x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

نلاحظ من جدول الاتجاه أن $f(1)=0$

قيمة حدية كبرى

$\Rightarrow f(x) \leq f(1)=0$

$\Rightarrow f(x) \leq 0$

$\Rightarrow \ln(x) - x + 1 \leq 0$

$\Rightarrow \ln x \leq x-1$

والمتراجحة محققة.

• حصر القيمة (e):

أولاً باختيار $x = e^{\frac{1}{3}}$ نعوض بالمتراجحة.

$\Rightarrow \ln e^{\frac{1}{3}} \leq e^{\frac{1}{3}} - 1$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\ln e \leq e^{\frac{1}{3}} - 1$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq e^{\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow e^{\frac{1}{3}} \geq \frac{1}{3}+1$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{3}} \geq \frac{4}{3}$

نكعب الطرفين:

$\Rightarrow \left(e^{\frac{1}{3}}\right)^3 \geq \frac{64}{27}$

$\Rightarrow e \geq \frac{64}{27}$ ---- (1)

ثانياً باختيار $x = e^{-\frac{1}{3}}$ ونعوض بالمتراجحة:

$\Rightarrow \ln e^{-\frac{1}{3}} \leq e^{-\frac{1}{3}} - 1$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq e^{-\frac{1}{3}} - 1$

$\Rightarrow e^{-\frac{1}{3}} \geq -\frac{1}{3} + 1$

$\Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} \geq \frac{2}{3}$

نقلب المتراجحة:

$\Rightarrow e^{\frac{1}{3}} \leq \frac{3}{2}$

نكعب الطرفين

$\Rightarrow e \leq \frac{27}{8}$ ---- (2)

من (1) و (2) نجد أن:

$$\boxed{\frac{64}{27} \leq e \leq \frac{27}{8}}$$

وظيفة للتدريب:

① اثبت صحة المتراجحة أياً تكن $x>0$

$\ln(x) \leq 2(\sqrt{x} - 1)$

② اثبت صحة المتراجحة أياً تكن $x \in]-1,+\infty[$

$\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$

((الاستنتاجات البيانية))

لدينا C_f الخط البياني للتابع f

و C_g الخط البياني للتابع g

في كل حالة ما التحويل الهندسي بين C_f , C_g ؟

① $g(x) = -f(x)$

$\Leftarrow$ C_g نظير C_f بالنسبة للمحور $x'x$.

② $g(x) = f(-x)$

$\Leftarrow$ C_g نظير C_f بالنسبة للمحور $y'y$.

③ $g(x) = -f(-x)$

$\Leftarrow$ C_g نظير C_f بالنسبة لمبدأ الإحداثيات O.

④ $g(x)=|f(x)|$

⇐ نقط C_g هي اجتماع نقط C_f ذات التراتيب الموجبة مع نظائر نقط C_f ذات التراتيب السالبة بالنسبة لمحور $x'x$

⑤ $g(x)=f(|x|)$

⇐ نقط C_g هي اجتماع نقط C_f ذات الفواصل الموجبة مع نظائر نقط C_f ذات الفواصل السالبة بالنسبة لمحور $y'y$.

⑥ $g(x)=f(x)+\alpha$

⇐ C_g نظير C_f وفق الانسحاب شعاعه $\alpha\vec{j}$.

⑦ $g(x)=f(x+\alpha)$

⇐ C_g نظير C_f وفق الانسحاب شعاعه $-\alpha\vec{i}$.

مثال تدريبي:

انطلاقاً من الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln x$

ارسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية:

