السؤال الأول:

$\alpha = e^{\frac{2\pi}{7}i}$ و $A = \alpha + \alpha^6$ و $B = \alpha^2 + \alpha^5$ و $C = \alpha^3 + \alpha^4$

1) المقدار $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^6$ هو مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = \alpha$ وحدها الأول 1

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^6 = a\frac{1-q^7}{1-q} = \frac{1-\alpha^7}{1-\alpha}$$

لدينا $\alpha^7 = \left(e^{\frac{2\pi}{7}i}\right)^7 = e^{2\pi i} = 1$ وبالتالي:

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^6 = \frac{1-1}{1-\alpha} = 0$$

2) $(1)\ x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$

نعوض A فنجد: $(\alpha+\alpha^6)^3 + (\alpha+\alpha^6)^2 - 2(\alpha+\alpha^6) - 1$

$$= \alpha^3 + 3\alpha^2\alpha^6 + 3\alpha\alpha^{12} + \alpha^{18} + \alpha^2 + 2\alpha\alpha^6 + \alpha^{12} - 2\alpha - 2\alpha^6 - 1$$
$$= \alpha^3 + 3\alpha^2\alpha^6 + 3\alpha\alpha^{12} + \alpha^{18} + \alpha^2 + 2\alpha\alpha^6 + \alpha^{12} - 2\alpha - 2\alpha^6 - 1$$
$$= \alpha^3 + 3\alpha^8 + 3\alpha^{13} + \alpha^{18} + \alpha^2 + 2\alpha^7 + \alpha^{12} - 2\alpha - 2\alpha^6 - 1$$
$$= \alpha^3 + 3\alpha\alpha^7 + 3\alpha^6\alpha^7 + \alpha^4(\alpha^7)^2 + \alpha^2 + 2\alpha^7 + \alpha^5\alpha^7 - 2\alpha - 2\alpha^6 - 1$$
$$= \alpha^3 + 3\alpha + 3\alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 + 2 + \alpha^5 - 2\alpha - 2\alpha^6 - 1$$
$$= \alpha^3 + \alpha + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 + 2 + \alpha^5 - 1 = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0$$

وبالتالي A حل للمعادلة (1)

نعوض B فنجد: $(\alpha^2+\alpha^5)^3 + (\alpha^2+\alpha^5)^2 - 2(\alpha^2+\alpha^5) - 1$

$$= \alpha^6 + 3\alpha^4\alpha^5 + 3\alpha^2\alpha^{10} + \alpha^{15} + \alpha^4 + 2\alpha^2\alpha^7 + \alpha^{10} - 2\alpha^2 - 2\alpha^5 - 1$$
$$= \alpha^6 + 3\alpha^9 + 3\alpha^{12} + \alpha^{15} + \alpha^4 + 2\alpha^7 + \alpha^{10} - 2\alpha^2 - 2\alpha^5 - 1$$
$$= \alpha^6 + 3\alpha^2\alpha^7 + 3\alpha^5\alpha^7 + \alpha(\alpha^7)^2 + \alpha^4 + 2\alpha^7 + \alpha^3\alpha^7 - 2\alpha^2 - 2\alpha^5 - 1$$
$$= \alpha^6 + 3\alpha^2 + 3\alpha^5 + \alpha + \alpha^4 + 2 + \alpha^3 - 2\alpha^2 - 2\alpha^5 - 1$$
$$= \alpha^6 + \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha + \alpha^4 + 2 + \alpha^3 - 1 = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0$$

وبالتالي B حل للمعادلة (1)

نعوض C فنجد: $(\alpha^3+\alpha^4)^3 + (\alpha^3+\alpha^4)^2 - 2(\alpha^3+\alpha^4) - 1$

$$= \alpha^9 + 3\alpha^6\alpha^4 + 3\alpha^3\alpha^8 + \alpha^{12} + \alpha^6 + 2\alpha^3\alpha^4 + \alpha^8 - 2\alpha^3 - 2\alpha^4 - 1$$
$$= \alpha^9 + 3\alpha^{10} + 3\alpha^{11} + \alpha^{12} + \alpha^6 + 2\alpha^7 + \alpha^8 - 2\alpha^3 - 2\alpha^4 - 1$$
$$= \alpha^2\alpha^7 + 3\alpha^3\alpha^7 + 3\alpha^4\alpha^7 + \alpha^5\alpha^7 + \alpha^6 + 2\alpha^7 + \alpha\alpha^7 - 2\alpha^3 - 2\alpha^4 - 1$$
$$= \alpha^2 + 3\alpha^3 + 3\alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 + 2 + \alpha - 2\alpha^3 - 2\alpha^4 - 1$$
$$= \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 + 2 + \alpha - 1 = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0$$

