أكاديميا

سلسلة أكاديميا في الرياضيات

البنك الشامل في المتتاليات الثالث الثانوي العلمي

تمارين امتحانية لكل أفكار المنهاج

الاختبارات الأربعة

النماذج الوزارية الستة 2017

النموذج الوزاري 2019

النماذج الوزارية الثلاثة 2020

كافة الدورات الامتحانية من 2017 الى 2022

اعداد المدرس: أحمد الشيخ عيسى مدير معهد أكاديميا

الرقة . هـ: 0998024183

التمرين 1 :

لتكن لدينا المتتالية $u_n = 3n + 1$ والمطلوب :

❶ أثبت أن المتتالية حسابية ثم أوجد حدها الأول وأساسها

❷ احسب $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_8$

الحل :

❶ $u_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 4 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3n + 4 - 3n - 1 = 3$

فالمتتالية $u_n = 3n + 1$ حسابية ، أساسها $r = 3$ وحدها الأول $u_0 = 1$

❷ $u_3 = 3(3) + 1 = 10 \quad , \quad u_8 = 3(8) + 1 = 25$

عدد الحدود $n = 8 - 3 + 1 = 6$ بالتالي : $S = \frac{n}{2}(u_3 + u_8) = \frac{6}{2}[10 + 25] = 105$

التمرين 2 :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية تحقق $u_3 = -5 \, , \, u_{15} = 31$

عين $r \, , u_{25} \, , u_n$ بدلالة n ثم احسب $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{25}$

الحل :

$u_m = u_n + (m - n)r \Rightarrow u_{15} = u_3 + (15 - 3)r \Rightarrow 31 = -5 + 12r \Rightarrow 12r = 36 \Rightarrow r = 3$

$u_{25} = u_{15} + 3(25 - 15) = 31 + 30 = 61$

$u_n = u_{15} + 3(n - 15) = 31 + 3n - 45 \Rightarrow u_n = 3n - 14$

عدد الحدود $n = 25 - 3 + 1 = 23$

$$S = \frac{n}{2}(u_3 + u_{25}) = \frac{23}{2}[-5 + 61] = 23(28) = 644$$

التمرين 3 :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيّة أساسها $r = 3$ و فيها $u_1 = -2$

احسب u_n بدلالة n واستنتج قيمة المجموعين $s_1 = u_{30} + u_{31} + u_{32}$ و $s_2 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$

الحل :

$u_n = u_1 + (n - 1)r = -2 + (n - 1)(3) \Rightarrow u_n = 3n - 5$

$u_{31} = 3(31) - 5 = 88 \Rightarrow s_1 = u_{30} + u_{31} + u_{32} = 3u_{31} = 3 \times 88 = 264$

$s_2 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$

$n = 20 - 1 + 1 = 20 \, , u_1 = -2 \, , \, u_{20} = 55 \Rightarrow s_2 = \frac{n}{2}(u_1 + u_{20}) = 10(-2 + 55) = 530$

التمرين 4 :

لتكن لدينا المتتالية $u_n = \frac{2}{3^n}$ والمطلوب

❶ أثبت أن المتتالية هندسية ثم أوجد أساسها و حدها الأول

❷ احسب $S_2 = u_2 + u_4 + \cdots + u_{10}$, $S_1 = u_1 + \cdots + u_4$

الحل :

❶ $u_{n+1} = \frac{2}{3^{n+1}} \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{3^n}{3\times 3^n} = \frac{1}{3}$ فالمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و $u_0 = 2$

❷ $u_1 = \frac{2}{3}$ و $n = 4 - 1 + 1 = 4$ بالتالي $S_1 = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^4}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1-\frac{1}{81}}{\frac{2}{3}}\right) = \frac{80}{81}$

ان S_2 هو مجموع حدود متوالية لمتتالية هندسية جديدة اساسها $q' = q^2 = \frac{1}{9}$ وعدد حدودها $n = \frac{10-2+2}{2} = 5$

وبالتالي $S_2 = u_2\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^5}{1-\frac{1}{9}}\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^5}{\frac{8}{9}}\right) = \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^5\right)$

التمرين 5 :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_3 = 6$ و $u_6 = 48$

عين أساسها q وعين u_n بدلالة n ثم احسب $S = u_2 + u_3 + \cdots + u_9$

الحل :

$u_m = u_n \,.\, q^{m-n} \Longrightarrow u_6 = u_3 . q^{6-3} \Longrightarrow 48 = 6(q^3) \Longrightarrow q^3 = 8 \Longrightarrow q = 2$

$u_n = u_3 . q^{n-3} \Longrightarrow u_n = 6(2^{n-3}) = 6(2^n)(2^{-3}) = \frac{6}{8}(2^n) \Longrightarrow u_n = \frac{3}{4}(2^n)$

$u_2 = \frac{3}{4}(2^2) = 3$, عدد الحدود $n = 9 - 2 + 1 = 8$

$S = u_2\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 3 \times \frac{1-2^8}{1-2} = -3(1-256) = 765$

التمرين 6 :

لتكن u_n متتالية هندسية فيها $u_1 = 3$ و $q = 3$ جد u_n بدلالة n ثم احسب $S_1 = u_3 + u_4 + \cdots + u_{11}$

الحل :

$$u_n = u_1 q^{n-1} = 3(3^{n-1}) = 3^n$$

$$S_1 = u_3\left(\frac{1-q^9}{1-q}\right) = 3^3\left(\frac{1-3^9}{1-3}\right) = \frac{-27}{2}(1-3^9) = 265707$$

التمرين 7 :

a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسيّة (متزايدة) احسبها علماً أنّ

$a + b + c = 57$ و $a.b.c = 343$

الحل :

بما أنّ a و b و c متتالية هندسيّة إذاً: $b^2 = a.c$ ومن الفرض لدينا:

$a.b.c = 343 \Longrightarrow b^3 = 343 = (7)^3 \Longrightarrow b = 7$

نعوّض b بالمعادلتين المفروضتين فنحصل على :

$a + c = 57 - 7 = 50$

$a.c = 49$

من الاولى نحصل على $a = 50 - c$ نعوّض في المعادلة الثانية نجد:

$(50-c)c = 49 \Longrightarrow 50c - c^2 - 49 = 0 \Longrightarrow c^2 - 50c + 49 = 0$

$(c-49)(c-1) = 0 \Longrightarrow$

إما : $c = 49 \Longrightarrow a = 1$ مقبول لأن المتتالية متزايدة $a = 1 < b = 7 < c = 79$

أو : $c = 1 \Longrightarrow a = 49$ مرفوض لأن المتتالية متزايدة

التمرين 8 :

❶ أثبت بالتدريج أن : $E(n) : << 4^n + 2$ مضاعف للعدد $3 >>$

❷ أثبت أن : $E(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

ثم احسب المجموع : $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \cdots + 10$

الحل :

لتكن الخاصّة $E(n)$ وهي العدد $4^n + 5$ مضاعفاً للعدد 3 أي $E(n): 4^n + 5 = 3k$

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ : $4^0 + 5 = 6 = 3(2)$ مضاعف للعدد 3

لنفرض أن $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $E(n): 4^n + 5 = 3k$

ونثبت صحّة $E(n+1)$: أي $4^{n+1} + 5$ مضاعف للعدد 3

$$4^{n+1} + 5 = 4 \times 4^n + 5 = 4(3k - 5) + 5$$
$$= 12k - 20 + 5 = 12k - 15 \Longrightarrow 4^{n+1} + 5 = 3(4k - 5)$$

إذن $4^{n+1} + 5$ مضاعف للعدد 3 و الخاصة $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة أيا كان العدد الطبيعي n

$$E(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

لنبرهن صحة الخاصة $E(1)$: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ و الخاصة صحيحة

نفرض صحة $E(n)$ و لنبرهن صحة $E(n+1): 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

و الخاصة $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق نجد أن الخاصة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} + \cdots + \frac{20}{2} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + 20}{2} = \frac{\frac{20 \times 21}{2}}{2} = 105$$

التمرين 9 :

نرمز إلى القضيّة " يقسم العدد 9 العدد $10^n + 1$ " بالرمز $E(n)$، في حالة $n \in \mathbb{N}$.

❶ أثبت أنّه إذا كانت $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد n، كانت عند ئذٍ E_{n+1} صحيحة.

❷ أتكون القضيّة $E(n)$ صحيحة على $\mathbb{N}$؟ برّر إجابتك

الحل :

❶ إذا كانت الخاصّة $E(n)$ صحيحة لنبرهن صحّة $E(n+1)$ من أجل $n \geq n_0$

$$10^{n+1} + 1 = 10(10^n) + 1 = (9 + 1)(10^n) + 1 = 9(10^n) + 10^n + 1$$

محقّقة لأنّ كل من $10^n + 1$ يقبل القسمة على 9 فرضاً و $9(10^n)$ يقبل القسمة على 9 وضوحاً

و القضية صحيحة من أجل $n + 1$.

❷ من أجل $n = 1$ ينتج أنّ $10^1 + 1 = 11$ لا يقبل القسمة على 9، فالخاصّة ليست صحيحة دوماً

في الحقيقة إن كل $E(n)$ خطأ لأن مجموع خانات العدد $10^n + 1 = 10\ldots01$ يساوي 2 و هو ليس من مضاعفات 9

التمرين 10 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{n-1}{n}$ والمطلوب :

❶ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماما.

❷ أثبت أن $0 \leq u_n < 1$ ثم استنتج تقارب المتتالية واحسب نهايتها

❸ جد عددا طبيعيا n_0 يجعل $u_n \in]\, 0.99 , 1.01\, [$ عند كل n أكبر تماما من n_0

الحل :

❶ $u_{n+1} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2-n^2+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ والمتتالية متزايدة تماما

❷ $n \geq 1 \Rightarrow n-1 \geq 0 \Rightarrow \frac{n-1}{n} \geq 0 \Rightarrow u_n \geq 0$ ، $u_n - 1 = \frac{n-1}{n} - 1 = \frac{-1}{n} < 0 \Rightarrow u_n < 1$

بالتالي $0 \leq u_n < 1$ بما أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الاعلى فهي متقاربة

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

❸ $|u_n - 1| < 0.01 \Rightarrow \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{n-1-n}{n}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{-1}{n}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{100} \Rightarrow n > 100$$

وبالتالي يمكن ان نختار $n_0 \geq 100$ يجعل $u_n \in]\, 0.99 , 1.01\, [$

التمرين 11 :

ليكن عند كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

❶ أوجد عددين حقيقيين b و a يحققان عند كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$

❷ في حالة عدد طبيعي n ليكن $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ عبّر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

الحل :

❶
$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1} = \frac{(2a+2b)n+a-b}{(2n-1)(2n+1)}$$

المقامات متساوية بمطابقة البسوط نجد : $\begin{matrix} a-b=1 \\ a+b=0 \end{matrix}$ $\quad a = \frac{1}{2} \quad \& \quad b = -\frac{1}{2} \Rightarrow u_n = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}$

❷
$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}$$

$$S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$$

التمرين 12 :

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n = ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

❶ جد نهاية هذه المتتالية.

❷ نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ أثبت أنّ $S_n = ln(n+1)$ ثم استنتج نهاية $(S_n)_{n\geq 1}$.

❶ $\lim_{n\to+\infty} u_n = lim_{n\to+\infty}\, ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = ln1 = 0$

❷ $S_n = ln\left(\frac{2}{1}\right) + ln\left(\frac{3}{2}\right) + \cdots + ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = ln\left(\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right) \times \ldots \times \left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = ln(n+1)$

وبما أنّ $\lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$ استنتجنا أنّ $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

التمرين 13 :

❶ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة وفق $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

a. أثبت أنّ $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

b. أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

c. أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها

❷ المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ معرّفة عند كل $n \geq 1$ وفق

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

a. استفدْ من عبارة u_n بصيغتيها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n

b. استنتج قيمة المجموع $S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

c. استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$

الحل :

❶ a.

