Delta$ وفق انعكاس محوره d وكان $\Delta$ و $\Delta`$ متقاطعان في I فإن I تقع على محور التناظر d

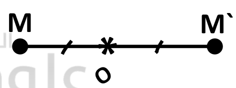
●- عندما تكون صورة شكل F وفق انعكاس محوره d هي الشكل ذاته نقول إن d محور تناظر للشكل F\`

فالقطران في المربع والمعين محورا تناظر لكل منهما

والإرتفاعات في المثلث المتساوي الأضلاع محاور تناظرية له .

❸- التناظر المركزي : S_O

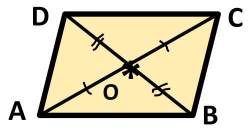
ان التحويل الذي مركزه O الذي يقرن النقطة M بالنقطة M\` التي تجعل النقطة O منتصف القطعة المستقيمة [ MM\`] يسمى تناظراً مركزياً مركزه O نرمز له بـ S_O



●- اذا كانت صورة شكل F وفق تناظر مركزي هي الشكل ذاته نقول أن O مركز التناظر الشكل F

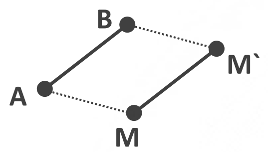
●- مركز الدائرة مركز تناظر لها

- ونقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع مركز تناظر له .



❹- الإنسحاب : $T_{A \to B}$

اذا كانت A , B نقطتين في المستوي نعرف الإنسحاب $T_{A \to B}$ بأنه التحويل الذي يقرن بنقطة M النقطة M\` التي تجعل الرباعي AMM\`B متوازي أضلاع .



●- اذا كانت M\` صورة M وفق انسحاب من A → B نرمز له

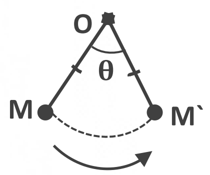
$T_{A \to B}(M) = M`$

❺- الدوران : $R_{O,\theta}$

الدوران الذي مركزه (O) وزاويته θ نرمز له $R_{O,\theta}$ هو التحويل الذي يقرن بنقطة M من المستوي النقطة M\` التي تحقق :

$OM` = OM$

$\widehat{MOM`} = \theta$



●- نلاحظ من الشكل أن OM ينطبق على OM\` بدوران زاويته θ

●- اذا كانت $0 < \theta$ يكون الدوران مباشر (بعكس عقارب الساعة)

●- اذا كانت $0 > \theta$ يكون الدوران غير مباشر (بجهة عقارب الساعة)

●- ان صورة (O) مركز الدوران هي (O) ذاتها .

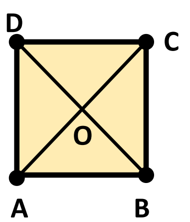
●- كل دوران زاويته ± 90 يدعى (ربع دورة)

☠ مثال :

في المربع ABCD الذي مركزه O

ⅰ- ربع دورة مباشرة مركزها O تنقل النقطة A الى B

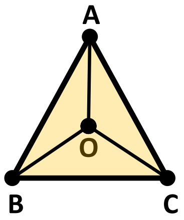
ⅱ- ربع دورة مباشرة مركزها A تنقل النقطة B الى D



☠ **مثال :**

في المثلث المتساوي الأضلاع ABC الذي مركزه O

- دوران $120°$ مباشرة مركزها O ينقل النقطة B الى C
- دوران $60°$ مباشرة مركزها A ينقل النقطة B الى C



[تدريب $\frac{1+2}{31}$]

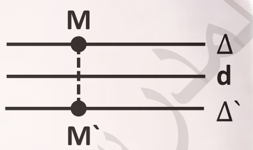
6- أثر التحويلات الهندسية على الشكال المألوفة :

①- صورة مستقيم وفق تحويل هندسي مألوف هو مستقيم .