وبالتالي C حل للمعادلة (1)

3) $$A=\alpha+\alpha^6=e^{\frac{2\pi}{7}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{7}i}\right)^6=e^{\frac{2\pi}{7}i}+e^{\frac{12\pi}{7}i}$$

$$A=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}+i\sin\frac{12\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}+\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$A=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7}=2\cos\frac{2\pi}{7}>0$$

$$B=\alpha^2+\alpha^5=\left(e^{\frac{2\pi}{7}i}\right)^2+\left(e^{\frac{2\pi}{7}i}\right)^5=e^{\frac{4\pi}{7}i}+e^{\frac{10\pi}{7}i}$$

$$B=\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+i\sin\frac{10\pi}{7}$$

$$B=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi+\frac{3\pi}{7}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$B=-\cos\frac{3\pi}{7}+i\sin\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-i\sin\frac{3\pi}{7}=-2\cos\frac{3\pi}{7}<0$$

$$C=\alpha^3+\alpha^4=\left(e^{\frac{2\pi}{7}i}\right)^3+\left(e^{\frac{2\pi}{7}i}\right)^4=e^{\frac{6\pi}{7}i}+e^{\frac{8\pi}{7}i}$$

$$C=\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+i\sin\frac{8\pi}{7}$$

$$C=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)$$

$$C=-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{\pi}{7}<0$$

وبالتالي الحل الوحيد الموجب للمعادلة (1) هو $A=2\cos\frac{2\pi}{7}$

السؤال الثاني:

$$P(z)=z^4+4z^3+19z^2+30z+50$$

1) $$P(z)=(z^2+az+b)(z^2+az+2b)$$

$$P(z)=z^4+az^3+2bz^2+az^3+a^2z^2+2abz+bz^2+abz+2b^2$$

$$P(z)=z^4+2az^3+(a^2+3b)z^2+3abz+2b^2$$

بالمطابقة نجد
$$\begin{pmatrix} 2a=4 & (1)\\ a^2+3b=19 & (2)\\ 3ab=30 & (3)\\ 2b^2=50 & (4)\end{pmatrix}$$

من (1) نجد $a=2$ نعوض في (2) فنجد $4+3b=19$ أي أن $b=5$

للتأكد نعوض في (3) فنجد $3(2)(5)=30$ محققة وفي (4) فنجد $2(5)^2=50$ محققة

$$P(z)=(z^2+2z+5)(z^2+2z+10)$$

2) المعادلة $P(z)=0$ تكافئ $(z^2+2z+5)(z^2+2z+10)=0$

إما $z^2+2z+5=0$

$$\Delta=b^2-4ac=4-4(1)(5)=4-20=-16$$

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i$$

$$z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2-4i}{2}=-1-2i$$

أو $z^2+2z+10=0$

$$\Delta=b^2-4ac=4-4(1)(10)=4-40=-36$$

$$z_3=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i$$

$$z_4=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2-6i}{2}=-1-3i$$

السؤال الثالث:

$$z^2-(1+3i)z-4+3i=0$$

1) $\omega=8-6i$

$$(1)\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$

$$(2)\ x^2-y^2=a=8$$

$$(3)\ 2xy=b=-6$$

بجمع (1) و (2) نجد $2x^2=18$ أي $x^2=9$ وبالتالي $x=\pm3$

بطرح (1) و (2) نجد $2y^2=2$ أي $y^2=1$ وبالتالي $y=\pm1$

وبما أن $xy<0$ فإن الجذور التربيعية للعدد ω هي $3-i$ و $-3+i$

2) $z^2-(1+3i)z-4+3i=0$

$$\Delta=(1+3i)^2-4(1)(-4+3i)=1+6i-9+16-12i=8-6i=\omega$$

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+3i+3-i}{2}=\frac{4+2i}{2}=2+i$$

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+3i-3+i}{2}=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i$$

3) $$\frac{b}{a}=\frac{-1+2i}{2+i}=\frac{(-1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{-2+i+4i+2}{4+1}=\frac{5i}{5}=i$$

لدينا $\left|\frac{b}{a}\right|=|i|=1$ أي $OA=OB$ و $\arg\frac{b}{a}=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ أي $OA\perp OB$

وبالتالي المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين.

