وَقُل رَّبِّ زِدْنِي عِلْمًا

مع مختارات من أحاديث رسول الله صلى الله عليه
وعلى آله وصحبه أجمعين من كتاب صحيح البخاري

الأشعة في الفراغ

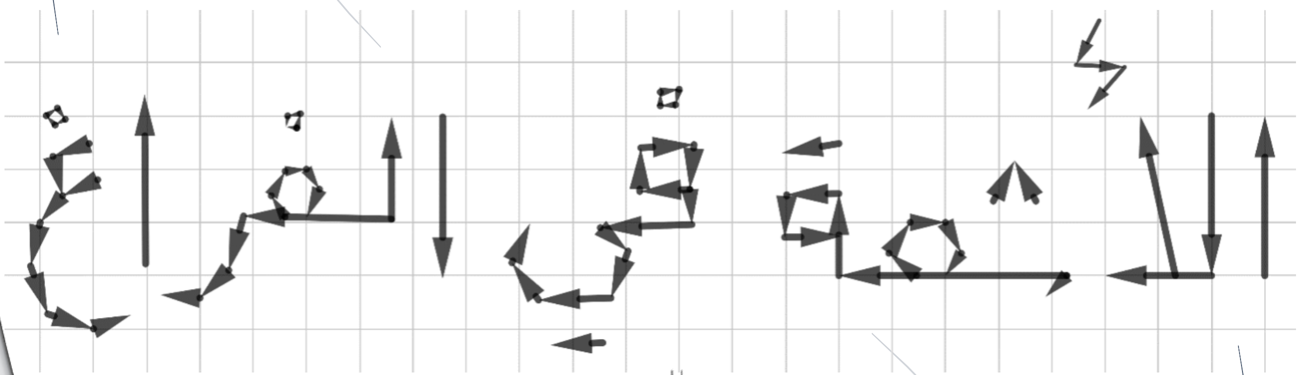
نوطه خاصة بأفكار الأشعة

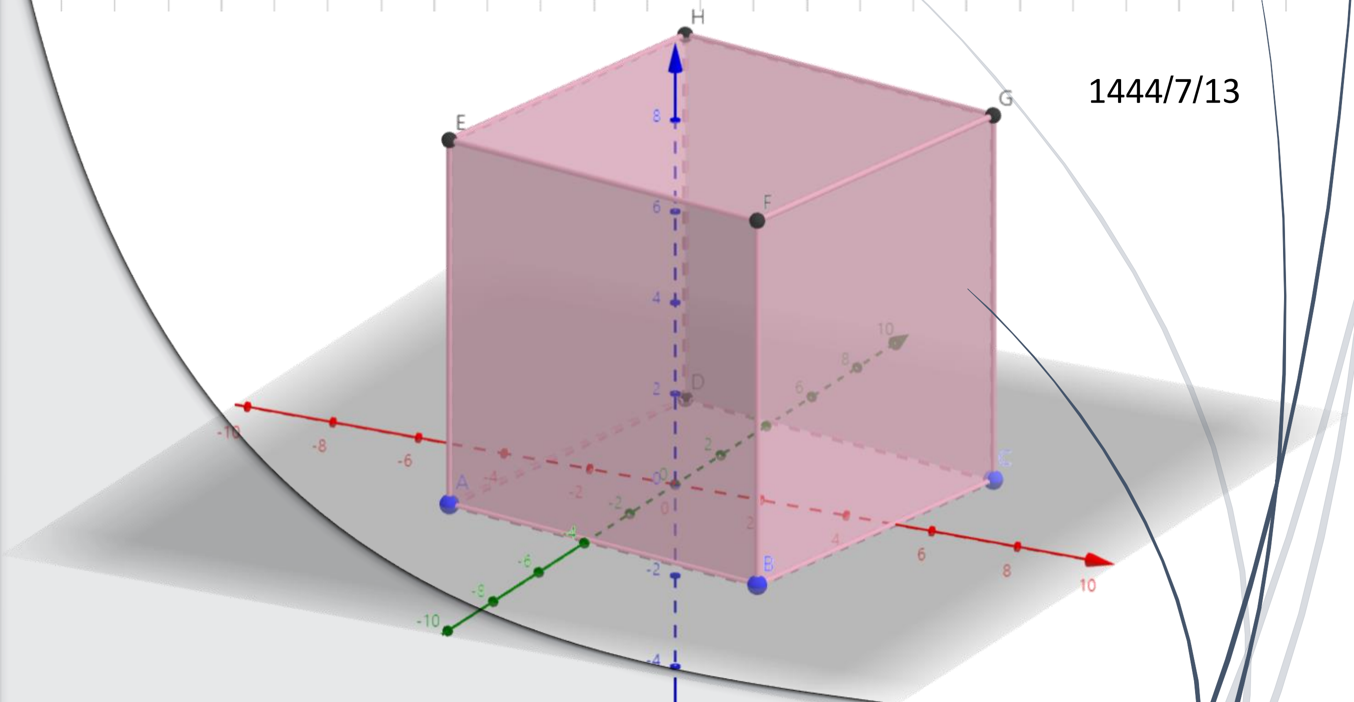
القسم الثالث

حل وتوضيح تدريبات ومسائل الوحدة الثالثة + أسئلة الدورات المتعلقة بالأشعة 2017-2022

أ.د. برلنت صبري مطيط و م. نور محمد بسيم أشقر

لطلاب الثالث الثانوي العلمي





1444/7/13

لتحميل القسم الأول والثاني يرجى زيارة الموقع أدناه

https://sites.google.com/site/appmaths2020/

قَالَ رَسُولُ اللهِ ﷺ : " إِنَّمَا الأَعْمَالُ بِالنِّيَّاتِ ، وَإِنَّمَا لِكُلِّ امْرِىءٍ مَا نَوَى ، فَمَنْ كَانَتْ هِجْرَتُهُ إِلى اللهِ وَرَسُولِه فَهِجْرَتُهُ إِلى اللهِ وَرَسُولِه ، وَمَنْ كَانَتْ هِجْرَتُهُ لِدُنْيَا يُصِيبُهَا ، أَو امْرَأَةٍ يَنْكِحُهَا ، فَهِجْرَتُهُ إِلى مَا هَاجَرَ إِلَيْهِ"

-- المستقيمات والمستويات في الفراغ --

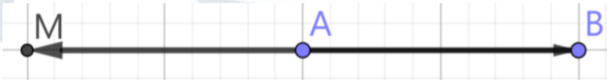
تدرب (1) صفحة 80

النقطتان A و B نقطتان مختلفتان. في الحالات الآتية عيّن t التي تحقق $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$.

1) M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-2)$ و $(B,1)$.

M م.أ.م لنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$

$\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}=\vec{0}\,;\ \alpha+\beta\neq 0$



M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-2)$ و $(B,1)$، ومنه

$$-2\overrightarrow{MA}+\underbrace{\overrightarrow{MB}}_{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Rightarrow-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}$$

ومنه

$$t=-1$$

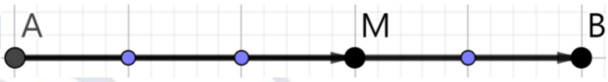
2) M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,3)$.

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,3)$، ومنه

$$2\overrightarrow{MA}+3\underbrace{\overrightarrow{MB}}_{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Rightarrow5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{MA}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$



ومنه

$$t=\frac{3}{5}$$

تدرب (2) صفحة 81

أعط في الحالات الآتية α و β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β).

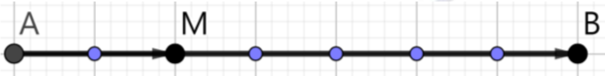
$\boxed{1}$ $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$

M م.أ.م لنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB},\quad\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$$

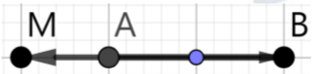
$$\Rightarrow\beta=2\ \text{و}\ \beta+\alpha=7\Rightarrow\begin{cases}\beta=2\\\alpha=5\end{cases}$$



$\boxed{2}$ $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$$2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

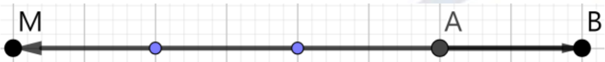
$$\Rightarrow\beta=-1\ \text{و}\ \beta+\alpha=2\Rightarrow\begin{cases}\beta=-1\\\alpha=3\end{cases}$$



$\boxed{3}$ $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow\beta=-3\ \text{و}\ \beta+\alpha=1\Rightarrow\begin{cases}\beta=-3\\\alpha=4\end{cases}$$



تدرب (3) صفحة 81

في الشكل الآتي التدريجات متساوية. عبر في كل حالة عن كل واحدة من النقاط A و B و C بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الأخريين.

❶

A مركز أبعاد متناسبة لـ B و C عندئذٍ

$$5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

B مركز أبعاد متناسبة لـ A و C عندئذٍ

$$2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$

C مركز أبعاد متناسبة لـ A و B عندئذٍ

$$-2\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CB}=\vec{0}\ \text{أو}\ 2\overrightarrow{CA}-5\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$

❷

A مركز أبعاد متناسبة لـ B و C عندئذٍ

$$4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}\ \text{أو}\ 2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

B مركز أبعاد متناسبة لـ A و C عندئذٍ

$$6\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BC}=\vec{0}\ \text{أو}\ 3\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$

C مركز أبعاد متناسبة لـ A و B عندئذٍ

$$6\overrightarrow{CA}-4\overrightarrow{CB}=\vec{0}\ \text{أو}\ 3\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$

نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

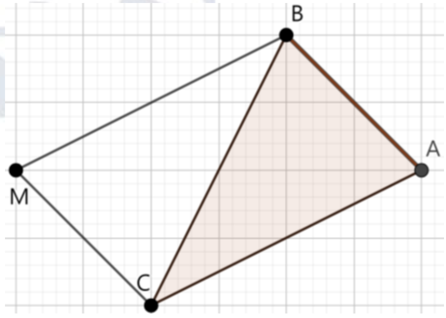
تدرب (4) صفحة 81

نتأمل مثلثاً ABC. في كل حالة مما يأتي، جد عددين x و y بحيث $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

1) M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$.

M مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

$$\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC} = \vec{0}\ ;\ \alpha+\beta+\gamma \neq 0$$



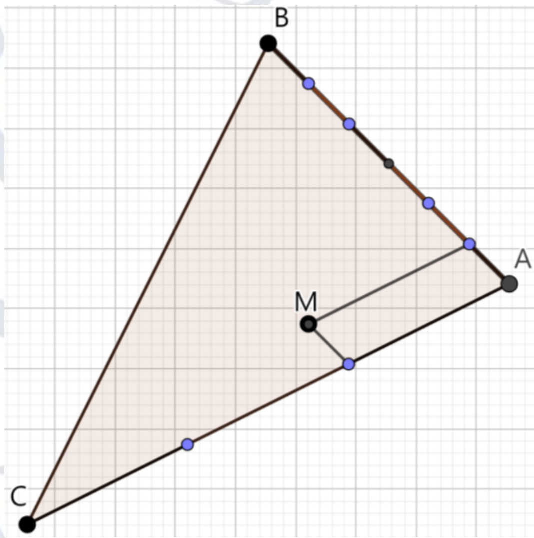
$$-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{MA} = \underbrace{\overrightarrow{MB}}_{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}} + \underbrace{\overrightarrow{MC}}_{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}}$$

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Longrightarrow x = 1, \quad y = 1$$

2) M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$.



$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$3\overrightarrow{MA} + \underbrace{\overrightarrow{MB}}_{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}} + 2\underbrace{\overrightarrow{MC}}_{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Longrightarrow$$

$$6\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1}{6}, \quad y = \frac{1}{3}$$

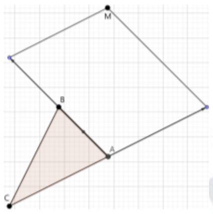
تدرب (5) صفحة 81

نتأمل مثلثاً ABC. في كل حالة مما يأتي، جد الأعداد α و β و γ لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ).

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

M مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

فيوجد x,y بحيث $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$



(راجع ما ورد صفحة 20 من القسم الأول)

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

بالمقارنة نجد

$$\beta = 2\,, \qquad \gamma = -1$$

$$\alpha+\beta+\gamma = 1 \Longrightarrow \alpha = 0$$

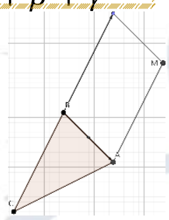
$\boxed{2}$ $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$$

بالمقارنة نجد

$$\alpha = 1\,, \qquad \gamma = -1$$

$$\alpha+\beta+\gamma = 1 \Longrightarrow \beta = 1$$

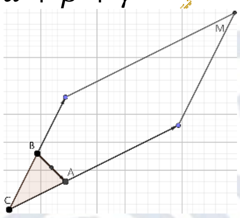


$\boxed{3}$ $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}$$

$$\alpha = 3\,, \qquad \beta = 2$$

$$\alpha+\beta+\gamma = 1 \Longrightarrow \gamma = -4$$



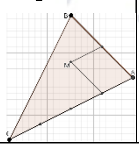
$\boxed{4}$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AM} = \underbrace{\overrightarrow{MB}}_{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\beta = 2\,, \qquad \gamma = 1$$

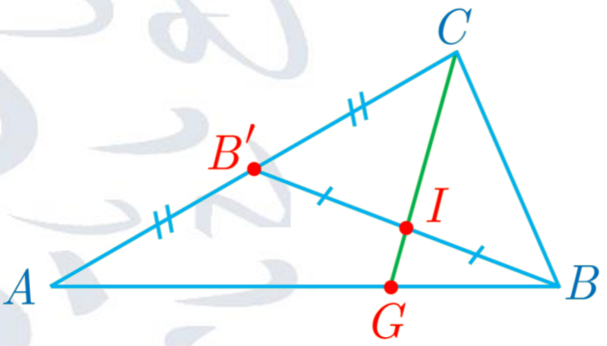
$$\alpha+\beta+\gamma = 1 \Longrightarrow \alpha = 1$$



+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

تدرب (6) صفحة 81

انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأمثال α و β و γ لتكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ). واستنتج λ التي تحقق $\overrightarrow{GA}+\lambda\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.



B' منتصف $[AC]$ ⟸ فهي مركز أبعاد متناسبة لـ

$$\underbrace{(A,1),(C,1)}_{\substack{\text{مجموع الوزنين } 1+1=2 \\ (B',2)}}$$

I منتصف $[BB']$ (أي للنقطتين نفس الوزن) فهي مركز أبعاد متناسبة

$$\underbrace{(B',2),(B,2)}_{(I,4)}$$

ومنه حسب الخاصة التجميعية $(I,4)$ مركز أبعاد متناسبة لـ

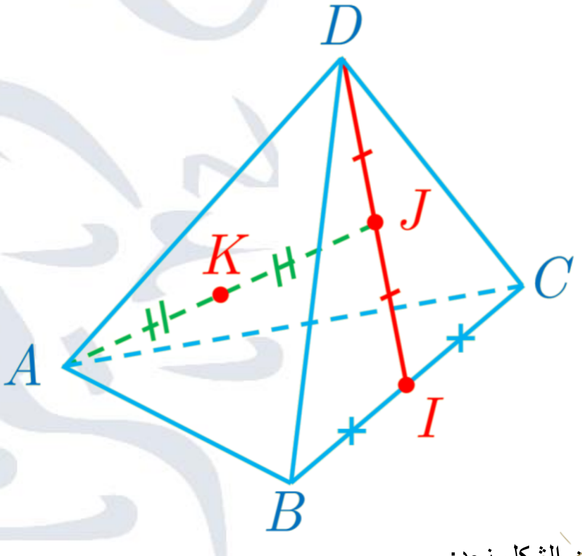
$$(A,1),(B,2),(C,1)$$

لدينا GC مار من I ويقطع AB في G، G مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,1),(B,2)$، أي

$$1\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Longrightarrow\lambda=2$$

تدرب (7) صفحة 81

انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأمثال α و β و γ و δ لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ).



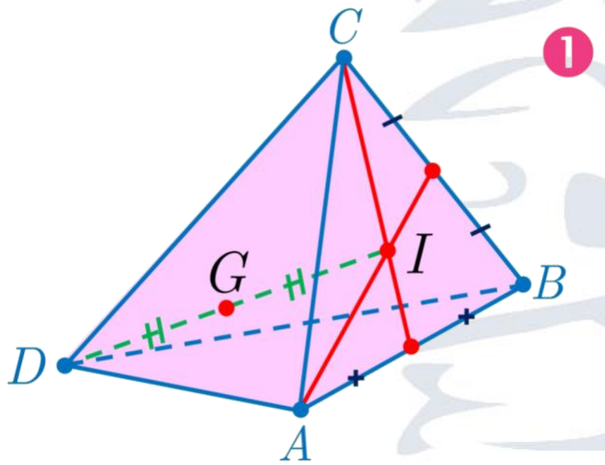
من الشكل نجد:

<table>
<tr><td>I منتصف $[BC]$
⟸
فهي مركز أبعاد متناسبة لـ
$\underbrace{(B,1),(C,1)}_{(I,2)}$</td><td>$J$ منتصف $[ID]$
(أي للنقطتين نفس الوزن) ⟸
فهي مركز أبعاد متناسبة لـ
$\underbrace{(D,2),(I,2)}_{(J,4)}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ومنه حسب الخاصة التجميعية $(J,4)$ مركز أبعاد متناسبة لـ
$(B,1),(C,1),(D,2)$</td></tr>
<tr><td>K منتصف $[AJ]$ ⟸
فهي مركز أبعاد متناسبة لـ
$\underbrace{(A,4),(J,4)}_{(K,8)}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">ومنه حسب الخاصة التجميعية $(K,8)$ مركز أبعاد متناسبة لـ
$(A,4),(B,1),(C,1),(D,2)$</td></tr>
</table>

تدرب (8) صفحة 81

$ABCD$ رباعي وجوه. استعمل الخاصة التجميعية لتعيين موضع النقطة G في الحالات الآتية:

1) G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,3)$.



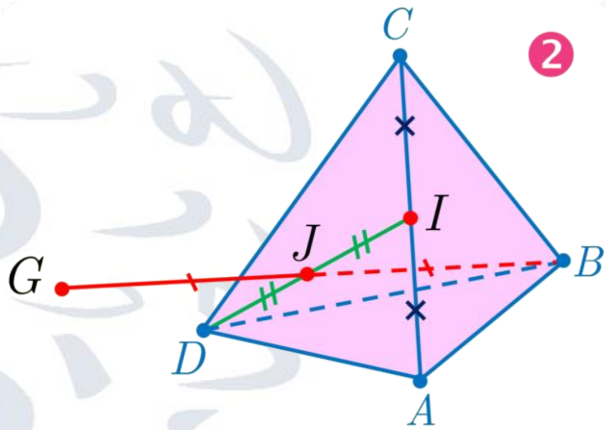
$$\underbrace{\underbrace{(A,1),(B,1),(C,1)}_{(I,3)},(D,3)}_{(G,6)}$$

- نلاحظ تساوي الأوزان عند النقاط A و B و C، فتكون $(I,3)$ مركز الأبعاد المتناسبة لهذه النقاط مركز ثقل المثلث ABC.

- نلاحظ أنّ الثقلين للنقطتين $(I,3)$ و $(D,3)$ متساويين فيكون مركز الأبعاد المتناسبة $(G,6)$ لهاتين النقطتين منتصف $[ID]$. (وهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الأربع)

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

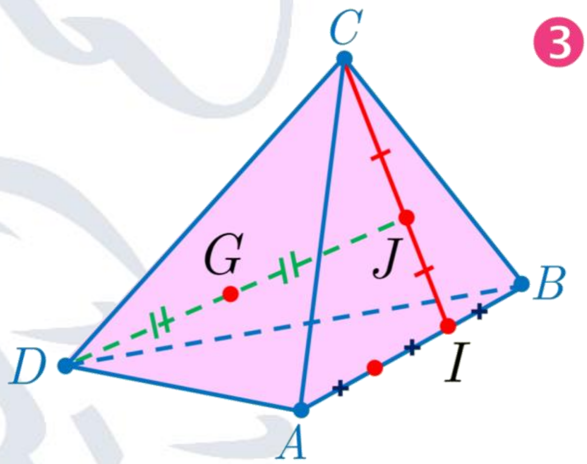
2) G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,-1)$ و $(D,-2)$.



$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(A,-1),(C,-1)}_{(I,-2)},(D,-2)}_{(J,-4)},(B,2)}_{(G,-2)}$$

- نلاحظ أنّ الثقلين في $(A,-1)$ و $(C,-1)$ متساويين، فمركز الأبعاد المتناسبة لهما $(I,-2)$ يقع منتصف $[AC]$.
- نلاحظ أنّ الثقلين في $(I,-2)$ و $(D,-2)$ متساويين، فمركز الأبعاد المتناسبة لهما $(J,-4)$ يقع منتصف $[DI]$.
- ومنه مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الأربع هو مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(J,-4)$ و $(B,2)$ وهو $(G,-2)$.

3) G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و $(D,6)$.



$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(A,1),(B,2)}_{(I,3)},(C,3)}_{(J,6)},(D,6)}_{(G,12)}$$

- مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,2)$ هو $(I,3)$ وحيث يكون $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
- نلاحظ أنّ الثقلين في $(I,3)$ و $(C,3)$ متساويين، فمركز الأبعاد المتناسبة لهما $(J,6)$ يقع منتصف $[IC]$.
- نلاحظ أنّ الثقلين في $(J,6)$ و $(D,6)$ متساويين، فمركز الأبعاد المتناسبة لهما $(G,12)$ يقع منتصف $[DJ]$.

(وهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الأربع)

تدرب (1) صفحة 84

نعطي معلماً متجانساً $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

أعط معادلة وسيطية للمستقيم d:

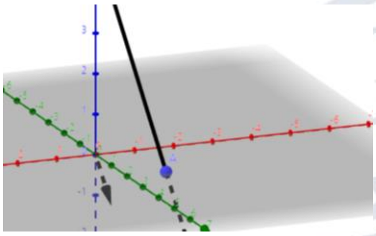
1) المستقيم d يمر بالنقطة $A(-1,2,0)$ وموجه بالشعاع $\vec{u}(0,1,-1)$.

$$\vec{u}(a,b,c),A(x_0,y_0,z_0)$$

$$d:\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\,,\qquad t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+ct\end{cases}$$

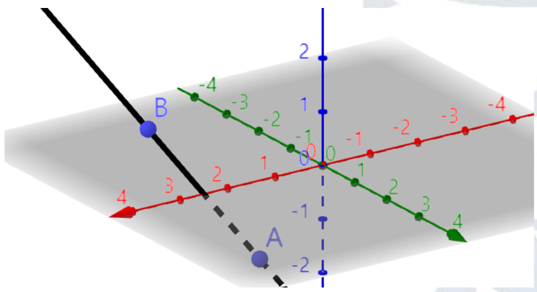
$$\vec{u}(0,1,-1),A(-1,2,0)$$

$$d:\begin{cases}x=-1\\ y=2+t\,,\qquad t\in\mathbb{R}\\ z=-t\end{cases}$$



2) $d=(AB)$ حيث $A(2,1,-1)$ و $B(3,-1,1)$.

