مدونة المناهج السعودية

https://eduschool40.blog

الموقع التعليمي لجميع المراحل الدراسية

في المملكة العربية السعودية

Hyperbolic Functions and Inverse Trigonometric Functions

الدوال الزائدية و الدوال المثلثية العكسية

Math 111

Lecture 11

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

اشتقاق الدوال الزائدية:

مبرهنة:

- $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x,$
- $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x,$
- $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x,$
- $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x,$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x,$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x,$

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = \sinh(x^2 + 2x + 5) \ ,$$

$$(2) y = \ln(x \tanh(x)).$$

$$(3) y = e^{\sinh(\sqrt{x})}.$$

تكامل الدوال الزائدية:

مبرهنة:

- $\int \sinh x dx = \cosh x + c,$
- $\int \cosh x dx = \sinh x + c,$
- $\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + c,$
- $\int \operatorname{csch}^2 x dx = -\coth x + c,$
- $\int \operatorname{sech} x \tanh x dx = -\operatorname{sech} x + c,$
- $\int \operatorname{csch} x \coth x dx = -\operatorname{csch} x + c,$

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

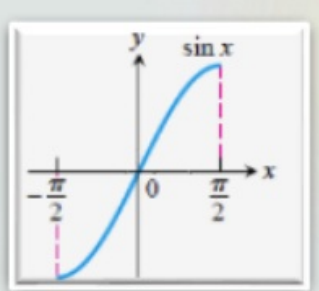
$$(1)\ \int \left(\frac{1}{t} - \cosh t\right) dt\ ,$$

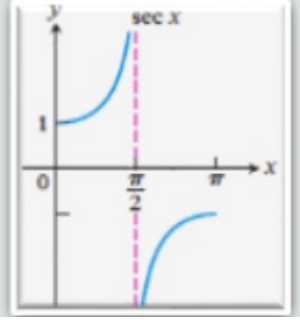
$$(2)\ \int x - \frac{2}{\sinh^2 x} dx.$$

مراجعة الدوال المثلثية العكسية:

كما هو معروف آن الدوال المثلثية الاساسية ليسة دوال تقابلية. ولكن نستطيع وضع بعض الشروط لمجال الدوال لكي نحصل على فترات تكون فيها الدوال تقابلية كالتالي:

الدالة	المجال	المدى
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1,1]$
$\cos x$	$[0,\pi]$	$[-1,1]$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(-\infty,\infty)$
$\sec x$	$[0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi]$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$