السؤال الرابع:

$$Z=\frac{1+z}{2+z}$$

1) $$X+iY=\frac{1+x+iy}{2+x+iy}=\frac{(1+x+iy)(2+x-iy)}{(2+x+iy)(2+x-iy)}$$

$$X+iY=\frac{2+x-iy+2x+x^2-ixy+2yi+ixy+y^2}{(2+x)^2+y^2}$$

$$X+iY=\frac{x^2+y^2+3x+2}{(2+x)^2+y^2}+i\frac{y}{(2+x)^2+y^2}$$

وبالتالي $X=\frac{x^2+y^2+3x+2}{(2+x)^2+y^2}$ و $Y=\frac{y}{(2+x)^2+y^2}$

2) يكون Z حقيقي إذا كان $Y=0$ أي $\frac{y}{(2+x)^2+y^2}=0$ أي $y=0$

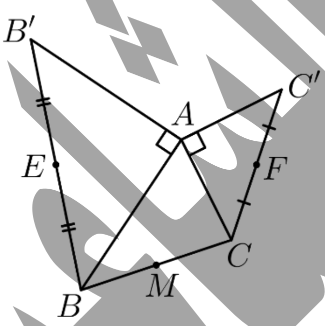
وهي معادلة مستقيم أفقي محذوف منه النقطة $(-2,0)$

3) يكون Z تخيلي بحت إذا كان $X=0$ أي $\frac{x^2+y^2+3x+2}{(2+x)^2+y^2}=0$ أي $x^2+y^2+3x+2=0$

$x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+2=0$ أي $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$

وهي معادلة دائرة مركزها $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ ونصف قطرها $R=\frac{1}{2}$ محذوف منها النقطة $(-2,0)$

السؤال الخامس:



1) في المثلث القائم والمتساوي الساقين ACC'

C' صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه الصيغة العقدية للدوران:

$$c'-a=e^{\frac{\pi}{2}i}(c-a) \text{ أي } c'=ic$$

في المثلث القائم والمتساوي الساقين ABB'

B' صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ومنه الصيغة العقدية للدوران:

$$b'-a=e^{-\frac{\pi}{2}i}(b-a) \text{ أي } b'=-ib$$

$$\frac{c'-b}{b'-c}=\frac{ic-b}{-ib-c}=\frac{(ic-b)(ib-c)}{(-ib-c)(ib-c)}=\frac{-bc-ic^2-ib^2+bc}{b^2+c^2}=\frac{-i(c^2+b^2)}{b^2+c^2}=-i$$

2) لدينا $\left|\frac{c'-b}{b'-c}\right|=|-i|=1$ أي $BC'=CB'$

و $\arg\left(\frac{c'-b}{b'-c}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$ أي المستقيمين (BC') و (CB') متعامدين.

3) M منتصف $[BC]$ أي أن $m=\frac{b+c}{2}=\frac{1}{2}(b+c)$

E منتصف $[BB']$ أي أن $e=\frac{b+b'}{2}=\frac{b-ib}{2}=\frac{1}{2}b(1-i)$

F منتصف $[CC']$ أي أن $f=\frac{c+c'}{2}=\frac{c+ic}{2}=\frac{1}{2}c(1+i)$

4) $$\frac{e-m}{f-m}=\frac{\frac{1}{2}b(1-i)-\frac{1}{2}(b+c)}{\frac{1}{2}c(1+i)-\frac{1}{2}(b+c)}=\frac{b-ib-b-c}{c+ic-b-c}=\frac{-ib-c}{-b+ic}=\frac{-ib+i^2c}{-b+ic}=\frac{i(-b+ic)}{-b+ic}=i$$

لدينا $\left|\frac{e-m}{f-m}\right|=|i|=1$ أي $ME=MF$ و $\arg\left(\frac{e-m}{f-m}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ أي $ME\perp MF$