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

b.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \Rightarrow u_{n+1} < u_n$$ والمتتالية متناقصة

c.

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 0 \Rightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq 0 \qquad ①$$

$$n \geq 0 \Rightarrow n+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n+1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 1 \quad ②$$

من ① و ② نجد $0 \leq u_n \leq 1$

المتتالية متناقصة ومحدودة من الادنى فهي متقاربة $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

❷ a.

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

$$v_n = 1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1} - \sqrt{n-2} + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \Rightarrow v_n = \sqrt{n}$$

b. بالمقارنة بين صيغة v_n و صيغة S ومن الصيغة الأخيرة للحد v_n نجد

$$S = \left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\right) - 1 = \sqrt{100} - 1 = 9$$

c. و أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

التمرين 14 :

جد نهاية المتتاليتين : $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$ ، $v_n = \frac{n!-2}{n!}$

$$u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$$

$$-1 \le (-1)^n \le 1 \Rightarrow 2n-1 \le 2n+(-1)^n \le 2n+1 \Rightarrow \frac{2n-1}{3n} \le \frac{2n+(-1)^n}{3n} \le \frac{2n+1}{3n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$ وبالتالي حسب الاحاطة يكون $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+(-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$

$$v_n = \frac{n!-2}{n!} = 1 - \frac{2}{n!}$$

$$n! \ge n \Rightarrow 0 \le \frac{1}{n!} \le \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \ge \frac{-2}{n!} \ge \frac{-2}{n} \Rightarrow 1 \ge 1 - \frac{2}{n!} \ge 1 - \frac{2}{n} \Rightarrow$$

$\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{2}{n} = 1$ وبالتالي حسب الاحاطة يكون $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{2}{n!} = 1$

التمرين 15 :

المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{n^3}{n!}$

❶ أحسب حدودها الثلاثة الأولى

❷ أثبت أن $n! \ge n(n-1)(n-2)(n-3)$ أيا يكن $n \ge 4$ ❸ استنتج نهاية $(u_n)_{n\ge1}$

❶ $u_n = \frac{n^3}{n!} \Rightarrow u_1 = 1 , u_2 = 4 , u_3 = \frac{9}{2}$

❷ لنفرض القضية $E(n): n! \ge n(n-1)(n-2)(n-3)$

لنبرهن صحة $E(4)$ $4! \ge 4 \times 3 \times 2 \times 1$ والقضية صحيحة

لنفرض صحة $E(n): n! \ge n(n-1)(n-2)(n-3)$

و لنبرهن صحة $E(n+1): (n+1)! \ge (n+1)(n)(n-1)(n-2)$

$$(n+1)! = (n+1) \times n! \ge (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3) \ge (n+1)n(n-1)(n-2)$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \ge 4$

❸ $u_n = \frac{n^3}{n!} \Rightarrow 0 \le u_n \le \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ بالتالي حسب الاحاطة $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

التمرين 16 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ التي تحقق : $u_n = \left(\frac{n}{2} - 1\right)^n$

جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \ge 9^n$ عندما $n > n_0$ ثم استنتج نهاية u_n

$$u_n \ge 9^n \Rightarrow \left(\frac{n}{2} - 1\right)^n \ge 9^n \Rightarrow \frac{n}{2} - 1 \ge 9 \Rightarrow \frac{n}{2} \ge 10 \Rightarrow n \ge 20$$

لدينا $u_n \ge 9^n$ وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} 9^n = +\infty$ فإنه حسب المقارنة $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

التمرين 17 :

المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرّفة وفق $u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$

❶ اعط قيما تقريبية لحدودها الاولى من u_1 الى u_3

❷ أثبت أن جميع حدودها بدءا من الحد u_{31} تحقق $u_n \ge 2^n$ ثمّ استنتج نهاية $(u_n)_{n\ge1}$

$u_1 = -0.9 , u_2 = 0.64 , u_3 = -0.34$

في حالة $n \ge 31$ يكون $\frac{n}{10} \ge \frac{31}{10}$ ومن ثم $\frac{n}{10} - 1 \ge \frac{31}{10} - 1$ وبالتالي $\frac{n}{10} - 1 \ge 2.1 > 2$

ومن ثم $u_n \ge 2^n$ وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$ فانه وحسب المقارنة يكون $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

التمرين 18 :

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرّفة وفق $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6} : n \geq 1$

❶ أثبت أنّ التابع $x \longmapsto \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أنّ $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$، أيّاً كان العدد n.

❷ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماماً.

❸ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة واحسب نهايتها

الحل :

❶ التابع f متزايد تماماً $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6} \Longrightarrow f'(x) = \frac{3(2x+6)-2(3x+2)}{(2x+3)^2} = \frac{14}{(2x+3)^2} > 0$

نفرض الخاصّة $E(n) : \frac{1}{2} < u_n \leq 1$ عند كل $n \geq 1$

نبرهن صحة الخاصة $E(0)$ و الخاصة صحيحة $\frac{1}{2} < u_0 = 1 \leq 1$

نفرض صحة الخاصة $E(n) : \frac{1}{2} < u_n \leq 1$ ونبرهن صحّة الخاصة $E(n+1) : \frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$

بما أن التابع f متزايد تماماً ولدينا $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ فإنّ : $f(\frac{1}{2}) < f(u_n) \leq f(1)$ ومنه :

و الخاصة $E(n+1)$ صحيحة $\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8} \leq 1 \Longrightarrow \frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

❷

تكون المتتالية u_n متناقصة تماما ، إذا تحقّق الشرط $u_{n+1} < u_n$ فلنبرهنها بالتدريج

لنفر ض الخاصّة $E(n) : u_{n+1} < u_n$

نبرهن صحة الخاصة $E(0)$ و الخاصة صحيحة $\frac{5}{8} = u_1 < 1 = u_0$

نفرض صحة الخاصة $E(n) : u_{n+1} < u_n$ ولنبرهن صحّة الخاصة $E(n+1) : u_{n+2} < u_{n+1}$

من الفرض $u_{n+1} < u_n$ وبما أن f متزايد تماما فإن :

والقضية $E(n+1)$ صحيحة $f(u_{n+1}) < f(u_n) \Longrightarrow \frac{3u_{n+1}+2}{2u_{n+1}+6} < \frac{3u_n+2}{2u_n+6} \Longrightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

❸ مما سبق وجدنا أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $\frac{1}{2}$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة

ولإيجاد النهاية ، هي حل المعادلة $f(\ell) = \ell$

$$\frac{3\ell+2}{2\ell+6} = \ell \Longrightarrow 2\ell^2 + 6\ell = 3\ell + 2 \Longrightarrow 2\ell^2 + 3\ell - 2 = 0 \Longrightarrow \ell^2 + \frac{3}{2}\ell - 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$(\ell+2)\left(\ell - \frac{1}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \ell = -2 , \ell = \frac{1}{2}$$

لا يمكن لمتتالية حدودها موجبة أن تكون نهايتها سالبة بالتالي $lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

التمرين 19 :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة وفق $u_0=\frac{1}{2}$, $u_{n+1}=-\frac{1}{3}u_n^2+2u_n$

❶ أثبت أنّ العدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

❷ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

❸ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

الحل :

❶ لنفرض التابع $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x$ حيث $u_{n+1}=f(u_n)$

f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ و مشتقه $f'(x)=-\frac{2}{3}x+2$

$$f'(x)=0\Longrightarrow -\frac{2}{3}x+2=0\Longrightarrow -2x+6=0\Longrightarrow x=3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
اشارة $f'(x)$	$+$	0	$-$

فالتابع f متزايد تماماً على المجال $]-\infty,3]$

لنضع $E(n): u_n\leq 3$ لنبرهن صحة $E(0)$. $u_0=\frac{1}{2}\leq 3$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): u_n\leq 3$ لنبرهن صحة $E(n+1): u_{n+1}\leq 3$

بما أن f متزايد تماما عندما $x\leq 3$ و لدينا من الفرض $u_n\leq 3$ فإن

$$f(u_n)\leq f(3)\Longrightarrow u_{n+1}\leq 3$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$

❷ لنضع $E(n): u_{n+1}>u_n$

لنبرهن صحة $E(0)$ $u_1=\frac{11}{12}>u_0=\frac{1}{2}$ إذاً $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): u_{n+1}>u_n$ و لنبرهن صحة $E(n+1): u_{n+2}>u_{n+1}$

من الفرض $u_{n+1}>u_n$ وبما أن f متزايد تماماً فإن $f(u_{n+1})>f(u_n)\Longrightarrow u_{n+2}>u_{n+1}$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

❸ مما سبق وجدنا أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

من المساواة $u_{n+1}=f(u_n)$ و استمرار التابع f ، النهاية هي حل المعادلة $f(\ell)=\ell$

$$-\frac{1}{3}\ell^2+2\ell=\ell\Longrightarrow -\frac{1}{3}\ell^2+\ell=0\Longrightarrow \ell^2-3\ell=0\Longrightarrow \ell(\ell-3)=0\Longrightarrow$$

$\ell=3$, $\ell=0$ وبما أن المتتالية متزايدة وحدها الأول $\frac{1}{2}$ فإن $lim_{n\to+\infty}u_n=3$

التمرين 20:

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة وفق : $u_0 = \frac{3}{2}$ و عند كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$

❶ أثبت مستعملا البرهان بالتدريج أن $1 \leq u_n \leq 2$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$

❷ أثبت أنّ $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$

❸ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ، هل هي متقاربة

الحل :

❶ لنفرض التابع $f(x) = x^2 - 2x + 2$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$

f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ و مشتقه $f'(x) = 2x - 2$ و $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
اشارة $f'(x)$	$-$	0	$+$

فالتابع f متزايد تماماً على المجال $[1 , +\infty[$

لنضع $E(n): 1 \leq u_n \leq 2$

لنبرهن صحة $E(0)$. $1 \leq u_0 = \frac{3}{2} \leq 2$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 1 \leq u_n \leq 2$ لنبرهن صحة $E(n+1): 1 \leq u_{n+1} \leq 2$

من الفرض $1 \leq u_n \leq 2$ و بما أن f متزايد تماما فإن $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2) \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

❷ $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2 = (u_n - 2)(u_n - 1)$

❸ $1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow (u_n - 2)(u_n - 1) \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$

والمتتالية متناقصة وبما أنها محدودة من الادنى فهي متقاربة

التمرين 21:

ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ثمّ نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة وفق :

$u_0 = 2cos\theta$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$

❶ احسب u_1 و u_2 ❷ أثبت بالتدريج، أنّ $u_n = 2\,cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}:\ n \in \mathbb{N} \quad , u_0 = 2cos\theta$$

$$u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2 + 2cos\theta} = \sqrt{2(1 + cos\theta)} = \sqrt{4\,cos^2\frac{\theta}{2}} = 2cos\frac{\theta}{2}$$

$$u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + 2cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{4\,cos^2\frac{\theta}{4}} = 2cos\frac{\theta}{4} = 2cos\frac{\theta}{2^2}$$

❷ لنشكل التابع $f(x) = \sqrt{2 + x}$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$ المتزايد تماما لأن $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0$

نرمز للخاصية $E(n): u_n = 2\ cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

لنبرهن صحّة $E(0)$: الخاصة صحيحة $\Leftarrow \ell_1 = \ell_2 \Leftarrow$ $\ell_1 = u_0 = 2cos\theta\ ,\ \ell_2 = 2cos\frac{\theta}{2^0} = 2cos\theta$

نفرض صحة القضية $E(n): u_n = 2\ cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ و لنبرهن صحّة $E(n+1): u_{n+1} = 2cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

من الفرض لدينا : $u_n = 2\ cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ وبالتالي : $f(u_n) = f\left(2\ cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)$ ومنه :

$$\sqrt{2 + u_n} = \sqrt{2 + 2cos\frac{\theta}{2^n}} \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{2\left(1 + cos\frac{\theta}{2^n}\right)} = \sqrt{4\,cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}} = 2\,cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$

التمرين 22 :

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة وفق $n \geq 1$: $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

❶ أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 2$ ، أيّاً كان العدد الطبيعي n

❷ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

❸ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

الحل :

لنشكل التابع $f(x) = \sqrt{2+x}$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$ المتزايد تماما لأن : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0$

❶ لنثبت صحّة الخاصّة $E(n): 0 \leq u_n \leq 2$ عند كل $n \geq 0$

نلاحظ أنّ الخاصّة صحيحة من أجل $n = 0$ لأنّ $0 \leq u_0 = 1 \leq 2$.

