2.4 Inequalities المتباينات

properties of Inequality خصائص المتباينات.

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

① $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

② $a < b$, $c > 0$ (عدد موجب) $\Rightarrow \begin{cases} ac < bc \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{cases}$

③ $a < b$, $c < 0$ (عدد سالب) $\Rightarrow \begin{cases} ac > bc \\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{cases}$

وبالمثل بالنسبة للاشارات $\leqslant$ ، $\geqslant$ ، $>$.

ملاحظة هامة جداً جداً

عند الضرب في عدد سالب أو القسمة على عدد سالب فإن إشارة المتباينة تنعكس.

Linear Inequalities in one variable المتباينات الخطية في متغير واحد.

$ax + b > 0$, $ax + b \geqslant 0$

$ax + b < 0$, $ax + b \leqslant 0$

Scanned by CamScanner

Example 1 p.(72) : Solve $-3x+5>-7$

في المتباينات الخطية نطلع المتغيرات في طرف والثوابت في طرف.

$$-3x > -7-5$$

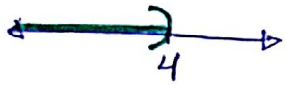
$$-3x > -12$$

$$x < \frac{-12}{-3}$$

قسمنا على عدد سالب
فإشارة تنعكس

$$x < 4$$

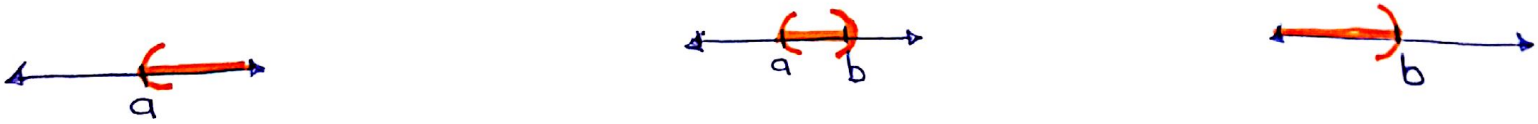
Solution set $\{x/x<4\}$ or $(-\infty,4)$



لأنها متباينة ← مجموعة كل عناصر تحتوي.

الفترة المفتوحة Open Interval

$\{x/x>a\}$	$\{x/a<x<b\}$	$\{x/x<b\}$
(a,∞)	(a,b)	$(-\infty,b)$

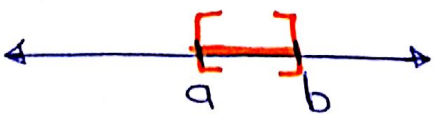


الفترة المغلقة closed Interval

$$\{x/a\leq x\leq b\}$$

$$[a,b]$$

الفترة المغلقة لها شكل واحد فقط!

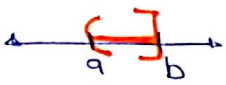


Scanned by CamScanner

فترات أخرى . Other intervals

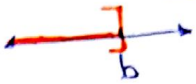
$\{x \mid x \geq a\}$ $[a, \infty)$

$\{x \mid a < x \leq b\}$ $(a, b]$



$\{x \mid a \leq x < b\}$ $[a, b)$

$\{x \mid x \leq b\}$ $(-\infty, b]$



فترة منفصلة . Disjoint interval

$\{x \mid x < a \text{ or } x > b\}$

$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$

All real numbers

$\{x \mid x \text{ is a real number}\}$

$(-\infty, \infty)$

HW 1 p. (73) : Solve $4 - 3x \leq 7 + 2x$

بما أنها متباينة خطية ← بالمتغيرات في طرف والثوابت في طرف .

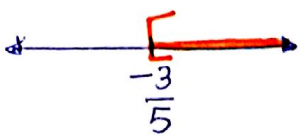
$$-3x - 2x \leq 7 - 4$$

$$-5x \leq 3$$

$$x \geq \frac{-3}{5} \rightarrow$$

قسمنا على عدد سالب فالاشارة تنعكس .