وبالتالي المثلث EFM قائم ومتساوي الساقين

انتهى حل النموذج الأول

الأعداد العقدية وتطبيقاتها

السؤال الأول:

$$Z=\frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}$$

1) $$z_1=-1+i$$

لدينا $|z_1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ و $\cos\theta_1=\frac{x}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\theta_1=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ وبالتالي $\theta_1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

ومنه الشكل المثلثي للعدد العقدي z_1 هو $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$$z_2=\sqrt{3}+i$$

لدينا $|z_2|=\sqrt{3+1}=2$ و $\cos\theta_2=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta_2=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$ وبالتالي $\theta_2=\frac{\pi}{6}$

ومنه الشكل المثلثي للعدد العقدي z_2 هو $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

2) لدينا $|Z|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

و $\arg Z=\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{9\pi-2\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}$

وبالتالي الشكل المثلثي للعدد العقدي Z هو $Z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

والشكل الجبري للعدد العقدي Z هو:

$$Z=\frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(-1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{-\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}+1}{3+1}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

3) $$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{x_Z}{r_Z}=\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{y_Z}{r_Z}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{7\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$$

أيهم الشاعر

السؤال الثاني:

$$P(z)=z^3+(2-3i)z^2+(10-6i)z-30i$$

1) $$P(3i)=(3i)^3+(2-3i)(3i)^2+(10-6i)(3i)-30i$$

$$P(3i)=-27i+(2-3i)(-9)+(10-6i)(3i)-30i$$

$$P(3i)=-27i-18+27i+30i+18-30i=0$$

وبالتالي $z_0=3i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$

2)

$$\begin{array}{r|l} & z^2+2z+10 \\ \hline z-3i & z^3+(2-3i)z^2+(10-6i)z-30i \\ & \ominus z^3 \quad \underset{-}{\oplus} 3iz^2 \\ \hline & 2z^2 \quad +(10-6i)z-30i \\ & \ominus 2z^2 \quad \underset{-}{\oplus} 6iz \\ \hline & 10z \quad -30i \\ & \ominus 10z \quad \underset{-}{\oplus} 30i \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$P(z)=(z-3i)Q(z)=(z-3i)(z^2+2z+10)$$

$$P(z)=0$$

$$(z-3i)(z^2+2z+10)=0$$

إما $z_0=3i$

أو $z^2+2z+10=0$

$$\Delta=b^2-4ac=4-4(1)(10)=4-40=-36$$

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i$$

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2-6i}{2}=-1-3i$$

3) $$\Omega A=\left|3i+\frac{1}{2}\right|=\sqrt{9+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{37}{4}}=\frac{\sqrt{37}}{2}$$

$$\Omega B=\left|-1+3i+\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}+3i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+9}=\sqrt{\frac{37}{4}}=\frac{\sqrt{37}}{2}$$

$$\Omega C=\left|-1-3i+\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}-3i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+9}=\sqrt{\frac{37}{4}}=\frac{\sqrt{37}}{2}$$

$$\Omega A=\Omega B=\Omega C$$

وبالتالي النقاط A و B و C تقع على دائرة مركزها $\Omega\left(-\frac{1}{2},0\right)$ نصف قطرها $R=\frac{\sqrt{37}}{2}$

__السؤال الثالث:__

$$a=i \text{ و } b=-2-2i \text{ و } c=3-i$$

1) الشكل الجبري $\frac{b-a}{c-a}=\frac{-2-2i-i}{3-i-i}=\frac{-2-3i}{3-2i}=\frac{(-2-3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{-6-4i-9i+6}{9+4}=\frac{-13i}{13}=-i$

الشكل الأسي $\frac{b-a}{c-a}=e^{-\frac{\pi}{2}i}$

2) لدينا $\left|\frac{b-a}{c-a}\right|=\left|-i\right|=1$ أي $AB=AC$ و $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$ أي $AB\perp AC$

أي أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

3) وبالتالي ليكون الرباعي $BACA'$ مربع يكفي أن يكون متوازي أضلاع

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA'}$$

$$b-a=a'-c$$

$$a'=c+b-a=3-i-2-2i-i=1-4i$$

__السؤال الرابع:__

1) $$\overline{Z}=\overline{\left(\frac{w+z}{1-wz}\right)}=\frac{\overline{w}+\overline{z}}{1-\overline{w}\overline{z}}$$