نفرض أنّ $E(n): 0 \leq u_n \leq 2$

ونبرهن صحّة $E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 2$

من الفرض لدينا $0 \leq u_n \leq 2$ وبالتالي وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(2) \Longrightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 2$$ والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

❷ تكون المتتالية u_n متزايدة تماما ، إذا تحقّق الشرط $u_{n+1} > u_n$ فلنبرهنها بالتدريج

بفرض الخاصّة $E(n) \ : \ u_{n+1} > u_n$

نلاحظ أنّ $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$ لأنّ $\sqrt{3} = u_1 > u_0 = 1$

نفرض صحّة $E(n) \ : \ u_{n+1} > u_n$ ونبرهن صحّة : $E(n+1) \ : \ u_{n+2} > u_{n+1}$.

من الفرض $u_{n+1} > u_n$ وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(u_{n+1}) > f(u_n) \Longrightarrow \sqrt{2+u_{n+1}} > \sqrt{2+u_n} \Longrightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

❸ المتتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

نهاية المتتالية هو حل المعادلة $f(\ell) = \ell$ بالتالي :

$$\sqrt{2+\ell} = \ell \Longrightarrow 2+\ell = \ell^2 \Longrightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Longrightarrow (\ell-2)(\ell+1) = 0 \Longrightarrow$$

$\ell = 2$, $\ell = -1$ المتتالية متزايدة وحدها الأول 1

لا يمكن لمتتالية حدودها موجبة أن تكون نهايتها سالبة بالتالي $lim_{n\to\infty} u_n = 2$

التمرين 23:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجياً بالشكل $u_0 = 1$: $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

و المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالشكل $t_n = ln(u_n) - ln\,2$ والمطلوب:

❶ أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 2$

❷ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

❸ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

❹ أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية و أوجد حدها العام احسب نهايتها

الحل :

لنشكل التابع $f(x) = \sqrt{2x}$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} > 0$ و التابع متزايد تماما

❶ لنثبت صحّة الخاصّة $E(n): 0 \leq u_n \leq 2$ عند كل $n \geq 0$

نلاحظ أنّ الخاصّة صحيحة من أجل $n = 0$ لأنّ $0 \leq u_0 = 1 \leq 2$.

نفرض أنّ $E(n): 0 \leq u_n \leq 2$ صحيحة

ونبرهن صحّة $E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 2$

من الفرض لدينا $0 \leq u_n \leq 2$ وبالتالي وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(2) \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 2$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

❷ تكون المتتالية u_n متزايدة تماما ، إذا تحقّق الشرط $u_{n+1} > u_n$ فلنبرهنها بالتدريج

بفرض الخاصّة $u_{n+1} > u_n$: $E(n)$

نلاحظ أنّ $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$ لأنّ $\sqrt{2} = u_1 > u_0 = 1$

نفرض صحّة $u_{n+1} > u_n$: $E(n)$ ونبرهن صحّة : $u_{n+2} > u_{n+1}$: $E(n+1)$.

من الفرض $u_{n+1} > u_n$ وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(u_{n+1}) > f(u_n) \Rightarrow \sqrt{2u_{n+1}} > \sqrt{2u_n} \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

❸ المتتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

نهاية المتتالية هو حل المعادلة $f(\ell) = \ell$ بالتالي :

$$\sqrt{2\ell} = \ell \Rightarrow 2\ell = \ell^2 \Rightarrow \ell^2 - 2\ell = 0 \Rightarrow \ell(\ell - 2) = 0 \Rightarrow$$

$\ell = 0$, $\ell = 2$ بما أن المتتالية متزايدة وحدها الأول 1 فإن $lim_{n\to\infty} u_n = 2$

❹

$$t_n = ln(u_n) - ln\,2 \Rightarrow t_{n+1} = ln(u_{n+1}) - ln\,2 = ln\left(\sqrt{2u_n}\right) - ln\,2 \Rightarrow$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{2}ln(2u_n) - ln\,2 = \frac{1}{2}(ln(2u_n) - 2\,ln\,2)$$

$$= \frac{1}{2}(ln(u_n) + ln(2) - 2\,ln\,2)$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{2}(ln(u_n) - ln\,2) \Rightarrow t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n$$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $t_0 = ln(u_0) - ln\,2 = ln(1) - ln\,2 = -ln\,2$

حدها العام $t_n = t_0 q^n = -ln\,2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ وبما أن $-1 < q = \frac{1}{2} < 1$

فإن $lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ بالتالي $lim_{n\to\infty} t_n = 0$

التمرين 24:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}$

و المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كمايلي $v_n = u_n - 2$

❶ أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية يُطلب إيجاد أساسها وحدها الأول .

❷ أوجد عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n. واحسب نهايتها

❸ احسب المجموع $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

الحل :

❶ $$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n+2}{4} - 2 = \frac{3u_n+2-8}{4} = \frac{3u_n-6}{4} = \frac{3(u_n-2)}{4} = \frac{3}{4}v_n$$

ومنه $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 2 = -1$

❷ $$v_n = v_0 q^n = -1\left(\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow u_n = v_n + 2 \Rightarrow u_n = -1\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2$$

$$-1 < q = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} u_n = 0 + 2 = 2$$

❸ $$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = -1\frac{1-(\frac{3}{4})^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} = -4(1-(\frac{3}{4})^{n+1}) = 4((\frac{3}{4})^{n+1} - 1)$$

التمرين 25:

لتكن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ ، $(t_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق :

$u_0 = 3$ وعند كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = \frac{2}{u_n+1}$ و $t_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

❶ أثبت أن $u_n > 0$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$

❷ أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية واحسب نهايتها

❸ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

الحل :

❶ نفرض الخاصّة $E(n): u_n > 0$

نبرهن صحة الخاصة $E(0)$ و الخاصة صحيحة $u_0 = 3 > 0$

نفرض صحة الخاصة $E(n): u_n > 0$ ونبرهن صحة الخاصة $E(n+1): u_{n+1} > 0$

من الفرض $u_n > 0$ وبالتالي $u_{n+1} = \frac{2}{u_n+1} > 0$

لأنّها قسمة عددين موجبين تماماً وبالتالي الخاصة $E(n+1)$ صحيحة

و الخاصة $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

❷

$$t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Rightarrow t_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2}{u_n+1} - 1}{\frac{2}{u_n+1} + 2} = \frac{\frac{2 - u_n - 1}{u_n + 1}}{\frac{2 + 2u_n + 2}{u_n + 1}} = \frac{1 - u_n}{2u_n + 4} = \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 2}\right) \Rightarrow$$

$t_{n+1} = \frac{-1}{2}t_n$ فالمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{-1}{2}$ بما أن $-1 < q = \frac{-1}{2} < 1$ فإن $lim_{n\to+\infty} t_n = 0$

❸ بما أن $\lim_{x\to+\infty} t_n = 0$ بالتالي $\lim_{x\to+\infty}\frac{u_n-1}{u_n+2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(u_n - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} u_n = 1$

والمتتالية متقاربة ونهايتها 1

التمرين 26 :

نتأمّل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرّفتين وفق :

$x_0 = 3$, $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2$ و $y_n = x_n + 3$

❶ a. أثبت أنّ المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسيّة. b. احسب y_n ثم x_n بدلالة n .

❷ نضع $S_n = y_0 + \cdots + y_n$ و $S'_n = x_0 + \cdots + x_n$.

a. احسب كلاً من S_n و S'_n بدلالة n b. استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(S'_n)_{n\geq 0}$

الحل :

❶ $y_{n+1} = x_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}x_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}x_n + 1 = \frac{1}{3}(x_n + 3) = \frac{1}{3}y_n$

فالمتتالية y_n هندسيّة أساسها $\frac{1}{3}$ وحدّها الأوّل $y_0 = x_0 + 3 = 6$ إذاً : $y_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{6}{3^n}$

ومن ثمّ $y_n = x_n + 3 \Rightarrow x_n = y_n - 3 \Rightarrow x_n = \frac{6}{3^n} - 3$

❷ حساب كلاً من S_n و S'_n بدلالة n

$$S_n = y_0 + \cdots + y_n = 6\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 6 \times \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 9 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 9 - \frac{3}{3^n}$$

$$S'_n = x_0 + \cdots + x_n = (y_0 - 3) + (y_1 - 3) + \cdots + (y_n - 3)$$

$$= (y_0 + \cdots + y_n) - 3(n+1) = S_n - 3n - 3 = 9 - \frac{3}{3^n} - 3n - 3 = 6 - 3n - \frac{3}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(9 - \frac{3}{3^n}\right) = 9 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty}\left(6 - 3n - \frac{3}{3^n}\right) = -\infty$$

التمرين 27 :

نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق : $u_0 = 1, u_1 = 4$ و $(n \geq 1)$ $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$

❶ لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة أساسها 3

❷ لتكن $(w_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $w_n = u_{n+1} - 3u_n$ أثبت أنّ $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة أساسها 2

❸ عبّر عن v_n و w_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n وأوجد نهايتها

❶ $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ عندئذ في حالة $n \geq 1$ يكون :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} = 5u_{n+1} - 6u_n - 2u_{n+1} = 3u_{n+1} - 6u_n = 3(u_{n+1} - 2u_n) \Rightarrow$$

$v_{n+1} = 3v_n$ فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسيّة أساسها 3

❷ $w_n = u_{n+1} - 3u_n$ عندئذ في حالة $n \geq 1$ يكون :

$$w_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1} = 5u_{n+1} - 6u_n - 3u_{n+1} = 2u_{n+1} - 6u_n = 2(u_{n+1} - 3u_n) \Rightarrow$$

$w_{n+1} = 2w_n$ فالمتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ هندسيّة أساسها 2

❸ لدينا $v_0 = u_1 - 2u_0 = 4 - 2 = 2$ وبالتالي : $v_n = 2 \times 3^n \Leftarrow v_n = v_0q^n$

ولدينا $w_0 = u_1 - 3u_0 = 4 - 3 = 1$ و بالتالي : $w_n = 2^n$

$w_n = u_{n+1} - 3u_n$, $v_n = u_{n+1} - 2u_n$

وبالطرح نجد : $v_n - w_n = u_n$ وبالتالي : $u_n = v_n - w_n \Rightarrow u_n = 2 \times 3^n - 2^n$

$$\lim_{x\to\infty} u_n = \lim_{x\to\infty}(2 \times 3^n - 2^n) = \lim_{x\to\infty} 3^n\left(2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = +\infty(2 - 0) = +\infty$$

التمرين 28 :

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق $u_0=5$ و $u_{n+1}=\frac{6}{5}u_n+\frac{4}{5}$.

❶ عيّن تابعاً f يُحقّق $v_{n+1}=f(v_n)$ وأثبت أنه متزايد تماما أيّاً كانت $n\geq 0$

❷ احسب $u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3$ ثمّ ادرس اطّراد المتتالية

❸ احسب ℓ حل المعادلة $f(x)=x$

❹ نعرّف $(v_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $v_n=u_n-\ell$ أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة.