الشعاع $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(1,-2,2)$ شعاع توجيه للمستقيم، ويمر بالنقطة A



$$d:\begin{cases}x=2+t\\ y=1-2t\ ,\qquad t\in\mathbb{R}\\ z=-1+2t\end{cases}$$

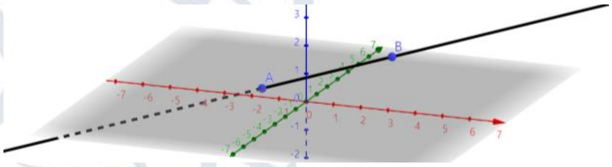
+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

تدرب (2) صفحة 84

نعطي معلماً متجانساً $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

نتأمّل النقطتين $A(-2,1,0)$ و $B(2,3,1)$. أعط تمثيلاً وسيطياً لكلٍّ من

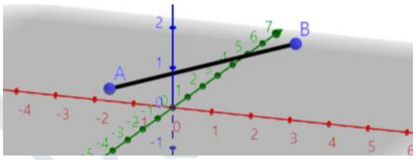
1) المستقيم (AB).



الشعاع $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(4,2,1)$ شعاع توجيه للمستقيم، ويمر بالنقطة A

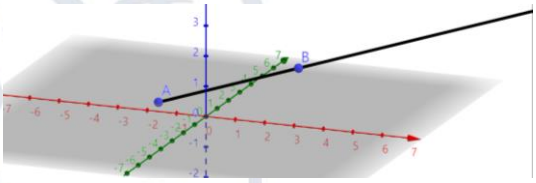
$$d:\begin{cases} x=-2+4t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases},\qquad t\in\mathbb{R}$$

2) القطعة المستقيمة $[AB]$.



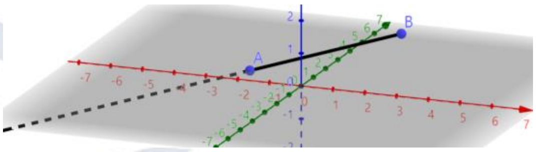
$$d:\begin{cases} x=-2+4t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases},\qquad t\in[0,1]$$

3) نصف المستقيم $[AB)$.



$$d:\begin{cases} x=-2+4t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases},\qquad t\in[0,\infty[$$

4) نصف المستقيم $[BA)$.



شعاع توجيهه $\overrightarrow{BA}(-4,-2,-1)$، ومبدؤه النقطة B

$$d:\begin{cases} x=2-4t \\ y=3-2t \\ z=1-t \end{cases},\qquad t\in[0,\infty[$$

ملاحظة

أو إذا لم نشأ أن نغير شعاع التوجيه، نغير عندها مجال الـ t

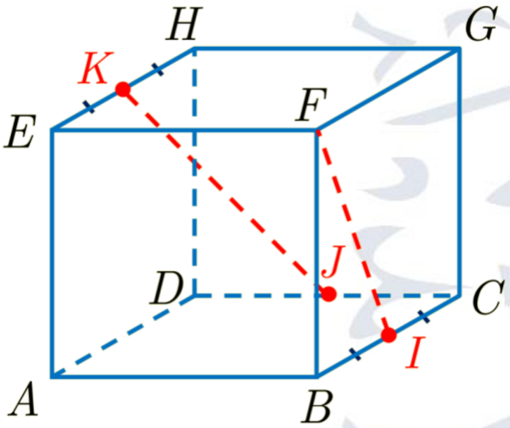
$$d:\begin{cases} x=2+4t \\ y=3+2t \\ z=1+t \end{cases},\qquad t\in]-\infty,0]$$

تدرب (3) صفحة 84

نعطي معلماً متجانساً $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه I. فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منتصف $[EH]$. نتأمّل المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1) أعط تمثيلاً وسيطياً لكل من (IK) و (FJ).



نكتب إحداثيات النقاط في هذا المعلم:

$A(0,0,0)$	$B(1,0,0)$	$C(1,1,0)$	$D(0,1,0)$
$E(0,0,1)$	$F(1,0,1)$	$G(1,1,1)$	$H(0,1,1)$

I منتصف $[BC]$

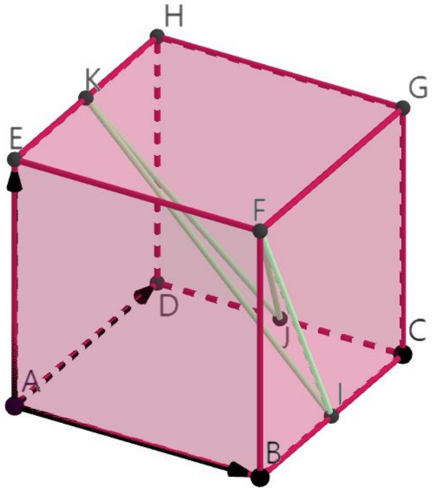
$$I\left(1,\frac{1}{2},0\right)$$

و J منتصف $[CD]$

$$J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$$

و K منتصف $[EH]$

$$K\left(0,\frac{1}{2},1\right)$$



المستقيم (IK) مار بالنقطة I ويقبل $\overrightarrow{IK}$ شعاعاً موجهاً

+963943608577 نور أشقر
+963941114148 برلنت مطيط
berlantcommunication@gmail.com

$\overrightarrow{IK}(-1,0,1)$

$$(IK):\begin{cases} x = 1-t \\ y = \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases} \quad , \quad t\in\mathbb{R}$$

المستقيم (FJ) مار بالنقطة F ويقبل $\overrightarrow{FJ}$ شعاعاً موجهاً

$\overrightarrow{FJ}\left(-\frac{1}{2},1,-1\right)$

$$(FJ):\begin{cases} x = 1-\frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases} \quad , \quad t\in\mathbb{R}$$

2) أيتقاطع المستقيمان (IK) و(FJ)؟ هل تقع النقاط I و J و K و F في مستو واحد؟

• نلاحظ أنَّ مركبات الشعاعين $\overrightarrow{IK}(-1,0,1)$ و $\overrightarrow{FJ}\left(-\frac{1}{2},1,-1\right)$ غير متناسبة، فالشعاعين غير مرتبطين خطياً، أي أنهما غير متوازيان.

• عدم الارتباط الخطي لا يعني بالضرورة أنهما متقاطعان، فقد يكونان متقاطعين أو متخالفين.

• نتأكد من كونهما متقاطعين أو لا بحل معادلتي المستقيمين حلاً مشتركاً (هنا تبدل رمز الوسيط في إحدى معادلتي المستقيمين، وتتأكد من أن الحل الناتج يحقق المعادلات الثلاث).

$$(IK)=(FJ):\begin{cases} 1-t = 1-\frac{1}{2}s \Rightarrow t = \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2} = s \\ t = 1-s \end{cases}$$

نلاحظ من المعادلة الثانية أنَّ $s=\frac{1}{2}$، بتعويض هذه القيمة في المعادلة الأولى والثالثة نجد:

$t=\frac{1}{4}$ و $t=\frac{1}{2}$ وهذا تناقض.

فالمستقيمان غير متقاطعين.

النقاط I و J و K و F لا تقع في مستو واحد لأنّ (IK) و(FJ) غير متوازيين وغير متقاطعين.

تدرب (1) صفحة 87

نعطي معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

في الحالات الآتية تحقق من تقاطع المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ وأعط تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك.

$\boxed{1}$ $\mathcal{P}_1: x+y=2$ و $\mathcal{P}_2: x+z=1$

يتقاطع مستويان إذا كان ناظميهما غير مرتبطين خطياً

الفصل المشترك ينتج بحل المعادلتين حلاً مشتركاً

نلاحظ أنَّ ناظم المستوي $\mathcal{P}_1$، وناظم $\mathcal{P}_2$ هما

$\overrightarrow{n_1}(1,1,0)$ و $\overrightarrow{n_2}(1,0,1)$

غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما $\frac{1}{1}\neq\frac{0}{1}$، فهما متقاطعان.

لإيجاد معادلة الفصل المشترك نحل المعادلتين حلاً مشتركاً

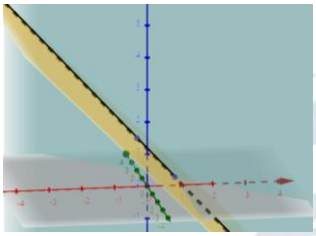
$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+z=1 \end{cases}$$

• لاستنتاج التمثيل الوسيطي للفصل المشترك نكتب اثنين من المجاهيل بدلالة الآخر ثم نفرضه t.

$$\begin{cases} y=2-x \\ z=1-x \end{cases}$$

نفرض $x=t$

$$d:\begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=1-t \end{cases} , \quad t\in\mathbb{R}$$



$\boxed{2}$ $\mathcal{P}_1: -x+y+z=3$ و $\mathcal{P}_2: 2x-y+2z=1$

نلاحظ أنَّ ناظم المستوي $\mathcal{P}_1$، وناظم $\mathcal{P}_2$ هما

$\overrightarrow{n_1}(-1,1,1)$ و $\overrightarrow{n_2}(2,-1,2)$

غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما $\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{-1}$، فهما متقاطعان.

لإيجاد معادلة الفصل المشترك نحل المعادلتين حلاً مشتركاً

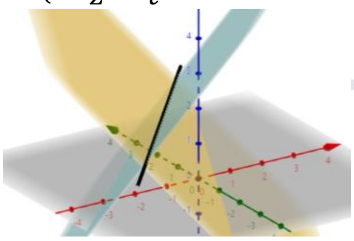
$$\begin{cases} -x+y+z=3 \Rightarrow x=y+z-3 \\ 2x-y+2z=1 \Rightarrow y=2x+2z-1 \end{cases}$$

• نعوض الأولى في الثانية والثانية في الأولى لنجد:

$$\begin{cases} x=2x+2z-1+z-3 \\ y=2(y+z-3)+2z-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-3z \\ y=7-4z \end{cases}$$

نفرض $z=t$

$$d:\begin{cases} x=4-3t \\ y=7-4t \\ z=t \end{cases} , \quad t\in\mathbb{R}$$



berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

تدرب (2) صفحة 87

نعطي معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

في الحالات الآتية أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d' وبيّن إذا كان $d \parallel d'$ أو كان d منطبقاً على d'.

$$\boxed{1}\ d:\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad , \quad d':\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

d' الفصل المشترك ينتج بحل المعادلتين حلاً مشتركاً

يتوازى مستقيمان إذا كان شعاعي توجيههما مرتبطين

خطياً

$$d':\begin{cases} y = 3x - 2z - 1 \\ z = x - y \end{cases}$$

نعوض الأولى في الثانية والثانية في الأولى لنجد:

$$\backsim \begin{cases} y = 1 - x \\ z = -1 + 2x \end{cases}$$

نفرض $x = t$، لتكون المعادلة الوسيطية للمستقيم d'

$$d':\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

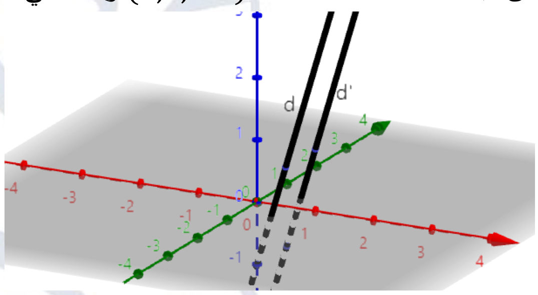
نلاحظ أنّ شعاع توجيه المستقيم d

$$\overrightarrow{u_d}(1,-1,2)$$

وشعاع توجيه المستقيم d'

$$\overrightarrow{u_{d'}}(1,-1,2)$$

الشعاعان مرتبطان خطياً فالمستقيمان متوازيان، وغير منطبقان لأنَّه من أجل $t = 0$ النقطة $(0,0,-1) \in d$ ولا تنتمي لـ d'.



$$\boxed{2}\ d:\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = t + 1 \end{cases} \quad , \quad d':\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - y - 2z = 5 \end{cases}$$

$$d':\begin{cases} x = 3 - y + 2z \\ y = -5 + x - 2z \end{cases}$$

$$\backsim \begin{cases} x = 4 + 2z \\ y = -1 \end{cases}$$

نفرض $z = t$، لتكون المعادلة الوسيطية للمستقيم d'

$$d':\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

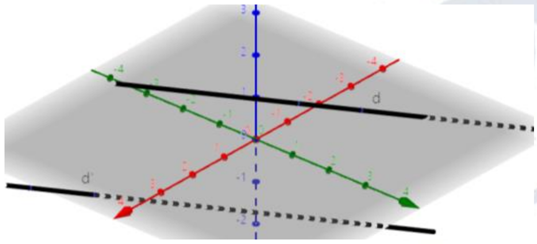
نلاحظ أنّ شعاع توجيه المستقيم d

$$\overrightarrow{u_d}(2,0,1)$$

وشعاع توجيه المستقيم d'

$$\overrightarrow{u_{d'}}(2,0,1)$$

الشعاعان مرتبطان خطياً فالمستقيمان متوازيان، وغير منطبقان لأنَّه من أجل $t = 0$ النقطة $(-1,2,1) \in d$ ولا تنتمي لـ d'.



تدرب (3) صفحة 87

نعطي معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

في الحالات الآتية أثبت تقاطع المستقيم d مع المستوي $\mathcal{P}$ وعين إحداثيات نقطة التقاطع.

1) $d = (AB)$ حيث $A(-1,2,3)$ و $B(1,2,-1)$، و $\mathcal{P}: x + y + z = 1$.

نثبت عدم التوازي والتقاطع من خلال إثبات عدم تعامد

ناظم المستوي مع شعاع توجيه المستقيم

لتعيين نقطة التقاطع نوجد المعادلة الوسيطية للمستقيم

ونحلها مع معادلة المستوي حلاً مشتركاً

شعاع توجيه المستقيم $d = (AB)$

$$\overrightarrow{AB}(2,0,-4)$$

ناظم المستوي $\mathcal{P}$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,1,1)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} = 2 + 0 - 4 = -2 \neq 0$$

وبالتالي المستقيم قاطع للمستوي لا يوازيه.

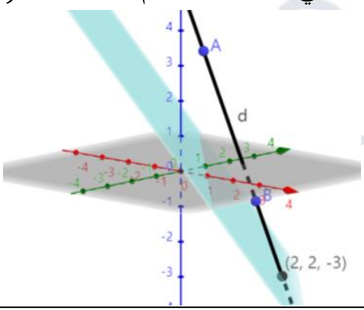
المعادلات الوسيطية للمستقيم $d = (AB)$ المار من A

$$d:\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 3 - 4t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض هذه المعادلات في معادلة المستوي $\mathcal{P}$ نجد

$$\underbrace{x}_{-1+2t} + \underbrace{y}_{2} + \underbrace{z}_{3-4t} = 1 \Rightarrow 4 - 2t = 1 \Longrightarrow t = \frac{3}{2}$$

بتعويض قيمة t في معادلة المستقيم نجد النقطة $(2,2,-3)$



نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

2) d يمر بالنقطة $A(2,-1,0)$ ويوجهه الشعاع $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$، و $\mathcal{P}:\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-\frac{z}{6}=1$.

شعاع توجيه المستقيم d

$$\vec{u}(1,-2,0)$$

ناظم المستوي $\mathcal{P}$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\right)$$

$$\vec{u}.\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+0=-\frac{1}{6}\neq 0$$

وبالتالي المستقيم قاطع للمستوي لا يوازيه.

المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار من A

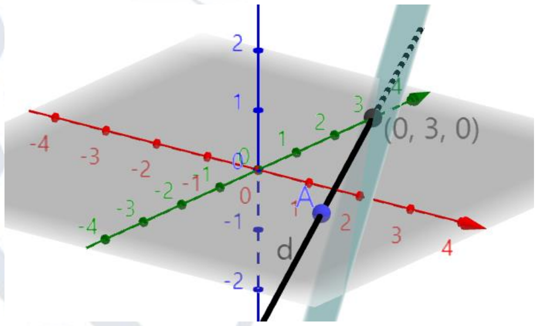
$$d:\begin{cases}x=2+t\\ y=-1-2t\\ z=0\end{cases}$$

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض هذه المعادلات في معادلة المستوي $\mathcal{P}$ نجد

$$\frac{1}{2}\underbrace{x}_{2+t}+\frac{1}{3}\underbrace{y}_{-1-2t}-\frac{1}{6}\underbrace{z}_{0}=1\Rightarrow$$

$$1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t=1\Longrightarrow-\frac{1}{6}t=\frac{1}{3}\Rightarrow t=-2$$

بتعويض قيمة t في معادلة المستقيم نجد النقطة $(0,3,0)$.



تدرب (4) صفحة 87

نعطي معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

في الحالات الآتية، ادرس تقاطع المستقيم d والمستوي $\mathcal{P}$.

$$\boxed{1}\ d:\begin{cases}x=2t-1\\ y=t\\ z=1-3t\end{cases},\qquad \mathcal{P}:x-y+z=1$$

شعاع توجيه المستقيم d

$$\vec{u}(2,1,-3)$$

ناظم المستوي $\mathcal{P}$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,-1,1)$$

$$\vec{u}.\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=2-1-3=-2\neq 0$$

وبالتالي المستقيم قاطع للمستوي لا يوازيه.

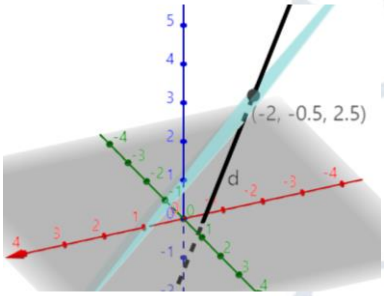
لإيجاد نقطة التقاطع نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي $\mathcal{P}$ نجد

$$\underbrace{x}_{2t-1}-\underbrace{y}_{t}+\underbrace{z}_{1-3t}=1\Rightarrow$$

$$2t-1-t+1-3t=1\Longrightarrow-2t=1$$

$$\Rightarrow t=-\frac{1}{2}$$

بتعويض قيمة t في معادلة المستقيم نجد نقطة التقاطع $\left(-2,-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$.



$$\boxed{2}\ d:\begin{cases}x=s+1\\ y=2s+1\\ z=8s-3\end{cases},\qquad \mathcal{P}:2x+3y-z=0$$

شعاع توجيه المستقيم d

$$\vec{u}(1,2,8)$$

ناظم المستوي $\mathcal{P}$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(2,3,-1)$$

$$\vec{u}.\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=2+6-8=0$$

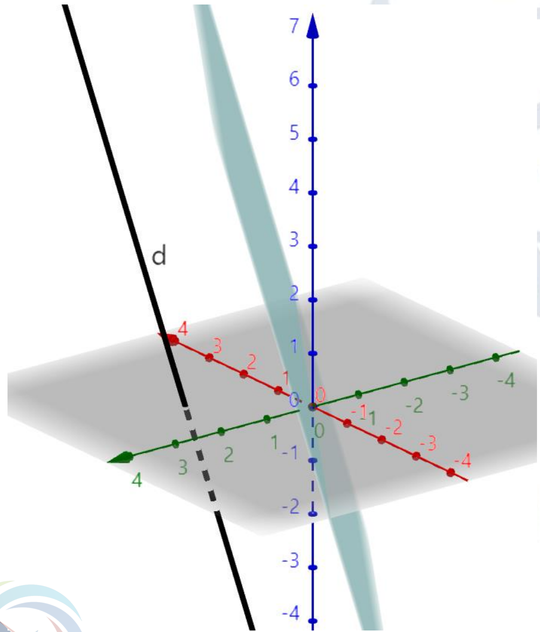
وبالتالي المستقيم يوازي المستوي ولا يقطعه.

ونلاحظ أيضاً أنّه بحل المعادلات حلاً مشتركاً نحصل على تناقض

$$2\underbrace{x}_{s+1}+3\underbrace{y}_{2s+1}-\underbrace{z}_{8s-3}=0$$

$$2s+2+6s+3-8s+3=0\Rightarrow 0=-8$$

وهذا مرفوض إذاً لا يمكن أن يتقاطع المستقيم مع المستوي.



berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

تدرب: صفحة 90

نعطي في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

في كل من الحالات الآتية نعطي معادلات ثلاثة مستويات، حل الجملة الخطية الموافقة وبيّن إذا كانت هذه المستويات تشترك في نقطة فقط، أو في مستقيم مشترك، أو لا تشترك بأية نقطة:

$$\boxed{1}\begin{cases}\mathcal{P}_1: & 5x+\ \ y+\ \ z=-5\\ \mathcal{P}_2: & 2x+13y-7z=-1\\ \mathcal{P}_3: & \ \ x-\ \ y+\ \ z=\ \ 1\end{cases}$$

في هذه الفقرة نستخدم **طريقة غاوس** (السّؤال لا يُلزمك باستخدام طريقة معينة فأنت مخير في استخدام أي طريقة)

$$\begin{cases}5x+\ \ y+\ \ z=-5\\ 2x+13y-7z=-1\\ \ \ x-\ \ y+\ \ z=\ \ 1\end{cases}$$

الخطوة الأولى: يفضل أن يكون أمثال أول حد من المعادلة الأولى مساوياً 1، نلاحظ أنّ هذا غير محقق في هذا الترتيب المعطى، لذا إما نقسم المعادلة الأولى على 5 (أمثال الحد الأول)، أو نبدل بترتيب المعادلات بين الأولى والثالثة.

$$\sim\begin{cases}x-\ \ y+\ \ z=\ \ 1 & (L_1)\\ 2x+13y-7z=-1 & (L_2)\\ 5x+\ \ y+\ \ z=-5 & (L_3)\end{cases}$$

الخطوة الثانية: نقوم بحذف الحد الأول من المعادلة الثانية والثالثة باستخدام المعادلة الأولى

$$\sim\begin{cases}x-y+z=1 & (L_1)\\ 15y-9z=-3 & (L_2-2L_1)\\ 6y-4z=-10 & (L_3-5L_1)\end{cases}$$

$$\sim\begin{cases}x-\ y+\ z=1 & (L_1)\\ 5y-3z=-1 & (L_2')\\ 3y-2z=-5 & (L_3')\end{cases}$$

الخطوة الثالثة: نقوم بحذف الحد الثاني من المعادلة الثالثة باستخدام المعادلة الثانية

$$\sim\begin{cases}x-\ y+\ z=1 & (L_1)\\ 5y-3z=-1 & (L_2')\\ -\frac{1}{5}z=-\frac{22}{5} & \left(L_3'-\frac{3}{5}L_2'\right)\end{cases}$$

$$\sim\begin{cases}x-y+\ z=1 & (L_1)\\ 5y-3z=-1 & (L_2')\\ z=22 & (L_3'')\end{cases}$$

الخطوة الرابعة: تنتج معنا قيمة المتغير z من المعادلة الثالثة، نقوم بالتعويض بطريقة عَودية للحصول على قيمة y ثم x.

$$z=22\Longrightarrow y=13\Longrightarrow x=-8$$

ومنه المستويات تتقاطع في نقطة واحدة فقط هي $(-8,13,22)$

$$\boxed{2}\begin{cases}\mathcal{P}_1: & x-2y-3z=3\\ \mathcal{P}_2: & 2x-\ \ y-4z=7\\ \mathcal{P}_3: & 3x-3y-5z=8\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-2y-3z=3 & (L_1)\\ 2x-\ \ y-4z=7 & (L_2)\\ 3x-3y-5z=8 & (L_3)\end{cases}$$

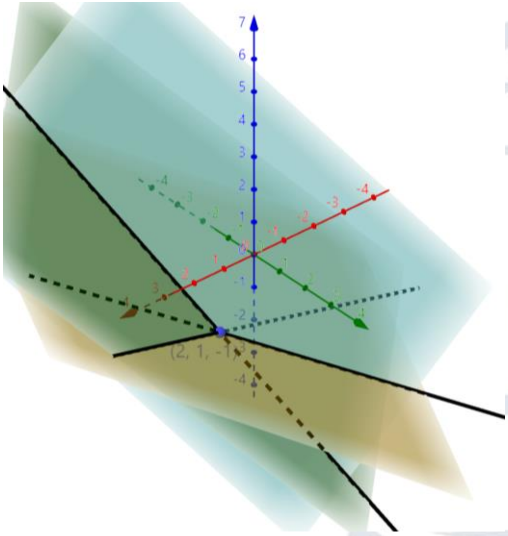
$$\sim\begin{cases}x-2y-3z=3 & (L_1)\\ 3y+2z=\ \ 1 & (L_2-2L_1)=(L_2')\\ 3y+4z=-1 & (L_3-3L_1)=(L_3')\end{cases}$$

$$\sim\begin{cases}x-2y-3z=3 & (L_1)\\ 3y+2z=1 & (L_2')\\ 2z=-2 & (L_3'-L_2')\end{cases}$$