بما أن طويلة z تساوي الواحد فإن $z\overline{z}=\left|z\right|^2=1$ أي $\overline{z}=\frac{1}{z}$

و بما أن طويلة w تساوي الواحد فإن $w\overline{w}=\left|w\right|^2=1$ أي $\overline{w}=\frac{1}{w}$

وبالتالي $\overline{Z}=\frac{\frac{1}{w}+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{w}\frac{1}{z}}=\frac{\frac{z+w}{wz}}{\frac{wz-1}{wz}}=\frac{z+w}{wz-1}=-\frac{z+w}{1-wz}=-Z$

أي أن Z تخيلي بحت

2) $$z=e^{i\frac{\pi}{5}} \text{ و } w=e^{i\frac{4\pi}{5}}$$

$$Z=\frac{w+z}{1-wz}=\frac{e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{\pi}{5}}}{1-e^{i\frac{4\pi}{5}}e^{i\frac{\pi}{5}}}=\frac{e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{\pi}{5}}}{1-e^{i\pi}}=\frac{e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{\pi}{5}}}{1-(-1)}=\frac{e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{\pi}{5}}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{\pi}{5}}\right)$$

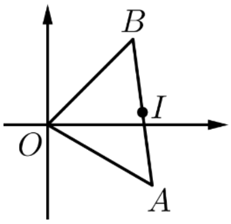
$$Z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

$$Z=\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\left(2i\sin\frac{\pi}{5}\right)=i\sin\frac{\pi}{5}$$

السؤال الخامس:

$a=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ و $b=2e^{\frac{\pi}{4}i}$ و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

1) $$a=2e^{-\frac{\pi}{6}i}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-i$$



أي $A(\sqrt{3},-1)$

$$b=2e^{\frac{\pi}{4}i}=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

أي $B(\sqrt{2},\sqrt{2})$

بما أن $|a|=|b|=2$ أي أن $OA=OB$

وبالتالي المثلث OAB متساوي الساقين

2) $$(\vec{u},\overrightarrow{OI})=(\vec{u},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})$$

بما أن I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ فإن OI متوسط في مثلث متساوي الساقين فهو منصف

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(\arg b-\arg a)$$

وبالتالي $$(\vec{u},\overrightarrow{OI})=(\vec{u},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})=\arg a+\frac{1}{2}(\arg b-\arg a)$$

$$(\vec{u},\overrightarrow{OI})=\frac{1}{2}\arg a+\frac{1}{2}\arg b=\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{24}$$

3) الشكل الجبري: $$z_I=\frac{a+b}{2}=\frac{\sqrt{3}-i+\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$|z_I|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6}+2}{4}+\frac{2-2\sqrt{2}+1}{4}}=\sqrt{\frac{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{2}$$

ومنه الشكل المثلثي: $$z_I=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)$$

4) $$\cos\frac{\pi}{24}=\frac{x_I}{r_I}=\frac{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}$$

$$\sin\frac{\pi}{24}=\frac{y_I}{r_I}=\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}{\frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}$$

انتهى حل النموذج الثاني

الأعداد العقدية وتطبيقاتها

السؤال الأول:

$$Z=(2\sqrt{3}i-2)^5\left(\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\right)$$

1) نفرض $z_1=(2\sqrt{3}i-2)^5$ و $w=2\sqrt{3}i-2$

لدينا $r_w=\sqrt{12+4}=4$ و $\cos\theta_w=\frac{x}{r}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$ و $\sin\theta_w=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي $\theta_w=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

أي $w=4e^{\frac{2\pi}{3}i}$

وبالتالي $z_1=w^5=\left(4e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^5=1024e^{\frac{10\pi}{3}i}$

2) $z_2=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}=e^{\frac{3\pi}{10}i}$

3) وبالتالي يكون $Z=1024e^{\frac{10\pi}{3}i}.e^{\frac{3\pi}{10}i}=1024e^{\left(\frac{10\pi}{3}+\frac{3\pi}{10}\right)i}=1024e^{\frac{109\pi}{30}i}=1024e^{-\frac{11\pi}{30}i}$