❺ اكتب v_n بدلالة n ثمّ احسب $s=v_2+v_3+\cdots+v_{10}$ بدلالة قوّة للعدد $\frac{6}{5}$

❶ لنفرض التابع $f(x)=\frac{6}{5}x+\frac{4}{5}$ حيث $u_{n+1}=f(u_n)$

f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ و مشتقه $f'(x)=\frac{6}{5}>0$ فالتابع f متزايد تماماً على المجال $\mathbb{R}$

❷ $u_1=\frac{6}{5}u_0+\frac{4}{5}=\frac{6}{5}(5)+\frac{4}{5}=\frac{34}{5}\quad ,\quad u_2=\frac{6}{5}\left(\frac{34}{5}\right)+\frac{4}{5}=\frac{204}{25}+\frac{20}{25}=\frac{224}{25}$

$u_3=\frac{6}{5}\left(\frac{224}{25}\right)+\frac{4}{5}=\frac{1344}{125}+\frac{100}{125}=\frac{1444}{125}$ يتبيّن لنا أنّ المتتالية متزايدة تماما

لنفرض الخاصة $E(n):u_{n+1}>u_n$

لنبرهن صحة $E(0)$ $\quad u_1=\frac{34}{5}>u_0=5$ إذاً $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n):u_{n+1}>u_n$ و لنبرهن صحة $E(n+1)\ :\ u_{n+2}>u_{n+1}$

من الفرض لدينا $u_{n+1}>u_n$ وبما أن f متزايد تماماً فإن $f(u_{n+1})>f(u_n)\Longrightarrow u_{n+2}>u_{n+1}$

و الخاصة $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق الخاصة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

❸ $f(x)=x\Longrightarrow\frac{6}{5}x+\frac{4}{5}=x\ \Longrightarrow 6x+4=5x\Longrightarrow x=-4\Longrightarrow\ell=-4$

❹ $v_n=u_n-\ell\Longrightarrow v_n=u_n+4$

$$v_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{6}{5}u_n+\frac{4}{5}+4=\frac{6}{5}u_n+\frac{24}{5}=\frac{6}{5}(u_n+4)=\frac{6}{5}v_n$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسيّة أساسها $q=\frac{6}{5}$ وحدها الأول $v_0=u_0+4=5+4=9$ ومنه $v_n=v_0(q)^n=9\left(\frac{6}{5}\right)^n$

$$s=v_2+v_3+\cdots+v_{10}=v_2\left(\frac{1-q^9}{1-q}\right)=9\left(\frac{6}{5}\right)^2\left(\frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^9}{1-\frac{6}{5}}\right)=-45\left(\frac{6}{5}\right)^2\left(1-\left(\frac{6}{5}\right)^9\right)$$

التمرين 29 :

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المُعرّفة تدريجيّاً وفق $u_0 = s$ و $(*) u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n$

❶ عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية P بحيث تحقّق المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ التي حدّها العام $t_n = P(n)$ العلاقة التدريجيّة $(*)$ نفسها أي $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$ أيّاً كانت n.

❷ أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدّها العام $v_n = u_n - t_n$ هي متتالية هندسيّة.

❸ اكتب عبارة v_n ثمّ u_n بدلالة n و a

❶ بفرض كثير حدود من الدرجة الثانية P هو : $t_n = P(n) = an^2 + bn + c$ وبالتالي $t_{n+1} = P(n+1)$

$$\frac{1}{2}t_n + n^2 + n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c \Rightarrow$$

$$(an^2 + bn + c) + 2n^2 + 2n = 2a(n^2 + 2n + 1) + 2\,b(n+1) + 2c$$

$$(a+2)n^2 + (b+2)n + c = 2an^2 + (4a+2b)n + (2a+2b+2c)$$

بالمطابقة نجد :

$$a + 2 = 2a \Rightarrow a = 2$$

$$b + 2 = 4a + 2b \Rightarrow b + 4a = 2 \Rightarrow b + 4(2) = 2 \Rightarrow b = -6$$

$$c = 2a + 2b + 2c \Rightarrow c + 2a + 2c = 0 \Rightarrow c + 4 - 12 = 0 \Rightarrow c = 8$$

وبالتالي $t_n = P(n) = 2n^2 - 6n + 8$

❷

$$v_n = u_n - t_n \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - t_{n+1} \Rightarrow$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n - \left(\frac{1}{2}t_n + n^2 + n\right) = \frac{1}{2}(u_n - t_n) = \frac{1}{2}v_n$$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة أساسها $q = \frac{1}{2}$

❸

$$q = \frac{1}{2} \qquad v_0 = u_0 - t_0 = s - 8 \Rightarrow v_n = v_0 q^n = (s-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_n = v_n + t_n = (s-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n^2 - 6n + 8$$

التمرين 30 :

لتكن لدينا المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين تدريجيا وفق : $t_0 = 1$ و $s_0 = 12$

$$t_{n+1} = \frac{t_n + 2s_n}{3} \quad و \quad s_{n+1} = \frac{t_n + 3s_n}{4}$$

❶ أثبت أن المتتالية $(s_n - t_n)_{n\geq 0}$ هندسية واحسب نهايتها

❷ أثبت أن المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

❸ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = 3t_n + 8s_n$ ثابتة ثم عين قيمتها الثابتة

❹ استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين المتجاورتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$

الحل :

❶ $$(s_{n+1} - t_{n+1}) = \frac{t_n+3s_n}{4} - \frac{t_n+2s_n}{3} = \frac{3t_n+9s_n-4t_n-8s_n}{12} = \frac{s_n-t_n}{12} = \frac{1}{12}(s_n - t_n)$$

وبالتالي فالمتتالية $(s_n - t_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$

وبما أن $-1 \leq \frac{1}{12} \leq 1$ فالمتتالية متقاربة و $lim_{x\to+\infty}(s_n - t_n) = 0$

❷ (إن $s_0 - t_0 = 12 - 1 = 11$ وبالتالي نستنتج أن $s_n - t_n > 0$ أيا يكن n)

$$t_{n+1} - t_n = \frac{t_n+2s_n}{3} - t_n = \frac{t_n+2s_n-3t_n}{3} = \frac{2(s_n-t_n)}{3} = \frac{2}{3}(s_n - t_n) > 0$$

$$s_{n+1} - s_n = \frac{t_n+3s_n}{4} - s_n = \frac{t_n+3s_n-4s_n}{4} = \frac{(t_n-s_n)}{4} = \frac{-1}{4}(s_n - t_n) < 0$$

وبالتالي $(t_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما و $(s_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماما و $lim_{x\to+\infty}(s_n - t_n) = 0$

ومنه نجد أن المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

❸ $$u_{n+1} - u_n = 3t_{n+1} + 8s_{n+1} - 3t_n - 8s_n = 3(t_{n+1} - t_n) + 8(s_{n+1} - s_n)$$

$$u_{n+1} - u_n = 3 \times \frac{2}{3}(s_n - t_n) + 8 \times \frac{-1}{4}(s_n - t_n) = 2(s_n - t_n) - 2(s_n - t_n) = 0$$

ومنه فإن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية ثابتة وقيمتها الثابتة $u_n = u_0 = 3t_0 + 8s_0 = 3(1) + 8(12) = 99$

❹ بفرض النهاية المشتركة للمتتاليتين المتجاورتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ هي ℓ

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty}(3t_n + 8s_n) = 3\ell + 8\ell = 11\ell \Rightarrow 11\ell = 99 \Rightarrow \ell = 9$$

التمرين 31 :

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المُعرّفة تدريجيّاً وفق $u_0 = 7$ و $u_{n+1} = 10u_n - 18$

احسب u_1 و u_2 و u_3 و خمّن عبارة u_n بدلالة n ثمّ حدّد عبارة u_n بدلالة n

الحل :

$$u_1 = 10u_0 - 18 = 70 - 18 = 52$$
$$u_2 = 10u_1 - 18 = 520 - 18 = 502$$
$$u_3 = 10u_2 - 18 = 5020 - 18 = 5002$$

نلاحظ أنّ

$$u_1 = 50 + 2 = 5 \times 10^1 + 2$$
$$u_2 = 500 + 2 = 5 \times 100 + 2 = 5 \times 10^2 + 2$$
$$u_3 = 5000 + 2 = 5 \times 1000 + 2 = 5 \times 10^3 + 2$$

وبالتالي يمكن تخمين عبارة المتتالية بالعلاقة $u_n = 5(10)^n + 2$

ولنبرهن صحة ذلك بالتدريج : نُرمّز الخاصة $E(n): u_n = 5(10)^n + 2$

$E(0) = u_0 = 5(10)^0 + 2 = 7$ والخاصة صحيحة من أجل $n = 0$

$E(1) = u_1 = 5(10)^1 + 2 = 52$ والخاصة صحيحة من أجل $n = 1$

نفترض أن $E(n)$ صحيحة، ولنبرهن صحة $E(n+1)$ أي نبرهن أنّ : $E(n+1): u_{n+1} = 5(10)^{n+1} + 2$

$$L_1 = u_{n+1} = 10u_n - 18 = 10(5(10)^n + 2) - 18 = 5(10)^{n+1} + 2 = L_2$$

والخاصة $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

التمرين 32 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق : $u_0 = s$ ، $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{3}{4}(u_n - 3)$

❶ أثبت مستعملا البرهان بالتدريج أن $0 \leq u_n - 3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 3)$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$

❷ استنتج نهاية u_n

❸ من أجل $u_0 = 4$ عين عدداً طبيعياً N يحقق $u_n \in]3 - 10^{-3}, 3 + 10^{-3}[$ عند كل $n \geq N$

الحل :

❶ لنفرض القضية $E(n) : 0 \leq u_n - 3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 3)$

لنبرهن صحة القضية $E(0)$

$0 \leq u_0 - 3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 (u_0 - 3) \Rightarrow 0 \leq u_0 - 3 \leq (u_0 - 3)$ والقضية صحيحة

نفرض صحّة القضية $E(n)$ عند $n \geq 1$ ونبرهن صحّة

$$E(n+1) : 0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} (u_0 - 3)$$

لدينا من نص المسألة $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{3}{4}(u_n - 3)$ و من الفرض $0 \leq u_n - 3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 3)$

ومنه $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 3)$ وبالتالي : $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} (u_0 - 3)$

و القضية $E(n+1)$ صحيحة بالتالي مما سبق نجد أن القضية $E(n)$ صحيحة من أجل كل n من $\mathbb{N}$

❷ بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 3) = 0$

بالتالي حسب الاحاطة يكون $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n - 3 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 3$

❸ $3 - 10^{-3} \leq u_n \leq 3 + 10^{-3} \Rightarrow -10^{-3} \leq u_n - 3 \leq 10^{-3}$

و $0 \leq u_n - 3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ بالتالي

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n = 10^{-3} \Rightarrow n \ln\frac{3}{4} = -3 \ln 10 \Rightarrow n = \frac{-3 \ln 10}{\ln\frac{3}{4}} \Rightarrow N \geq \frac{-3 \ln 10}{\ln\frac{3}{4}}$$

طريقة ثانية :

لدينا $u_0 - 3 = 4 - 3 = 1$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{30} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^{10} = \left(\frac{27}{64}\right)^{10} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \leq \frac{1}{1000}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 3) \leq (4 - 3)\frac{1}{1000} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 3) \leq \frac{1}{1000}$$

$0 \leq u_n - 3 \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow 3 - \frac{1}{1000} \leq u_n \leq 3 + \frac{1}{1000}$ بالتالي $N \geq 30$

أحمد الشيخ عيسى

التمرين 33 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^n}$

❶ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماما

❷ استنتج أن العدد -2 قاصر على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

❸ أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

الحل :

❶

$$u_{n+1} = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2^{n+1}} < 0$$

اذا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماما

❷

$$u_n = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^n} = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = -\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

$u_n = -2\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq -2$ بالتالي -2 عنصر قاصر على المتتالية

❸ المتتالية متناقصة تماما ومحدودة من الادنى فهي متقاربة

التمرين 34 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة بالصيغة : $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$

❶ أثبت بالتدريج على العدد n أنّ $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n .