① $g(x)=\ln(-x)$

② $h(x)=-\ln x$

③ $l(x)=-\ln(-x)$

④ $K(x)=1+\ln x$

⑤ $m(x)=\ln(1+x)$

⑥ $t(x)=|\ln x|$

لنرسم التابع f

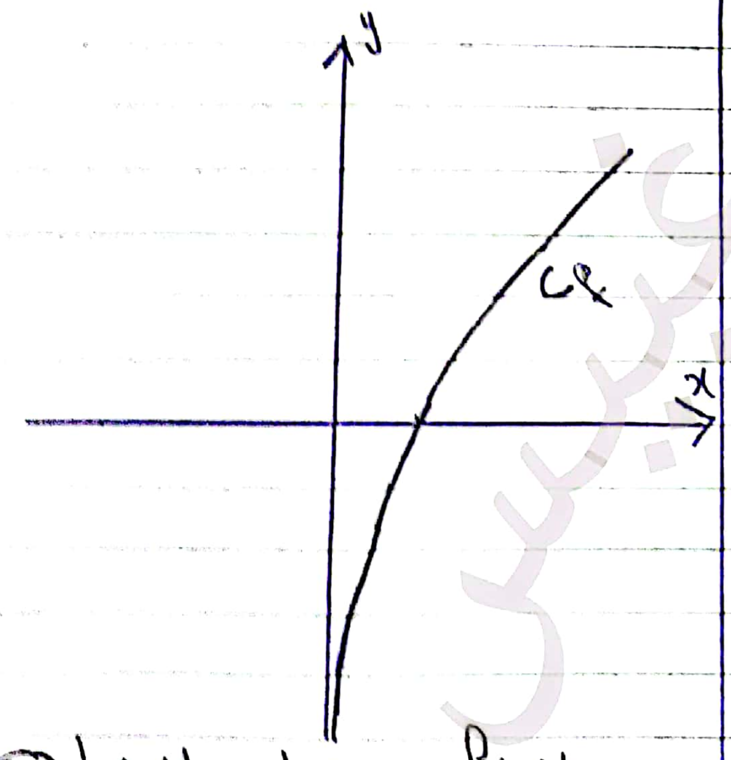
$f(x)=\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

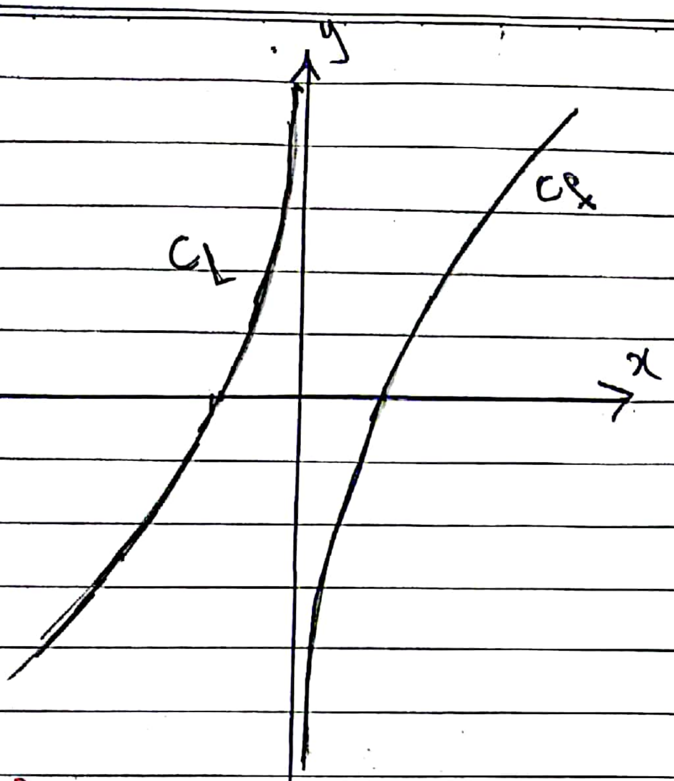
$f'(x)=\frac{1}{x}>0$

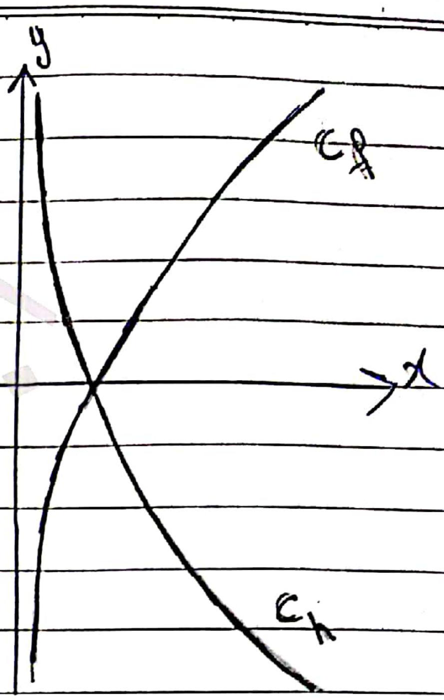
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+ \quad + \quad +$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