السؤال الثاني:

$$z=2-i$$

1) العدد العقدي a الذي يمثل النقطة A صورة M وفق تحاكي مركزه O ونسبته $k=-2$

الصيغة العقدية للتحاكي $a-o=k(z-o)$

$$a=-2z=-2(2-i)=-4+2i$$

2) العدد العقدي b الذي يمثل النقطة B صورة M وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{4}$

الصيغة العقدية للدوران $b-a=e^{-\frac{\pi}{4}i}(z-a)$

$$b=e^{-\frac{\pi}{4}i}(z-a)+a=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2-i+4-2i)-4+2i$$

$$b=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(6-3i)-4+2i=3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i-\frac{3\sqrt{2}}{2}-4+2i$$

$$b=\frac{3\sqrt{2}-8}{2}+i\frac{4-9\sqrt{2}}{2}$$

3) العدد العقدي c الذي يمثل النقطة C التي تجعل M مركز ثقل المثلث ABC

$$z=\frac{a+b+c}{3}$$

$$c=3z-a-b=3(2-i)-(-4+2i)-\left(\frac{3\sqrt{2}-8}{2}+i\frac{4-9\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$c=\left(6+4-\frac{3\sqrt{2}-8}{2}\right)+i\left(-3-2-\frac{4-9\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{28-3\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(\frac{9\sqrt{2}-14}{2}\right)$$

السؤال الثالث:

$$Z=\frac{-2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}+i}$$

1) $$|Z|=\left|\frac{-2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}+i}\right|=\frac{\left|-2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right|}{\left|\sqrt{3}+i\right|}=\frac{|-2|.\left|e^{i\frac{3\pi}{4}}\right|}{\left|\sqrt{3}+i\right|}=\frac{2}{\sqrt{3+1}}=\frac{2}{2}=1$$

$$\arg Z=\arg\left(\frac{-2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}+i}\right)=\arg\left(-2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)-\arg\left(\sqrt{3}+i\right)=\arg(-2)+\arg\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)-\arg\left(\sqrt{3}+i\right)$$

نفرض $w=\sqrt{3}+i$ فيكون $r=2$ و $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta=\frac{1}{2}$ فإن $\frac{\pi}{6}$ وبالتالي

$$\arg Z=\pi+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{19\pi}{12}$$

$$Z=\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}$$

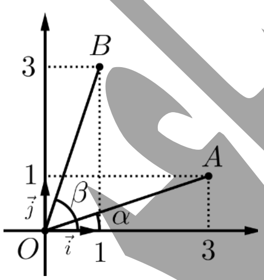
2) $$Z=\frac{-2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}+i}=\frac{-2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{3}+i}=\frac{-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}$$

$$Z=\frac{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}-i\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3+1}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$\cos\frac{19\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{19\pi}{12}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

السؤال الرابع:

1) لدينا $A(3,1)$ و $B(1,3)$ وبالتالي $a=3+i$ و $b=1+3i$ أي:



$$z=a.b=(3+i)(1+3i)=3+9i+i-3=10i$$

2) $$\alpha+\beta=\arg a+\arg b=\arg(ab)=\arg(10i)=\frac{\pi}{2}$$

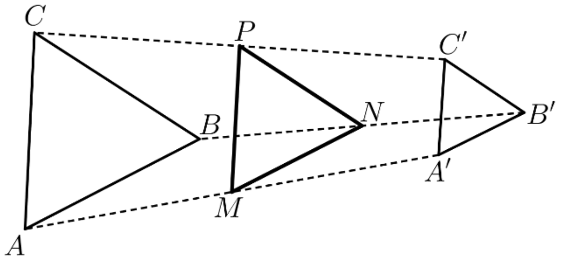
3) لدينا $r_a=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ ومنه $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$ و $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$

و $r_b=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ ومنه $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$ و $\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$$\cos A\hat{O}B=\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\cos(\beta-\alpha)$$

$$\cos A\hat{O}B=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}.\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}.\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

السؤال الخامس:



1) في المثلث المتساوي الأضلاع ABC لدينا

C صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ومنه الصيغة العقدية للدوران $c-a=e^{\frac{\pi}{3}i}(b-a)$

وفي المثلث المتساوي الأضلاع $A'B'C'$ لدينا C' صورة B' وفق دوران مركزه A' وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ومنه الصيغة العقدية للدوران $c'-a'=e^{\frac{\pi}{3}i}(b'-a')$