❷ استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل :

❶ لنفرض الخاصة $E(n): n \leq 2^n$

لنبرهن الخاصة $E(1)$: الخاصّة صحيحة $1 \leq 2^1 = 2$

نفرض صحة $E(n): n \leq 2^n$ ولنبرهن صحة $E(n+1)$ أي $n + 1 \leq 2^{n+1}$

$$n + 1 \leq 2^n + 1 \leq 2^n\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq 2^n(2) = 2^{n+1}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق الخاصة $E(n)$ صحيحة أيّاً كان العدد الطبيعي n .

❷ بالاستفادة مما سبق نستبدل كل عدد k في بسط كل كسر بالقوة 2^k لنجد:

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n} \leq \frac{2^1}{3^1} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} + \cdots + \frac{2^n}{3^n}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + .. + \left(\frac{2}{3}\right)^n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n \ : \ q = \frac{2}{3}$$

$u_n = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \Rightarrow u_n = 2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 2 \Rightarrow$ فالمتتالية محدودة من الأعلى بالعدد 2

التمرين 35:

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}$

❶ أثبت مستعملا البرهان بالتدريج أن $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

❷ استنتج أن العدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

❸ أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

الحل:

❶ لنضع الخاصة $E(n)$: $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ في حالة $n \geq 1$

من أجل $n = 1$ نجد : $\frac{1}{1!} = 1 = \frac{1}{2^0}$ فالخاصة $E(1)$ صحيحة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$: $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)$: $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)(n)!} = \frac{1}{(n+1)} \times \frac{1}{(n)!} \leq \frac{1}{(n+1)} \times \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

حيث : $\left(\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ و $\left(n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}\right)$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق الخاصة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد $n \geq 1$

❷ $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow$

$$u_n \leq 1 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) \leq 1 + 1 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$u_n \leq 1 + 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq 1 + 2 - 2\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq 3 - \frac{2}{2^n} \leq 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

فالعدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

❸ $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$ ، $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}$

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما

وهي محدودة من الأعلى بالعدد 3 فهي متقاربة

التمرين 36:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

❶ أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة ❷ أثبت أن $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ أيا يكن $n \geq 1$ واستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة

❶ $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ والمتتالية متزايدة.

❷ نفرض الخاصة $E(n)$: $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ أيّاً يكن $n \geq 1$.

لنبرهن صحة الخاصة $E(1)$: $1 = u_1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1$ و الخاصة صحيحة

نفرض صحّة الخاصة $E(n)$ ولنبرهن صحة الخاصة $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}}_{A}$$

ولكن $A = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ بالتالي $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$

والخاصة $E(n+1)$ صحيحة بالتالي مما سبق نجد أن القضية $E(n)$ صحيحة من أجل كل $n \geq 1$

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 لأن $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1} \leq 2$ فهي متقاربة

التمرين 37:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$.

و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و(v_n) متجاورتان

الحل:

$$u_{n+1} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

والمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة تماما

$$v_{n+1} = u_{n+1}+\frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$$v_{n+1}-v_n = u_{n+1}+\frac{1}{n+1}-u_n-\frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متناقصة تماما

$v_n - u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ فالمتتاليتان $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ متجاورتان

التمرين 38:

المتتاليتان (u_n) , (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـِ :

$u_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$ و $v_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و(v_n) متجاورتان .

الحل:

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} \geq 0$$

والمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة.

$$v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}$$

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \leq 0$$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متناقصة.

$$v_n-u_n = 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} = 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$ فالمتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان.

التمرين 39 :

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق : $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$

❶ أثبت أنّ : $\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ أيّاً يكن العدد الطبيعي $n \geq 1$.

❷ استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وما نهايتها ؟

الحل :

❶ نلاحظ أنّ u_n هي مجموع n حدّاً أصغرها $\frac{n}{n^2+n}$ وأكبرها $\frac{n}{n^2+1}$ عندئذٍ

أيّاً يكن العدد الطبيعي $n \geq 1$

$$n \times \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq n \times \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

❷ $lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+n}$ بالتالي حسب مبرهنة الإحاطة يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

التمرين 40 :

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

❶ أثبت أنّ : $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ أيّاً يكن العدد الطبيعي $n \geq 1$.

❷ استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وما نهايتها ؟

الحل :

❶ نلاحظ أنّ u_n هي مجموع n حدّاً أصغرها $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ وأكبرها $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ عندئذٍ

$$n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

أيّاً يكن العدد الطبيعي $n \geq 1$

$$n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

❷ $lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$ حسب مبرهنة الإحاطة يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

التمرين 41 :

لنضع في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n ، $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

❶ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

❷ اكتب $u_{2n} - u_n$ واستنتج أنّ $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

❸ أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنّ $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ ، أيّاً يكن العدد الطبيعي الغير معدوم n .

❹ هل للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقيّة .

الحل :

❶ $$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} > 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة .

❷ $$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \Rightarrow u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

المجموع هو مجموع n حدّاً متناقصاً أصغرها $\frac{1}{2n}$ وبالتالي هذا المجموع أكبر من أصغر حدودها مضروبا بعدد الحدود

وبالتالي : $$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

❸ نفرض $E(n)$ الخاصّة $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ ، أياً يكن العدد الطبيعي $n \geq 1$

الخاصة صحيحة من أجل $n = 1$ لأنّ : $u_{2^1} = u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}$

لنفترض صحة الخاصة $E(n)$. ولنبرهن صحّة $E(n+1)$ أي : $u_{2^{n+1}} \geq \frac{n+1}{2}$

$$u_{2^{n+1}} = u_{2\times 2^n} - u_{2^n} + u_{2^n} \geq \frac{1}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2}$$

فالخاصّة $E(n)$ صحيحة من أجل $n+1$ فهي صحيحة أيّاً يكن العدد الطبيعي $n \geq 1$.

❹ لو افترضنا أنّ للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقيّة ℓ لكانت محدودة بهذه النهاية لأنها متزايدة.

ولكن النتيجة السابقة تقول إنّ هذه المتتالية غير محدودة. فليس للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقيّة

الاختبار 1

التمرين الثاني:

أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجيّاً بالعلاقات: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ متزايدة تماماً

الحل :

لنشكل التابع $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$

والتابع $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} > 0$ و f متزايد تماما على المجال $]0,+\infty[$

بفرض القضية $E(n) \;:\; u_{n+1} > u_n$

لنبرهن صحة القضية $E(0) \;:\; 1 = u_1 > u_0 = 0$ والقضية $E(0)$ صحيحة

نفرض صحّة $E(n) \;:\; u_{n+1} > u_n$

ونبرهن صحّة : $E(n+1) \;:\; u_{n+2} > u_{n+1}$.

من الفرض $u_{n+1} > u_n$ وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(u_{n+1}) > f(u_n) \Rightarrow \sqrt{1+u_{n+1}^2} > \sqrt{1+u_n^2} \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

الاختبار 2

السؤال الثاني:

نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{12+u_n}$

❶ أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 4$ أيّاً كان العدد الطبيعي n

❷ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

الحل :

لنشكل التابع $f(x) = \sqrt{12+x}$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$ المتزايد تماما لأن : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{12+x}} > 0$

❶ نفرض الخاصّة $E(n): 0 \leq u_n \leq 4$ عند كل $n \geq 0$

لنثبت صحّة الخاصّة $E(0) \;:\; 0 \leq u_0 = 1 \leq 4$ الخاصّة صحيحة

نفرض أنّ $E(n): 0 \leq u_n \leq 4$

ونبرهن صحّة $E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 4$

من الفرض لدينا $0 \leq u_n \leq 4$ وبالتالي وبما أن f متزايد تماما فإن :

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(4) \Rightarrow \sqrt{12} \leq u_{n+1} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 4$ الخاصّة $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق الخاصّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

❷ تكون المتتالية u_n متزايدة تماما ، إذا تحقّق الشرط $u_{n+1} \geq u_n$ فلنبرهنها بالتدريج

بفرض الخاصّة $E(n) \;:\; u_{n+1} \geq u_n$

نلاحظ أنّ $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$ لأنّ $\sqrt{13} = u_1 \geq u_0 = 1$

نفرض صحّة $E(n) \;:\; u_{n+1} \geq u_n$ ونبرهن صحّة : $E(n+1) \;:\; u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

من الفرض $u_{n+1} \geq u_n$ وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \Rightarrow \sqrt{12+u_{n+1}} \geq \sqrt{12+u_n} \Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

والخاصّة $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق الخاصّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ والمتتالية متزايدة

التمرين الأوّل :

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفتان كما يأتي : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{4n}$

أثبت أنّ هاتين المتتاليتين متجاورتين.

الحل :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

والمتتالية u_n متزايدة. تماما

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{4n+4} \Rightarrow v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{4n+4} - u_n - \frac{1}{4n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{n(4n+4)} = \frac{1}{2n+2}\left(\frac{-1}{2n(2n+1)}\right) < 0$$

والمتتالية v_n متناقصة تماماً .

$lim_{n\to+\infty}(v_n - u) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n} = 0$ فالمتتاليتان u_n و v_n متجاورتان

التمثيل الهندسي لمتتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$

في الشكل المجاور، هو الخط البياني لتابعٍ f في معلم متجانس.

ولتعيين الحدود الاولى للمتتالية $u_{n+1} = f(u_n)$ على الشكل نتبع الخطوات التالية :

① نعين على محور الفواصل النقطة التي تمثل العدد الحقيقي u_0

② نرسم منه مستقيم يوازي محور التراتيب فيقطع الخط البياني في نقطة $A_0(u_0\,,u_1)$

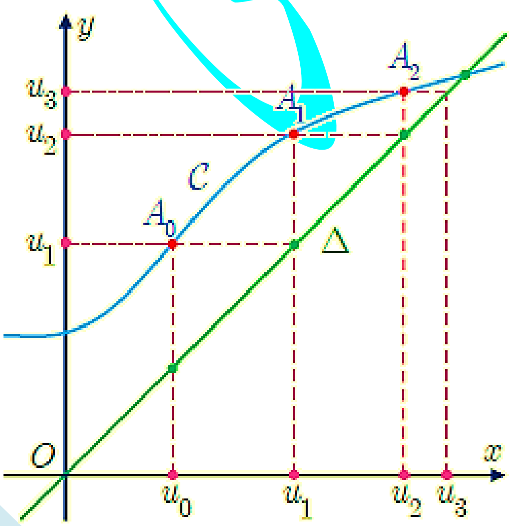
③ نرسم من النقطة $A_0(u_0\,,u_1)$ مستقيم يقطع منصف الربع الاول في نقطة $(u_1\,,u_1)$

④ نرسم من النقطة $(u_1\,,u_1)$ مستقيم يوازي محور التراتيب فيقطع الخط البياني في نقطة $A_1(u_1\,,u_2)$

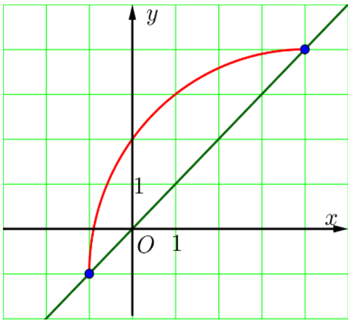
⑤ نرسم من النقطة $A_1(u_1\,,u_2)$ مستقيم يقطع منصف الربع الاول في نقطة $(u_2\,,u_2)$

⑥ نرسم من النقطة $(u_2\,,u_2)$ مستقيم يوازي محور التراتيب فيقطع الخط البياني في نقطة $A_2(u_2\,,u_3)$

واذا طلب منا أكثر من ثلاث نقاط نكرر آخر خطوتين



التمرين الثالث :



نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يلي : $u_{n+1}=\frac{5u_n+4}{u_n+2}$, $u_0=\frac{1}{2}$

❶ باستعمال الرسم مثّل على محور الفواصل ودون حساب الحدود u_0,u_1,u_2,u_3.