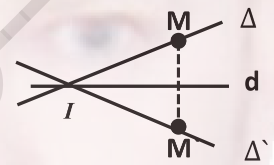
⊙- حالة الإنعكاس أو التناظرالمحوري :

اذا كان Δ` صورة المستقيم Δ وفق الإنعكاس S_d عندئذ نميز الحالات :

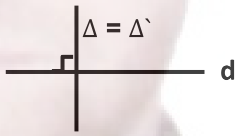
•- اذا كان Δ // d فإن Δ` // d



•- اذا تقاطع Δ مع d في I فالمستقيم Δ` يمر من $I$ وعندئذ يكون **منصفاً** لزاوية المستقيمين Δ و Δ`

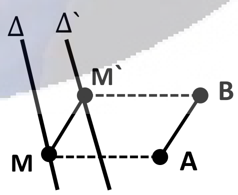


•- اذا كان d ⊥ Δ فإن Δ` = Δ

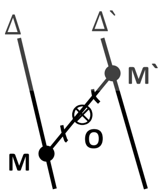


⊙- حالة التناظر المركزي أو الإنسحاب :

•- اذا كان المستقيم Δ` صورة المستقيم Δ وفق انسحاب $T_{A\to B}$ أو تناظر مركزي $S_O$ عند ئذ : Δ` // Δ و



(انسحاب من A الى B)



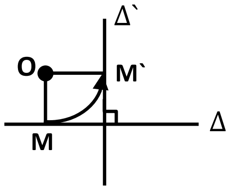
(تناظر مركزي)

•- اذا مر المستقيم Δ من مركز التناظر O فإن صورته هي Δ ذاته

⊙- حالة الدوران بربع دورة :

صورة المستقيم Δ وفق دوران ربع دورة هي المستقيم Δ` عمودي على Δ

Δ ⊥ Δ`



②- صورة دائرة C :

•- صورة الدائرة C مركزها O وفق تحويل مألوف هو دائرة C` **لها نصف القطر ذاته** ومركزها O` صورة O وفق التحويل ذاته

③- صورة قطعة مستقيمة :

صورة قطعة مستقيمة وفق تحويل مألوف هي **قطعة مستقيمة لها الطول ذاته .**

④- صورة نقطة تقاطع مستقيمين :

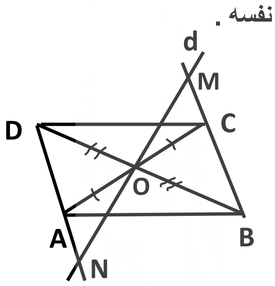
ليكن d ، Δ مستقيمين متقاطعين في M وليكن d` ، Δ` صورتي هذين المستقيمين على الترتيب وفق تحويل مألوف ، عندئذ يتقاطع d` ، Δ` في M` هي صورة النقطة M وفق التحويل ذاته .

☠ **مثال** : لاثبات أن لقطعتين مستقيمتين الطول نفسه .

ABCD متوازي أضلاع مركزه O

d مستقيم ماراً من بالنقطة O ويقطع AD في النقطة N ويقطع BC في النقطة M

اثبت أن : AN = CM



الحل :

بما أن ABCD فإن : $S_O(C) = A$ و $S_O(B) = D$

و صورة المستقيم BC هي المستقيم AD

وبما أن المستقيم d يمر من o فإن صورته وفق S_o هو المستقيم d نفسه

النقطة M نقطة تقاطع المستقيمين d و BC ومن ثم صورتها وفق S_O نقطة تقاطع المستقيمين d و AD وهي النقطة N

ولما كان { $S_O(C) = A$ و $S_O(M) = N$ } فإن صورة AN هي CM

اذاً : AN = CM

[تدريب $\frac{1+2+3}{34}$]

7- الخواص المشتركة للتحويلات المشتركة :

تشترك التحويلات المألوفة بالخواص الآتية :

①- المحافظة على خاصية الوقوع على استقامة واحدة .

اذا كانت النقط A , B , C على استقامة واحدة فإن صورها `A , `B , `C على استقامة واحدة .

②- المحافظة على توازي المستقيمات .