2) $$p-m \overset{?}{=} e^{\frac{\pi}{3}i}(n-m)$$

$$p-m=\frac{c+c'}{2}-\frac{a+a'}{2}=\frac{1}{2}(c+c'-a-a')=\frac{1}{2}\left((c-a)+(c'-a')\right)$$

$$p-m=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{3}i}(b-a)+e^{\frac{\pi}{3}i}(b'-a')\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}i}\left((b-a)+(b'-a')\right)$$

$$p-m=e^{\frac{\pi}{3}i}\left(\frac{(b+b')-(a+a')}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{3}i}\left(\frac{b+b'}{2}-\frac{a+a'}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{3}i}(n-m)$$

3) وبالتالي نجد أن P صورة N وفق دوران مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{3}$

أي أن المثلث MNP متساوي الأضلاع.

انتهى حل النموذج الثالث

الأعداد العقدية وتطبيقاتها

السؤال الأول:

$$Z=(1+\sqrt{3}i)^6+(1-\sqrt{3}i)^6$$

(1
$$z_1=1+\sqrt{3}i$$

$r_1=\sqrt{1+3}=2$ و $\cos\theta_1=\dfrac{1}{2}$ و $\sin\theta_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$ وبالتالي $z_1=2e^{\frac{\pi}{3}i}$

وبالتالي نستنتج أن $z_2=\overline{z_1}=\overline{2e^{\frac{\pi}{3}i}}=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

(2
$$(z_1)^6=\left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^6=64e^{2\pi i}=64$$

$$(z_2)^6=\left(2e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^6=64e^{-2\pi i}=64$$

$$Z=(1+\sqrt{3}i)^6+(1-\sqrt{3}i)^6=64+64=128$$

وبالتالي العدد Z عدد حقيقي

السؤال الثاني:

$\theta\in\mathbb{R}\setminus(1+2k)\pi$ حيث $Z=\dfrac{1-\cos\theta-i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$

$$Z=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$Z=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$Z=2\tan\frac{\theta}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$Z=2\tan\frac{\theta}{2}\left(\frac{e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)i}}{e^{-\frac{\theta}{2}i}}\right)=2\tan\frac{\theta}{2}e^{\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)i}=2\tan\frac{\theta}{2}e^{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)i}$$

يكون Z حقيقي إذا كان $\theta-\dfrac{\pi}{2}=2\pi k$ أي أن $\theta=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$

السؤال الثالث:

$$a=-1+3i \text{ و } b=1-i \text{ و } c=-3+i$$

1) $$g=\frac{a+b+c}{3}=\frac{-1+3i+1-i-3+i}{3}=\frac{-3+3i}{3}=-1+i$$

2) $$m=\frac{a+b}{2}=\frac{-1+3i+1-i}{2}=\frac{2i}{2}=i$$

$$n=\frac{a+c}{2}=\frac{-1+3i-3+i}{2}=\frac{-4+4i}{2}=-2+2i$$

$$p=\frac{b+c}{2}=\frac{1-i-3+i}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

3) نفرض g' العدد العقدي الممثل للنقطة G' مركز ثقل المثلث MNP

$$g'=\frac{m+n+p}{3}=\frac{i-2+2i-1}{3}=\frac{-3+3i}{3}=-1+i=g$$

وبالتالي للمثلثين ABC و MNP مركز الثقل ذاته.

السؤال الرابع:

$$a=-3-2i \text{ و } b=4-i \text{ و } c=5+6i \text{ و } d=5+2i$$

1) $$\frac{d-a}{b-a}=\frac{5+2i+3+2i}{4-i+3+2i}=\frac{8+4i}{7+i}=\frac{(8+4i)(7-i)}{(7+i)(7-i)}=\frac{56-8i+28i+4}{49+1}=\frac{60+20i}{50}=\frac{6}{5}+\frac{2}{5}i$$

$$\frac{c-a}{d-a}=\frac{5+6i+3+2i}{5+2i+3+2i}=\frac{8+8i}{8+4i}=\frac{2+2i}{2+i}=\frac{(2+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-2i+4i+2}{4+1}=\frac{6+2i}{5}=\frac{6}{5}+\frac{2}{5}i$$

وبالتالي $\frac{c-a}{d-a}=\frac{d-a}{b-a}$ أي

$$\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right)=\arg\left(\frac{c-a}{d-a}\right)$$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})$$

وبالتالي المستقيم (AD) منصف داخلي للزاوية A في المثلث ABC .