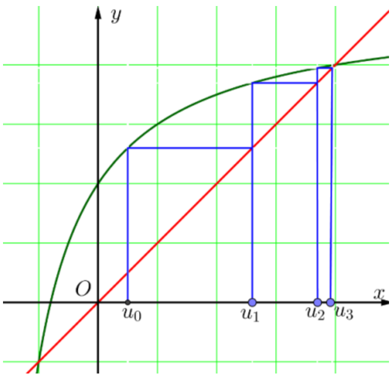
❷ ضع تخميناً حول اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وتقاربها.

❸ نعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة: $v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1}$

1. بيّن أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة، وعيّن أساسها وحدّها الأوّل.

2. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n وعيّن نهاية المتتالية u_n.

الحل :



❷ نتوقّع من الشكل أنّ المتتالية متزايدة

بفرض $f(x)=\frac{5x+4}{x+2}$ حيث $u_{n+1}=f(u_n)$

والتابع متزايد تماما $f'(x)=\frac{5(x+2)-(5x+4)}{(x+2)^2}=\frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2}=\frac{6}{(x+2)^2}>0$

ونفرض القضية $E(n)\ :\ u_{n+1}>u_n$

لنبرهن صحة $E(0)$: $u_0=\frac{1}{2} < u_1=\frac{13}{5}$ و العلاقة صحيحة

نفرض صحّة $E(n)$ ونبرهن صحّة $E(n+1)\ :\ \ u_{n+2}>u_{n+1}$

من الفرض $u_{n+1}>u_n$ وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(u_{n+1})>f(u_n)\Longrightarrow \frac{5u_{n+1}+4}{u_{n+1}+2}>\frac{5u_n+4}{u_n+2}\Longrightarrow u_{n+2}>u_{n+1}$$

و العلاقة $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق العلاقة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$

والمتتالية u_n متزايدة، ولنبرهن أنّها محدودة من الأعلى.

نرمز القضيّة : $E(n):-1\leq u_n\leq 4$

نلاحظ أنّ الخاصّة صحيحة من أجل $n=0$ لأنّ $-1\leq u_0=\frac{1}{2}\leq 4$.

نفرض صحة $E(n)$ ولنبرهن صحّة $E(n+1):-1\leq u_{n+1}\leq 4$

من الفرض لدينا $-1\leq u_n\leq 4$ وبالتالي وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(-1)\leq f(u_n)\leq f(4)\Longrightarrow -1\leq u_{n+1}\leq 4$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$

المتتالية متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بـ 4 فهي متقاربة و نهايتها تساوي 4

❸ 1. $v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1}$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{5u_n+4}{u_n+2}-4}{\frac{5u_n+4}{u_n+2}+1}=\frac{u_n-4}{6(u_n+1)}=\frac{1}{6}\left(\frac{u_n-4}{u_n+1}\right)=\frac{1}{6}v_n$$

و v_n متتالية هندسيّة أساسها $\frac{1}{6}<1$ وحدّها الأوّل : $v_0=\frac{u_0-4}{u_0+1}=\frac{-7}{3}$

2. $v_n=v_0q^n=-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1}\Longrightarrow v_n(u_n+1)=u_n-4\ \Longrightarrow u_n(v_n-1)=-v_n-4\Longrightarrow u_n=\frac{-v_n-4}{v_n-1}$$

وبما أنّ $lim_{n\to+\infty}v_n=0$ فإنّ : $lim_{n\to+\infty}u_n=4$

النموذج الوزاري الأول

التمرين الثاني:

لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق $x_0 = 4$ و $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2$ في حالة $n \geq 0$

نعرّف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n - 8$

أثبت أنّ $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة. واكتب y_n بدلالة n. واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} y_n$

الحل :

$$y_{n+1} = x_{n+1} - 8 = \frac{3}{4}x_n + 2 - 8 = \frac{3}{4}x_n - 6 = \frac{3}{4}(x_n - 8) = \frac{3}{4}y_n$$

وهي متتالية هندسيّة أساسها $\frac{3}{4}$ وحدّها الأوّل $y_0 = x_0 - 8 = -4$ وبالتالي : $y_n = y_0 . q^n = -4.\left(\frac{3}{4}\right)^n$

ولأنّ $-1 < q < 1$ فإنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} y_n = -4 \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

النموذج الوزاري الثاني

التمرين الثاني:

لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق $x_0 = 5$ و $x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$.

❶ احسب x_1 , x_2 , x_3 ثمّ ادرس اطّراد المتتالية.

❷ نعرّف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$ أثبت أنّ $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة.

❸ اكتب y_n بدلالة n ثمّ احسب $y_2 + y_3 + \cdots + y_{10}$ بدلالة قوّة للعدد $\frac{6}{5}$:

الحل :

❶

$$x_1 = \frac{6}{5}x_0 + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}(5) + \frac{4}{5} = \frac{34}{5} \quad , \quad x_2 = \frac{6}{5}\left(\frac{34}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{204}{25} + \frac{20}{25} = \frac{224}{25}$$

$$x_3 = \frac{6}{5}\left(\frac{224}{25}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1344}{125} + \frac{100}{125} = \frac{1444}{125}$$

يتبيّن لنا أنّ المتتالية متزايدة. نرمز الخاصة $E(n): x_{n+1} > x_n$

ولنبرهن صحّة $E(0)$ $\frac{34}{5} = x_1 > x_0 = 5$ و الخاصة صحيحة

نفرض صحّة $E(n)$ أي أنّ $x_{n+1} - x_n \geq 0$

ولنبرهن صحّة $E(n+1)$ أي نبرهن أنّ $x_{n+2} > x_{n+1}$

من الفرض $x_{n+1} > x_n$ وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(x_{n+1}) > f(x_n) \Longrightarrow \frac{6}{5}x_{n+1} + \frac{4}{5} > \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} \Longrightarrow x_{n+2} > x_{n+1}$$

و العلاقة $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق العلاقة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

والمتتالية u_n متزايدة

❷ والمتتالية y_n هندسيّة $y_{n+1} = x_{n+1} + 4 = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4 = \frac{6}{5}(x_n + 4) = \frac{6}{5}y_n$

❸ $y_n = y_0 . q^n = 9\left(\frac{6}{5}\right)^n$ أساسها $q = \frac{6}{5}$ وحدّها الأوّل $y_0 = 9$

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_{10} = y_2\frac{1-q^9}{1-q} = 9\left(\frac{6}{5}\right)^2\frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^9}{1-\frac{6}{5}} = -45\left(\frac{6}{5}\right)^2\left[1-\left(\frac{6}{5}\right)^9\right]$$

النموذج الوزاري الثالث

التمرين الثاني :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجيّة $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$

❶ أثبت أنّ $0 < u_n < 1$ أيّاً كان $n \in \mathbb{N}$

❷ نعرّف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث: $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$ أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة واستنتج v_n بدلالة n

❸ اكتب u_n بدلالة n واحسب $lim_{n\to+\infty} u_n$

الحل :

❶ لنفرض التابع $f(x) = \frac{x}{2-x}$ بحيث $u_{n+1} = f(u_n)$

بالتالي $f'(x) = \frac{2-x+x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$ فالتابع f متزايد تماماً

لنضع $E(n): 0 \leq u_n \leq 1$

لنبرهن صحة $E(0)$: $0 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 0 \leq u_n \leq 1$ ولنبرهن صحة $E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 1$

من الفرض $0 \leq u_n \leq 1$ وبما أن f متزايد تماماً فإن

$f(0) < f(u_n) \leq f(1) \Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

❷ $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{2-u_n}{u_n} - 1 = \frac{2-2u_n}{u_n} = 2\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right) = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) = 2v_n$

وهي متتالية هندسيّة أساسها $q = 2$ و $v_0 = 2 - 1 = 1$ بالتالي $v_n = v_0 q^n = 2^n$

❸ $v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Longrightarrow u_n = \frac{1}{v_n+1} = \frac{1}{2^n+1} \Longrightarrow lim_{x\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^n+1} = 0$

النموذج الوزاري الرابع

التمرين الثاني :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجياً بالشكل $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ و $u_0 = e^3$

$(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة بالشكل $v_n = ln(u_n) - 2$ والمطلوب:

❶ أثبت أنّ v_n هندسيّة وعيّن q و v_0.

❷ اكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج u_n بدلالة n.

❸ أثبت أنّ: $lim_{n\to+\infty} u_n = e^2$

الحل :

❶ $v_{n+1} = ln(u_{n+1}) - 2 = ln\left(e.\sqrt{u_n}\right) - 2 = lne + ln\sqrt{u_n} - 2$

$= \frac{1}{2}ln(u_n) - 1 = \frac{1}{2}[ln(u_n) - 2] = \frac{1}{2}v_n$

وهي متتالية هندسيّة أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدّها الأوّل $v_0 = ln(u_0) - 2 = 3 - 2 = 1$

❷ $v_n = v_0 . q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

❸ $v_n + 2 = ln(u_n) \Longrightarrow u_n = e^{v_n+2} = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

$\lim_{x\to+\infty} ln(u_n) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}\right) = e^{0+2} = e^2$

التمرين الأوّل :

لتكن المتتالية $u_n = 4n + 1$ أثبت أن المتتالية حسابية وأحسب $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$

الحل :

$$u_{n+1} = 4n + 5 \Longrightarrow u_{n+1} - u_n = 4$$

وهي متتالية حسابيّة أساسها $r = 4$ وحدّها الأوّل $u_0 = 1$

حد $n = 10 - 0 + 1 = 11 \qquad S = \frac{n(a+l)}{2}$

$$a = u_0 = 1 \quad \& \quad l = u_{10} = 41$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = \frac{11.(1+41)}{2} = 11 \times 21 = 231$$

التمرين الثاني :

لتكن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرّفتين وفق $x_n = \frac{4n+5}{n+1}$ و $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$

أثبت أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.

الحل :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4n+9}{n+2} - \frac{4n+5}{n+1} = \frac{(4n^2+13n+9) - (4n^2+13n+10)}{(n+1)(n+2)}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$ و x_n متتالية متناقصة

$$y_{n+1} - y_n = \frac{4n+5}{n+3} - \frac{4n+1}{n+2} = \frac{(4n^2+13n+10) - (4n^2+13n+3)}{(n+2)(n+3)}$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{7}{(n+1)(n+2)} > 0$$ و y_n متتالية متزايدة

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n+5}{n+3} - \frac{4n+5}{n+1}\right) = 4 - 4 = 0$$

و المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

النموذج الوزاري السادس

التمرين الأوّل :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يأتي: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$ المطلوب :

❶ أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 1$.

❷ أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

❸ علّل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها.

الحل :

❶ لنفرض التابع $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ بحيث $u_{n+1} = f(u_n)$

بالتالي $f'(x) = \frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ فالتابع f متزايد تماماً

لنضع $E(n): 0 \leq u_n \leq 1$

لنبرهن صحة $E(0)$: $0 \leq u_0 = 0 \leq 1$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 0 \leq u_n \leq 1$

ولنبرهن صحة $E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 1$

من الفرض $0 \leq u_n \leq 1$ وبما أن f متزايد تماماً فإن

$$f(0) < f(u_n) \leq f(1) \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي

$n \geq 0$❷

لنضع $E(n): u_{n+1} > u_n$

لنبرهن صحة $E(0)$ $u_1 = \frac{1}{2} > u_0 = 0$ إذاً $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): u_{n+1} > u_n$ و لنبرهن صحة $E(n+1)$: $u_{n+2} > u_{n+1}$

من الفرض $u_{n+1} > u_n$ وبما أن f متزايد تماماً فإن : $f(u_{n+1}) > f(u_n) \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً

❸ مما سبق وجدنا أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الاعلى

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

ولإيجاد النهاية ، هي حل المعادلة $f(\ell) = \ell$

$$\frac{2\ell+1}{\ell+2} = \ell \Rightarrow \ell^2 + 2\ell = 2\ell + 1 \Rightarrow \ell^2 = 1 \Rightarrow \ell = 1 \ , \ \ell = -1$$

المتتالية متزايدة وحدها الأول 0

لا يمكن لمتتالية حدودها موجبة أن تكون نهايتها سالبة بالتالي $lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

التمرين الثالث :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

أثبت أن : $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

أثبت أن $u_n < 2$ ثم استنتج أن u_n متقاربة

الحل :

❶ لنضع الخاصة $E(n)\colon\ \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$ في حالة $n \geq 1$

من أجل $n = 1$ نجد : $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2^1}$ فالخاصة $E(1)$ صحيحة

نفرض صحة الخاصة $E(n)\colon\ \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$ ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1)\colon\ \frac{1}{(n+2)!} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

$$\frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)!} = \frac{1}{(n+2)} \times \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+2)} \times \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$n \geq 1 \Rightarrow n+2 \geq 3 \Rightarrow n+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2} \quad و \quad \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق الخاصة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد $n \geq 1$

❷

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow$$

$$u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \leq 1 \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

$$u_n \leq 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq 2 - 2\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2$$

فالعدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

❸

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!} \quad , \quad u_{n+1} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما وهي محدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة

النموذج الوزاري الأول 2020

التمرين الثاني :

لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

❶ أثبت بالتدريج أن $u_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n.