ومنه نجد

$$z=-1\Longrightarrow y=1\Longrightarrow x=2$$

لجملة المعادلات حل وحيد، ومنه المستويات تتقاطع في نقطة واحدة فقط هي $(2,1,-1)$.



$$\boxed{3}\begin{cases}\mathcal{P}_1: & 2x-\ \ y+3z=0\\ \mathcal{P}_2: & \ \ x+2y+\ \ z=0\\ \mathcal{P}_3: & 3x-4y+5z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+2y+\ \ z=0 & (L_1)\\ 2x-\ \ y+3z=0 & (L_2)\\ 3x-4y+5z=0 & (L_3)\end{cases}$$

$$\sim\begin{cases}x+2y+\ \ z=0 & (L_1)\\ -5y+\ z=0 & (L_2-2L_1)\\ -10y+2z=0 & (L_3-3L_1)\end{cases}$$

$$\sim\begin{cases}x+2y+z=0 & (L_1)\\ -5y+z=0 & (L_2')\\ -5y+z=0 & (L_3')\end{cases}$$

نلاحظ أنَّ $(L_2')=(L_3')$، ومنه حل الجملة يكافئ

$$\sim\begin{cases}x+2y+z=0 & (L_1)\\ -5y+z=0 & (L_2')\end{cases}$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

وهي معادلة مستقيم (الفصل المشترك للمستويين)

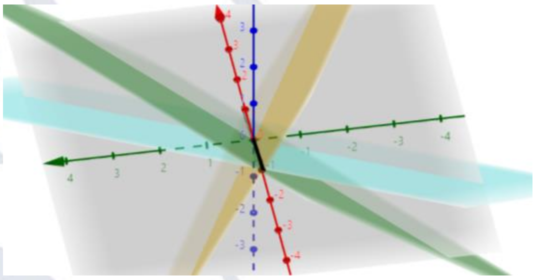
$(-5y+z=0$ و $x+2y+z=0$

$$\begin{cases} x=-2y-z \\ z=5y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=-7y \\ z=5y \end{cases}$$

ومنه لجملة المعادلات عدد لا نهائي من الحلول ممثلاً بمعادلة المستقيم

$$\Delta: \begin{cases} x=-7t \\ y=t \quad , \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=5t \end{cases}$$



$$\boxed{4}\ \begin{cases} \mathcal{P}_1: & 2x-y+3z=2 \\ \mathcal{P}_2: & x+2y+z=1 \\ \mathcal{P}_3: & 3x-4y+5z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=1 & (L_1) \\ 2x-y+3z=2 & (L_2) \\ 3x-4y+5z=3 & (L_3) \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y+z=1 & (L_1) \\ -5y+z=0 & (-2L_1+L_2) \\ -10y+2z=0 & (-3L_1+L_3) \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y+z=1 & (L_1) \\ -5y+z=0 & (L'_2) \\ -5y+z=0 & (L'_3) \end{cases}$$

نلاحظ أنَّ $(L'_2)=(L'_3)$، ومنه حل الجملة يكافئ

$$\sim \begin{cases} x+2y+z=1 & (L_1) \\ -5y+z=0 & (L'_2) \end{cases}$$

وهي معادلة مستقيم (الفصل المشترك للمستويين)

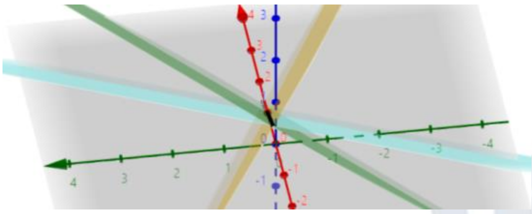
$(-5y+z=0$ و $x+2y+z=1$

$$\begin{cases} x=1-2y-z \\ z=5y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=1-7y \\ z=5y \end{cases}$$

ومنه لجملة المعادلات عدد لا نهائي من الحلول ممثلاً بمعادلة المستقيم

$$\Delta: \begin{cases} x=1-7t \\ y=t \quad , \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=5t \end{cases}$$



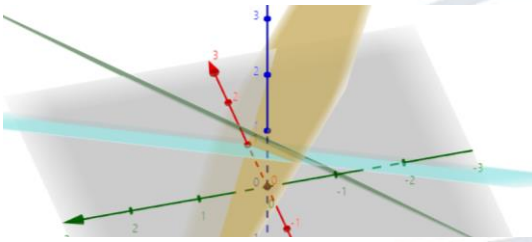
$$\boxed{5}\ \begin{cases} \mathcal{P}_1: & 2x-y+3z=2 \\ \mathcal{P}_2: & x+2y+z=1 \\ \mathcal{P}_3: & 3x-4y+5z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=1 & (L_1) \\ 2x-y+3z=2 & (L_2) \\ 3x-4y+5z=4 & (L_3) \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y+z=1 & (L_1) \\ -5y+z=0 & (-2L_1+L_2)=(L'_2) \\ -10y+2z=1 & (-3L_1+L_3)=(L'_3) \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y+z=1 & (L_1) \\ -5y+z=0 & (L'_2) \\ 0=1 & (-2L'_2+L'_3) \end{cases}$$

نلاحظ أن المساواة غير محققة في السطر الثالث، ومنه لا يوجد حل مشترك للمعادلات الثلاث، وتكون مجموعة حلول الجملة هي المجموعة الخالية $\emptyset$.

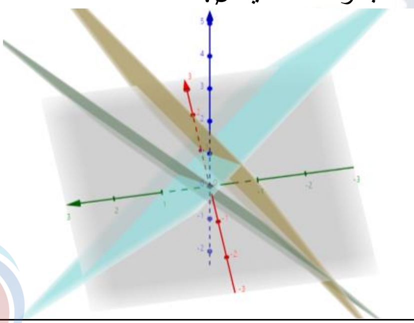


$$\boxed{6}\ \begin{cases} \mathcal{P}_1: & x+y+z=1 \\ \mathcal{P}_2: & x-2y+z=1 \\ \mathcal{P}_3: & 3x-4y+3z=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 & (L_1) \\ x-2y+z=1 & (L_2) \\ 3x-4y+3z=-1 & (L_3) \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+y+z=1 & (L_1) \\ -3y=0 & (-L_1+L_2) \\ -7y=-4 & (-3L_1+L_3) \end{cases}$$

نلاحظ التناقض في قيمة y من السطر الثاني والثالث، ومنه لا يوجد حل مشترك للمعادلات الثلاث، وتكون مجموعة حلول الجملة هي المجموعة الخالية $\emptyset$.



+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

عن أنس رضي الله عنه أنَّ رَجُلًا سَأَلَ النبيَّ صَلَّى اللهُ عليه وسلَّمَ عَنِ السَّاعَةِ، فَقالَ: مَتَى السَّاعَةُ؟ قالَ: وماذَا أعْدَدْتَ لَها .قالَ: لا شيءَ، إلَّا أنِّي أُحِبُّ اللَّهَ ورَسولَه صَلَّى اللهُ عليه وسلَّمَ، فَقالَ: أنْتَ مع مَن أحْبَبْتَ. قالَ أنَسٌ: فَما فَرِحْنَا بشيءٍ، فَرَحَنَا بقَوْلِ النبيِّ صَلَّى اللهُ عليه وسلَّمَ: أنْتَ مع مَن أحْبَبْتَ قالَ أنَسٌ: فأنَا أُحِبُّ النبيَّ صَلَّى اللهُ عليه وسلَّمَ وأَبَا بَكْرٍ، وعُمَرَ، وأَرْجُو أنْ أكُونَ معهُمْ بحُبِّي إيَّاهُمْ، وإنْ لَمْ أعْمَلْ بمِثْلِ أعْمَالِهِمْ.

مراجعة لفكرة التدريب السابق

عند حل جملة ثلاث معادلات خطية بثلاثة مجاهيل هناك ثلاث حالات من الممكن أن نصادفها

للجملة حل وحيد فقط	ينتج بالحل المشترك (ويمثل نقطة تقاطع المستويات الثلاث)
للجملة عدد لا نهائي من الحلول	في حال تساوى سطران أو أكثر في حال تساوى سطران فإن حلول الجملة تمثل مستقيم Δ في حال تساوي ثلاث أسطر فإن حلول الجملة تمثل مستوياً (المستويات الثلاث طبوقة)
ليس للجملة حل على الإطلاق	نحصل على تناقض عند الحل المشترك وحلول المعادلة هي $\emptyset$

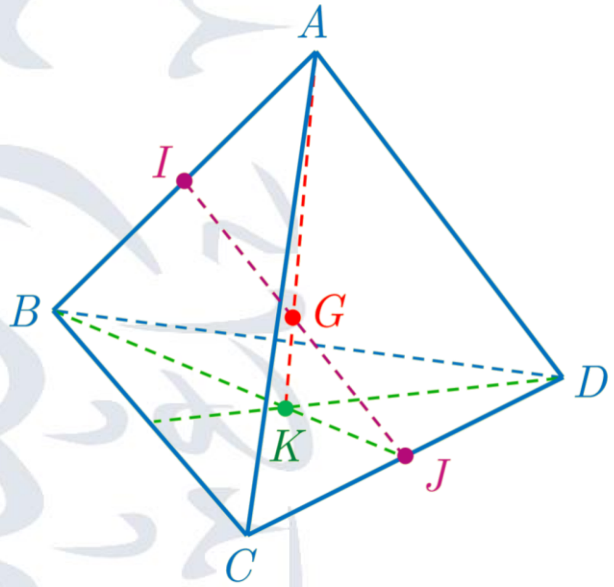
+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

-- مستقيمات متقاطعة في الفراغ --

خواص عامة خواص رباعي الوجوه

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ما. ولتكن G مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوسه مزوّدة جميعها بالأمثال 1 ذاتها. وليكن K مركز ثقل المثلث BCD. وكذلك ليكن I و J منتصفي $[AB]$ و $[CD]$ بالترتيب.

1) نسمّي القطعة المستقيمة التي تصل الرأس بمركز ثقل الوجه المقابل **متوسطاً** في رباعي الوجوه. نهدف إلى إثبات تلاقي المتوسطات جميعها في نقطة واحدة هي النقطة G. ولهذا نسمي G مركز ثقل رباعي الوجوه.



a) استعمل الخاصة التجميعية لتثبت أنَّ G تقع على $[AK]$ وأنَّ $AG = \frac{3}{4}AK$.

K مركز ثقل المثلث BCD، ومنه $(K,3)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1),(C,1),(D,1)$

G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$

وبالتالي حسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1),(K,3)$.

إذن فإنَّ G تنتمي للقطعة المستقيمة $[AK]$ وتحقق

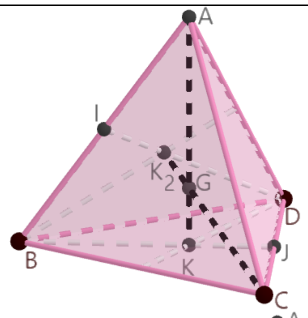
$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AK}$$

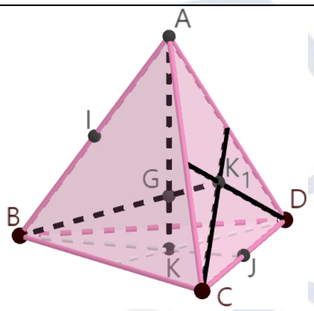
b) أثبت بالمثل أنَّ G تقع على المتوسطات الثلاثة الأخرى.

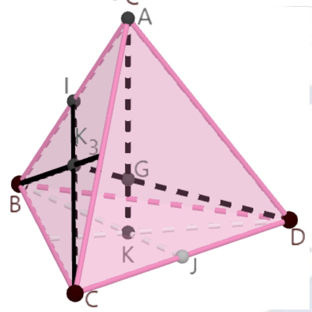
بفرض K_1 مركز ثقل المثلث ACD، ومنه $(K_1,3)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(C,1),(D,1)$

G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$

وبالتالي حسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(B,1),(K_1,3)$.





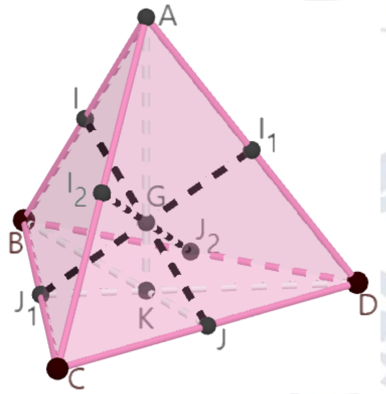


إذن فإنَّ G تنتمي للقطعة المستقيمة $[BK_1]$ وتحقق

$$\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BK_1}$$

بسبب الدور المتناظر الذي تؤديه رؤوس رباعي الوجوه نستنتج أنَّ G تقع على جميع متوسطات رباعي الوجوه وتقسم كلاً منها بنسبة $3:1$.

2) نهدف في هذا السّؤال إلى إثبات أنَّ القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات الأحرف المتقابلة في رباعي الوجوه تتلاقى أيضاً في G، وأنَّ G تقع في منتصف كل منها.



a) أثبت أنَّ G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$ و $(J,2)$. واستنتج أنَّ G تقع في منتصف $[IJ]$.

I منتصف $[AB]$، فتكون $(I,2)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,1)$.

J منتصف $[CD]$، فتكون $(J,2)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,1)$.

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

بما أنّ G مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$$\underbrace{(A,1),(B,1)},\underbrace{(C,1),(D,1)}$$

فهي تكون مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,2)$ و$(J,2)$، وتقع منتصف $[IJ]$ لتساوي الثقلين في I و J.

b) أثبت صحة الخاصة المشار إليها في 2).

بنفس الأسلوب المتبع في الطلب السابق يمكن إثبات ذلك.

أو نكتب اختصاراً "بسبب الدور المتناظر الذي تؤديه رؤوس رباعي الوجوه نستنتج أنَّ G تقع أيضاً في منتصف جميع القطع المستقيمة التي يصل كل منها بين منتصفي ضلعين متقابلين في رباعي الوجوه."

مسألة مستقيمات متقاطعة

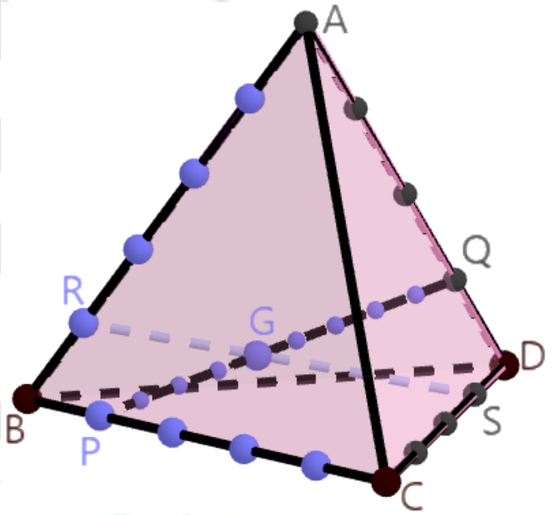
ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ما. ولنعرّف النقاط P و Q و R و S كما يأتي:

$$\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \text{ و } \overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA} \text{ و } \overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{و } \overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$$

نريد إثبات تلاقي المستقيمين (PQ) و(RS).

1) a) أثبت أنَّ P مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,4)$ و$(C,1)$. وأنَّ Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و$(D,3)$.



P م.أ.م للنقطتين $(C,1),(B,4)$

$$\overrightarrow{PC}+4\overrightarrow{PB}=\vec{0}\ ;\ 1+4\neq 0$$

ننطلق من العلاقة المعطاة وصولاً إلى العلاقة المطلوبة.

$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\underbrace{\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC}}$$

$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BP}+\frac{1}{5}\overrightarrow{PC}\Rightarrow\vec{0}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{BP}+\frac{1}{5}\overrightarrow{PC}$$

$$\Rightarrow 4\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

وبالتالي P مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,4)$ و$(C,1)$

Q م.أ.م للنقطتين $(A,1),(D,3)$

$$\overrightarrow{QA}+3\,\overrightarrow{QD}=\vec{0}\ ;\ 1+3\neq 0$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\ \underbrace{\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QD}}$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AQ}+\frac{3}{4}\overrightarrow{QD}\Rightarrow\vec{0}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AQ}+\frac{3}{4}\overrightarrow{QD}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{QA}+3\overrightarrow{QD}=\vec{0}$$

وبالتالي Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و$(D,3)$

b) لتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و$(B,4)$ و$(C,1)$ و$(D,3)$. بين أنَّ G تقع على المستقيم (PQ).

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و$(B,4)$ و$(C,1)$ و$(D,3)$، فهي مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(P,5)$ و$(Q,4)$

$$\underbrace{(A,1),(D,3)}_{(Q,4)}\text{ و }\underbrace{(C,1),(B,4)}_{(P,5)}$$

إذن G تقع على المستقيم (PQ).

2) أثبت بأسلوب مماثل أنَّ G تقع أيضاً على (RS)، فالمستقيمان (PQ) و(RS) متقاطعان.

R م.أ.م لنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$

$$\overrightarrow{BR}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\ \overrightarrow{BA}$$

لدينا

$$\overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}\Rightarrow\alpha=1,\beta=4$$

S م.أ.م لنقطتين $(C,\gamma),(D,\delta)$

$$\overrightarrow{DS}=\frac{\gamma}{\gamma+\delta}\ \overrightarrow{DC}$$

لدينا

$$\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\Rightarrow\gamma=1,\delta=3$$

إذن $(R,5)$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(A,1)$ و$(B,4)$ و$(S,4)$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(C,1)$ و$(D,3)$

ومنه حسب الخاصة التجميعية تكون G مركز أبعاد متناسبة لـ $(R,5)$ و$(S,4)$ وبالتالي تقع على المستقيم (RS).

فالمستقيمان (PQ) و(RS) متقاطعان في G.

3) لتكن I منتصف $[AC]$. أثبت تلاقي المستقيمين (IG) و(BD)، وعيّن نقطة تقاطعهما.

تقع ثلاثة نقاط على استقامة واحدة إذا كانت إحداهما م.أ.م للباقيتين

نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

I منتصف $[AC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و$(C,1)$،

لتكن T مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,4)$ و$(D,3)$

$$T \in (BD)$$

حسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

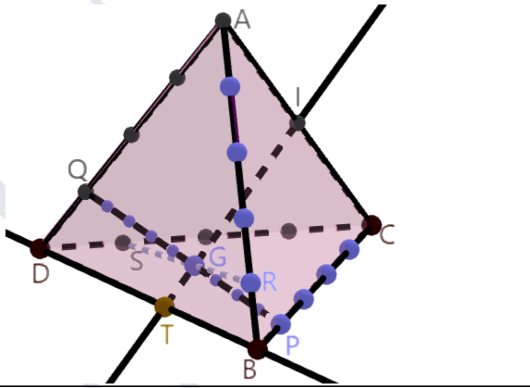
$$\underbrace{(A,1),(C,1)}_{(I,2)} \text{ و } \underbrace{(D,3),(B,4)}_{(T,7)}$$

وبالتالي I و G و T تقع على استقامة واحدة، ومنه تكون

$$T \in (IG)$$

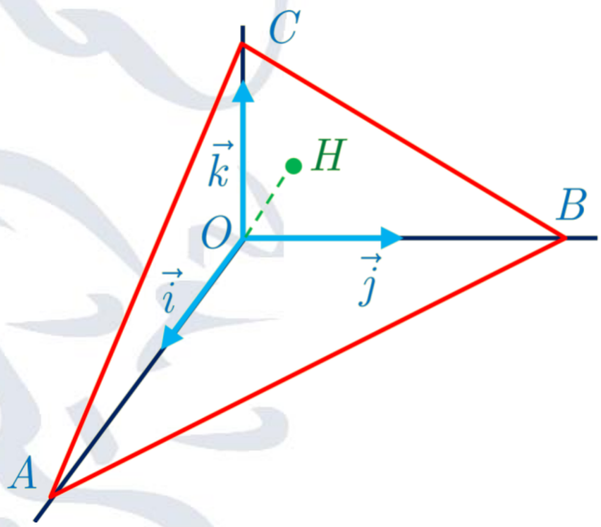
أي أنَّ المستقيمان (BD) و(IG) متقاطعان في نقطة T هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,4)$ و$(D,3)$.

$$\overrightarrow{BT} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BD}$$



بعد نقطة عن مستو

نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(a,0,0)$ و$B(0,b,0)$ و$C(0,0,c)$ حيث a وb وc أعداداً موجبة تماماً. نهدف إلى إثبات علاقة بين بُعد O عن المستوي (ABC) والمسافات OA وOB وOC.



1) a) أثبت أنَّ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ معادلة للمستوي (ABC).

معادلة مستوٍ مار من ثلاثة نقاط

$A(a,0,0)$	$B(0,b,0)$	$C(0,0,c)$
$\overrightarrow{AB}(-a,b,0)$	$\overrightarrow{AC}(-a,0,c)$	

نوجد معادلة المستوي إما باستنتاج الناظم (حيث يكون عمودي على الشعاعين)، أو من خلال معرفة مجموعة نقاط المستوي هي مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$(x-a,y,z) = \alpha(-a,b,0) + \beta(-a,0,c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-a = -\alpha a - \beta a & (1) \\ y = \alpha b \Rightarrow \alpha = \dfrac{y}{b} & (2) \\ z = \beta c \Rightarrow \beta = \dfrac{z}{c} & (3) \end{cases}$$

نعوض (2) و(3) في (1)

$$x-a = -\frac{y}{b}a - \frac{z}{c}a \Longrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1$$

حيث $a,b,c \neq 0$.

b) استنتج تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار بالنقطة O عمودياً على المستوي (ABC).

نلاحظ أنَّ ناظم المستوي (ABC) هو $\vec{n}\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ وهو أيضاً شعاع موجه للمستقيم Δ، وبالتالي تكون معادلة المستقيم

$$\Delta: \begin{cases} x = \dfrac{t}{a} \\ y = \dfrac{t}{b}, & t \in \mathbb{R} \\ z = \dfrac{t}{c} \end{cases}$$

2) لتكن H نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي (ABC).

a) احسب إحداثيات H بدلالة a و b و c.