③ $h(x)=-\ln x=-f(x)$

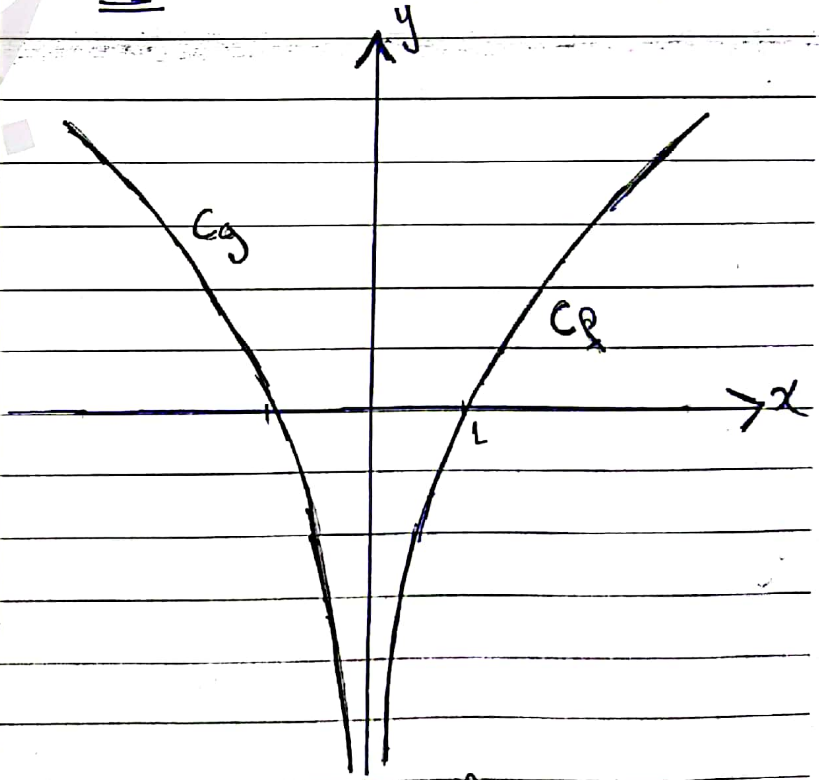
⇐ C_h نظير C_f بالنسبة لمحور $x'x$





③ $g(x) = \ln(-x) = f(-x)$

$\Leftarrow$ C_g نظير C_f بالنسبة للمحور $\underline{\underline{yy'}}$



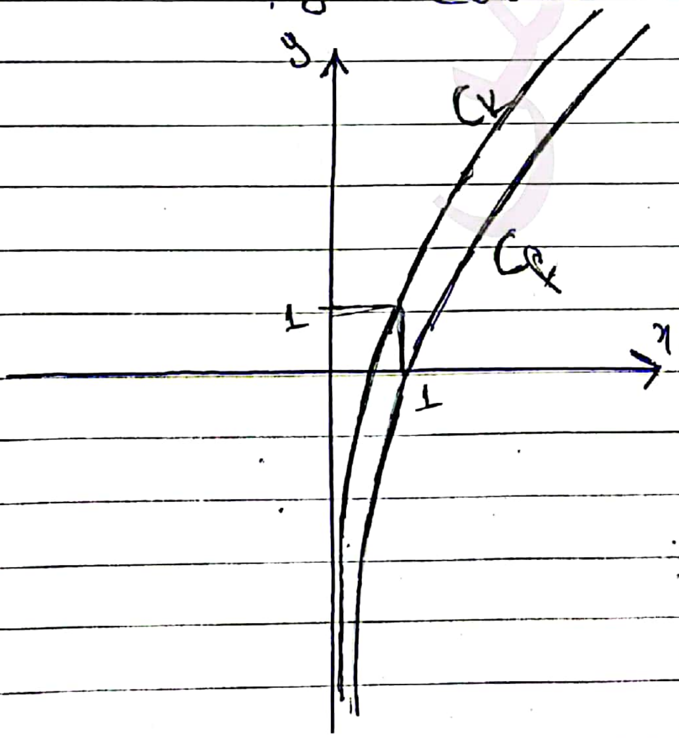
⑤ $l(x) = -\ln(-x) = -f(-x)$

$\Leftarrow$ C_l نظير C_f بالنسبة لمبدأ الاحداثيات (O)

ملاحظة: لا تنس النظير بالنسبة للمبدأ ما هو إلا نظير بالنسبة للمحور yy' ثم بالنسبة للمحور $x'x$.