اذا كان المستقيمان d_1 , d_2 متوازيان كانت صورتاهما $d`_1$ , $d`_2$ متوازيتين

③- المحافظة على المسافات والمساحات .

صورة مثلث هي مثلث طبوق عليه .

صورة منطقة D هي منطقة `D لها المساحة ذاتها .

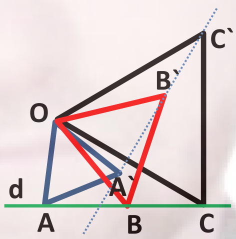
④- الحافظة على منتصف قطعة مستقيمة .

اذا كانت I منتصف قطعة مستقيمة [AB] فإن صورتها `I منتصف [ `A`B] صورة [AB] .

⑤- المحافظة على قياس الزوايا .

قياس الزاوية $\widehat{xay}$ يساوي قياس صورتها . وبوجه خاص عندما يكون d ، Δ متعامدين تكون صورتاهما `d ، `Δ متعامدين .

مثال : (لإثبات وقوع ثلاثة نقط على استقامة واحدة) :



لتكن A , B , C ثلاثة نقط من المستقيم d

ولتكن `AOA` , BOB` , COC مثلثات متساوية الأضلاع مشتركة بالنقط O في المستوي

أثبت أن `A` , B` , C واقعة على استقامة واحدة

الحل :

بما أن المثلثات متساوية الأضلاع نموذجية للدوران وتشترك بالرأس O

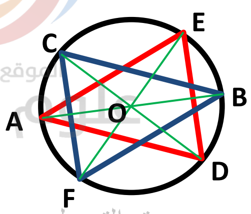
فإنه يمكننا أن نستعمل الدوران الذي مركزه O وزاويته 60° بالإتجاه المباشر

ينقل النقطة A الى `A و B الى `B و C الى `C

وبما أن النقط A , B , C تقع على مستقيم واحد d

فإن النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة

مثال : (لإثبات أن لمثلثين المساحة ذاتها) :



C دائرة مركزها O و AB , CD , EF ثلاثة أقطار لها .

أثبت أن المثلثين : AED , CFB متساويي المساحة

الحل :

بما أن النقطة O (مركز الدائرة) هو مركز تناظر للقطع AB , CD , EF فإن هذا التناظر المركزي S_O ينقل النقطة A الى B و النقطة D الى C و النقطة E الى F . وبذلك تكون صورة المثلث ADF وفق التناظر S_O هي المثلث BCF . ومنه المثلثين لهما المساحة ذاتها .

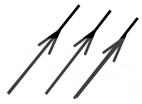
$$\left[\frac{1+2+3+4+5+6}{37}\text{تدريب}\right]$$

《 تمرينات الوحدة الثانية 》

الوحدة الثالثة : الأشعة والهندسة التحليلية

❶- مقدمة :

①- ان الإنسحاب الذي ينقل النقطة A الى B يسمى انسحاباً شعاعه $\overrightarrow{AB}$ بدايته A ونهايته B ، جهته من A الى B ، وطوله طول [AB] منحاه محدد بالمستقيم (AB) ، ويمكن تمثيل الشعاع $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$



②- يكون المستقيمان متوازيان اذا كان لهما المنحى ذاته .

③- يتساوى شعاعان اذا كان لهما المنحى ذاته ، والجهة ذاتها ، والطول ذاته .

④- يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع اذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ وبالعكس :

⑤- الشعاع الصفري $\vec{0}$: هو شعاع طويلته صفر $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$

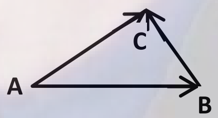
⑥- الشعاع المعاكس لشعاع $\overrightarrow{AB}$: هو الشعاع $\overrightarrow{BA}$ له طويلة $\overrightarrow{AB}$ وجهة معاكسة له ، ومنه يكون : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

$\left[\text{تدريب}\ \frac{1+2+3+4}{52}\right]$

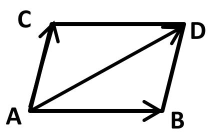
❷- جمع وطرح الأشعة :