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نحل معادلة المستقيم والمستوي حلاً مشتركاً

$$\frac{t}{a^2}+\frac{t}{b^2}+\frac{t}{c^2} = 1 \Longrightarrow t = \frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}$$

ومنه نقطة التقاطع H هي

$$\left(\frac{a\,b^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2},\frac{a^2b\,c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2},\frac{a^2b^2c}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}\right)$$

b) تحقّق أنَّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

نتحقق من أنَّ

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$$

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$$

نورأشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

$$\overrightarrow{AH}\left(\frac{a\,b^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}-a,\frac{a^2b\,c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2},\frac{a^2b^2c}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}\right)$$

$$\overrightarrow{BC}(0,-b,c)$$

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0-\frac{a^2b^2\,c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}+\frac{a^2b^2\,c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}=0$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BH}\left(\frac{a\,b^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2},\frac{a^2b\,c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}-b,\frac{a^2b^2c}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}\right)$$

$$\overrightarrow{AC}(-a,0,c)$$

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2b^2\,c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}+0+\frac{a^2b^2\,c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}=0$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CH}\left(\frac{a\,b^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2},\frac{a^2b\,c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2},\frac{a^2b^2c}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}-c\right)$$

$$\overrightarrow{AB}(-a,b,0)$$

$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=-\frac{a^2b^2\,c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}+\frac{a^2b^2\,c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}+0=0$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$$

أعد الكتابة هنا

كان من الممكن أن نخفف من هذه الكتابة لو فرضنا بداية الطلب 2 أنَّ $t=t_0=\frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$ وكتبنا على أساسها.

c) نضع $h=OH$ أثبت أنَّ $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

لنحسب الطول $OH=h$ حيث $H\left(\frac{t_0}{a},\frac{t_0}{b},\frac{t_0}{c}\right),O(0,0,0)$

$$\Rightarrow OH^2=h^2=t_0^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2}\Rightarrow\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

في حال لم نفرض فرضية أنّ $t=t_0=\frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$ سنضطر إلى كتابة ما يلي

$$h^2=\left(\frac{a\,b^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}\right)^2+\left(\frac{a^2b\,c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}\right)^2+\left(\frac{a^2b^2c}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}\right)^2$$

$$h^2=\left(\frac{1}{\frac{b^2c^2}{a\,b^2c^2}+\frac{a^2c^2}{a\,b^2c^2}+\frac{a^2b^2}{a\,b^2c^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{b^2c^2}{a^2b\,c^2}+\frac{a^2c^2}{a^2b\,c^2}+\frac{a^2b^2}{a^2b\,c^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{b^2c^2}{a^2b^2c}+\frac{a^2c^2}{a^2b^2c}+\frac{a^2b^2}{a^2b^2c}}\right)^2$$

$$h^2=\left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+\frac{a}{c^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{b}{a^2}+\frac{1}{b}+\frac{b}{c^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{c}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{1}{c}}\right)^2$$

$$h^2=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right)^2$$

$$h^2=\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\Rightarrow\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

قَالَ رَسُولُ اللهِ ﷺ:" سَبْعَةٌ يُظِلُّهُمُ اللَّهُ تَعَالَى فِي ظِلِّهِ يَومَ لا ظِلَّ إلَّا ظِلُّهُ: إمَامٌ عَدْلٌ، وشَابٌّ نَشَأَ في عِبَادَةِ اللَّهِ، ورَجُلٌ قَلْبُهُ مُعَلَّقٌ في المَسَاجِدِ، ورَجُلَانِ تَحَابَّا في اللَّهِ، اجْتَمعا عليه وتَفَرَّقَا عليه، ورَجُلٌ دَعَتْهُ امْرَأَةٌ ذَاتُ مَنْصِبٍ وجَمَالٍ فَقالَ: إنِّي أخَافُ اللَّهَ، ورَجُلٌ تَصَدَّقَ بصَدَقَةٍ فأخْفَاهَا حتَّى لا تَعْلَمَ شِمَالُهُ ما تُنْفِقُ يَمِينُهُ، ورَجُلٌ ذَكَرَ اللَّهَ خَالِيًا، فَفَاضَتْ عَيْنَاهُ"

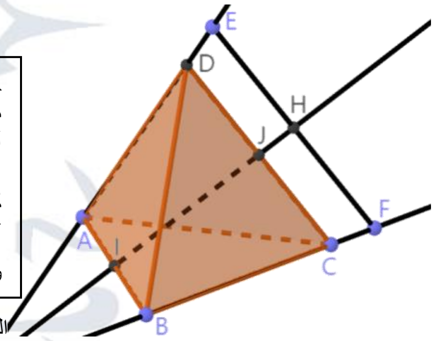
-- تمرينات ومسائل الوحدة الثالثة --

المسألة الأولى: صفحة 94

ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه. وليكن α عدداً حقيقياً، و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. النقطتان E و F معرّفتان بالعلاقتين $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC}$. وأخيراً H هي منتصف $[EF]$.

1) تحقّق أنَّ E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (D,α)، وكذلك أنَّ النقطة F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-\alpha)$ و (C,α).

$\alpha\in\mathbb{R}$ وبالتالي E من الممكن أن تكون أي نقطة على المستقيم (AD)، والنقطة F كذلك بحيث يتحقق $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC}$



الرسم ليس ضروري للحل

E م.أ.م للنقطتين $(A,1-\alpha),(D,\alpha)$

$$(1-\alpha)\,\overrightarrow{EA}+\alpha\,\overrightarrow{ED}=\vec{0}$$

ننطلق من العلاقة المعطاة

$$\overrightarrow{AE}=\alpha\underbrace{\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}}$$

$$\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AE}+\alpha\overrightarrow{ED}\Rightarrow(1-\alpha)\,\overrightarrow{EA}+\alpha\,\overrightarrow{ED}=\vec{0}$$

ومنه E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (D,α)

F م.أ.م للنقطتين $(B,1-\alpha),(C,\alpha)$

$$(1-\alpha)\,\overrightarrow{FB}+\alpha\,\overrightarrow{FC}=\vec{0}$$

ننطلق من العلاقة المعطاة

$$\overrightarrow{BF}=\alpha\underbrace{\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}}$$

$$\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BF}+\alpha\overrightarrow{FC}\Rightarrow(1-\alpha)\,\overrightarrow{FB}+\alpha\,\overrightarrow{FC}=\vec{0}$$

ومنه F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-\alpha)$ و (C,α)

2) a) أثبت أنَّ النقطة H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-\alpha)$ و $(B,1-\alpha)$ و (C,α) و (D,α).

الخاصة التجميعية

لدينا $(E,1)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (D,α)

ولدينا $(F,1)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-\alpha)$ و (C,α)

ومنه حسب الخاصة التجميعية مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-\alpha)$ و $(B,1-\alpha)$ و (C,α) و (D,α) هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E,1)$ و $(F,1)$ ويقع منتصف $[EF]$ لتساوي الثقلين في E و F، فهو يقع على النقطة H.

b) استنتج وقوع النقاط I و J و H على استقامة واحدة.

I م.أ.م للنقطتين J,I

لدينا $(I,2-2\alpha)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و $(B,1-\alpha)$

ولدينا $(J,2\alpha)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (D,α) و (C,α)

إذاً H هي مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(I,2-2\alpha)$ و $(J,2\alpha)$، ومنه النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة.

المسألة الثانية: صفحة 94

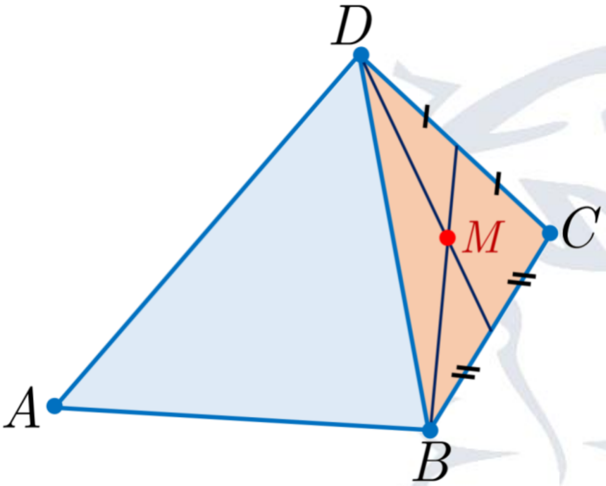
$ABCD$ رباعي وجوه. أثبت في كل من الحالتين الآتيتين أنَّ النقاط M و B و C و D تقع في مستوٍ واحد، ثمَّ وضِّح النقطة M.

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$

لإثبات أنَّ النقاط M و B و C و D في مستوٍ واحد يكفي

إثبات M مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(B,\alpha),(C,\beta),(D,\gamma)$

$$\alpha\overrightarrow{MB}+\beta\,\overrightarrow{MC}+\gamma\,\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$



$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\underbrace{\overrightarrow{DA}}_{\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA}}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{DM}=\vec{0}$$

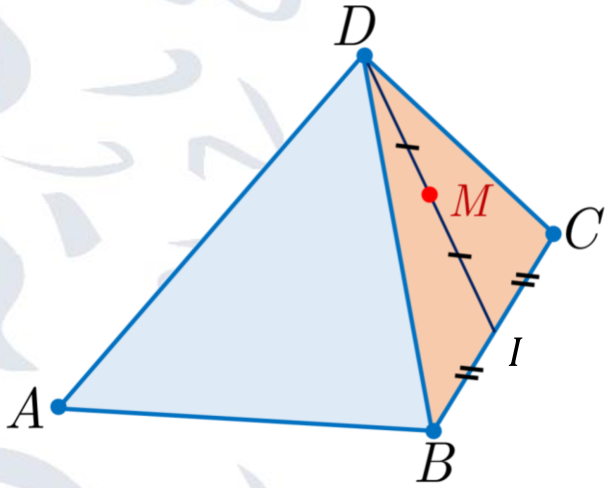
+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

$$\Rightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

ومنه M مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(B,1),(C,1),(D,1)$ وهي مركز ثقل المثلث BCD.

فالنقاط M و B و C و D تقع في مستو واحد.

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$



$$\overrightarrow{MB}+2\underbrace{\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

ومنه M مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(B,1),(C,1),(D,2)$ وتكون مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,2),(D,2)$، حيث I منتصف $[BC]$، ومنه M تقع منتصف $[DI]$.

فالنقاط M و B و C و D تقع في مستو واحد.

المسألة الثالثة: صفحة 94

نعطي معلماً متجانساً في الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نُعطي النقطتين $A(1,0,0)$ و $B(4,3,-3)$.

1) أتكون مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (B,α) عندما تتحول α في $\mathbb{R}$، هي نفسها المستقيم المار بالنقطة A وشعاع توجيهه $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ ؟

M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (B,α) عندما تتحول α في $\mathbb{R}$ وبالتالي M تقع على المستقيم (AB) ومجموعة النقاط M تشكل المستقيم (AB).

نحاول تعيين شعاع توجيه للمستقيم (AB) يتناسب مع المطلوب

$$\overrightarrow{AB}(3,3,-3)=3(1,1,-1)$$

نلاحظ أنّ الشعاع $(1,1,-1)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم (AB) المار من النقطة A.

وبالتالي مجموعة النقاط M هي نفسها مجموعة نقاط المستقيم المار بالنقطة A وشعاع توجيهه $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

2) أتكون مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x-y)$ و (B,x) و (O,y) عندما تتحول x و y في $\mathbb{R}$، هي نفسها المستوي المار بالنقطة O ويقبل $\vec{i}$ و $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ شعاعي توجيه؟

M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x-y)$ و (B,x) و (O,y) عندما تتحول x و y في $\mathbb{R}$، وبالتالي M تقع على المستوي (OAB) ومجموعة النقاط M تشكل المستوي (OAB).

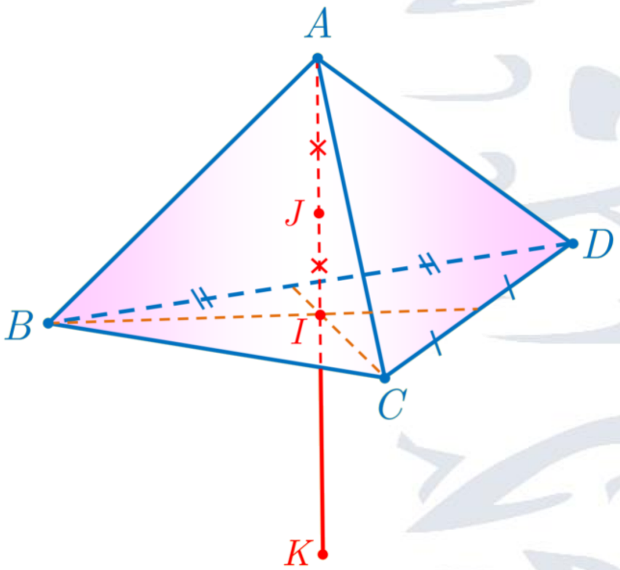
نلاحظ أنَّ المستوي المار بالنقطة O ويقبل $\vec{i}$ و $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ شعاعي توجيه هو نفسه المستوي (OAB) المار من O ويقبل $\overrightarrow{AB}(3,3,-3)$ و $\overrightarrow{OA}(1,0,0)$ شعاعي توجيه حيث نلاحظ أنَّ

$$\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\,, \qquad \vec{i}=\overrightarrow{OA}$$

الجواب إذن هو نعم.

المسألة الرابعة: صفحة 94

ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه. وليكن I مركز ثقل المثلث BCD، و J منتصف $[AI]$ و K نظيرة A بالنسبة إلى I. عبّر عن J و K بصفتهما مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C و D بعد تزويدها بأمثال مناسبة.



I مركز ثقل المثلث BCD	J منتصف $[AI]$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
I مركز أبعاد متناسبة للنقاط $\underbrace{(B,1),(C,1),(D,1)}_{(I,3)}$	J مركز أبعاد متناسبة للنقاط $\underbrace{(A,3),(I,3)}_{(J,6)}$

ومنه $(J,6)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(A,3),(B,1),(C,1),(D,1)$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

مركز ثقل المثلث BCD I	K نظيرة A بالنسبة إلى I
$\Downarrow$	$\Downarrow$
I مركز أبعاد متناسبة للنقاط $\underbrace{(B,1),(C,1),(D,1)}_{(I,3)}$	$\underbrace{\overrightarrow{AI}}_{\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KI}} = \overrightarrow{IK}$ $2\overrightarrow{KI} - \overrightarrow{KA} = \vec{0}$

لاحظ أنه نتج في هذه العلاقة أنَّ الوزن المرتبط بالنقطة I هو 2 وهو ما لا نريده (زبط الثوابت بحيث يكون $(I,3)$ كما فرضنا من قبل)

$$\overrightarrow{KI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{KA} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{KI} - \frac{3}{2}\overrightarrow{KA} = \vec{0}$$

ومنه K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3)$ و $\left(A,-\frac{3}{2}\right)$.

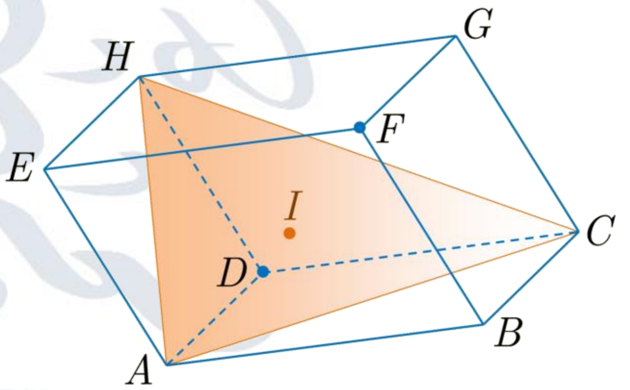
وبالتالي $\left(K,\frac{3}{2}\right)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$\left(A,-\frac{3}{2}\right),(B,1),(C,1),(D,1)$$

المسألة الخامسة: صفحة 95

--الوقوع على استقامة واحدة--

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي سطوح، وليكن I مركز ثقل المثلث AHC. أثبت أنَّ النقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة. وعيّن موقع I على $[DF]$.



الطريقة الأولى: من خلال الارتباط الخطي نثبت

$$\boxed{\overrightarrow{DI} = k\overrightarrow{DF}}$$

ننطلق من أنَّ I مركز ثقل المثلث AHC، وبالتالي I مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$$\underbrace{(A,1),(H,1),(C,1)}_{(I,3)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IH} = \vec{0}$$

لدينا في العلاقة التي نريد إثباتها D، لذلك نحاول إدخال D

$$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{IA}}_{\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA}} + \underbrace{\overrightarrow{IC}}_{\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DC}} + \underbrace{\overrightarrow{IH}}_{\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DH}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}}_{\overrightarrow{DB}} + \overrightarrow{DH} = 3\overrightarrow{DI}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}}_{\overrightarrow{DF}} = 3\overrightarrow{DI} \Rightarrow \overrightarrow{DF} = 3\overrightarrow{DI}$$

وبالتالي النقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة.

الطريقة الثانية: من خلال أخذ معلم (المعلم هنا ليس متجانس) $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$

نكتب معادلة المستقيم (DF) ثم نثبت أنَّ $I \in (DF)$.

لدينا إحداثيات النقاط في هذا المعلم:

$D(0,0,0)$	$F(1,1,1)$	$A(1,0,0)$
$C(0,1,0)$	$H(0,0,1)$	

لدينا I مركز ثقل المثلث AHC وبالتالي تكون إحداثياتها

$$I\left(\frac{\overbrace{1}^{\text{مجموع } x}}{3},\frac{\overbrace{1}^{\text{مجموع } y}}{3},\frac{\overbrace{1}^{\text{مجموع } z}}{3}\right)$$

معادلة المستقيم (DF) شعاع توجيهه $\overrightarrow{DF}(1,1,1)$ ومار بالنقطة D

$$(DF):\begin{cases} x = t \\ y = t\,, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

نلاحظ أنَّ النقطة $I\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ تنتمي للمستقيم (DF)،(حيث تكون النقطة من المستقيم عندما تكون $t = 1/3$) وبالتالي النقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة، ويكون

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DI}$$

المسألة السادسة: صفحة 95

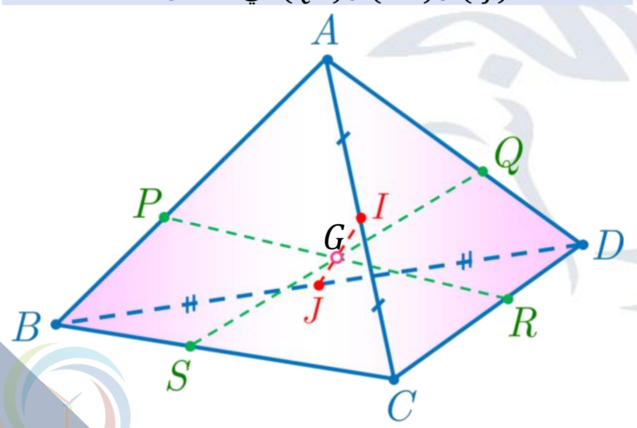
--تعيين نقطة تلاقي مستقيمات--

نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. لتكن x من $]0,1[$، ولتكن P و Q و R و S النقاط التي تحقّق

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{CR} = x\overrightarrow{CD}, \qquad \overrightarrow{CS} = x\overrightarrow{CB}$$

النقطتان I و J هما منتصفا الحرفين $[AC]$ و $[BD]$. أثبت تلاقي المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) في نقطة واحدة.



+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

من خلال فكرة الأبعاد المتناسبة، نثبت أنَّ نقطة G تنتمي لكلٍّ من (IJ) و (PR) و (QS)

$\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
Q مركز أبعاد متناسبة للنقطتين (A,α) و (D,δ) $\delta=x,\alpha+\delta=1$	P مركز أبعاد متناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β) $\beta=x,\alpha+\beta=1$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$(A,1-x),(D,x)$	$(A,1-x),(B,x)$
$\overrightarrow{CS}=x\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{CR}=x\overrightarrow{CD}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
S مركز أبعاد متناسبة للنقطتين (B,β) و (C,γ) $\beta=x,\beta+\gamma=1$	R مركز أبعاد متناسبة للنقطتين (D,δ) و (C,γ) $\delta=x,\delta+\gamma=1$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$(C,1-x),(B,x)$	$(C,1-x),(D,x)$

لتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(A,1-x),(B,x),(C,1-x),(D,x)$$

حسب الخاصة التجميعية

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $\underbrace{(A,1-x),(B,x)}_{(P,1)},\underbrace{(C,1-x),(D,x)}_{(R,1)}$	
G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(P,1)$ و $(R,1)$	$G\in(PR)\Leftarrow$ G منتصف $[PR]$
G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $\underbrace{(A,1-x),(D,x)}_{(Q,1)},\underbrace{(C,1-x),(B,x)}_{(S,1)}$	
G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(Q,1)$ و $(S,1)$	$G\in(QS)\Leftarrow$ G منتصف $[QS]$
G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثقلان متساويان $\underbrace{(A,1-x),(C,1-x)}_{(I,2-2x)}$, الثقلان متساويان $\underbrace{(B,x),(D,x)}_{(J,2x)}$ حيث I و J منتصفا $[AC]$ و $[BD]$	
G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,2-2x)$ و $(J,2x)$	$G\in(IJ)\Leftarrow$

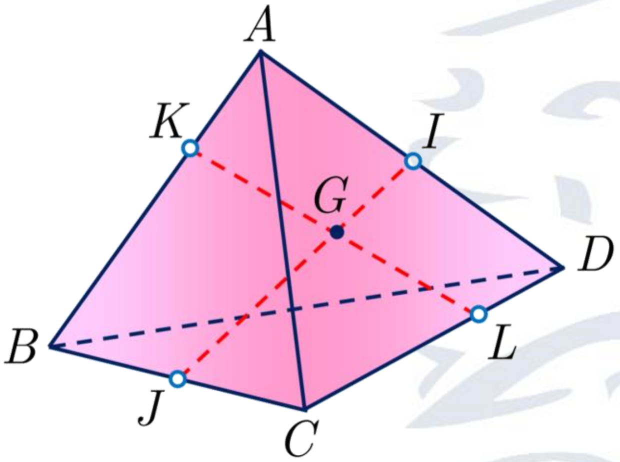
ومنه نستنتج أنَّ المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) تتلاقى في نقطة G هي مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوس رباعي الوجوه.

المسألة السابعة: صفحة 96

--قدماً إلى الأمام--

نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. K نقطة من $[AB]$ تحقّق $AK=\frac{1}{3}AB$، و L نقطة من القطعة المستقيمة $[CD]$ تحقّق $CL=\frac{2}{3}CD$. وأخيراً I هي منتصف $[AD]$، و J هي منتصف $[BC]$. نعرّف G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$.

1) a) أثبت أنَّ النقاط G و I و J تقع على استقامة واحدة.



G مركز أبعاد متناسبة لـ I و J

I هي منتصف $[AD]$	J هي منتصف $[BC]$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
I مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,2),(D,2)$	J مركز أبعاد متناسبة لـ $(B,1),(C,1)$

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$\underbrace{(B,1),(C,1)}_{(J,2)},\underbrace{(A,2),(D,2)}_{(I,4)}$$

حسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,4)$ و $(J,2)$، ومنه النقاط G و I و J تقع على استقامة واحدة.

b) أثبت أنَّ النقاط G و K و L تقع على استقامة واحدة.

G مركز أبعاد متناسبة لـ K و L

$CL=\frac{2}{3}CD$	$AK=\frac{1}{3}AB$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
L مركز أبعاد متناسبة لـ $(C,1),(D,2)$	K مركز أبعاد متناسبة لـ $(B,1),(A,2)$

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$\underbrace{(A,2),(B,1)}_{(K,3)},\underbrace{(C,1),(D,2)}_{(L,3)}$$

حسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(L,3)$ و $(K,3)$، ومنه النقاط G و K و L تقع على استقامة واحدة.

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

2) استنتج وقوع النقاط I و J و K و L في مستوٍ واحد.

مستقيمان متقاطعان يقعان في مستو واحد

وجدنا أنَّ $G \in [IJ]$ و $G \in [LK]$، ومنه $[IJ]$ و $[LK]$ يتقاطعان في G.

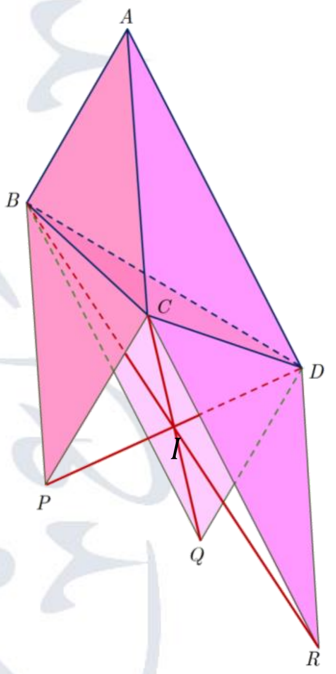
ومنه النقاط I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد.