❷ أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية

ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

❸ ليكن S_n المجموع المعرف بالشكل $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ اكتب S_n بدلالة n واستنتج $lim_{n\to\infty} S_n$

❶ نفرض الخاصة $E(n) : u_n > 0$

لنبرهن صحة $E(0)$: ان $u_0 = 2 > 0$ والخاصة صحيحة

نفرض صحة الخاصة $E(n) : u_n > 0$ ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1) : u_{n+1} > 0$

من الفرض $u_n > 0$ وبالتالي : $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n} > 0$ لأنّها قسمة عددين موجبين تماماً

وبالتالي الخاصة $E(n+1)$ صحيحة مما سبق نجد ان الخاصة $u_n > 0$ صحيحة ايا كان n من $\mathbb{N}$

❷ نلاحظ أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرّفة على النحو:

$$v_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1+4u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 4 \Rightarrow v_{n+1} = v_n + 4 \Rightarrow$$

$v_{n+1} - v_n = 4$ وبالتالي v_n متتالية حسابيّة أساسها $r = 4$ و $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$

وبالتالي : $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{2} + 4n = \frac{8n+1}{2}$, $u_n = \frac{1}{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{2}{8n+1}$

❸ $$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{8n+1}{2}\right) = \frac{(n+1)(8n+2)}{4}$$

$$S_n = \frac{1}{4}(8n^2 + 10n + 2) \Rightarrow lim_{x\to+\infty} S_n = lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}(8n^2 + 10n + 2) = +\infty$$

النموذج الوزاري الثاني 2020

السؤال الثاني :

لتكن المتتاليتين $(u_n)_{\geq1}$ و $(v_n)_{\geq1}$ المعرفتين وفق العلاقتين : $u_n = -\frac{1}{n}$ و $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

❶ ادرس اطراد كل من $(u_n)_{\geq1}$ و $(v_n)_{\geq1}$.

❷ أثبت أن المتتاليتان $(u_n)_{\geq1}$ و $(v_n)_{\geq1}$ متجاورتان

الحل :

❶ بفرض $f(x) = -\frac{1}{x}$ حيث $u_n = f(n)$ بالتالي $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

والتابع متزايد تماما وبالتالي فالمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماما

❷ بفرض $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ حيث $v_n = g(n)$ بالتالي

$$g'(x) = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0 \quad : x \in [1, +\infty[$$

والتابع متناقص تماما على $[1, +\infty[$ وبالتالي فالمتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متناقصة تماما

❸ $\lim_{x\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{n}\right) = 0 + 0 = 0$ والمتتاليتان متجاورتان

المسألة الأولى :

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)$، والمطلوب :

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

❷ أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط C_f، ثم ادرس الوضع النسبي

❸ حل المعادلة $f(x)=x$

❹ لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً بالشكل: $u_0=4$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ عند كل $n\in\mathbb{N}$ والمطلوب :

(a) احسب u_1 و u_2

(b) استنتج من تزايد التابع f على المجال $[2,+\infty[$ صحة الخاصة $n\in\mathbb{N}$: $E(n): 2<u_{n+1}<u_n$

(c) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة، واحسب نهايتها

(d) ارسم مقاربات C_f وارسم المستقيم $\Delta: y=x$ ثم ارسم C_f ومثل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ على الرسم نفسه

الحل :

❶ التابع $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=+\infty$$

و مشتقه $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=-2 \notin]0,+\infty[\,,\quad x=2 \Rightarrow f(2)=2$$

x	$0 \qquad 2 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$f(x)$	$+\infty \searrow 2 \nearrow +\infty$

❷

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{2}x=\frac{2}{x} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{x}=0$$

بالتالي المستقيم $y=\frac{1}{2}x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{2}{x}>0\ ; x\in\ ]0,+\infty[$ والخط C يقع فوق المقارب

❸

$$f(x)=x \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{2}{x}=x \Rightarrow \frac{x^2+4}{2x}=x \Rightarrow x^2+4=2x^2 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2\ ,x=-2$$

❹

$$u_0 = 4 \quad , \quad u_1 = \frac{4}{2} + \frac{2}{4} = \frac{5}{2} \quad , \quad u_2 = \frac{\frac{5}{2}}{2} + \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{4} + \frac{4}{5} = \frac{41}{20} \qquad (a)$$

(b) لنفرض القضية $E(n): 2 \le u_{n+1} \le u_n$

لنبرهن صحة $E(0)$. $2 \le u_1 = \frac{5}{2} \le u_0 = 4$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 2 \le u_{n+1} \le u_n$ لنبرهن صحة $E(n+1):\ 2 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$

وبما أن f متزايد تماماً عندما $x \ge 2$ و من الفرض $2 \le u_{n+1} \le u_n$ فإن

$f(2) \le f(u_{n+1}) \le f(u_n) \Rightarrow 2 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$ والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \ge 0$

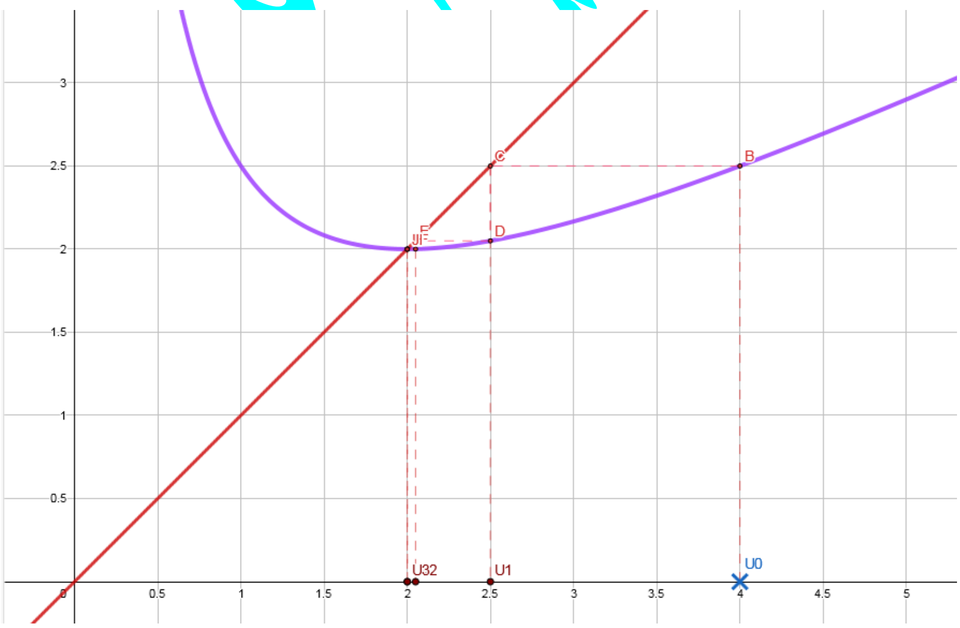
(c) من العلاقة $2 \le u_{n+1} \le u_n$ نجد :

$u_{n+1} \le u_n$ فالمتتالية متناقصة و $2 \le u_n$

فالمتتالية محدودة من الادنى فالمتتالية متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة $f(\ell) = \ell$

فالمتتالية متناقصة وحدها الاول 4 و $2 \le u_n$ وبالتالي فإن $lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

(d) الرسم



دورة 2017 الأولى

التمرين الأول :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق : $u_0 = 1$: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$

و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $v_n = u_n + 3$

1. أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية و أوجد أساسها .
2. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثُمَّ عبارة u_n بدلالة n .
3. ليكن في حالة عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$

الحل :

❶ $$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(u_n + 3) = \frac{1}{3}v_n$$

فالمتتالية v_n هندسيّة أساسها $\frac{1}{3}$

❷ $$q = \frac{1}{3}\ , v_0 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow v_n = v_0q^n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4}{3^n}$$

ومن ثمّ $$v_n = u_n + 3 \Rightarrow u_n = v_n - 3 \Rightarrow u_n = \frac{4}{3^n} - 3$$

❸ $$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) = 4 \times \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$S_n = 6\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 6 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n , -1 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(6 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 6 - 0 = 6$$

دورة 2017 الثانية

التمرين الأول :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق ما يأتي: $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة .
2. أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها .

الحل :

❶ $$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \quad \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \quad \Rightarrow$$

من أجل $n \geq 0$ فإن $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$ ومنه $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ وبالتالي :

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \Rightarrow u_{n+1} < u_n$$ والمتتالية متناقصة

❷ من أجل $n \geq 0$ فإن ① $$\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0 \Rightarrow u_n \geq 0$$

أو : من أجل $n \geq 0$ فإن ① $$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 0 \Rightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq 0$$

② $$n \geq 0 \Rightarrow n + 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n+1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 1$$

من ① و ② نجد $0 \leq u_n \leq 1$

المتتالية متناقصة ومحدودة من الادنى فهي متقاربة $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

دورة 2018 الأولى

التمرين الثاني :

ليكن لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ ، $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتان وفق : $u_n = 5 - \frac{1}{n}$ ، $v_n = 5 + \frac{1}{n^2}$ والمطلوب :

❶ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة .

❷ أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متناقصة .

❸ هل المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ ، $(v_n)_{n\geq1}$ متجاورتان ؟ علل إجابتك .

الحل :

❶ بفرض $f(x) = 5 - \frac{1}{x}$ حيث $u_n = f(n)$ بالتالي $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

والتابع متزايد تماما وبالتالي فالمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماما

❷ بفرض $g(x) = 5 + \frac{1}{x^2}$ حيث $v_n = g(n)$ بالتالي $g'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$

والتابع متناقص تماما وبالتالي فالمتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماما

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = 0 + 0 = 0$ والمتتاليتان متجاورتان

دورة 2018 الثانية

السؤال الرابع :

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية فيها $q = 2$ ، $u_0 = 1$ احسب u_3 ثم أحسب المجموع $S = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7$

الحل :

$$u_m = u_n \,.\, q^{m-n} \implies u_3 = u_0 . q^{3-0} \implies u_3 = 1(2)^3 \implies u_3 = 8$$

عدد الحدود $n = 5$

$$S = u_3\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 8 \times \frac{1-2^5}{1-2} = -8(1-32) = 248$$

دورة 2019 الأولى

التمرين الأول :

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

❶ أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماما

❷ أثبت أن S_n يكتب بالشكل وفق $S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$ ثم استنتج عنصر راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ وبين أنها متقاربة

الحل :

❶ $S_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} = S_n + \frac{1}{3^{n+1}} \implies S_{n+1} - S_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة تماما.