① - جمع الأشعة المتعاقبة :



(علاقة شال) $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$

②- جمع شعاعين لهما المبدأ ذاته :



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

③- طرح الأشعة : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

⊙ - مثال : اثبت أنه اذا كانت النقط : O , A , B من المستوي ، فإن :

$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$

الحل :

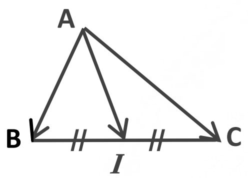
$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA})$

$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}$

$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$

⊙ - مثال : لتكن النقط A , B , C ثلاثة نقط من المستوي ، وليكن I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. أثبت أن : $2\,\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

الحل :



ان : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$

وكذلك : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}$

بالجمع : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI}$

ولكن: $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0}$ لأن I منتصف BC

اذاً : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\left[\text{تدريب}\ \frac{1}{54}\right]$

❸ - ضرب شعاع بعدد حقيقي :

جداء الشعاع $\vec{u}$ بالعدد الحقيقي k هو الشعاع : $k.\vec{u} = k\vec{u}$

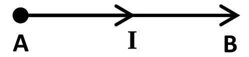
- الشعاعان $k\vec{u}$ ، $\vec{u}$ لهما الجهة ذاتها اذا كانت $k > 0$
- الشعاعان $k\vec{u}$ ، $\vec{u}$ بجهتان متعاكستان إذا كانت $k < 0$
- إذا كان $K.\vec{u} = 0$ فإن : $\vec{u} = 0$ أو $K = 0$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\,\vec{u} + k\vec{v}$
- $(K + K')\vec{u} = K\,\vec{u} + k'\vec{u}$
- $K.(K'.\vec{u}) = (k.K').\vec{u}$
- $1.\vec{u} = \vec{u}$

أمثلة :

- $2\,\overrightarrow{AB} - 5\,\overrightarrow{AB} = (2-5)\,\overrightarrow{AB} = -3\,\overrightarrow{AB}$
- $-3\,\overrightarrow{AB} = 3(-\overrightarrow{AB}) = 3\,\overrightarrow{BA}$
- $3\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{BC} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 3\,\overrightarrow{AC}$
- $-5 \times (\frac{2}{5}\vec{u}) = (-5 \times \frac{2}{5})\,\vec{u} = -2\,\vec{u}$

④- منتصف قطعة مستقيمة :

لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ فإنها تحقق :

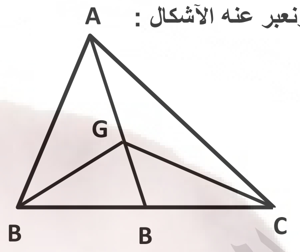


$\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AI}$ ، $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ، $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ ، $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

⑤- مركز ثقل المثلث ABC :

هو النقطة G وهو نقطة تلاقي متوسطاته ونعبر عنه الآشكال :

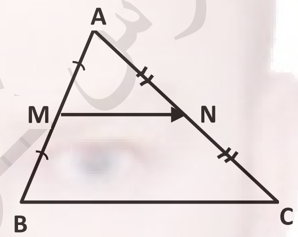


$\overrightarrow{GI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$ أو $\overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{GI}$

$\overrightarrow{GA} = -2\,\overrightarrow{GI}$ أو $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AI}$ أو $\overrightarrow{AI} = 3\,\overrightarrow{GI}$

⑥- القطعة المحدودة بين منتصفي ضلعين في مثلث :



$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$$

البرهان :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\\ &= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

$\left[\text{تدريب}\,\frac{1+2}{58}\right]$

⑦- الإرتباط الخطي :

نقول أن الشعاعان : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ، $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً

اذا وجد عدد حقيقيا k يحقق : $\vec{u} = k\,.\,\vec{v}$

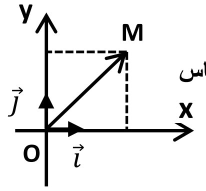
وهذا يكافئ أن المستقيمان : $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$ متوازيان أو منطبقان .