المسألة الثامنة: صفحة 96

تتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. والنقاط P و Q و R هي نقاط تجعل $ABPC$ و $ABQD$ و $ACRD$ متوازيات أضلاع.

نهدف إلى إثبات تلاقي المستقيمات (DP) و (CQ) و (BR).

1) a) أثبت أنَّ النقطة P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$.



إذا كانت P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ وأياً كانت النقطة M عندئذٍ تتحقق

$$\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MP}$$

لدينا $ABPC$ متوازي أضلاع وبالتالي:

$$\boxed{\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$$

$$\Rightarrow (1+1-1)\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\underbrace{\overrightarrow{AA}}_{\vec{0}}$$

ومنه P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$.

b) عبّر بالمثل عن Q بصفتها مركز أبعاد متناسبة للنقاط A و B و D. وكذلك، عبّر عن R بصفتها مركز أبعاد متناسبة للنقاط A و C و D.

كما فعلنا في الطلب السابق.

لدينا $ABQD$ متوازي أضلاع وبالتالي:

$$\boxed{\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}$$

$$\Rightarrow (1+1-1)\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\underbrace{\overrightarrow{AA}}_{\vec{0}}$$

ومنه Q هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(D,1)$.

لدينا $ACRD$ متوازي أضلاع وبالتالي:

$$\boxed{\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}$$

$$\Rightarrow (1+1-1)\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\underbrace{\overrightarrow{AA}}_{\vec{0}}$$

ومنه R هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$.

2) بالاستفادة من نقطة I، وهي مركز أبعاد متناسبة مُختارة للنقاط A و B و C و D، ومن الخاصة التجميعية، أثبت تلاقي المستقيمات (DP) و (CQ) و (BR)، وعيّن موقع I على هذه المستقيمات.

لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(A,-1),(B,1),(C,1),(D,1)$$

حسب الخاصة التجميعية تكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(P,1),(D,1)$

$$\underbrace{(A,-1),(B,1),(C,1)}_{(P,1)},(D,1)$$

وبالتالي تقع منتصف $[DP]$.

و I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(Q,1),(C,1)$

$$\underbrace{(A,-1),(B,1),(D,1)}_{(Q,1)},(C,1)$$

وبالتالي تقع منتصف $[CQ]$.

و I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(R,1),(B,1)$

$$\underbrace{(A,-1),(C,1),(D,1)}_{(R,1)},(B,1)$$

وبالتالي تقع منتصف $[BR]$.

ومنه المستقيمات (DP) و (CQ) و (BR) تتلاقى في I، والتي تقع منتصف كل من القطع المستقيمة $[DP]$ و $[CQ]$ و $[BR]$.

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

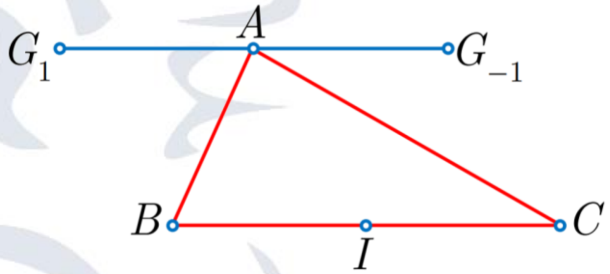
المسألة التاسعة: صفحة 97

نتأمّل ثلاث نقاط A و B و C من الفراغ، وعدداً حقيقياً k من المجال $[-1,1]$. ترمز G_k إلى مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A, k^2+1) و (B,k) و $(C,-k)$.

1) مثّل النّقاط A و B و C و I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$، وأنشئ النقطتين G_1 و G_{-1}.

إذا كانت G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ وأياً كانت النقطة M عندئذٍ تتحقق

$$\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$



لدينا G_k مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,k^2+1) و (B,k) و $(C,-k)$، ومنه G_1 مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,-1)$ أي

$$2\overrightarrow{AG_1}=\underbrace{2\overrightarrow{AA}}_{\vec 0}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{AG_1}=-\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AG_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CI}$$

وبالمثل G_{-1} مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,-1)$ و $(C,1)$ أي

$$2\overrightarrow{AG_1}=\underbrace{2\overrightarrow{AA}}_{\vec 0}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}$$

<u>طريقة ثانية:</u>(الرسم في الطريقتين إجباري وليس اختياري)

مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط G_1

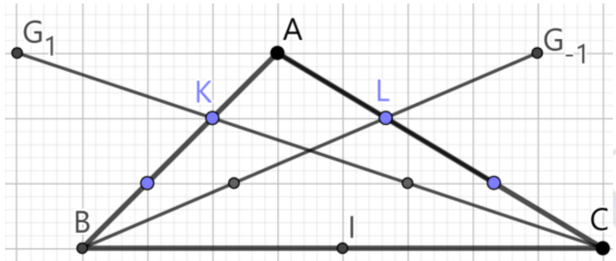
$$\underbrace{\underbrace{(A,2),(B,1)}_{(K,3)},(C,-1)}_{(G_1,2)}$$

حيث $\overrightarrow{BK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{CG_1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CK}$.

مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط G_{-1}

$$\underbrace{\underbrace{(A,2),(C,1)}_{(L,3)},(B,-1)}_{(G_{-1},2)}$$

حيث $\overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{BG_{-1}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BL}$.



2) a) أثبت أنّه مهما كان العدد k من $[-1,1]$ كان $\overrightarrow{AG_k}=-\frac{k}{1+k^2}\overrightarrow{BC}$.

لدينا G_k مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,k^2+1) و (B,k) و $(C,-k)$ أياً كانت k من $[-1,1]$، ومنه

$$(k^2+1)\overrightarrow{AG_k}=\underbrace{(k^2+1)\overrightarrow{AA}}_{\vec 0}+k\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AG_k}=\frac{k}{k^2+1}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{k}{1+k^2}\overrightarrow{BC}$$

b) ادرس تغيّرات التابع f المعرف على المجال $[-1,1]$ بالصيغة $f(x)=-\frac{x}{1+x^2}$.

$$f(x)=-\frac{x}{1+x^2}$$

التابع مستمر واشتقاقي على المجال $[-1,1]$، ومشتقه

$$f'(x)=-\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

نلاحظ أن المقام موجب دائماً، وأنَّ المقدار

$$1-x^2\geq 0\,,x\in[-1,1]$$

وبالتالي المشتق سالب على طول المجال $[-1,1]$، وينعدم فقط عند

$$x^2=1\Longrightarrow x=\mp 1$$

وجدول التغيرات

x	-1		0		1
$f'(x)$	0	$--$	$--$	$--$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

c) استنتج مجموعة النقاط G_k عندما تتحول k في المجال $[-1,1]$.

نستنتج من الطلب السابق أنه إذا كانت

$$k\in[-1,1]\Longrightarrow y=f(k)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

ومنه

$$\overrightarrow{AG_k}=y\overrightarrow{BC},\qquad y\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

وبالتالي فإنَّ مجموعة النقاط G_k تمثل القطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$.

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

3) عيّن المجموعة $\mathcal{E}$ المكونة من النقاط M التي تحقق

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$

$$\Big\|\underbrace{2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}}_{2\overrightarrow{MG_1}}\Big\| = \Big\|\underbrace{2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{2\overrightarrow{MG_{-1}}}\Big\|$$

$$\Longrightarrow \|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{MG_{-1}}\|$$

ومنه المجموعة $\mathcal{E}$ هي مجموعة النقاط M التي تشكل المستوي المحوري للقطعة $[G_1G_{-1}]$.

4) عيّن المجموعة $\mathcal{F}$ المكونة من النقاط M التي تحقق

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$$

$$\Big\|\underbrace{2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}}_{2\overrightarrow{MG_1}}\Big\| = \|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$$

$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$$

$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \Big\|\underbrace{\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}}_{-\overrightarrow{AB}}+\underbrace{\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}}_{-\overrightarrow{AC}}\Big\|$$

$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\|$$

$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|-2\overrightarrow{AI}\|$$

$$\Longrightarrow \|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{IA}\|$$

المجموعة $\mathcal{F}$ تمثل مجموعة النقاط M التي تشكل الكرة التي مركزها G_1 ونصف قطرها يساوي $\|\overrightarrow{IA}\|$.

ملاحظة يمكن الحل بأكثر من طريقة بحيث تنتج العلاقة

$$\|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{CG_{-1}}\|$$

أو

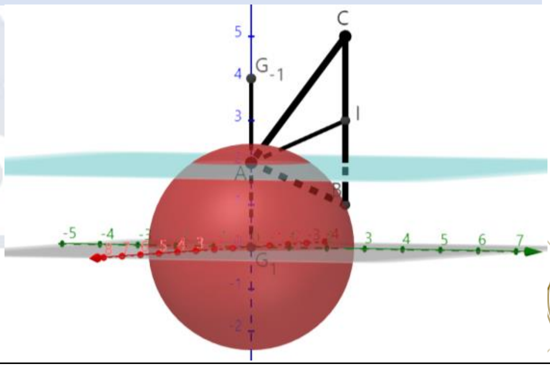
$$\|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{BG_1}\|$$

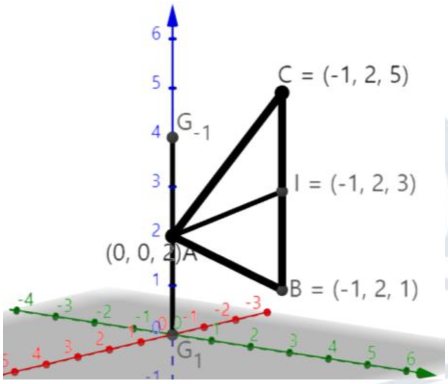
ولكن النتيجة تبقى واحدة.

5) نزوّد الفضاء بمعلم متجانس $(O;i,j,k)$. ونفترض أنَّ النقاط A و B و C معطاة كما يأتي: $A(0,0,2)$ و $B(-1,2,1)$ و $C(-1,2,5)$، وأنَّ G_k و $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ معرّفة كما في السّابق.

a) احسب إحداثيات النقطتين G_1 و G_{-1}، وأثبت أنَّ المجموعتين $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ متقاطعتان.

b) احسب نصف قطر الدائرة Γ الناتجة من تقاطع المجموعتين $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$.





G_1 مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,1),(C,-1)$

$$\begin{cases} x_{G_1} = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_{G_1} = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ z_{G_1} = \dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{G_1} = \dfrac{2(0)+1(-1)-1(-1)}{2+1-1} = 0 \\ y_{G_1} = \dfrac{2(0)+1(2)-1(2)}{2+1-1} = 0 \\ z_{G_1} = \dfrac{2(2)+1(1)-1(5)}{2+1-1} = 0 \end{cases}$$

ومنه $\boxed{G_1(0,0,0)}$

G_{-1} م.أ. للنقاط $(A,2),(B,-1),(C,1)$

$$\begin{cases} x_{G_{-1}} = \dfrac{2(0)-1(-1)+1(-1)}{2+1-1} = 0 \\ y_{G_{-1}} = \dfrac{2(0)-1(2)+1(2)}{2+1-1} = 0 \\ z_{G_{-1}} = \dfrac{2(2)-1(1)+1(5)}{2+1-1} = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{G_{-1}(0,0,4)}$$

لإثبات التقاطع نكتب معادلة $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$

معادلة $\mathcal{E}$ هي معادلة المستوي المحوري لـ $[G_1G_{-1}]$ الذي ناظمه $\overrightarrow{G_1G_{-1}}(0,0,4)$ ومار من $N(0,0,2)$ منتصف $[G_1G_{-1}]$، وهي بالتالي

$$z = 2$$

معادلة $\mathcal{F}$ هي معادلة الكرة التي مركزها G_1 ونصف قطرها يساوي $\|\overrightarrow{IA}\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$، وهي

$$x^2+y^2+z^2 = 6$$

بالحل المشترك للمعادلتين نجد أنَّ:

$$x^2+y^2 = 2$$

وهي تمثل نقاط تقاطع $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$، وهي عبارة عن دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

المسألة العاشرة: صفحة 97

نتأمّل معلماً متجانساً $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$. ليكن G مركز ثقل المثلث ABC.

1) احسب إحداثيات G، وتحقق أنَّ (OG) عمودي على (ABC).

$O(0,0,0)$	$A(1,0,0)$	$B(0,1,0)$	$C(0,0,1)$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} = \dfrac{1}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} = \dfrac{1}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A+z_B+z_C}{3} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

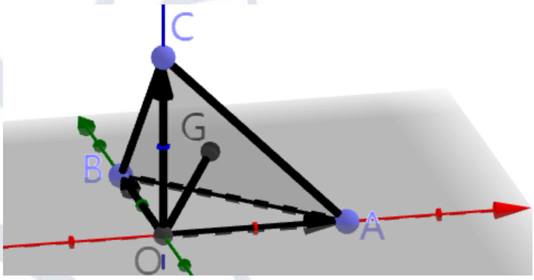
لإثبات أنَّ (OG) عمودي على (ABC)، يكفي إثبات تعامده مع مستقيمين متقاطعين (أو شعاعين موجهين) في (ABC)، أي نثبت أنَّ

$$\begin{cases} (OG)\perp(AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AB}=0 \\ (OG)\perp(AC) \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$$

$\overrightarrow{OG}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$	$\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0 = 0 \Longrightarrow (OG)\perp(AB)$$

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}+0+\frac{1}{3} = 0 \Longrightarrow (OG)\perp(AC)$$



2) تعرّف النقاط $A'(2,0,0)$ و $B'(0,2,0)$ و $C'(0,0,3)$ المستوي $(A'B'C')$.

a) اكتب معادلة للمستوي $(A'B'C')$.

$M(x,y,z)\in(A'B'C')$ عندئذٍ

$\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}$ مرتبطة خطياً

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي $(A'B'C')$ عندئذٍ يوجد عددان حقيقيان α,β يحققان

$$\overrightarrow{A'M} = \alpha\overrightarrow{A'B'} + \beta\overrightarrow{A'C'}$$

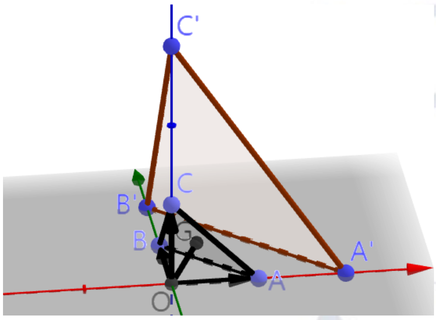
$$(x-2,y,z) = \alpha(-2,2,0)+\beta(-2,0,3)$$

ومنه

$$\begin{cases} x-2 = -2\alpha-2\beta \\ y = 2\alpha \Longrightarrow \alpha = \dfrac{y}{2} \\ z = 3\beta \Longrightarrow \beta = \dfrac{z}{3} \end{cases}$$

نعوض المعادلة الثانية والثالثة بالأولى نجد معادلة المستوي:

$$\boxed{3x+3y+2z=6}$$



b) أثبت أنَّ $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستقيم (AC) إذا وُجد عدد k بحيث
$$\begin{cases} x = 1-k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$$

لنكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (AC) الذي شعاع توجيهه $\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$ ويمر بالنقطة $A(1,0,0)$

$$d:\begin{cases} x = -k+1 \\ y = 0 \quad , \quad k\in\mathbb{R} \\ z = k \end{cases}$$

واضح أنَّ M تحقق معادلة المستقيم فهي تنتمي إليه.

c) احسب إحداثيات النقطة K المشتركة بين المستقيم (AC) والمستوي $(A'B'C')$.

نحل المعادلتين حلاً مشتركاً (نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي)

$$-3k+3+2k=6 \Longrightarrow k=-3$$

ومنه نجد إحداثيات النقطة K هي $K(4,0,-3)$.

3) a) احسب إحداثيات النقطة L المشتركة بين المستقيم (BC) والمستوي $(A'B'C')$.

لنكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (BC) الذي شعاع توجيهه $\overrightarrow{BC}(0,-1,1)$ ويمر بالنقطة $B(0,1,0)$

$$d:\begin{cases} x = 0 \\ y = -t+1, \quad t\in\mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

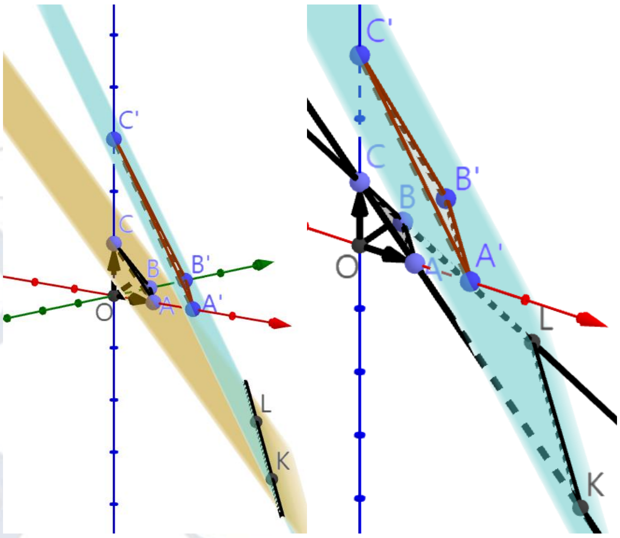
لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم (BC) والمستوي $(A'B'C')$، نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي،

$$-3t+3+2t=6 \Longrightarrow t=-3$$
$$\Longrightarrow L(0,4,-3)$$

b) أثبت توازي المستقيمات (AB) و $(A'B')$ و (KL).

الارتباط الخطي

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577



$\overrightarrow{KL}(-4,4,0)$	$\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$	$\overrightarrow{A'B'}(-2,2,0)$

نلاحظ أنَّ

$$\overrightarrow{KL} = 2\overrightarrow{A'B'} = 4\overrightarrow{AB}$$

فالمستقيمات (AB) و$(A'B')$ و(KL) متوازية.

4) عيّن تقاطع المستويين (ABC) و$(A'B'C')$ بدلالة النقاط المعرّفة سابقاً.

$$\begin{cases} K \in (AC) \Longrightarrow K \in (ABC) \\ L \in (BC) \Longrightarrow L \in (ABC) \end{cases}$$

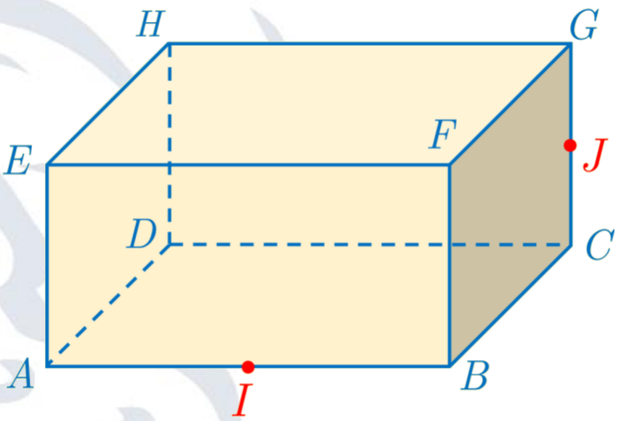
فالنقطتان K وL مشتركتان بين المستويين (ABC) و$(A'B'C')$ فهما يقعان على الفصل المشترك لهما، ومنه المستقيم (KL) هو الفصل المشترك للمستويين المذكورين.

المسألة الحادية عشرة: صفحة 98

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$ و$BC = GC = 1$. النقطة I هي منتصف $[AB]$ و J هي منتصف $[CG]$.

نتأمّل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1) احسب المسافتين DJ و IJ.



نكتب إحداثيات النقاط في هذا المعلم المعطى

$$A(0,0,0), I(1,0,0), B(2,0,0), C(2,1,0), J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$$

$$D(0,1,0), E(0,0,1), F(2,0,1), G(2,1,1), H(0,1,1)$$

$D(0,1,0)$	$I(1,0,0)$	$J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$

$$DJ = \sqrt{4+0+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$IJ = \sqrt{1+1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$$

2) أثبت أنَّ المستقيمين (DI) و(IJ) متعامدان. واحسب $\cos \widehat{IJD}$

$\overrightarrow{DI}(1,-1,0)$	$\overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$

$$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IJ} \overset{?}{=} 0$$

$$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IJ} = 1-1+0 = 0 \Rightarrow (DI) \perp (IJ)$$

فالمثلث DIJ قائم في I (نستطيع استخدام النسب المثلثية والاستفادة من الطلب السابق)

$$\cos \widehat{IJD} = \frac{IJ}{DJ} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

3) a) أعطِ معادلة للمستوي (DIJ).

عندئذٍ $M(x,y,z) \in (DIJ)$ مرتبطة خطياً $\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DJ}$

$$\overrightarrow{DM} = \alpha\overrightarrow{DI} + \beta\overrightarrow{DJ}$$

$$(x,y-1,z) = \alpha(1,-1,0) + \beta\left(2,0,\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y-1 = -\alpha \Longrightarrow \alpha = 1-y \\ z = \frac{1}{2}\beta \Longrightarrow \beta = 2z \end{cases}$$

نعوض المعادلة الثانية والثالثة بالأولى نجد معادلة المستوي:

$$\boxed{x+y-4z-1=0}$$

b) احسب بعد H عن المستوي (DIJ).

$$dist\big(H,(DIJ)\big) = \frac{|ax_H + by_H + cz_H + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|0+1-4-1|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

4) احسب حجم رباعي الوجوه $HDIJ$.

$$\text{حجم رباعي الوجوه} = \frac{\text{الارتفاع} \times \text{مساحة القاعدة}}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}.S_{DIG}.h, \qquad h = dist\big(H,(DIJ)\big)$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

مساحة المثلث القائم $DIJ = \frac{\text{جداء طولي الضلعين القائمتين}}{2}$

$$S_{DIG} = \frac{DI\,.IJ}{2} = \frac{\sqrt{2}\,.\frac{3}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$V = \frac{1}{3}.S_{DIG}.h = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{2}}{4}.\frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

5) a) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة J عمودياً على المستوي (HDI).

مستقيم d مار بالنقطة $J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(a,b,c)$

لتعيين $\vec{u}$ شعاع توجيه المستقيم ننطلق من الفرض المعطى بأنه عمودي على المستوي (HDI) وبالتالي عمودي على شعاعي التوجيه

$\overrightarrow{DI}(0,0,1)$	$\overrightarrow{DI}(1,-1,0)$

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{DH} \Rightarrow \vec{u}.\overrightarrow{DH} = c = 0 \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{DI} \Rightarrow \vec{u}.\overrightarrow{DI} = a - b = 0 \end{cases}$$

باختيار $b = 1$ نجد

$$\vec{u}(1,1,0)$$

ومنه تكون معادلة المستقيم d

$$d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

b) احسب إحداثيات النقطة J' نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي (HDI).