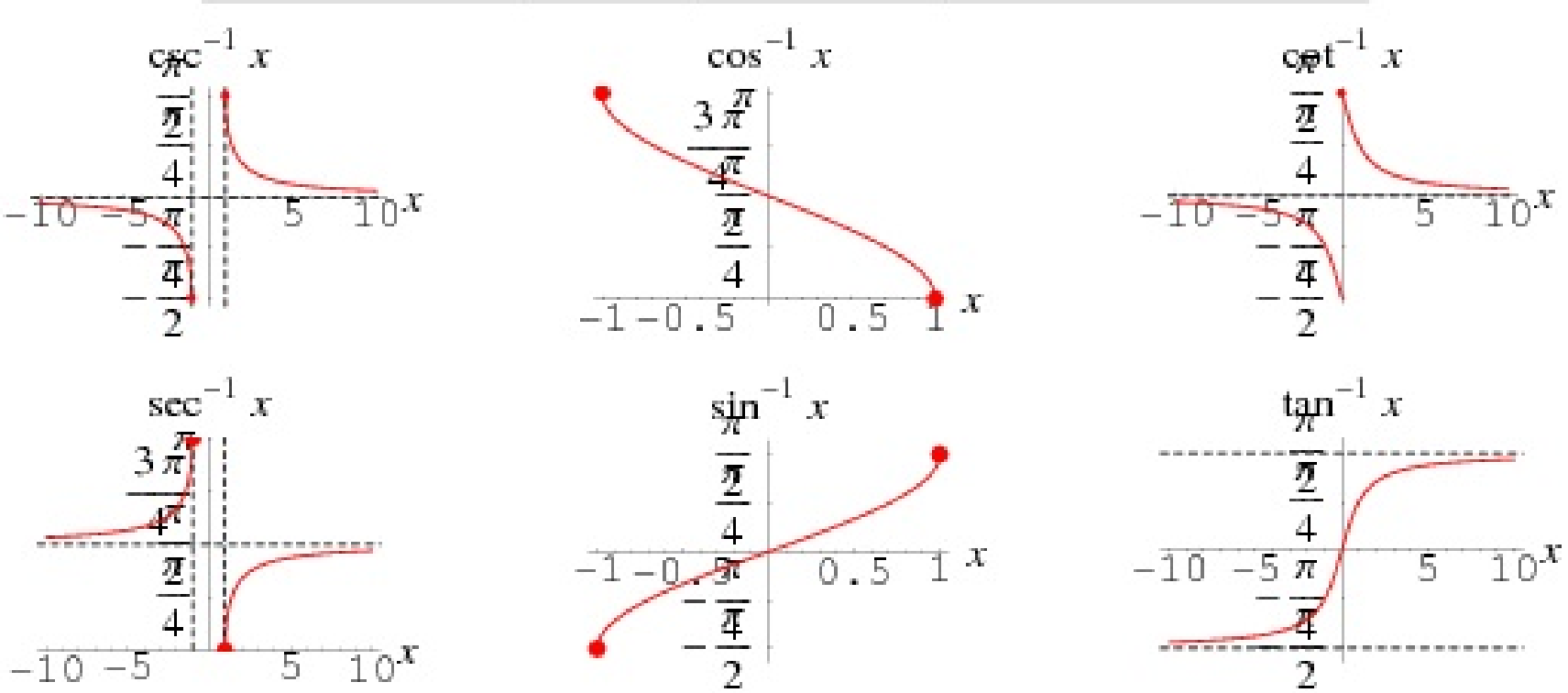
نرمز لدوال المثلثية العكسية بالرمز التالي:

- $y = \sin^{-1} x = \textit{arssin}\ x$,
- $y = \cos^{-1} x = \textit{arscos}\ x$,
- $y = \tan^{-1} x = \textit{arstan}\ x$,
- $y = \sec^{-1} x = \textit{arssec}\ x$,

ملاحظة:

$$\sin^{-1} x \neq (\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x} = \csc x$$

شكل الدوال المثلثية العكسية:



اشتقاق الدوال المثلثية العكسية:

مبرهنة:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\csc^{-1}x\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = \sin^{-1}(x^5 + 2x)$$

$$(2) y = \arccos\ (\ln x^2)$$

$$(3) y = \tan^{-1}\ \ (e^x)$$

تكامل الدوال المثلثية العكسية:

مبرهنة:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1)\ \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{4-e^{6x}}}dx\ ,$$

$$(2)\ \int \frac{\sin x}{\cos^2 x+1}dx.$$

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = \sin^{-1}(\sqrt{x})$$

$$(2) y = \textit{arcsin}\ (\ln x)$$

$$(3) y = \cos^{-1}\ (\cos e^{x})$$

$$(4) y = 3^{\sin^{-1}(x^3)}$$

$$(5) y = x \cosh e^{4x}$$

$$(6) y = \ln \sinh 2x$$

$$(7) y = \sqrt{x} \tanh \sqrt{x}$$

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1)\ \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx\ ,$$

$$(2)\ \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx.$$

$$(3)\ \int \frac{\sec x \tan x}{1+\sec^2 x}dx.$$

$$(4)\ \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx.$$

$$(5)\ \int \operatorname{sech}^2 5x dx.$$

$$(6)\ \int x \sinh(2x^2)dx.$$

$$(7)\ \int \frac{\sinh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$$

Thanks for listening.