⊙- خواص :

- الشعاع الصفري مرتبط خطياً بأي شعاع لأن: $\vec{0} = 0\,.\,\vec{u}$
- يكون $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{CD}$ اذا تحقق الشرط : $\overrightarrow{AB} = K\,.\,\overrightarrow{CD}$
- تكون النقط A ، B ، C على استقامة واحدة اتحقق : $\overrightarrow{AB} = K\,.\,\overrightarrow{BC}$

$\left[\text{تدريب}\,\frac{1+2}{60}\right]$

⑧- مقدمة في الهندسة المستوية :



- نرمز للمعلم في مستوى بالشكل : $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
- نسمي O بالمبدأ
- نسمي $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ و $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ شعاعي الأساس
- نسمي المستقيم (OI) محور الفواصل
- نسمي المستقيم (OJ) محور التراتيب
- يوجد ثلاثة أنواع للمعالم (كيفي ، متعامد ، متجانس)

⑨- تعيين نقطة في المستوي :

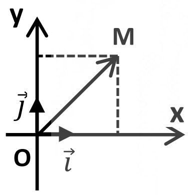
نقول إن (x, y) هما احداثيات النقطة M في معلم $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ اذا تحقق :

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ ونكتب $M(x, y)$

اذا كانت M على محور الفواصل فإن : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath}$

اذا كانت M على محور التراتيب فإن : $\overrightarrow{OM} = y\,\vec{\jmath}$

⑩- مركبتا شعاع في معلم :



اذا كانت M نقطة من معلم $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

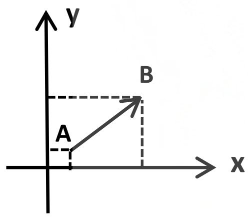
تحقق : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

نعبر عن ذلك :

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ أو $\vec{u}(x, y)$

نسمي : (x, y) مركبتا الشعاع $\vec{u}$

⑪- مركبتا شعاع بدلالة بدايته ونهايته :



تعطى مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بدلالة :

بدايته $A(x_a, y_a)$ ونهايته $B(x_b, y_b)$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}(x_b - x_a\,,\; y_b - y_a)}$$

ذلك لأن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$

⊙- يتساوى الشعاعان $\vec{u}(x, y)$ ، $\vec{v}(x`, y`)$

اذا كان : ($y = y`$ و $x = x`$)

⊙- جمع وطرح شعاعان : $\vec{u}(x, y)$ ، $\vec{v}(x`, y`)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x`)\,\vec{\imath} + (y + y`)\,\vec{\jmath}$$

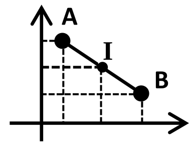
$$\vec{u} - \vec{v} = (x - x`)\,\vec{\imath} + (y - y`)\,\vec{\jmath}$$

⓬ - احداثيات منتصف قطعة مستقيمة :

لتكن النقطتين : $A(x_1, y_2)$ ، $B(x_2, y_2)$ تعطى احداثيات

النقطة $I(x, y)$ منتصف القطعة $[AB]$ بـ :

$$I\left(\frac{x_1 + X_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



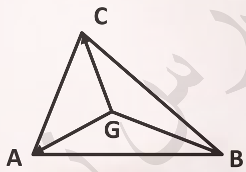
ذلك لأن : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

⓭- احداثيات مركز ثقل مثلث :

لتكن النقط : $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ تعطى احداثيات

النقطة $G(x, y)$ مركز ثقل المثلث ABC بـ

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$



ذلك لأن : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

⓮- الإرتباط الخطي :

يكون الشعاعان : $\vec{v}(x`, y`)$ ، $\vec{u}(x, y)$ مرتبطان خطياً اذا تحقق الشرط :

$$x . y` - y . x` = 0$$

●- تمرين : أثبت أن الشعاعان مرتبطان خطياً :

$\vec{u}(\sqrt{2}, \sqrt{3} + 1)$ ، $\vec{v}(\sqrt{3} - 1, \sqrt{2})$

الحل :

نحسـب : $x . y` - y . x` =$

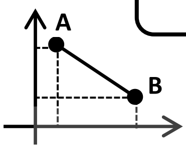
$= (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 - 2 = 0$

فالشعاعان مرتبطان خطيا بتحقق الشرط .