معادلة المستوي (HDI) ناظمه $\vec{u}(1,1,0)$ ومار من H

$$\boxed{x + y = 1}$$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي (HDI)،

$$2 + t + 1 + t = 1 \Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow J'\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$$

c) جد بطرائق مختلفة بُعد النقطة J عن المستوي (HDI).

$$dist(J,(HDI)) = \frac{|ax_J + by_J + cz_J + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

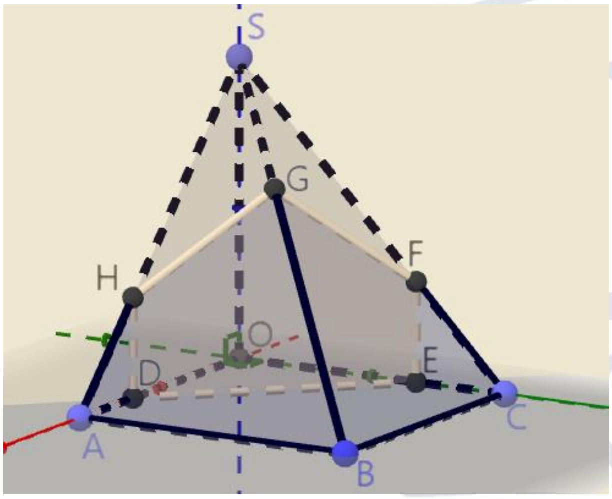
$$dist(J,(HDI)) = JJ' = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$$

$$V = \frac{1}{3}.S_{HDI}.h \Rightarrow h = \frac{1}{S_{HDI}} = \frac{2}{HD.DI} = \sqrt{2}$$

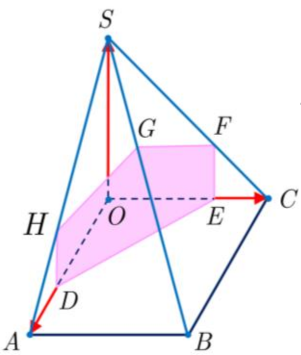
المسألة الثانية عشرة: صفحة 98

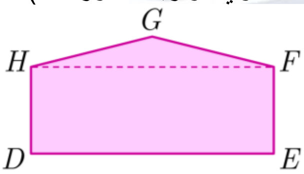
في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمّل الهرم $S - OABC$ حيث $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j}$ و $\overrightarrow{OC} = \vec{j}$ و $\overrightarrow{OS} = \vec{k}$.
وليكن t عدداً يحقق $0 < t < 1$. نهدف إلى تعيين مقطع الهرم بالمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $x + y = t$، وتعيين قيمة t التي تجعل مساحة المقطع أعظمية.

1) a) يقطع المستوي $\mathcal{P}$ المستقيمات (OA) و (OC) و (SC) و (SB) و (SA) في D و E و F و G و H بالترتيب. ارسم شكلاً وبيّن طبيعة هذا المقطع.



الرسم مبين في الشكل المجاور، حيث المقطع عبارة عن مضلع خماسي. (لاحظ أنه لا يوجد z في معادلة المستوي وبالتالي يكون المستوي موازياً للمحور (Oz).





b) أثبت أنّ الرباعي $DEFH$ مستطيل، وعبّر عن مساحته بدلالة t.

نثبت أنه متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة.

لنكتب إحداثيات النقاط في المعلم المعطى

$$O(0,0,0), A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,1,0), S(0,0,1)$$

لتعيين إحداثيات النقاط D, E, F, H نقاطع المستوي مع الهرم، نلاحظ أنّه من السهل الحصول على النقطتين D, E

$$\begin{cases} D \in (OA) \Longrightarrow y = 0, z = 0 \\ D \in \mathcal{P} \Longrightarrow x + y = t \Longrightarrow x = t \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(t,0,0)}$$

$$\begin{cases} E \in (OC) \Longrightarrow x = 0, z = 0 \\ E \in \mathcal{P} \Longrightarrow x + y = t \Longrightarrow y = t \end{cases} \Rightarrow \boxed{E(0,t,0)}$$

للحصول على إحداثيات F, H نكتب معادلتي المستقيمين (SC) و (SA)

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

معادلة المستقيم (SA)، شعاع توجيهه $\overrightarrow{SA}(1,0,-1)$ ومار من النقطة S	$(SA):\begin{cases} x = s_1 \\ y = 0 \\ z = 1 - s_1 \end{cases},\ s_1 \in \mathbb{R}$
معادلة المستقيم (SC)، شعاع توجيهه $\overrightarrow{SC}(0,1,-1)$ ومار من النقطة S	$(SC):\begin{cases} x = 0 \\ y = s_2 \\ z = 1 - s_2 \end{cases},\ s_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} F \in (SC) \Longrightarrow x = 0, z = 1 - y \\ F \in \mathcal{P} \Longrightarrow x + y = t \Longrightarrow y = t \Rightarrow z = 1 - t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(0, t, 1 - t)}$$

$$\begin{cases} H \in (SA) \Longrightarrow y = 0, z = 1 - x \\ H \in \mathcal{P} \Longrightarrow x + y = t \Longrightarrow x = t \Rightarrow z = 1 - t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(t, 0, 1 - t)}$$

$\overrightarrow{HF}(-t, t, 0)$	$\overrightarrow{DE}(-t, t, 0)$
نلاحظ أنَّ $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{HF}$	
$\overrightarrow{FE}(0,0, t - 1)$	$\overrightarrow{HD}(0,0, t - 1)$
نلاحظ أنَّ $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{FE}$	

(يمكن كتابة إحدى المساواتين فقط)

ومنه الرباعي $DEFH$ متوازي أضلاع لتساير ضلعين متقابلين فيه. لإثبات أنّه مستطيل يكفي أن نثبت أنّ $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{HD}$

$$\overrightarrow{DE} . \overrightarrow{HD} = 0 + 0 + 0 = 0$$

وبالتالي الرباعي $DEFH$ مستطيل.

لحساب المساحة نحسب طول كل من HD و DE، (انتبه هنا إلى أخذ الجواب الذي يعطيك قيمة موجبة حيث $0 < t < 1$)

$$HD = \sqrt{(t - 1)^2} = \begin{cases} +t - 1 < 0 & \text{مرفوض} \\ -t + 1 > 0 & \text{مقبول} \end{cases}$$

$$DE = \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2}\, t$$

وبالتالي مساحة المستطيل

$$S(DEFH) = \sqrt{2}\, t(1 - t)$$

c) احسب إحداثيات النقطة G، ثمَّ مساحة المثلث FGH بدلالة t.

معادلة المستقيم (SB)، شعاع توجيهه $\overrightarrow{SB}(1,1,-1)$ ومار من النقطة S	$(SB):\begin{cases} x = s_3 \\ y = s_3 \\ z = 1 - s_3 \end{cases},\ s_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} G \in (SB) \Longrightarrow x = s_3, y = s_3, z = 1 - s_3 \\ G \in \mathcal{P} \Longrightarrow x + y = t \Longrightarrow 2s_3 = t \Rightarrow s_3 = \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{G\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, 1 - \frac{t}{2}\right)}$$

لحساب مساحة المثلث FGH، يمكن استخدام أكثر من طريقة، إما بأن تقول بأنّ المساحة هي القاعدة بالارتفاع مقسمة على 2، وتحسب الارتفاع بحساب بعد G عن المستقيم (HF)، أو بأن تحسب أطوال أضلاعه وتستنتج نوعه وتطبق المناسب.

$\overrightarrow{GF}\left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, -\frac{t}{2}\right)$	$\overrightarrow{GH}\left(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}\right)$

$GF = \frac{\sqrt{3}}{2} t$	$HF = \sqrt{2}\, t$	$GH = \frac{\sqrt{3}}{2} t$

نلاحظ أنَّ المثلث متساوي الساقين حيث $GH = GF$، وبالتالي ارتفاع المثلث هو نفسه المتوسط GN حيث N منتصف $[HF]$.

$$N\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, 1 - t\right)$$

$$\Longrightarrow GN = \frac{t}{2}$$

وبالتالي مساحة المثلث FGH

$$S(FGH) = \frac{1}{2} HF . GN = \frac{\sqrt{2}}{4} t^2$$

d) استنتج عبارة $\mathcal{A}(t)$ مساحة المقطع المنشود بدلالة t.

$$\mathcal{A}(t) = S(DEFH) + S(FGH)$$

$$= \sqrt{2}\, t - \sqrt{2}\, t^2 + \frac{\sqrt{2}}{4} t^2$$

$$= \sqrt{2}\, t - \frac{3\sqrt{2}}{4} t^2$$

2) ادرس اطراد $\mathcal{A}$ على المجال $]0,1[$، واستنتج قيمة t التي تجعل مساحة المقطع أعظمية.

$$\mathcal{A}(t) = \sqrt{2}\, t - \frac{3\sqrt{2}}{4} t^2, \qquad t \in]0,1[$$

التابع $\mathcal{A}(t)$ اشتقاقي على المجال $]0,1[$ ومشتقه

$$\mathcal{A}'(t) = \sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} t$$

$$\mathcal{A}'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

ويكون جدول التغيرات

t	-1		$\frac{2}{3}$		1
$\mathcal{A}'(t)$	‖	$++$	0	$--$	‖
$\mathcal{A}(t)$	‖	↗	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	↘	‖

وبالتالي تكون المساحة أعظمية عند

$$t = \frac{2}{3}$$

وتكون قيمتها $\mathcal{A}(t) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

<table>
<tr>
<td>
تم بفضل الله الانتهاء من جميع مسائل وتدريبات قسم الأشعة في الفراغ
</td>
<td>

3) استنتج أنّ المستوي المار بمركز ثقل المثلث OAC ويقبل $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{OS}$ شعاعي توجيه يوافق مقطعاً أعظمي المساحة.

نكتب معادلة هذا المستوي، ثم نلاحظ أنها نفس معادلة المستوي $\mathcal{P}$ عندما $t = \frac{2}{3}$.

$O(0,0,0)$	$A(1,0,0)$	$C(0,1,0)$

لتكن M مركز ثقل المثلث OAC

$$M\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$$

$\overrightarrow{OS}(0,0,1)$	$\overrightarrow{AC}(-1,1,0)$

لنعين $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي المطلوب

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{OS} \Rightarrow c = 0 \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow -a + b = 0 \end{cases}$$

نختار قيمة لـ a ولتكن $a = 1$ فتكون $b = 1$، ومنه

$$\vec{n}(1,1,0)$$

وبالتالي معادلة المستوي

$$x - \frac{1}{3} + y - \frac{1}{3} + 0 = 0 \Rightarrow x + y = \frac{2}{3}$$

وهي نفس معادلة المستوي $\mathcal{P}$ عندما تعطى $t = \frac{2}{3}$ أكبر مساحة للمقطع.

</td>
</tr>
</table>

+963943608577 نورأشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

حاول أولاً حل الأسئلة بنفسك وكتابة الطرق الممكنة للحل ☺

-- تمرينات ومسائل امتحانية --

السؤال الثالث في الدورة الأولى 2017:

1- اكتب معادلة للكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$.

2- تحقق أنَّ المستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $\mathcal{P}: x-y+z+3=0$ يمس الكرة S.

المسألة الأولى في الدورة الأولى 2017:

في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2.

نتأمّل المعلم المتجانس $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

$$\overrightarrow{AE}=2\vec{k},\overrightarrow{AD}=2\vec{\jmath},\overrightarrow{AB}=2\vec{\imath}$$

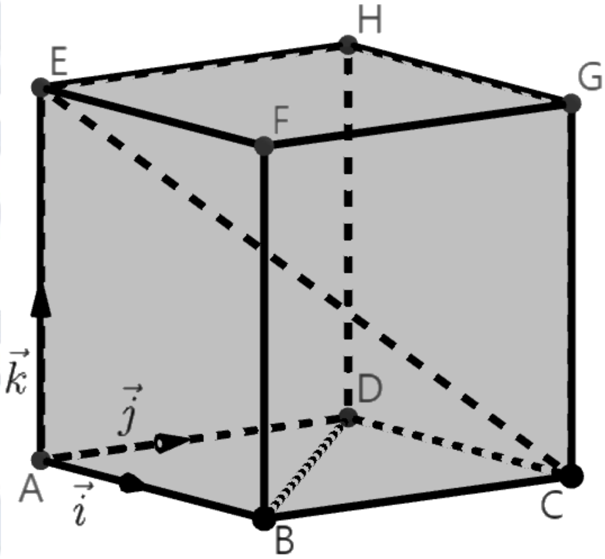
1- اكتب معادلة للمستوي (GBD).

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC).

3- جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD).

4- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

5- أثبت تعامد المستقيمين (HM) و(EC).



السؤال الثاني في الدورة الثانية 2017:

اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d,d'

$$d:\begin{cases}x=t+1\\ y=-3t+2, & t\in\mathbb{R},\\ z=-3t+3\end{cases}$$

$$d':\begin{cases}x=s\\ y=3s-3, & s\in\mathbb{R}\\ z=-s+1\end{cases}$$

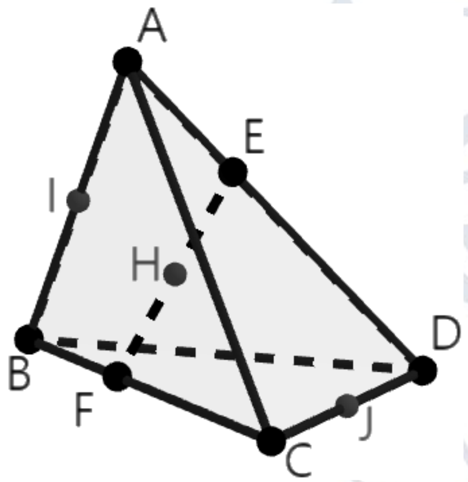
وهل المستقيمان d,d' يقعان في مستوي واحد؟ علل إجابتك.

السؤال الرابع في الدورة الثانية 2017:

نتأمّل في المعلم المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، النقطتين $A(2,0,1)$ و$B(1,-2,1)$ والمطلوب: اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

التمرين الثاني في الدورة الثانية 2017:

$ABCD$ رباعي وجوه وa عدد حقيقي، I وJ على الترتيب هما منتصفا $[AB]$ و$[CD]$ وE وF نقطتان تحققان العلاقتين: $\overrightarrow{AE}=a.\overrightarrow{AD}$ و$\overrightarrow{BF}=a.\overrightarrow{BC}$ وأخيراً H هي منتصف $[EF]$. أثبت أنَّ H,J,I تقع على استقامة واحدة.



+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

حل السؤال الثالث في الدورة الأولى 2017:

1- الشكل العام لمعادلة الكرة التي مركزها النقطة (x_0, y_0, z_0) ونصف قطرها R هو:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

وبالتالي فإنّ معادلة الكرة التي مركزها $O(0,0,0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ هي

$$x^2+y^2+z^2=3$$

2- يمس المستوي $\mathcal{P}: ax+by+cz+d=0$ الكرة إذا كان بعده عن مركزها O يساوي $R=\sqrt{3}$،

$$dist(O,\mathcal{P})=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|0-0+0+3|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{3}}}=\sqrt{\mathbf{3}}=R$$

وبالتالي المستوي $\mathcal{P}$ يمس الكرة.

حل المسألة الأولى في الدورة الأولى 2017:

1- لدينا إحداثيات النقاط B, D, G في هذا المعلم

$G(2,2,2)$	$D(0,2,0)$	$B(2,0,0)$

لتعيين معادلة المستوي نحتاج إلى تعيين ناظم $\vec{n}$ للمستوي والذي يكون عمودي على مستقيمين متقاطعين فيه

$\overrightarrow{BG}(0,2,2)$	$\overrightarrow{BD}(-2,2,0)$	$\vec{n}(a,b,c)$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{BD}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow -2a+2b=0$$
$$\Rightarrow\boxed{a=b}$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{BG}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{BG}=0\Rightarrow 2b+2c=0$$
$$\Rightarrow\boxed{-c=b}$$

باختيار $b=1$ يكون $a=1, c=-1$ ومنه

$$\vec{n}(1,1,-1)$$

وبالتالي معادلة المستوي (GBD) الذي ناظمه $\vec{n}(1,1,-1)$ ومار من النقطة B

$$a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$$
$$x-2+y-z=0\Rightarrow\boxed{x+y-z=2}$$

2- المستقيم (EC) شعاع توجيهه $\overrightarrow{EC}$ ومار بـ E

$\overrightarrow{EC}(2,2,-2)$	$C(2,2,0)$	$E(0,0,2)$

$$(EC):\begin{cases}x=x_E+x_{EC}\,t\\ y=y_E+y_{EC}\,t\,,\qquad t\in\mathbb{R}\\ z=z_E+z_{EC}\,t\end{cases}$$

$$(EC):\begin{cases}x=2\,t\\ y=2\,t\quad,\qquad t\in\mathbb{R}\\ z=2-2\,t\end{cases}$$

3- نعوض الإحداثيات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي (GBD)

$$(2t)+(2t)-(2-2t)=2$$
$$6t=4\Longrightarrow t=\frac{2}{3}$$

نعوض $t=\frac{2}{3}$ في الإحداثيات الوسيطية للمستقيم فتكون إحداثيات نقطة التقاطع

$$\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$$

4- $M(x,y,z)$

$\overrightarrow{EC}(2,2,-2)$	$\overrightarrow{EM}(x,y,z-2)$

$$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ y=\frac{2}{3}\\ z=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

5- $(EC)\perp(HM)$?

$\overrightarrow{EC}(2,2,-2)$	$\overrightarrow{HM}\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$	$H(0,2,2)$

يكفي إثبات أنّ $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{HM}=0$

$$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{HM}=2.\frac{2}{3}-2.\frac{4}{3}+2.\frac{2}{3}=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=0$$

ومنه $(EC)\perp(HM)$.

نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

حل السؤال الثاني في الدورة الثانية 2017:

شعاع توجيه المستقيم d هو $\vec{u}(1,-3,-3)$

شعاع توجيه المستقيم d' هو $\overrightarrow{u'}(1,3,-1)$

لإثبات أن المستقيمان يقعان بمستوٍ واحد إما يكونان متوازيان حيث يكون شعاعا التوجيه مرتبطان خطياً أو متقاطعان (حيث نتأكد من أنّ المستقيمان متقاطعان أو متخالفان من خلال الحل المشترك لمعادلتي المستقيمين)

أولاً: واضح أنّ مركبات الشعاعين $\vec{u}$ و$\overrightarrow{u'}$ غير متناسبة

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-3}{3}$$

ومنه المستقيمان غير متوازيان

ندرس إمكانية وجود نقطة مشتركة بينهما

$$d = d': \begin{cases} t+1 = s & (1) \\ -3t+2 = 3s-3 & (2) \\ -3t+3 = -s+1 & (3) \end{cases}$$

نحل اثنتان من المعادلات حل مشترك ونتأكد من الحل من المعادلة المتبقية، نعوض (1) في (2) نجد:

$$-3t+2 = 3t+3-3 \Rightarrow 6t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$$

نعوض الحل الناتج في (3)

$$-3\left(\frac{1}{3}\right)+3 = -\left(\frac{4}{3}\right)+1$$

$$2 \neq -\frac{1}{3}$$

ومنه المستقيمان متخالفان وغير متقاطعان.

حل السؤال الرابع في الدورة الثانية 2017:

طريقة أولى: إما ننطلق من حقيقة أنَّ

إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فإنّ:

$$\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\| \Rightarrow MA^2 = MB^2$$

....

طريقة ثانية: المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ يمر من النقطة N منتصف $[AB]$ ويقبل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظماً له

$B(1,-2,1)$	$A(2,0,1)$

$$N\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

$$N\left(\frac{3}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -1, 1\right)$$

$$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A) = (-1,-2,0)$$

ومنه معادلة المستوي تكون

$$-1\left(x-\frac{3}{2}\right)-2(y+1)+0(z-1) = 0$$

$$\Rightarrow x+2y+\frac{1}{2} = 0$$

حل التمرين الثاني في الدورة الثانية 2017:

يمكن إثبات ذلك بإثبات أنَّ H مركز أبعاد متناسبة للنقطتين I,J ننطلق من المعطيات:

$\overrightarrow{BF} = a.\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AE} = a.\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AE} = a.\overrightarrow{AD}$$

وبالتالي $(E,1)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(D,a),(A,1-a)$$

$$\overrightarrow{BF} = a.\overrightarrow{BC}$$

وبالتالي $(F,1)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(C,a),(B,1-a)$$

لدينا I منتصف $[AB]$ وبالتالي هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-a),(B,1-a)$، وتكون $(I,2-2a)$

ولدينا J منتصف $[CD]$ وبالتالي هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,a),(D,a)$، وتكون $(J,2a)$

ومنه حسب الخاصة التجميعية يكون مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الأربعة

$$(A,1-a),(B,1-a),(C,a),(D,a)$$

هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E,1)$ و$(F,1)$، ويكون منتصف $[EF]$ لتساوي الثقلين في E وF، وهو بالتالي النقطة $(H,2)$.

وحسب الخاصة التجميعية أيضاً يكون مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الأربعة

$$(A,1-a),(B,1-a),(C,a),(D,a)$$

هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2-2a)$ و$(J,2a)$ وبالتالي $(H,2)$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2-2a)$ و$(J,2a)$، وبالتالي النقاط H,J,I تقع على استقامة واحدة.

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

السؤال الثاني في الدورة الأولى 2018:

في المعلم المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ لتكن النقطة $A(1,-2,0)$ والمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته: $\mathcal{P}: x+2y+z-1=0$ والمطلوب:

احسب بعد النقطة A عن المستوي $\mathcal{P}$، ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي $\mathcal{P}$.

المسألة الثانية في الدورة الأولى 2018:

معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$، لدينا النقاط $A(1,1,0)$ و$B(1,2,1)$ و$C(4,0,0)$. المطلوب:

1- أثبت أنَّ النقاط C,B,A ليست على استقامة واحدة.
2- أثبت أنَّ معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة $x+3y-3z-4=0$.
3- ليكن المستويان $Q,\mathcal{P}$ معادلتهما:

$$\mathcal{P}: x+2y-z-4=0$$
$$Q: 2x+3y-2z-5=0$$

أثبت أنَّ المستويان يتقاطعان في الفصل المشترك له التمثيلات الوسيطية التالية:

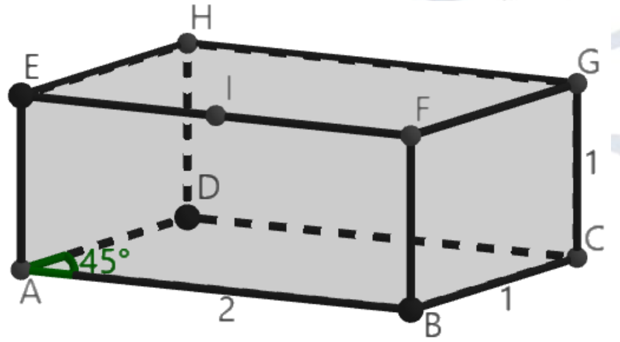
$$d:\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \quad , \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

4- ما هي نقطة تقاطع المستويات $(ABC),Q,\mathcal{P}$؟
5- احسب بُعد A عن المستقيم d.

السؤال الثاني في الدورة الثانية 2018:

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح، فيه $AB=2$، $BC=GC=1$ وقياس الزاوية $\widehat{DAB}$ يساوي 45° والنقطة I منتصف $[EF]$ والمطلوب:

1. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
2. عيّن موضع النقطة M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.



المسألة الأولى في الدورة الثانية 2018:

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$، لدينا النقاط: $C(4,0,0)$, $B(1,0,-1), A(2,1,3), E(1,-1,1), D(0,4,0)$،

1. جد $\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}$
2. أثبت أنَّ النقاط C وD وE ليست واقعة على استقامة واحدة.
3. أثبت أنَّ $\overrightarrow{AB}$ يعامد المستوي (CDE)
4. اكتب معادلة المستوي (CDE)
5. احسب بُعد B عن المستوي (CDE)
6. اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE).