Solution set $\left[\frac{-3}{5}, \infty\right)$



Scanned by CamScanner

Three-part Inequalities المتباينات من ثلاثة حدود

HW2 p.(74) : Solve $-2 < 5+3x < 20$

① اضافة (-5) لجميع الأطراف

$$-2-5 < 5-5+3x < 20-5$$

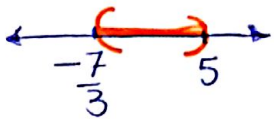
$$-7 < 3x < 15$$

③ قسمة جميع الأطراف على (3)

$$\frac{-7}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{15}{3}$$

$$-\frac{7}{3} < x < 5$$

∴ Solution set $(-\frac{7}{3}, 5)$



Quadratic Inequality :- المتباينة التربيعية

$$ax^2+bx+c<0$$ يمكن تكونه $\leq, \geq, >$

Example 3 p.(74) : Solve $x^2-x-12<0$

في المتباينات التربيعية أولاً: نحولها إلى معادلة تربيعية.

$$x^2-x-12=0$$

ثانياً: نحل المعادلة:

$$(x-4)(x+3)=0$$

$$x-4=0 \quad \text{or} \quad x+3=0$$

$$x=4 \quad \text{or} \quad x=-3$$

Scanned by CamScanner

ثالثاً :- نكتب الفترات :-

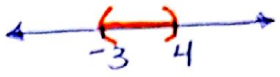
	$-\infty$	-4	-3	0	4	5	∞
$x^2-x-12<0$		$8<0$		$-12<0$		$8<0$	
T or F		F		T		F	

$x=-4 \Rightarrow (-4)^2-(-4)-12=8$

$x=0 \Rightarrow 0-0-12=-12$

$x=5 \Rightarrow (5)^2-5-12=8$

∴ Solution set $(-3,4)$



HW3 p.(75) : Solve $2x^2+5x-12 \geq 0$

$2x^2+5x-12=0$

$(2x-3)(x+4)=0$

$2x-3=0$ or $x+4=0$

$x=\frac{3}{2}$, $x=-4$

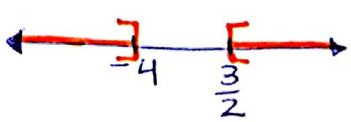
	$-\infty$	-5	-4	0	$\frac{3}{2}$	2	∞
$2x^2+5x-12 \geq 0$		$13 \geq 0$		-12	0	$6 \geq 0$	
T or F		T		F		T	

$x=-5 \Rightarrow 2(-5)^2+5(-5)-12=13$

$x=0 \Rightarrow 2(0)^2+5(0)-12=-12$

$x=2 \Rightarrow 2(2)^2+5(2)-12=6$

∴ Solution set $(-\infty,-4] \cup [\frac{3}{2},\infty)$



Strict inequalities متباينات حادة

use $<,>$

nonstrict inequalities متباينات غير حادة .

use $\leq, \geq$

Scanned by CamScanner

Rational Inequalities :- المتباينات النسبية

Example 5 P.(77) : Solve $\frac{2x-1}{3x+4} < 5$

① نجعلها متباينة صفرية.

$$\frac{2x-1}{3x+4} - 5 < 0$$

② نوحد المقامات

$$\frac{2x-1-5(3x+4)}{3x+4} < 0$$

$$\frac{2x-1-15x-20}{3x+4} < 0$$

$$\frac{-13x-21}{3x+4} < 0$$

③ المقام = صفر أو البسط = صفر.

$-13x-21=0$ or $3x+4=0$

$-13x=21$ $\quad$ $3x=-4$

$x=-\frac{21}{13}$ $\quad$ $x=\frac{-4}{3}$

④ نختبر الفترات

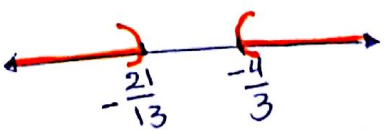
	$-\infty$	-2	$-\frac{21}{13}$	-1.5	$-\frac{4}{3}$	0	∞
$\frac{-13x-21}{3x+4}<0$		$\frac{-5}{2}<0$		$3<0$		$\frac{-21}{4}<0$	
T or F		T		F		T	