⓯ - المسافة بين نقطتين في معلم متجانس :

المسافة بين النقطتين : $B(x_2, y_2)$ ، $A(x_1, y_1)$ تعطى بالعلاقة :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



ذلك حسب مبرهنة فيثاغورث

$\left[\text{تدريب} \frac{1+2+3+4}{66}\right]$

﴾ تمرينات الوحدة الثالثة ﴿

الوحدة الرابعة : معادلة مستقيم و جمل المعادلات الخطية

❶- مقدمة :

⊙- المعادلة الخطية بمجهولين هي من الشكل : $ax + by = c$

وكل ثنائية (u , v) تحقق المساواة $a.u + b.v = c$ تسمى حل لها

•- مثال :

المعادلة : $2x + y = 5$ ← فالثنائية : $(1 , 3)$ حلاً لها

⊙- جملة معادلتين خطيتين بمجهولين من الشكل : $ax + by = c$

$a`x + b`y = c`$

وكل ثنائية (u , v) تحقق المساواة لكل من المعادلتين في آن واحد تسمى حلاً لجملة المعادلتين ، (وتمثل نقطة تقاطع الخطين البيانيين للمعادلتين)

•- مثال : لتكن جملة المعادلتين : $3x - 4y = 11$

$2x + 3y = 13$

تمثل الثنائية : $(5 , 1)$ حلا لجملة المعادلتين .

$\left[\text{تدريب} \frac{1+2}{78} \right]$

❷- التابع التآلفي :

⊙- ان التمثيل البياني للتابع التآلفي $y = f(x) = m x + p$ هو مستقيم d ، حيث m ميل المستقيم .

⊙- اذا كان المستقيم d يوازي محور التراتيب $yy`$ فإن معادلته : هي $x = c$ حيث C فاصلة نقاط المستقيم

⊙- اذا كان المستقيم d يوازي محور الفواصل $xx`$ فإن معادلته : هي $y = p$ حيث p ترتيب نقاط المستقيم

•- تمرين :

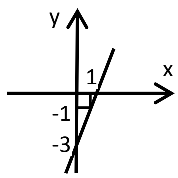
ليكن f تابع تآلفي المعرف بالصيغة $f(x) = 2x - 3$

أوجد : $f(1)$, $f(0)$ ثم ارسم المستقيم للممثل للتابع .

الحل :

$f(0) = 2(0) - 3 = -3$

$f(1) = 2(1) - 3 = -1$



❸- الشعاع الموجه لمستقيم وميل المستقيم :

⊙- نقول أن الشعاع $\vec{u}$ شعاعاً موجها للمستقيم d اذا كان منحى $\vec{u}$ موازياً للمستقيم أو منطبقاً عليه ، بحيث $(\vec{u} \neq 0)$

⊙- الشعاع الموجه للمستقيم $y = m x + p$ هو $\vec{u}(1 , m)$ أوبالعكس . بحيث m ميل المستقيم

•- مثال : $y = 3 x - 2$ معادلة مستقيم d ، الشعاع الموجه له هو : $u (1 , 3)$

•- مثال : $u (2 , 3)$ شعاع الموجه للمستقيم الذي معادلته $y = \frac{3}{2} x - 2$

⊙- مبرهنة : المستقيمان المتوازيان ميلاهما متساويان وبالعكس .