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

حل السؤال الثاني في الدورة الأولى 2018:

$$dist(A,\mathcal{P})=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|1-4+0-1|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

الشكل العام لمعادلة الكرة التي مركزها النقطة (x_A,y_A,z_A) ونصف قطرها R هو:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$$

في معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي $\mathcal{P}$ يكون

$$R=dist(A,\mathcal{P})=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

وبالتالي المعادلة المطلوبة

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=\frac{8}{3}$$

حل المسألة الثانية في الدورة الأولى 2018:

1- نثبت أنَّ الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

$\overrightarrow{AC}(3,-1,0)$	$\overrightarrow{AB}(0,1,1)$

نلاحظ أن مركبات الشعاعين غير متناسبة

$$\frac{0}{3}\neq\frac{1}{-1}$$

وبالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً، ومنه النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

2- لنكتب معادلة المستوي (ABC) الذي ناظمه $\vec{n}(a,b,c)$ ومار بالنقطة A.

نعين $\vec{n}(a,b,c)$ بالاستفادة من كونه عمودي على كل مستقيم بالمستوي (نختار مستقيمين متقاطعين)

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow 0+b+c=0$$

$$\Rightarrow\boxed{b=-c}$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow 3a-b=0$$

$$\Rightarrow\boxed{b=3a}$$

نختار $b=1$ فيكون $c=-1$ و $a=\frac{1}{3}$

$$\vec{n}\left(\frac{1}{3},1,-1\right)$$

وبالتالي معادلة المستوي (ABC)

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$\frac{1}{3}(x-1)+(y-1)-z=0$$

$$\frac{1}{3}x+y-z=\frac{4}{3}$$

$$x+3y-3z-4=0$$

3- نتأكد من أنّ ناظميهما غير مرتبطين خطياً ثم نحل معادلتيهما حلاً مشتركاً.

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,2,-1),\qquad \overrightarrow{n_Q}(2,3,-2)$$

واضح أن مركباتهما غير متناسبة $\frac{1}{2}\neq\frac{2}{3}$، وبالتالي المستويان متقاطعان. لنعيين الفصل المشترك لهما (نحل المعادلتين حلاً مشتركاً بحيث نكتب اثنان من المجاهيل بدلالة المجهول الثالث)

$$\mathcal{P}: x+2y-z-4=0\Rightarrow x=z-2y+4$$

$$Q: 2x+3y-2z-5=0\Rightarrow z=x+\frac{3}{2}y-\frac{5}{2}$$

نعوض الأولى في الثانية نجد

$$x=x+\frac{3}{2}y-\frac{5}{2}-2y+4\Rightarrow$$

$$3y-5-4y+8=0\Rightarrow y=3$$

وبفرض $z=t$ نجد

$$\begin{cases}x=t-2\\ y=3\quad,\qquad t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

وهي معادلة الفصل المشترك المطلوب.

4- نقطة تقاطع المستويات $(ABC),Q,\mathcal{P}$ هي ذاتها نقطة تقاطع d مع المستوي (ABC)

لذا نعوض الإحداثيات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي (ABC)

$$t-2+3(3)-3t-4=0\Rightarrow t=\frac{3}{2}$$

وبالتالي نقطة التقاطع هي النقطة الموافقة لـ $t=\frac{3}{2}$ وتكون

$$\left(-\frac{1}{2},3,\frac{3}{2}\right)$$

5- أولاً نلاحظ أنّ النقطة $A(1,1,0)$ لا تنتمي إلى المستقيم d

لتكن $A'(x,y,z)$ مسقط النقطة A على المستقيم d، عندئذٍ يكون

$\overrightarrow{u_d}(1,0,1)$	$\overrightarrow{AA'}(x-1,y-1,z)$

$$\begin{cases}\boxed{1}\ A'\in d\Rightarrow\begin{cases}x=t-2\\ y=3\\ z=t\end{cases}\\ \boxed{2}\ \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{u_d}=0\Rightarrow x-1+z=0\end{cases}$$

بتعويض $\boxed{1}$ في $\boxed{2}$ نجد:

$$t-2-1+t=0\Rightarrow t=\frac{3}{2}$$

وبالتالي تكون النقطة $A'\left(-\frac{1}{2},3,\frac{3}{2}\right)$

ومنه نجد بعد A عن المستقيم d

$$AA'=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+(2)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{17}{2}}$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

حل السؤال الثاني في الدورة الثانية 2018:

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AD}\|.\cos\widehat{DAB}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 2\times(1)\times\cos 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

2. $\overrightarrow{AM} = \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{GH}}_{\overrightarrow{FE}}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AI}$$

ومنه فإنّ النقطة M تنطبق على I.

حل المسألة الأولى في الدورة الثانية 2018:

1. $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$$
$$\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$$
$$\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$$

2. نثبت أنّ الشعاعين $\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطين خطياً

واضح أنَّ المركبات غير متناسبة $\frac{4}{-1} \neq \frac{-4}{-3}$، وبالتالي $\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطين خطياً ومنه النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

3. إذا كان $\overrightarrow{AB}$ عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي فهو عمودي عليه.

نثبت أنَّ

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$$
$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = 0$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (-1)(-4) + (-1)(4) + (-4)(0)$$
$$= 4 - 4 = 0 \text{ محققة}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = (-1)(-3) + (-1)(-1) + (-4)(1)$$
$$= 3 + 1 - 4 = 0 \text{ محققة}$$

وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ يعامد المستوي (CDE).

4. المستوي (CDE) يمر من النقطة C ويقبل $\overrightarrow{AB}$ ناظماً له. معادلة مستوي مار من نقطة (x_0, y_0, z_0) وناظمه $\vec{n}(a,b,c)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

وبالتالي معادلة المستوي (CDE)

$$-(x-4) - y - 4z = 0$$
$$x + y + 4z - 4 = 0$$

5. يعطى

$$dist(B,(CDE)) = \frac{|ax_B + by_B + cz_B + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$= \frac{|1+0-4-4|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(4)^2}} = \frac{7}{\sqrt{18}} = \frac{7}{3\sqrt{2}}$$

6. شكل معادلة الكرة التي مركزها النقطة (x_B, y_B, z_B) ونصف قطرها R هو:

$$(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2 = R^2$$

في معادلة الكرة التي مركزها $B(1,0,-1)$ وتمس المستوي (CDE) يكون

$$R = dist(B,(CDE)) = \frac{7}{\sqrt{18}}$$

وبالتالي المعادلة المطلوبة

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \frac{49}{18}$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

السؤال الرابع في الدورة الأولى 2019:

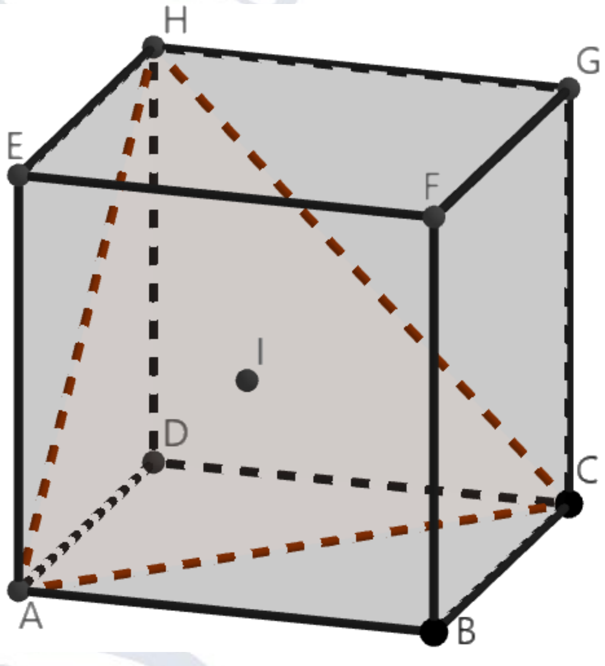
في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمل النقطتين $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$

1) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$
2) أثبت أنَّ المستقيمين (AB) و d متعامدان.

المسألة الأولى في الدورة الأولى 2019:

نتأمَّل في معلم متجانس $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$،المكعب $ABCDEFGH$. المطلوب:

1) اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط A,C,H,F,D.
2) اكتب معادلة للمستوي (ACH).
3) أثبت أنَّ المستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته:
$$\mathcal{P}: -2x+2y-2z+1=0$$
يوازي المستوي (ACH).
4) بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أنَّ F,I,D على استقامة واحدة.
5) اكتب معادلة للكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$. وبيّن أنّ المستوي (ACH) يمس الكرة S.



السؤال الرابع في الدورة الثانية 2019:

نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$ والمستوي
$$P: 3x-y-3z-8=0$$

1) أثبت أنَّ المستقيم (AB) يعامد المستوي P.
2) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB)، ثم عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P.

المسألة الأولى في الدورة الثانية 2019:

نتأمَّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:
$$P: 2x-y+2z-2=0$$
$$Q: x+y+z-1=0$$
$$R: x-z-1=0$$
والمطلوب:

1) أثبت أنَّ المستويين Q,P متقاطعان بفصل مشترك Δ، واكتب تمثيلاً وسيطياً له.
2) تحقق أنَّ المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A.
3) أثبت أنَّ المستويات R,Q,P تتقاطع بنقطة I يطلب تعيين إحداثياتها.
4) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ.

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

حل السؤال الرابع في الدورة الأولى 2019:

1) المستقيم d مار من A وشعاع توجيه $\vec{u}(2,2,1)$

$$d:\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

2) نثبت أنَّ شعاعي التوجيه متعامدان، أي نثبت أنَّ $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}$،

$$\overrightarrow{AB}(-1,1,0), \qquad \vec{u}(2,2,1)$$

$$\overrightarrow{AB}.\vec{u} = -1(2)+1(2)+0(1) = 0$$

ومنه نجد أنَّ المستقيمين (AB) و d متعامدين.

حل المسألة الأولى في الدورة الأولى 2019:

1) إحداثيات النقاط في هذا المعلم:

$A(0,0,0)$	$B(1,0,0)$	$C(1,1,0)$	$D(0,1,0)$
$E(0,0,1)$	$F(1,0,1)$	$G(1,1,1)$	$H(0,1,1)$

2) لتعيين معادلة للمستوي (ACH)،

طريقة أولى: معادلة مستوي مار من نقطة وناظمه معلوم، نعين ناظماً $\vec{n}(a,b,c)$ للمستوي حيث يكون $\vec{n} \perp \overrightarrow{AH}$ و $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

....

طريقة ثانية: من خلال الارتباط الخطي لثلاثة أشعة، حيث يكون المستوي (ACH) مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق:

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AH}$$

....

طريقة ثالثة: الشكل العام لمعادلة المستوي

$$ax+by+cz+d=0$$

نستفيد من معرفتنا لثلاثة نقاط من المستوي نعوضها في الشكل العام فينتج لدينا ثلاث معادلات بحلها حلاً مشتركاً نحصل على معادلة المستوي المطلوب.

$$\begin{cases} A \in (ACH) \Rightarrow 0+0+0+d=0 \\ C \in (ACH) \Rightarrow a+b+0+d=0 \\ H \in (ACH) \Rightarrow 0+b+c+d=0 \end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ

$$d=0, \qquad a+b=0, \qquad b+c=0$$

باختيار قيمة لأحد المجاهيل a,b,c، ولتكن $a=1$ نجد

$$a=1, \qquad b=-1, \qquad c=1, \qquad d=0$$

وبالتالي تكون معادلة المستوي (ACH) بالشكل:

$$x-y+z=0$$

3) نثبت أنَّ ناظميهما مرتبطان خطياً،

لدينا ناظم المستوي (ACH)

$$\vec{n}(1,-1,1)$$

وناظم المستوي $\mathcal{P}$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(-2,2,-2)$$

نلاحظ أن مركبات الشعاعين متناسبة $\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$

فالناظمين مرتبطان خطياً وبالتالي المستويان $\mathcal{P}$ و (ACH) متوازيان.

4) نثبت الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{FI}, \overrightarrow{FD}$

$$I\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$\overrightarrow{FI}\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$	$\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$

نلاحظ أنَّ المركبات متناسبة $\frac{-2/3}{-1} = \frac{2/3}{1} = \frac{-2/3}{-1}$

أو نكتب $\overrightarrow{FI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FD}$

فالشعاعان مرتبطان خطياً، وبالتالي النقاط F,I,D على استقامة واحدة.

5) الشكل العام لمعادلة الكرة التي مركزها النقطة (x_0,y_0,z_0) ونصف قطرها R هو:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$

ومنه معادلة الكرة المطلوبة

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2 = 3$$

يمس المستوي (ACH) الكرة إذا كان بعده عن مركزها Ω يساوي $R=\sqrt{3}$،

$$dist(\Omega,(ACH)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|1+1+1|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}} = \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{3}}} = \sqrt{\mathbf{3}}$$

وبالتالي المستوي (ACH) يمس الكرة S.

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

حل السؤال الرابع في الدورة الثانية 2019:

1) نثبت أنَّ شعاع توجيه المستقيم مرتبط خطياً مع ناظم المستوي (أي يوازي الناظم)، وبالتالي يكون المستقيم عمودي على المستوي.

$\overrightarrow{AB}(-3,1,3)$	$\overrightarrow{n_P}(3,-1,-3)$

نلاحظ أنَّ الشعاعان مرتبطان خطياً لأن المركبات متناسبة

$$\frac{-3}{3}=\frac{1}{-1}=\frac{3}{-3}=-1$$

وبالتالي المستقيم (AB) يعامد المستوي P.

2) المستقيم (AB) شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}$ ويمر بالنقطة A

$$(AB):\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=-2+3t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$

بما أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي P، يؤول الحل فقط إلى إيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي، نعوض الإحداثيات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي

$$3(2-3t)-(1+t)-3(-2+3t)-8=0$$
$$6-9t-1-t+6-9t-8=0$$
$$-19t=-3\Rightarrow t=\frac{3}{19}$$
$$A'\left(2-\frac{9}{19},1+\frac{3}{19},-2+\frac{9}{19}\right)$$
$$A'=\left(\frac{29}{19},\frac{22}{19},-\frac{29}{19}\right)$$

حل المسألة الأولى في الدورة الثانية 2019:

1) لإثبات التقاطع نتحقق من عدم الارتباط الخطي لناظمي المستويين.

$\overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$	$\overrightarrow{n_P}(2,-1,2)$

واضح أنَّ المركبات غير متناسبة $\frac{1}{2}\neq\frac{1}{-1}$ فالمستويين Q,P متقاطعين.

لتعيين Δ نحل معادلتي Q,P حلاً مشتركاً

$$2x-y+2z-2=0 \quad (1)$$
$$x+y+z-1=0 \quad (2)$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$3x+3z-3=0\Rightarrow x+z=1\Rightarrow x=1-z$$

بفرض $z=t$ يكون $x=1-t$ نعوض في (2)

$$1-t+y+t-1=0\Rightarrow y=0$$

وبالتالي المعادلات الوسيطية للفصل المشترك Δ

$$\Delta:\begin{cases} x=1-t \\ y=0 \\ z=t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$

2) نتحقق من التعامد من خلال التحقق من الارتباط الخطي بين ناظم المستوي R وشعاع توجيه Δ.

$\overrightarrow{n_R}(1,0,-1)$	$\overrightarrow{u_\Delta}(-1,0,1)$

نلاحظ أنَّ الشعاعان مرتبطان خطياً لأن المركبات متناسبة $\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}$، أو نكتب

$$\overrightarrow{n_R}=-\overrightarrow{u_\Delta}$$

ومنه المستوي R يعامد Δ.

نتأكد من أنّ النقطة A تحقق معادلة المستوي R

$$1-0-1=0 \text{ محققة } \Rightarrow A\in R$$

3) نعين نقطة تقاطع المستوي R مع Δ، وتكون هي ذاتها النقطة I تقاطع المستويات الثلاث،

نعوض الإحداثيات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي

$$(1-t)-t-1=0\Rightarrow t=0$$

ومنه

$$I(1,0,0)$$

4) بما أنّ Δ عمودي على R، والنقطة A تنتمي إلى R، فيكون بعد النقطة A عن المستقيم Δ مساوياً لـ AI

$$AI=\sqrt{0+(-2)^2+0}=2$$

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

السؤال الثاني في الدورة الأولى 2020:

تتأمّل المستويين $P_1: 2x - y + z + 1 = 0$ ، $P_2: x + y - z = 0$ والمطلوب

1- تيقن أنَّ المستويين متعامدان.
2- اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك.

التمرين الرابع في الدورة الأولى 2020:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط:

$$A(1,0,0), B(4,3,-3), C(-1,1,2), D(0,0,1)$$

والمطلوب:

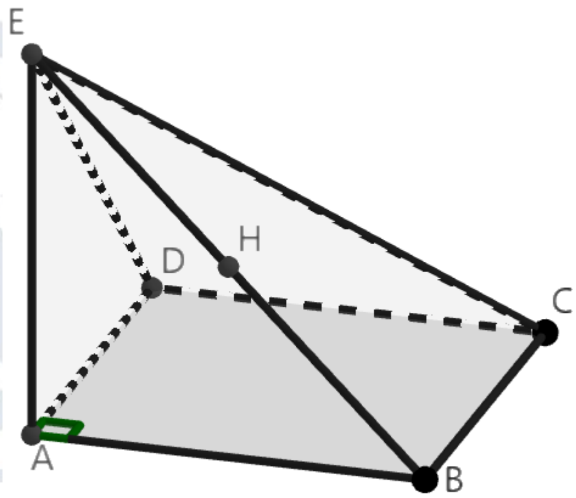
1- أثبت أنَّ $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً.
2- أثبت أنَّ الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً.
3- استنتج أنَّ النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ حيث أنَّ γ,β,α أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

المسألة الأولى في الدورة الأولى 2020:

$(EABCD)$ هرم رباعي رأسه E قاعدته مربع طول ضلعه 3، $[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EA = 3$

نختار المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

1- عيّن إحداثيات A,B,C,D.
2- جد معادلة المستوي (EBC).
3- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC)
4- استنتج أنَّ H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC)
5- احسب حجم رباعي الوجوه $(AEBC)$



السؤال الرابع في الدورة الثانية 2020:

تتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي $P: 2x + y - 3z + 2 = 0$ والنقطة $A(1,1,-2)$

1- أثبت أنَّ النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P.
2- اكتب معادلة للمستوي Q المار من A والموازي للمستوي P.

التمرين الثالث في الدورة الثانية 2020:

المستقيمان d, d' معرفان وسيطياً وفق:

$$d': \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = s - 2 \ , \qquad s \in \mathbb{R} \\ z = 3s - 2 \end{cases}$$

و

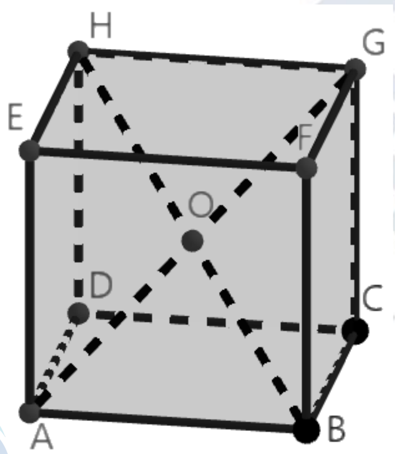
$$d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \ , \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$$

1- أثبت أنَّ d, d' متقاطعان ثم عيّن إحداثيات I نقطة التقاطع.
2- جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين d, d'

المسألة الأولى في الدورة الثانية 2020:

مكعب $ABCDEFG$ طول حرفه 2، O نقطة تقاطع القطرين $[HB],[AG]$. نختار المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ المطلوب:

1- جد إحداثيات النقاط O,H,G,B,A
2- أعط معادلة للمستوي (GOB)
3- احسب $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OB}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$
4- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC)
5- أثبت أنَّ المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB)
6- جد الأعداد الحقيقية γ,β,α حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (C,γ) و (B,β) و (A,α)



+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

حل السؤال الثاني في الدورة الأولى 2020:

1- نتأكد من أنَّ ناظميهما متعامدان،

$\overrightarrow{n_{P_2}}(1,1,-1)$	$\overrightarrow{n_{P_1}}(2,-1,1)$

$$\overrightarrow{n_{P_1}}.\overrightarrow{n_{P_2}} = 2(1) - 1(1) + 1(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_{P_1}} \perp \overrightarrow{n_{P_2}}$$

وبالتالي المستويان متعامدان.

2- بحل المعادلتين حلاً مشتركاً،

$$2x - y + z + 1 = 0 \quad (1)$$
$$x + y - z = 0 \quad (2)$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

وبفرض $z = t$، تكون $y = t - \frac{1}{3}$، وبالتالي المعادلات الوسيطية للفصل المشترك

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = t - \dfrac{1}{3}, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

حل التمرين الرابع في الدورة الأولى 2020:

1- نلاحظ عدم تناسب مركبات الشعاعين

$\overrightarrow{AC}(-2,1,2)$	$\overrightarrow{AB}(3,3,-3)$

$$\frac{3}{-2} \neq \frac{3}{1}$$

فهما غير مرتبطين خطياً.

2- $\overrightarrow{AD}(-1,0,1)$، لإثبات الارتباط الخطي للأشعة الثلاثة نثبت وجود عددين $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - 2\beta = -1 & (1) \\ 3\alpha + \beta = 0 & (2) \\ -3\alpha + 2\beta = 1 & (3) \end{cases}$$

بجمع (2) و(3)، نجد أن $\beta = \frac{1}{3}$، نعوض في (2) نجد $\alpha = -\frac{1}{9}$، نتأكد من صحة هذه القيم بتعويضها في (1)

$$3\left(-\frac{1}{9}\right) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1 \text{ محققة}$$

وبالتالي الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و$\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً ويكون

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

3- انطلاقاً مما سبق نحاول أن نصل إلى علاقة من الشكل

$$\alpha\,\overrightarrow{DA} + \beta\,\overrightarrow{DB} + \gamma\,\overrightarrow{DC} = \vec{0}\,;\ \alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{9}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$$

$$\frac{7}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{9}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \vec{0}, \qquad \frac{7}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \neq 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{7}{3}, \qquad \beta = -\frac{1}{9}, \qquad \gamma = \frac{1}{3}$$

حل المسألة الأولى في الدورة الأولى 2020:

1- $E(0,0,3)$

$A(0,0,0)$	$B(3,0,0)$	$C(3,3,0)$	$D(0,3,0)$

2- (يحل بأكثر من طريقة -راجع صفحة 108-)

الشكل العام لمعادلة المستوي (EBC)

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} E \in (EBC) \Rightarrow 0 + 0 + 3c + d = 0 \\ B \in (EBC) \Rightarrow 3a + 0 + 0 + d = 0 \\ C \in (EBC) \Rightarrow 3a + 3b + 0 + d = 0 \end{cases}$$

نختار قيمة ولتكن من أجل $c = 1$، فيكون

$$d = -3, \qquad a = 1, \qquad b = 0$$

ومنه تكون معادلة المستوي (EBC)

$$x + z - 3 = 0$$

3- بما أنَّ المستقيم يعامد المستوي يكون ناظم المستوي $\vec{n}(1,0,1)$ شعاع توجيه للمستقيم،

ومنه المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من A ويوجهه $\vec{n}$

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

4- إحداثيات H منتصف $[EB]$

$$H\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$$

المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC) هو نقطة تقاطع المستقيم في الطلب 3 مع المستوي (EBC)، نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي

$$t + t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

ومنه نقطة التقاطع هي $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$ وهي ذاتها النقطة H.