$x=-2 \Rightarrow \frac{-13(-2)-21}{3(-2)+4} = -\frac{5}{2}$

$x=0 \Rightarrow \frac{0-21}{0+4} = -\frac{21}{4}$

$x=-1.5 \Rightarrow \frac{-13(-1.5)-21}{3(-1.5)+4} = 3$

∴ Solution Set $(-\infty, -\frac{21}{13}) \cup (-\frac{4}{3}, \infty)$



Scanned by CamScanner

HW4 P.(77) :- Solve $\frac{5}{x+4} \geq 1$

$$\frac{5}{x+4} - 1 \geq 0$$

$$\frac{5-(x+4)}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{5-x-4}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{1-x}{x+4} \geq 0$$

$1-x=0$ or $x+4=0$

$x=1$, $x=-4$ ← حيز بقام، لازم الفترة تكون مفتوحة من عندة.

	$-\infty$	-5	-4	0	1	2	∞
$\frac{1-x}{x+4} \geq 0$		$-6 \geq 0$		$\frac{1}{4} \geq 0$		$-\frac{1}{6} \geq 0$	
T or F		F		T		F	

$x=-5 \Rightarrow \frac{1-(-5)}{-5+4} = -6$

$x=0 \Rightarrow \frac{1-0}{0+4} = \frac{1}{4}$

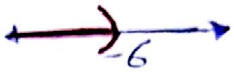
$x=2 \Rightarrow \frac{1-2}{2+4} = -\frac{1}{6}$

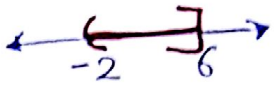
∴ Solution set $(-4, 1]$

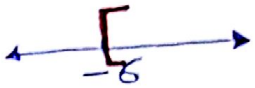
∴ الفترة مفتوحة من هنا لأن -4 تجعل بقام = صفر
لازم نستبعدها من الحل.

Scanned by CamScanner

Exercises 2.4 p. (78)

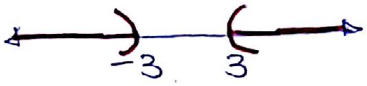
① $x < -6 \Rightarrow (-\infty, -6)$ 

② $-2 < x \leq 6 \Rightarrow (-2, 6]$ 

③ $x \geq -6 \Rightarrow [-6, \infty)$ 

④

$\Rightarrow [-2, 6)$, $-2 \leq x < 6$

⑤ 

$\Rightarrow (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

$x < -3$ or $x > 3$

Solve :-

⑦ $-2x + 8 \leq 16$ متباينة خطية

$-2x \leq 16 - 8$

$-2x \leq 8$

$x \geq \frac{-8}{2}$ ← قسمنا على سالب

$x \geq -4$

Solution set $[-4, \infty)$

⑪ $\frac{4x+7}{-3} \leq 2x + 5$ نضرب الطرفين في (-3)

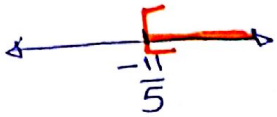
$4x + 7 \geq -3(2x + 5)$

$4x + 7 \geq -6x - 15$

$4x + 6x \geq -15 - 7$

$10x \geq -22$

$x \geq \frac{-22}{10} \Rightarrow x \geq -\frac{11}{5}$

∴ Solution set $[-\frac{11}{5}, \infty)$ 

Scanned by CamScanner

(19) $-3 \leq \frac{x-4}{-5} < 4$

نضرب جميع الأطراف في (-5)

$-3(-5) \geq x-4 > 4(-5)$

$15 \geq x-4 > -20$

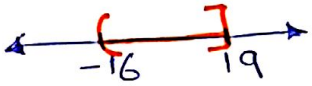
$-20 < x-4 \leq 15$

بإضافة 4 لجميع الأطراف

$-20+4 < x-4+4 \leq 15+4$

$-16 < x \leq 19$

∴ Solution set $(-16, 19]$



(26) $x^2 - 2x \leq 1$

$x^2 - 2x - 1 \leq 0$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{\sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

