ملخص لدرس المتتاليات الحسابية والهندسية

	المتتاليات الحسابية	المتتاليات الهندسية
تعريف	الانتقال من حد إلى الحد التالي يكون **بإضافة** نفس الثابت r، ويسمى أساس المتتالية	الانتقال من حد إلى الحد التالي يكون **بالضرب** في نفس الثابت q، يسمى أساس المتتالية.
العلاقة التراجعية	$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=q\,u_n$
الحد العام	$u_n=u_0+nr \longrightarrow$ الحد الأول u_0 $u_n=u_1+(n-1)r \leftarrow$ الحد الأول u_1	$u_n=u_0q^n \longrightarrow$ الحد الأول u_0 $u_n=u_1q^{n-1} \longrightarrow$ الحد الأول u_1
العلاقة بين حدين	$\forall n\geq p\ ,u_n=u_p+(n-p)r$	$\forall n\geq p\ ,u_n=u_p\,q^{n-p}$
مجموع حدود متتابعة	$S=u_0+u_1+.......+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$ **بصفة عامة** $S=$ عدد الحدود $\times$ $\frac{\text{الحد الأول + الحد الأخير}}{2}$ **حالة خاصة أساسية** $1+2+3+......+n=\frac{n(n+1)}{2}$	$S=u_0+u_1+.......+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ **بصفة عامة** $S=$ الحد الأول $\cdot\ \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$ **حالة خاصة أساسية** $1+q+q^2+.......+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ مع $q\neq1$
النهايــــات	$r>0\longrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ $r<0\longrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$	$q>1\longrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$ $q=1\longrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=1$ $-1<q<1\longrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ $q\leq-1\longrightarrow$ نهاية (q^n) غير موجودة
الوسط الحسابي و الوسط الهندسي	**الوسط الحسابي** ($a\ ,b\ ,c$ حدود متتابعة من متتالية حسابية) $\Updownarrow$ $2b=a+c$ يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c	**الوسط الهندسي** ($a\ ,b\ ,c$ حدود متتابعة من متتالية هندسية) $\Updownarrow$ $b^2=a\cdot c$ يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c

تمرين1

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = 4u_n - 6n + 15$$

1 - برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

2 - أحسب v_0 ثم أحسب v_n بدلالة n .

استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = \frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$

3 - برهن أن المتتالية (u_n) يمكن كتابتها على الشكل $u_n = t_n + w_n$

حيث : t_n متتالية هندسية و w_n متتالية حسابية .

4 - أحسب $T_n = t_0 + t_1 + ... + t_n$ و $W_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$

ثم إستنتج : $U_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

تمرين2

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ :

$$u_n = \frac{3\times 2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{3\times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1 - لتكن (w_n) المتتالية المعرفة بـ : $w_n = u_n + v_n$.

برهن أن (w_n) متتالية هندسية.

2 - لتكن (t_n) المتتالية المعرفة بـ : $t_n = u_n - v_n$.

برهن أن (t_n) متتالية حسابية.

3 - عبر عن المجموع التالي بدلالة n : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

تمرين3

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان بحيث: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$ و $v_n = u_n + 3$

1 - أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

2 - عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n . استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3 - أحسب : $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

4 - أحسب المجاميع التالية :

$T_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ و $\Sigma_n = u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2$

تمرين4

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$u_0 = 12 \quad \text{و} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_{n+1} = 3 + \frac{1}{4}u_n$$

1) في م م م م م أنشئ (D) التمثيل البياني للدالة $f : x \mapsto 3+\frac{1}{4}x$

و المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x$

ـ مثل على المحور (OX) الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

ـ ما هو تخمينك حول تقارب المتتالية (u_n).

2) أ ـ بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 4 \leq u_n \leq 12$

ب ـ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

جـ ـ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها .

3) أ ـ أحسب العدد a فاصلة نقطة تقاطع (D) و (Δ)

ب ـ نضع : $v_n = u_n - a$

ـ أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الأساس .

ـ عبر عن (v_n) بدلالة n و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين5

(u_n) متتالية حسابية أساسها r.

(v_n) و (w_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$w_n = u_{3n} + \sqrt{7} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{3}{5}u_n - \frac{1}{2}$$

بين أن المتتاليتان (v_n) و (w_n) حسابيتان يطلب تعيين الأساس لكل منهما

تمرين6

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ :

$$v_n = u_n + bn - 1 \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - 2u_{n+1} = 2n+3 \end{cases}$$

1 ـ بين أنه يوجد عدد طبيعي b تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول

2 ـ عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n

3 ـ أحسب $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2}$

تمرين7

(u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_1 = -2$

1 ـ أكتب u_n بدلالة n .

2 ـ أحسب المجموع $u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_7$

3 ـ لتكن (v_n) متتالية بحيث : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = u_{2n}$

أحسب المجموع $v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n$

تمرين8

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+1} = \frac{2\,u_n^2 - 3}{u_n + 2} \quad \text{و} \quad u_0 = 4$$

1) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \ , u_n > 3$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(u_{n+1} - 3) > \frac{3}{2}(u_n - 3)$

4) استنتج أن : $u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

5) هل المتتالية (u_n) متقاربة.؟

تمرين9

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$

1 – بين أنه : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n > \sqrt{2}$

2 – بين أن (u_n) متناقصة و استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n \leq 2$

3 – تحقق أن : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{u_n}\right)\left(u_n - \sqrt{2}\right)$

– استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{4}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$

4 – برهن بالتراجع أنه : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{4^n}$

5 – استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و أعط نهايتها.