5- يعطى قانون الحجم

$$V(AEBC) = \frac{1}{3}S(AEB).|\boldsymbol{BC}|$$

$$V(AEBC) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AE.EB\right).3$$

$$V(AEBC) = \frac{1}{2}3.\sqrt{9 + 0 + 9} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

حل السؤال الرابع في الدورة الثانية 2020:

1- نثبت أنَّ النقطة A لا تحقق معادلة المستوي

$$2(1)+1-3(-2)+2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$3+6+2 \neq 0 \Rightarrow A \notin P$$

2- يكون نظيم Q هو ذاته نظيم P، معادلة مستوي مار من A ونظيمه $\vec{n}(2,1,-3)$

$$2(x-1)+1(y-1)-3(z+2)=0$$

$$Q:\ 2x+y-3z-9=0$$

حل التمرين الثالث في الدورة الثانية 2020:

1- نتأكد من أنهما غير متوازيين ثم نحل المعادلات الوسيطية حلاً مشتركاً.

$\overrightarrow{u_d}(1,2,-1)$	$\overrightarrow{u_{d'}}(2,1,3)$

نلاحظ أنَّ المركبات غير متناسبة $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$ وبالتالي غير مرتبطان خطياً أي غير متوازيين. بالحل المشترك نجد

$$\begin{cases} 2s-1=t+2 & (1) \\ s-2=2t+1 & (2) \\ 3s-2=-t & (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و(3) نجد: $5s=5 \Rightarrow s=1$، نعوض في (3) نجد $t=-1$، نتأكد من صحة هذه القيم بتعويضها في (2)

$1-2=2(-1)+1$ محققة

ومنه يكون المستقيمان متقاطعان، لتعيين نقطة التقاطع نعوض $t=-1$ في معادلات d، أو $s=1$ في معادلات d'

$$I(1,-1,1)$$

2- نعيّن $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً للمستوي حيث يكون عمودي على كل من $\overrightarrow{u_d}$ و $\overrightarrow{u_{d'}}$

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_d}=0 \Longrightarrow a+2b-c=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_{d'}}=0 \Longrightarrow 2a+b+3c=0$$

بفرض $a=1$ نجد

$$\begin{cases} c=2b+1 & (1) \\ 2+b+3c=0 & (2) \end{cases}$$

نعوض (1) في (2) نجد:

$$2+b+6b+3=0 \Rightarrow b=-\frac{5}{7}$$

نعوض في (1) نجد: $c=-\frac{3}{7}$، ومنه معادلة المستوي المار من I وناظمه $\vec{n}\left(1,-\frac{5}{7},-\frac{3}{7}\right)$

$$x-1-\frac{5}{7}(y+1)-\frac{3}{7}(z-1)=0$$

$$\boxed{7x-5y-3z-9=0}$$

حل المسألة الأولى في الدورة الثانية 2020:

$A(0,0,0)$	$B(2,0,0)$	$C(2,2,0)$	$D(0,2,0)$
$E(0,0,1)$	$F(2,0,2)$	$G(2,2,2)$	$H(0,2,2)$

$O(1,1,1)$ حيث O منتصف $[AG]$.

2- (يحل بأكثر من طريقة -راجع صفحة 108-)

الشكل العام لمعادلة المستوي (GOB)

$$ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{cases} G \in (GOB) \Rightarrow 2a+2b+2c+d=0 & (1) \\ O \in (GOB) \Rightarrow a+b+c+d=0 & (2) \\ B \in (GOB) \Rightarrow 2a+0+0+d=0 & (3) \end{cases}$$

بطرح (3) من (1) نجد

$$b+c=0 \Rightarrow \boxed{b=-c}$$

نعوض في (2) نجد:

$$\boxed{d=-a}$$

نعوض في (3) نجد: $a=0$ وبالتالي $d=0$

نختار قيمة لـ $b=1$ فتكون $c=-1$

ومنه تكون معادلة المستوي (GOB)

$$(GOB): y-z=0$$

3- $\overrightarrow{OG}(1,1,1),\ \overrightarrow{OB}(1,-1,-1)$

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}=1(1)+1(-1)+1(-1)=-1$$

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}=\|\overrightarrow{OG}\|.\|\overrightarrow{OB}\|.\cos\widehat{GOB}$$

$$-1=\sqrt{3}\sqrt{3}\ \cos\widehat{GOB} \Longrightarrow \cos\widehat{GOB}=-\frac{1}{3}$$

4- المستقيم (DC) مار من D وشعاع توجيهه $\overrightarrow{DC}(2,0,0)$

$$(DC):\begin{cases} x=2t \\ y=2\ , \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$$

5- نثبت أنَّ شعاع توجيهه $\overrightarrow{DC}$ عمودي على ناظم المستوي $\vec{n}(0,1,-1)$ أي نثبت أن

$$\vec{n}.\overrightarrow{DC}=0$$

$\vec{n}.\overrightarrow{DC}=0+0+0=0$ محققة

وبالتالي المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB).

6- نبحث عن علاقة من الشكل

$$\alpha\,\overrightarrow{DA}+\beta\,\overrightarrow{DB}+\gamma\,\overrightarrow{DC}=\vec{0}\ ;\ \alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

لدينا حسب قاعدة متوازي الأضلاع

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}=\vec{0}$$

وبالتالي D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,1)$ و$(A,1)$ و$(B,-1)$.

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

السؤال الرابع في الدورة الأولى 2021:

تتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقاط الآتية: $D(6,2,5), C(5,0,5), B(1,-2,1), A(2,0,1)$ والمطلوب:

1) أثبت أنَّ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً.
2) عيّن العددين الحقيقيين β,α بحيث $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ واستنتج أنَّ النقاط D,C,B,A تقع في مستوٍ واحد.

المسألة الأولى في الدورة الأولى 2021:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمّل النقاط: $D(3,1,1), C(-3,4,-1), B(2,1,1), A(-1,2,3)$. المطلوب:

1) جد $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ ، وبيّن أنّ المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان.
2) أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة للمستوي (ABC).
3) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC).
4) احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$.
5) بفرض أنّ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,2),(B,-1),(A,1)$ أثبت أنّ المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان.

السؤال الثاني في الدورة الثانية 2021:

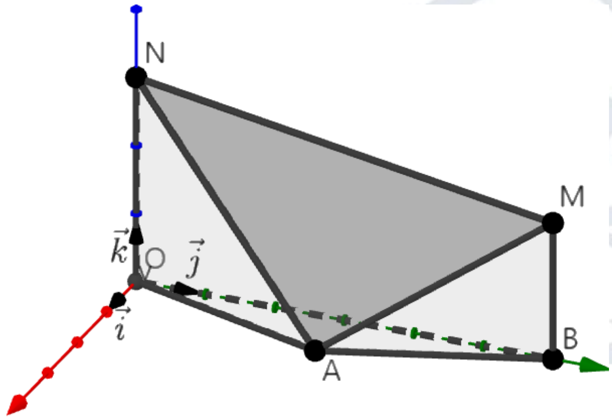
تتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي $P: 2x+y-2z-4=0$. المطلوب:

1) احسب بعد A عن المستوي P.
2) اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

التمرين الثاني في الدورة الثانية 2021:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا النقاط: $A(1,3,0), B(0,6,0), N(0,0,3), M(0,6,2)$.
المطلوب:

1) اكتب معادلة للمستوي (AMN)
2) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي (AMN).
3) أثبت أنَّ المستوي الذي معادلته $z-1=0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BM]$.



+963943608577 نورأشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

حل السؤال الرابع في الدورة الأولى 2021:

1) نتأكد من أن مركبات الشعاعين

$\overrightarrow{AC}(3,0,4)$	$\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$

غير متناسبة $\frac{0}{4} \neq \frac{-1}{3}$ وبالتالي الشعاعين غير مرتبطين خطياً.

2) لدينا $\overrightarrow{AD}(4,2,4)$،

$$\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = -\alpha + 3\beta & (1) \\ 2 = -2\alpha \Rightarrow \alpha = -1 & (2) \\ 4 = 4\beta \Rightarrow \beta = 1 & (3) \end{cases}$$

نتأكد من القيم التي حصلنا عليها من (2) و(3) بتعويضها في (1)

$4 = -(-1) + 3(1)$ محققة

وبالتالي الأشعة الثلاثة $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً مما يعني أن النقاط D, C, B, A تقع في مستو واحد.

حل المسألة الأولى في الدورة الأولى 2021:

1) لدينا

$\overrightarrow{AC}(-2,2,-4)$	$\overrightarrow{AB}(3,-1,-2)$

برهان أن $(AB) \perp (AC)$ يكافئ برهان أن $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ويكفي لذلك أن نبرهن أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3(-2) - 1(2) - 2(-4)$$
$$= -6 - 2 + 8 = 0$$

ومنه فإن المستقيمين (AC) و(AB) متعامدان.

2) نثبت أنه يعامد مستقيمين متقاطعين فيه، أي نثبت أنّ $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2(3) + 4(-1) + 1(-2) = 6 - 4 - 2$$
$$= 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2(-2) + 4(2) + 1(-4) = -4 + 8 - 4$$
$$= 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$$

ومنه فإن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC).

معادلة مستوي مار من نقطة (x_0, y_0, z_0) وناظمه $\vec{n}(a,b,c)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

معادلة المستوي (ABC) ناظمه $\vec{n}$ ومار من $A(-1,2,3)$

$$2(x+1) + 4(y-2) + (z-3) = 0$$

$$\boxed{2x + 4y + z - 9 = 0}$$

3) بما أن المستقيم عمودي على المستوي فإنه يقبل ناظم المستوي كشعاع توجيه،

وبالتالي المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار من D ويقبل $\vec{n}(2,4,1)$ شعاع توجيه له

$$d: \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 4t + 1, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t + 1 \end{cases}$$

4) بعد D عن المستوي (ABC)

$$dist(D,(ABC)) = \frac{|ax_D + by_D + cz_D + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|2(3) + 4 + 1 - 9|}{\sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = h$$

$$V(DABC) = \frac{1}{3}S(ABC).h$$

لدينا المثلث ABC قائم في A، ومنه

$$AB = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$
$$AC = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{24}$$
$$S(ABC) = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\sqrt{14 \times 24}$$
$$S = \frac{1}{2}\sqrt{2 \times 7 \times 8 \times 3} = \frac{4}{2}\sqrt{21} = 2\sqrt{21}$$
$$\Rightarrow V(DABC) = \frac{1}{3}2\sqrt{21}.\frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{4}{3}$$

5) بما أنَّ G م.أ.م لـ $(A,1), (B,-1), (C,2)$ فإن

$$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

نحاول أن نصل إلى علاقة من الشكل

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CG}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{GA}}_{-\overrightarrow{AG}} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) = -2\overrightarrow{GC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{GC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CG}$$

ومنه يكون الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CG}$ مرتبطين خطياً وبالتالي (AB) و(CG) متوازيان.

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

حل السؤال الثاني في الدورة الثانية 2021:

1) بعد A عن المستوي P

$$dist(A,P)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|2(2)+1-2(2)-4|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\frac{3}{3}=1$$

2) شكل معادلة الكرة التي مركزها النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ ونصف قطرها R هو:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$$

في معادلة الكرة التي مركزها $A(2,1,2)$ وتمس المستوي P يكون

$$R=dist(A,P)=1$$

وبالتالي المعادلة المطلوبة

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$$

حل التمرين الثاني في الدورة الثانية 2021:

1) (يحل بأكثر من طريقة -راجع صفحة 108-)

الشكل العام لمعادلة المستوي (AMN)

$$ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{cases} A\in(AMN)\Rightarrow a+3b+0+d=0\\ M\in(AMN)\Rightarrow 0+6b+2c+d=0\\ N\in(AMN)\Rightarrow 0+0+3c+d=0\end{cases}$$

نختار قيمة ولتكن من أجل $c=1$، فيكون

$$d=-3,\qquad b=\frac{1}{6},\qquad a=\frac{5}{2}$$

ومنه تكون معادلة المستوي (AMN)

$$\frac{5}{2}x+\frac{1}{6}y+z-3=0$$

$$(AMN):\ 15x+y+6z-18=0$$

2) المستقيم Δ مار من O ويعامد (AMN) وبالتالي يقبل ناظم المستوي شعاع توجيه له $\vec{n}(15,1,6)$

$$\Delta:\begin{cases}x=15\,t\\ y=t\\ z=6\,t\end{cases},\qquad t\in\mathbb{R}$$

3) المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BM]$ مار من I منتصف $[BM]$ ويقبل $\overrightarrow{BM}$ ناظماً له

$$I(0,6,1)$$

$$\overrightarrow{BM}(0,0,2)$$

معادلة مستوي مار من نقطة (x_0,y_0,z_0) وناظمه $\vec{n}(a,b,c)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

ومنه معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BM]$

$$0+0+2(z-1)=0\Rightarrow z-1=0$$

وهي ذات المعادلة المعطاة.

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

السؤال الثاني في الدورة الأولى 2022:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $C(0,0,1), B(0,1,0), A(2,0,0)$ والمطلوب:

1- احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ واستنتج $\cos(\widehat{BAC})$.
2- إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC، عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق العلاقة:

$$\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{AB}\|$$

المسألة الأولى في الدورة الأولى 2022:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(1,1,2)$ والمستويان P و Q:

$$P: x-y+2z-1=0$$
$$Q: 2x+y+z+1=0$$

والمطلوب:

1- أثبت أنَّ المستويين P و Q متقاطعان بفصل مشترك d.
2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d.
3- اكتب معادلة للمستوي R المار من A ويعامد كلاً من المستويين P و Q.
4- جد إحداثيات النقطة B الناتجة من تقاطع المستقيم d والمستوي R.
5- احسب بعد النقطة A عن المستقيم d.
6- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q.

السؤال الثاني في الدورة الثانية 2022:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-1,1)$ والمطلوب:

أعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA=MB$ وما طبيعة المجموعة S.

المسألة الأولى في الدورة الثانية 2022:

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط: $A(2,-2,2)$ و $B(1,1,0)$ و $C(1,0,1)$ و $D(0,0,1)$. والمطلوب:

1- تحقق أنَّ النقاط B و C و D لا تقع على استقامة واحدة.
2- أثبت أنَّ: $y+z-1=0$ هي معادلة للمستوي (BCD).
3- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من النقطة A ويعامد المستوي (BCD).
4- عيّن إحداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD).
5- اكتب معادلة للكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً لها.

+963943608577 نورأشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

حل السؤال الثاني في الدورة الأولى 2022:

1- لدينا

$\overrightarrow{AC}(-2,0,1)$	$\overrightarrow{AB}(-2,1,0)$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2(-2)+1(0)+0(1) = 4$$
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2+(1)^2+0} = \sqrt{5}$$
$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2+0+(1)^2} = \sqrt{5}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos(\widehat{BAC})$$
$$4 = 5\cos(\widehat{BAC}) \Rightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{4}{5}$$

2- إذا كانت G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ وأياً كانت النقطة M عندئذٍ تتحقق

$$\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

لدينا G مركز ثقل المثلث ABC، وبالتالي:

$$\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$$
$$\|6\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \frac{1}{6}\|\overrightarrow{AB}\|$$
$$\Rightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

مجموعة النقاط M التي تبعد عن نقطة ثابتة G مسافة قدرها $\frac{\sqrt{5}}{6}$، وهي تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $R = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

حل المسألة الأولى في الدورة الأولى 2022:

1- نثبت أنَّ ناظميهما غير مرتبطين خطياً

$\overrightarrow{n_Q}(2,1,1)$	$\overrightarrow{n_P}(1,-1,2)$

نلاحظ أنَّ المركبات غير متناسبة $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{2}$ وبالتالي الشعاعان غير مرتبطان خطياً والمستويان متقاطعان.

2- بحل معادلتي المستويين حلاً مشتركاً

$$P:\ x-y+2z-1=0$$
$$Q:\ 2x+y+z+1=0$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$3x+3z=0 \Rightarrow x=-z$$

نعوض في P نجد:

$$-y+z-1=0 \Rightarrow y=z-1$$

بفرض $z=t$، نجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك

$$d:\begin{cases} x=-t \\ y=t-1, \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

3- المستوي R يعامد كلاً من P و Q وبالتالي فهو يعامد فصلهما المشترك d، وبالتالي فإن شعاع توجيه d يكون ناظماً له

$$\overrightarrow{n_R} = \overrightarrow{u_d}(-1,1,1)$$

معادلة مستوي مار من $A(1,1,2)$ وناظمه $\overrightarrow{n_R}(-1,1,1)$

$$-(x-1)+(y-1)+(z-2)=0$$
$$R:\ -x+y+z-2=0$$

4- نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة R

$$t+t-1+t-2=0 \Rightarrow t=1$$

نعوض في معادلات المستقيم، نجد

$$B(-1,0,1)$$

5- النقطة A تنتمي للمستوي R و d عمودي على R، وبالتالي بعد A عن d يساوي المسافة بين A و B نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2+(0-1)^2+(1-2)^2}$$
$$AB = \sqrt{6}$$

6- S كرة مركزها النقطة $A(1,1,2)$ ونصف قطرها

$$R = dist(A,Q) = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$R = \frac{|2(1)+1(1)+1(2)+1|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

وتكون المعادلة بالشكل:

$$S:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6$$

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

حل السؤال الثاني في الدورة الثانية 2022:

$$MA^2 = MB^2$$

$$(0-x)^2 + (1-y)^2 + (-1-z)^2 = (1-x)^2 + (-1-y)^2 + (1-z)^2$$

بالنشر نجد:

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 2z + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$$

وبالإصلاح نجد:

$$2x - 4y + 4z - 1 = 0$$

المجموعة S تمثل مجموعة النقاط التي بعدها عن A يساوي بعدها عن B وهي عبارة عن المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ المستوي المار من منتصف $[AB]$ ويعامد (AB).

حل المسألة الأولى في الدورة الثانية 2022:

1- نتحقق من كون الشعاعين $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ غير مرتبطين خطياً

$\overrightarrow{BD}(-1,-1,1)$	$\overrightarrow{BC}(0,-1,1)$

واضح أن المركبات غير متناسبة $\frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-1}$ وبالتالي الشعاعان غير مرتبطان خطياً والنقاط B و C و D لا تقع على استقامة واحدة، وتشكل مستوياً.

2- ممكن أن تعوض النقاط B و C و D في المعادلة المعطاة وتتأكد من أن النقاط تحقق المعادلة، أو تكتب معادلة المستوي وتستنتج أنها ذات المعادلة المعطاة.

الشكل العام لمعادلة المستوي (BCD)

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} B \in (BCD) \Rightarrow a + b + 0 + d = 0 \\ C \in (BCD) \Rightarrow a + 0 + c + d = 0 \\ D \in (BCD) \Rightarrow 0 + 0 + c + d = 0 \end{cases}$$

نختار قيمة ولتكن من أجل $c = 1$، فيكون

$$d = -1, \quad a = 0, \quad b = 1$$

ومنه تكون معادلة المستوي (BCD)

$$y + z - 1 = 0$$

وهي ذات المعادلة المعطاة.

3- المستقيم Δ مار من النقطة A ويعامد المستوي (BCD) وبالتالي يقبل ناظم المستوي (BCD) $\vec{n}(0,1,1)$ شعاعاً موجهاً له، فتكون معادلاته

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 + t, \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4- بما أنَّ Δ عمودي على (BCD)، و $A \in \Delta$، فإن المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD) هو نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي، نعوض المعادلات الوسيطية لـ Δ في معادلة المستوي (BCD)

$$-2 + t + 2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

نعوض في معادلات المستقيم لنحصل على النقطة K

$$K\left(2, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

5- $[AD]$ قطر في الكرة وبالتالي مركز الكرة يقع منتصف $[AD]$ ونصف قطر الكرة يساوي نصف طول $[AD]$

لتكن I منتصف $[AD]$

$$I\left(1, -1, \frac{3}{2}\right)$$

$$AD = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = 3$$

$$R = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}$$

وبالتالي معادلة الكرة

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

الحمد لله في البدء والختام وصلى الله على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه وسلم

مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح

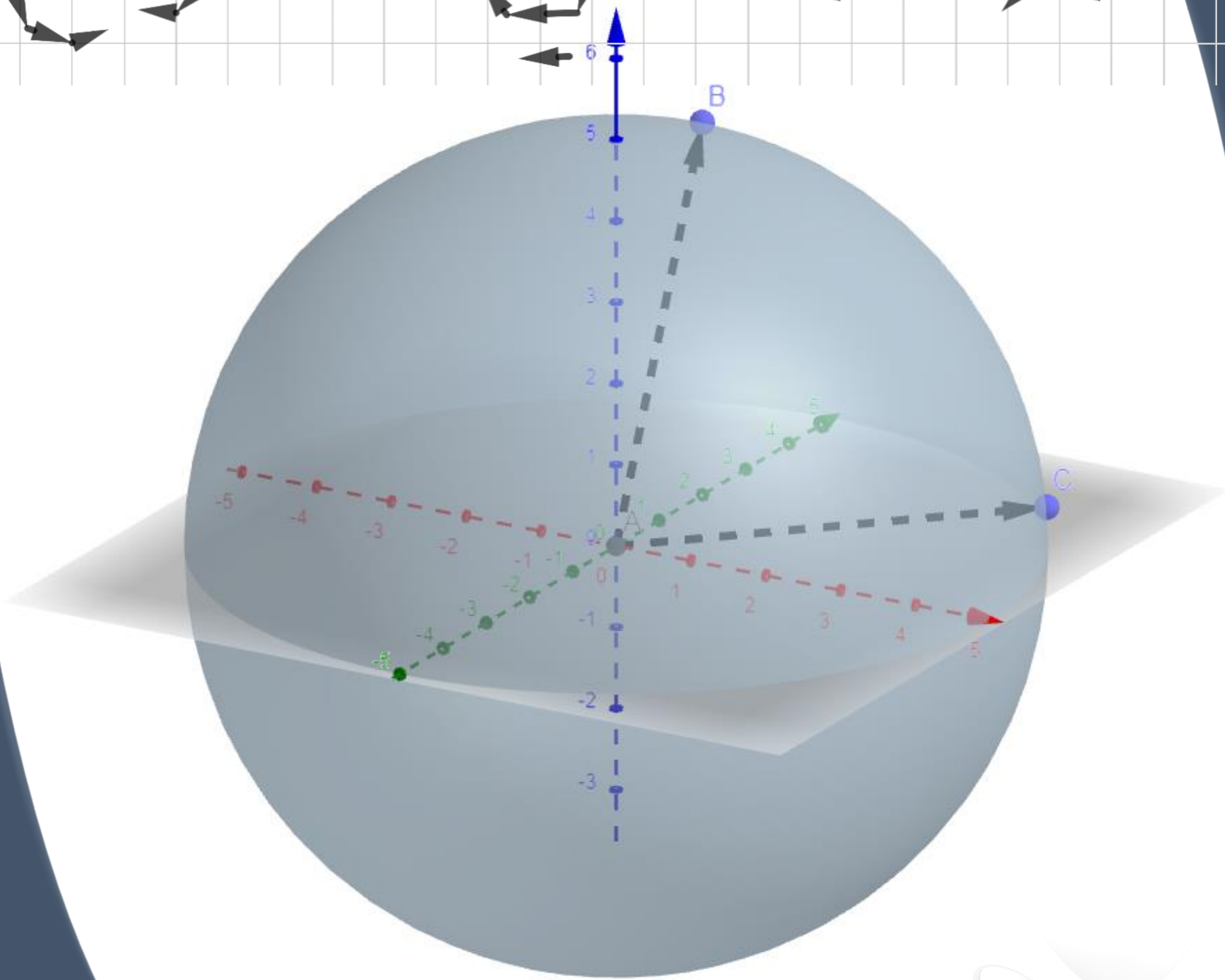
لتحميل القسم الأول والثاني يرجى زيارة الموقع أدناه

https://sites.google.com/site/appmaths2020/

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

برلنت مطيط ونور أشقر

المتجهات في الفراغ



1444/7/13
2023/2/3