❷ نلاحظ أن S_n عبارة عن مجموع $n+1$ حد من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول 1

$$S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\times3^n} \leq \frac{3}{2}$ بالتالي $\frac{3}{2}$ عنصر راجحاً

المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

دورة 2019 الثانية

التمرين الثالث :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يأتي: $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ و المطلوب:

❶ أدرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

❷ أثبت أنّ العدد 2 راجح على $(u_n)_{n\geq 0}$

❸ احسب $\lim_{x\to+\infty} u_n$ ثم حدد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n \geq n_0$ كان u_n في المجال $]1.9,2.1[$

الحل :

❶ بفرض $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ حيث $u_n = f(n)$

$f'(x) = \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ والتابع متزايد تماما وبالتالي فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما

❷ $u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2 = \frac{2n-1-2n-2}{n+1} = \frac{-3}{n+1} < 0 \Longrightarrow u_n < 2$

❸ $\lim_{x\to+\infty} u_n = 2$

$$|u_n - 2| < 0.1 \Rightarrow \left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{-3}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{n+1}{3} > 10 \Rightarrow n+1 > 30 \Rightarrow n > 29$$

وبالتالي يمكن ان نختار $n_0 \geq 29$ يجعل $u_n \in]\,0.99\,,1.01\,[$.

دورة 2020 الأولى

التمرين الأول :

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية: $u_0 = 3\,,\, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ عند كل $n \geq 0$.

❶ أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على $[2,+\infty[$.

❷ أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ أياً كان العدد الطبيعي n ،

❸ استنتج أن المتتالية متقاربة ، واحسب نهايتها.

الحل :

❶ التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ معرف واشتقاقي على $[2,+\infty[$ و مشتقه $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \notin [2,+\infty[\,,\; x = 2$

بالتالي $f'(x) = 0$ على المجال $[2,+\infty[$ فالتابع f متزايد تماماً على المجال $[2,+\infty[$

❷ لنفرض القضية $E(n): 2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

لنبرهن صحة $E(0)$ $\quad 2 \leq u_1 = \frac{13}{6} \leq u_0 = 3$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ لنبرهن صحة $E(n+1):\; 2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

من الفرض $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

وبما أن f متزايد تماماً فإن $f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Longrightarrow 2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

❸ من العلاقة $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ نجد :

$u_{n+1} \leq u_n$ فالمتتالية متناقصة و $2 \leq u_n$ فالمتتالية محدودة من الادنى فالمتتالية متقاربة

ونهايتها هي حل المعادلة $f(\ell) = \ell$

$$\frac{\ell}{2} + \frac{2}{\ell} = \ell \Rightarrow \frac{\ell^2+4}{2\ell} = \ell \Rightarrow \ell^2 + 4 = 2\ell^2 \Rightarrow \ell^2 = 4 \Rightarrow \ell = 2\;,\ell = -2$$

بما أن المتتالية متناقصة وحدها الاول 3 و $2 \leq u_n$ وبالتالي فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

دورة 2020 الثانية

التمرين الرابع :

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\cdots+\frac{n}{e^n}$. المطلوب:

❶ أثبت أن $n \leq 2^n$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.

❷ استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$. ❸ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

الحل :

❶ لتكن $E(n)$ الخاصّة $n \leq 2^n$.

من أجل $n = 1$ نجد $1 \leq 2^1 = 2$ الخاصّة محقّقة

نفرض صحّة $E(n): n \leq 2^n$ ولنبرهن صحّة $E(n+1)$ أي $n+1 \leq 2^{n+1}$

$$n+1 \leq 2^n + 1 \leq 2^n\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq 2^n(2) = 2^{n+1}$$

فالخاصة $E(n+1)$ محقّقة وبالتالي $E(n)$ محقّقة أيّاً كان العدد الطبيعي n .

❷ بالاستفادة مما سبق نستبدل كل عدد n في بسط كل كسر بالقوة 2^n لنجد:

$$u_n = \frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\frac{4}{e^4}+\cdots+\frac{n}{e^n} \leq \frac{2^1}{e^1}+\frac{2^2}{e^2}+\frac{2^3}{e^3}+\frac{2^4}{e^4}+\cdots+\frac{2^n}{e^n}$$

$$u_n \leq \left(\frac{2}{e}\right)^1+\left(\frac{2}{e}\right)^2+\left(\frac{2}{e}\right)^3+\left(\frac{2}{e}\right)^3+..+\left(\frac{2}{e}\right)^n \Rightarrow$$

نلاحظ أن الطرف الثاني عبارة عن مجموع n حد من متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{e}$ و حدها الأول $\frac{2}{e}$

$$u_n \leq \frac{2}{e}\times\left(\frac{1-\left(\frac{2}{e}\right)^n}{1-\frac{2}{e}}\right) \Rightarrow u_n \leq \frac{2}{e}\left(\frac{e}{e-2}\right)\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right) \Rightarrow u_n \leq \frac{e}{e-2}-\left(\frac{e}{e-2}\right)\left(\frac{2}{e}\right)^n \leq \frac{e}{e-2}$$

بالتالي $\frac{e}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية

❸ $u_n = \frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\frac{4}{e^4}+\cdots+\frac{n}{e^n} \Rightarrow u_{n+1} = u_n + \frac{n+1}{e^{n+1}} \Rightarrow u_{n+1}-u_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً وهي محدودة من الأعلى فهي متقاربة

دورة 2021 الأولى

التمرين الأول :

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية $u_0 = 2$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$

ولنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق $v_n = u_n + 6$ والمطلوب :

❶ أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية ، عين أساسها واحسب v_0 ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n

❷ نعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ وفق $w_n = \ln(v_n)$ أثبت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ حسابية و أحسب w_0

ثم أحسب المجموع $S = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$

الحل :

❶ $v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}(u_n+6) = \frac{1}{2}v_n$

فالمتتالية v_n هندسيّة أساسها $q = \frac{1}{2}$ و $v_0 = u_0 + 6 = 2 + 6 = 8 \Rightarrow v_n = v_0 q^n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{8}{2^n}$

❷ $w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{2}v_n\right) = \ln(v_n) - \ln 2 = w_n - \ln 2$

فالمتتالية w_n حسابية أساسها $r = -\ln 2$ و $w_0 = \ln(v_0) = \ln 8$

المجموع $S = \frac{n}{2}(a+l)$ حيث عدد الحدود $n = 6$ و $a = w_0 = \ln 8$ و

$$l = w_5 = \ln(v_5) = \ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4 \Rightarrow S = \frac{6}{2}(\ln 8 - \ln 4) = 3\ln\left(\frac{8}{4}\right) = 3\ln 2$$

التمرين الأول :

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة وفق $u_0=\frac{5}{2}$ وأيا كان العدد الطبيعي n : $u_{n+1}=(u_n-2)^2+2$ المطلوب :

❶ أثبت بالتدريج أنّ $2\leq u_n\leq 3$ أيا كان العدد الطبيعي n

❷ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة

❸ استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ وجد $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

الحل :

❶ $u_{n+1}=(u_n-2)^2+3=u_n^2-4u_n+6$

لنفرض التابع $f(x)=x^2-4x+6$ حيث $u_{n+1}=f(u_n)$

f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ و مشتقه $f'(x)=2x-4$ و $f'(x)=0\Rightarrow 2x-4=0\Rightarrow x=2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
اشارة $f'(x)$	$-$ 0 $+$

فالتابع f متزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$

لنضع $E(n): 2\leq u_n\leq 3$

لنبرهن صحة $E(0)$. $2\leq u_0=\frac{5}{2}\leq 3$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 2\leq u_n\leq 3$ لنبرهن صحة $E(n+1): 2\leq u_{n+1}\leq 3$

من الفرض $2\leq u_n\leq 3$ و بما أن f متزايد تماما فإن $f(2)\leq f(u_n)\leq f(3)\Rightarrow 2\leq u_{n+1}\leq 3$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$

❷ $u_{n+1}-u_n=u_n^2-4u_n+6-u_n=u_n^2-5u_n+6=(u_n-3)(u_n-2)$

$2\leq u_n\leq 3\Rightarrow (u_n-3)(u_n-2)\leq 0\Rightarrow u_{n+1}-u_n\leq 0\Rightarrow u_{n+1}\leq u_n$

طريقة ثانية :

تكون المتتالية u_n متناقصة تماما ، إذا تحقّق الشرط $u_{n+1}\leq u_n$ فلنبرهنها بالتدريج

لنفر ض الخاصّة $E(n): u_{n+1}\leq u_n$

نبرهن صحة الخاصة $E(0)$ و الخاصة صحيحة $\frac{9}{4}=u_1<\frac{5}{2}=u_0$

نفرض صحة الخاصة $E(n): u_{n+1}\leq u_n$ ولنبرهن صحّة الخاصة $E(n+1): u_{n+2}\leq u_{n+1}$

من الفرض $u_{n+1}\leq u_n$ وبما أن f متزايد تماما فإن :

$f(u_{n+1})\leq f(u_n)\Rightarrow u_{n+1}^2-4u_{n+1}+6<u_n^2-4u_n+6\Rightarrow u_{n+2}\leq u_{n+1}$

والخاصة $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق الخاصة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$

❸ المتتالية متناقصة وبما أنها محدودة من الادنى فهي متقاربة

نهاية المتتالية هو حل المعادلة $f(\ell)=\ell$ بالتالي :

$\ell^2-4\ell+6=\ell\Rightarrow \ell^2-5\ell+6=\ell\Rightarrow(\ell-3)(\ell-2)=0\Rightarrow \ell=3,\ell=2\Rightarrow$

بما أن المتتالية متناقصة وحدها الأول $\frac{5}{2}$ فإن $\lim_{n\to\infty}u_n=2$

التمرين الأول :

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق : $u_0 = \frac{5}{2}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6$

❶ أثبت مستعملا البرهان بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$

❷ أثبت أنّ $u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$

❸ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

❹ بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

الحل :

❶ لنفرض التابع $f(x) = x^2 - 4x + 6$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$

f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ و مشتقه $f'(x) = 2x - 4$ و $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
اشارة $f'(x)$	$-$	0	$+$

فالتابع f متزايد تماماً على المجال $[2 , +\infty[$

لنضع $E(n): 2 \leq u_n \leq 3$

لنبرهن صحة $E(0)$. $2 \leq u_0 = \frac{5}{2} \leq 3$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 2 \leq u_n \leq 3$ لنبرهن صحة $E(n+1): 2 \leq u_{n+1} \leq 3$

من الفرض $2 \leq u_n \leq 3$ و بما أن f متزايد تماما فإن $f(2) \leq f(u_n) \leq f(3) \Rightarrow 2 \leq u_{n+1} \leq 3$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

❷ $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 4u_n + 6 - u_n = u_n^2 - 5u_n + 6 = (u_n - 3)(u_n - 2)$

❸ $2 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow (u_n - 3)(u_n - 2) \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$

❹ المتتالية متناقصة وبما أنها محدودة من الادنى فهي متقاربة

نهاية المتتالية هو حل المعادلة $f(\ell) = \ell$ بالتالي :

$$\ell^2 - 4\ell + 6 = \ell \Rightarrow \ell^2 - 5\ell + 6 = \ell \Rightarrow (\ell - 3)(\ell - 2) = 0 \Rightarrow \ell = 3 , \ell = 2 \Rightarrow$$

بما أن المتتالية متناقصة وحدها الأول $\frac{5}{2}$ فإن $lim_{n\to\infty} u_n = 2$

التمرين الأول :

لتكن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$: $u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$

1. أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة
2. استنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان
3. أثبت أن $u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$

الحل :

❶ $u_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n+1}} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$ والمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماما

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} - u_n - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} \Rightarrow$$

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} < 0$ والمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماما

❷

$$v_n = u_n + \frac{1}{2^n} \Rightarrow v_n - u_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

لأن : $-1 < q = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

والمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماما والمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

فالمتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

❸

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{4}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = \frac{1}{4}(1 - 0) = \frac{1}{4}$$

لأن : $-1 < q = \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

وبما أن المتتاليتان متجاورتان فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = \frac{1}{4}$