أي أن : $m = m` \iff d // d`$

⊙- ملاحظة :

اذا كان شعاع التوجيه يوازي محور التراتيب كان من الشكل $\vec{u}(0 , B)$

ومنه المستقيم d موازياً لمحور التراتيب ومعادلته : $x = c$

❹- معادلة مستقيم علم منه نقطة وشعاعاً موجهاً :

ليكن المستقيم d المار بالنقطة $A(X_0 , y_0)$ ويقبل شعاعاً موجهاً $\vec{u}(\alpha , \beta)$ فإن معادلة المستقيم هي من الشكل :

$$\boxed{\alpha (y - y_0) = \beta (x - x_0)}$$

أو : $(y - y_0) = m (x - x_0)$

بشرط الشعاع الموجه هو : $\vec{u}(1 , m)$

•- تمرين :

اكتب معادلة مستقيم d المار بالنقطة $A(2 , 3)$ يقبل شعاعاً موجها $u(4 , 5)$

الحل :

نعوض في المعادلة : $\alpha (y - y_0) = \beta (x - x_0)$

نجد $4 (y - 3) = 5 (x - 2)$

ومنه المعادلة : $y = \frac{5}{4} x - \frac{1}{2}$

⑤- معادلة مستقيم يمر بنقطتين : $A(x_1 , y_1)$, $B(x_2 , y_2)$

$$\boxed{(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)}$$

أو $(y - y_1) = m(x - x_2)$

بحيث : $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

●- تمرين :

اكتب معادلة مستقيم d المار بالنقطتين $A(2 , 3)$ ، $B(4 , 5)$

الحل :

نعوض في : $(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$

نجد : $(4 - 2)(y - 3) = (5 - 3)(x - 2)$

ومنه المعادلة : $y = x + 1$

$\left[\text{تدريب} \dfrac{1+2+3+4+5}{84} \right]$

⑥- حل جملة معادلتين خطيتين بمجهولين :

$d_1 : \quad ax + by = c$

$d_2 : \quad a`x + b`y = c`$

لدينا ثلاثة حالات :

①- اذا كان : $a b` - a`b \neq 0$ أو $\dfrac{a}{a`} \neq \dfrac{b}{b`}$ أي $m \neq m`$

للمعادلتين حلاً وحيداً مشتركاً والمستقيمان d_1 , d_2 متقاطعان

②- اذا كان : $a b` - a`b = 0$ أو $\dfrac{a}{a`} = \dfrac{b}{b`} \neq \dfrac{c}{c`}$ أي $m = m`$

ليس لجملة المعادلتين حلاً مشتركاً والمستقيمان d_1 , d_2 متوازيان

③- اذا كان : $a b` - a`b = 0$ أو $\dfrac{a}{a`} = \dfrac{b}{b`} = \dfrac{c}{c`}$ أي $m = m`$

لجملة المعادلتين عدد غير منته من الحلول و المستقيمان d_1 , d_2 منطبقان

⊙- نحل جمل المعادلتين بأحدى الطريقتين :

- طريقة الحذف بالتعويض :
- طريقة توحيد الأمثال :

●- تمرين :

حل جمل المعادلتين :

$5x + 3y = 5$

$2x - 3y = 2$

الحل :

نلاحظ : $\dfrac{5}{2} \neq \dfrac{3}{-3}$ أي $\dfrac{a}{a`} \neq \dfrac{b}{b`}$ للجملة حل وحيداً

بجمع المعادلتين نجد : $7x = 7$ ومنه $x = 1$

نعوض في احد المعادلتين نجد : $y = 0$ فالحل المشترك $(1 , 0)$

●- تمرين :

حل جمل المعادلتين :

$4x + 6y = 5$

$6x + 9y = 7$

الحل :

نلاحظ : $\dfrac{4}{6} = \dfrac{6}{9} \neq \dfrac{5}{7}$ أي $\dfrac{a}{a`} = \dfrac{b}{b`} \neq \dfrac{c}{c`}$ فالجملة

مستحيلة الحل والمستقيمان متوازيان وغير منطبقان

●- تمرين :

حل جمل المعادلتين :

$4x + 6y = 2$

$6x + 9y = 3$

الحل :

نلاحظ : $\dfrac{4}{6} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$ أي $\dfrac{a}{a`} = \dfrac{b}{b`} = \dfrac{c}{c`}$ فللجملة

عدد غير منته من الحلول والمستقيمان منطبقان

❰ تمرينات الوحدة الرابعة ❱