2) $$|z-4+i|=|z+3+2i|$$

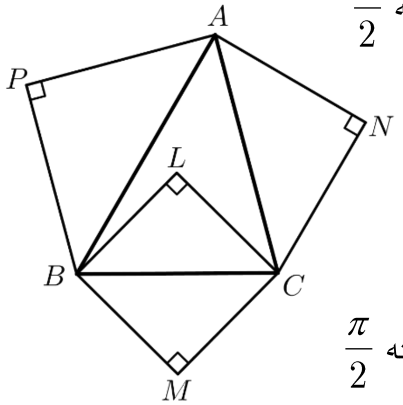
$$\left|z-(4-i)\right|=\left|z-(-3-2i)\right|$$

$$\left|z-b\right|=\left|z-a\right|$$

$$MB=MA$$

وبالتالي مجموعة النقاط M تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$

السؤال الخامس:



1) في المثلث القائم والمتساوي الساقين ACN لدينا C صورة A وفق دوران مركزه N وزاويته $\frac{\pi}{2}$

الصيغة العقدية للدوران $c-n=e^{\frac{\pi}{2}i}(a-n)$

وبالتالي $n(1-i)=c$ أي $n-in=c$ أي $c-n=-in$

$$n=\frac{c}{1-i}=\frac{c(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{c(1+i)}{2}=\frac{1}{2}c(1+i)$$

في المثلث القائم والمتساوي الساقين BAP لدينا A صورة B وفق دوران مركزه P وزاويته $\frac{\pi}{2}$

الصيغة العقدية للدوران $a-p=e^{\frac{\pi}{2}i}(b-p)$ أي $-p=ib-ip$ أي $-p+ip=ib$ أي $p(-1+i)=ib$ وبالتالي

$$p=\frac{ib}{-1+i}=\frac{ib(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{b(-i+1)}{2}=\frac{1}{2}b(1-i)$$

في المثلث القائم والمتساوي الساقين BCL لدينا C صورة B وفق دوران مركزه L وزاويته $\frac{\pi}{2}$

الصيغة العقدية للدوران $c-l=e^{\frac{\pi}{2}i}(b-l)$ أي $c-l=ib-il$ أي $l-il=c-ib$ أي $l(1-i)=c-ib$ وبالتالي

$$l=\frac{c-ib}{1-i}=\frac{(c-ib)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{c+ic-ib+b}{2}=\frac{1}{2}(c+ic-ib+b)$$

2) $l-p=\frac{1}{2}(c+ic-ib+b)-\frac{1}{2}b(1-i)=\frac{1}{2}(c+ic-ib+b-b+ib)=\frac{1}{2}(c+ic)=\frac{1}{2}c(1+i)=n$

وبالتالي $n=l-p$ وتكافئ $\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{PL}$ وبالتالي الرباعي $ANLP$ متوازي أضلاع

3) في المثلث القائم والمتساوي الساقين CBM لدينا B صورة C وفق دوران مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{2}$

الصيغة العقدية للدوران $b-m=e^{\frac{\pi}{2}i}(c-m)$ أي $b-m=ic-im$ أي $m-im=b-ic$ أي $m(1-i)=b-ic$

وبالتالي $m=\frac{b-ic}{1-i}=\frac{(b-ic)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{b+ib-ic+c}{2}=\frac{1}{2}(b+ib-ic+c)$

ومنه يكون $\frac{n-b}{m-p}=\frac{\frac{1}{2}c(1+i)-b}{\frac{1}{2}(b+ib-ic+c)-\frac{1}{2}b(1-i)}=\frac{c+ic-2b}{b+ib-ic+c-b+ib}=\frac{c+ic-2b}{-ic+c+2ib}$

$$\frac{n-b}{m-p}=\frac{i(-ic+c+2ib)}{-ic+c+2ib}=i$$

لدينا $\left|\frac{n-b}{m-p}\right|=|i|=1$ أي $BN=PM$ و $\arg\left(\frac{n-b}{m-p}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ أي $BN\perp PM$

انتهى حل النموذج الرابع

الأعداد العقدية وتطبيقاتها