∴ $x = 1-\sqrt{2}$ or $x = 1+\sqrt{2}$

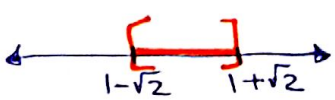
	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{2}$	0	$1+\sqrt{2}$	3	∞
$x^2-2x-1 \leq 0$		$2 \not\leq 0$		$-1 \leq 0$		$2 \not\leq 0$	
T or F		F		T		F	

$x = -1 \Rightarrow (-1)^2 - 2(-1) - 1 = 2$

$x = 0 \Rightarrow 0^2 - 2(0) - 1 = -1$

$x = 3 \Rightarrow 3^2 - 2(3) - 1 = 2$

∴ Solution Set $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$



Scanned by CamScanner

Which of the following inequalities has solution $(-\infty,\infty)$?

أي من المتباينات حلها $(-\infty,\infty)$

(a) $(x-3)^2 \geq 0$ متباينة تربيعية

$(x-3)^2 = 0$

$x-3=0 \Rightarrow x=3$

	$-\infty$	0	3	4	∞
$(x-3)^2 \geq 0$		$9 \geq 0$		$1 \geq 0$	
		T		T	

$x=0 \Rightarrow (0-3)^2 = 9$

$x=4 \Rightarrow (4-3)^2 = 1$

$\therefore$ Solution set $(-\infty,3] \cup [3,\infty) = (-\infty,\infty)$

(b) $(5x-6)^2 \leq 0$

$(5x-6)^2 = 0$ (نستخدم هذا لأنه أبسط للتعويض)

$5x-6=0 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$

	$-\infty$	0	$\frac{6}{5}$	2	∞
$(5x-6)^2 \leq 0$		$36 \leq 0$		$16 \leq 0$	
		F		F	

$x=0 \Rightarrow (5(0)-6)^2 = 36$

$x=2 \Rightarrow (5(2)-6)^2 = 16$

المتباينة متحققة فقط عند النقطة $\frac{6}{5}$.

$\therefore$ Solution set $\left\{\frac{6}{5}\right\}$

(c) $(6x+4)^2 > 0$

$(6x+4)^2 = 0 \Rightarrow 6x+4=0 \Rightarrow x = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

	$-\infty$	-1	$-\frac{2}{3}$	0	∞
$(6x+4)^2 > 0$		$4 > 0$		$16 > 0$	
		T		T	

$x=-1 \Rightarrow (6(-1)+4)^2 = 4$

$x=0 \Rightarrow (6(0)+4)^2 = 16$

Solution set $(-\infty,-\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3},\infty)$ ⇝ ليست $(-\infty,\infty)$

Scanned by CamScanner

(d) $(8x+7)^2 < 0$

$(8x+7)^2 = 0$

$8x+7=0 \Longrightarrow x = -\frac{7}{8}$

	$-\infty$	-1	$-\frac{7}{8}$	0	∞
$(8x+7)^2<0$		$1<0$	$49<0$		
		F	F		

$x=-1 \Longrightarrow (8(-1)+7)^2 = 1$

$x=0 \Longrightarrow (0+7)^2 = 49$

$\therefore$ Solution set $\emptyset$. No solution

(43) $\frac{x+3}{x-5} \leq 1$ صيغة كسرية

$\frac{x+3}{x-5} - 1 \leq 0$

$\frac{x+3-(x-5)}{x-5} \leq 0$

$\frac{x+3-x+5}{x-5} \leq 0$

$\frac{8}{x-5} \leq 0$

المقام = صفر أو البسط = صفر.

$8=0$ or $x-5=0 \Longrightarrow x=5$

تعارض

	$-\infty$	0	5	6	∞
$\frac{8}{x-5}<0$		$-\frac{8}{5}<0$		$8<0$	
		T		F	

$x=0 \Longrightarrow \frac{8}{0-5} = -\frac{8}{5}$

$x=6 \Longrightarrow \frac{8}{6-5} = 8$

$\therefore$ Solution set $(-\infty, 5)$

مفتوحة لأنها صفر للمقام.

Scanned by CamScanner