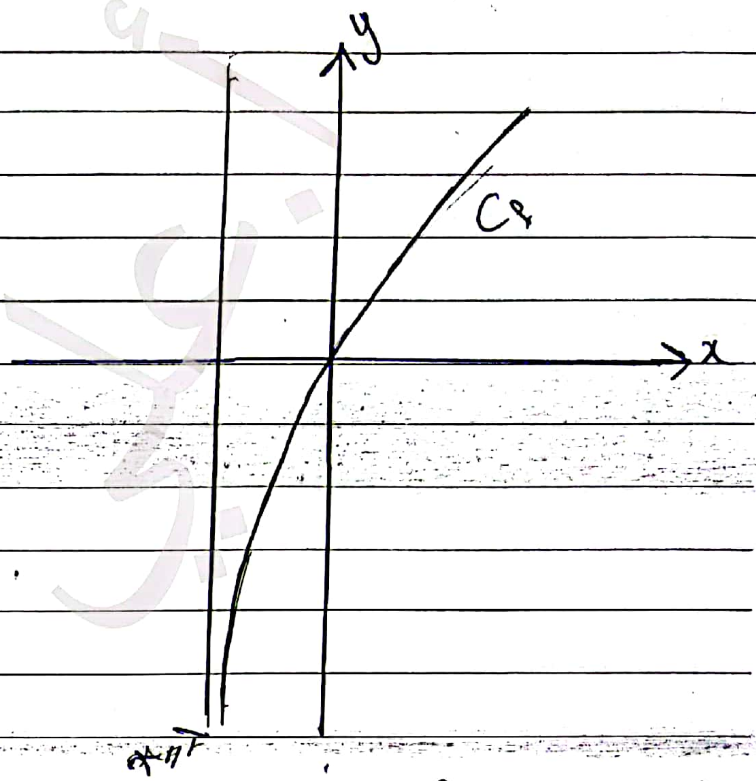
④ $K(x) = 1 + \ln x = 1 + f(x)$

$\Leftarrow$ C_K نظير C_f بانسحاب شعاعه $\vec{j}$



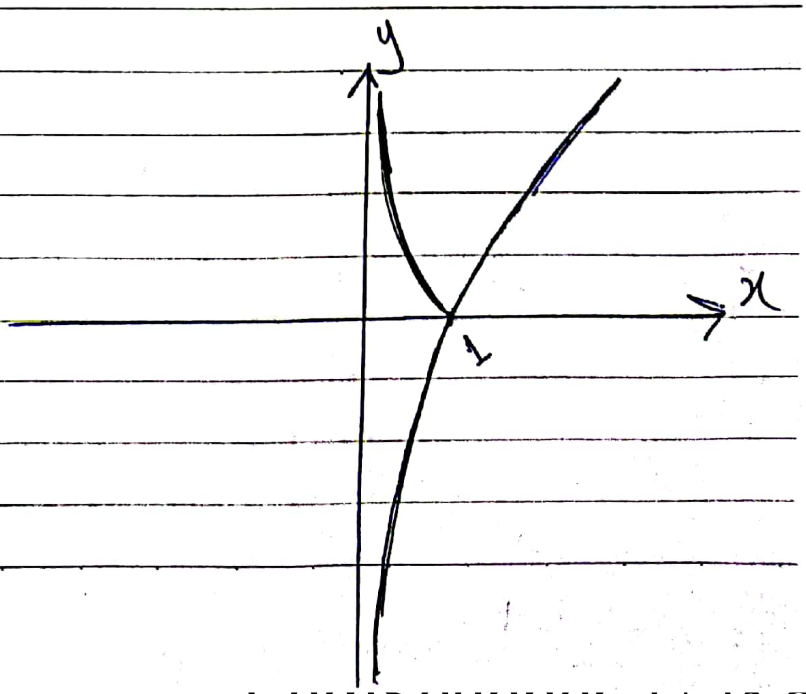
⑤ $M(x) = \ln(1+x) = f(1+x)$

C_M نظير C_f بتحويل انسحاب شعاعه $-\vec{i}$.



⑥ $t(x) = |\ln x| = |f(x)|$

C_t نظير C_f بالنسبة لنقاط C_t هي اجتماع نقاط C_f ذات التراتيب الموجبة ونظائر نقاط C_f ذات التراتيب السالبة بالنسبة للمحور xx' .



مشتقة الدالة اللوغاريتمية للمركب:

يمكن لدينا الدالة المركبة:
$f(x) = \ln(u(x))$
إذا كانت $u(x)$ اشتقاقية على المجال I وموجبة تماما على I فإن الدالة f اشتقاقية على I ومشتقها على I:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

مشتقة المحتوى على المحتوى.

P: 165 // ④

في كل ما يأتي أثبت أن الدالة f اشتقاقية على المجال I ثم أحسب f'.

① $I =]2, +\infty[$

$f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$

الحل:

• $x \mapsto x+2$ معرفة واشتقاقية على R ومنه اشتقاقية على I.

• $x+2 > 0$ على I

$\Rightarrow x \mapsto \ln(x+2)$ اشتقاقية على I.

• $x \mapsto x-2$ اشتقاقية على R ومنه اشتقاقية على I.

• $x-2 > 0$ على I

$\Rightarrow x \mapsto \ln(x-2)$ اشتقاقية على I.