saadelawael

Bac files

For more useful BAC files tap the link!

BY

SAB

النّهايات والاستمرار

للاستاذ **إياد ادريس**

مشرف مادّة الرّياضيّات في ثانويّة السّعادة

سؤال مفتوح ⇐

77

تذكرة:

جوار عدد حقيقي x_0 : نسمي كل مجال مفتوح ينتمي إليه العدد x_0 بجوار للعدد x_0.

★ نسمي $c=\frac{a+b}{2}$ مركز الجوار.

★ نسمي $r=\frac{b-a}{2}$ نصف قطر الجوار

★ $]a,b[=]c-r,c+r[$

مثلا: المجال $]2,6[$ جوار للعدد (3)

مركزه $c=\frac{2+6}{2}=4$

نصف قطره $r=\frac{6-2}{2}=2$

نلاحظ: $]2,6[=]c-r,c+r[$

نهاية تابع عند اللانهاية

1) النهاية الحقيقية عند $+\infty$ أو $-\infty$ والمقارب الأفقي.

★ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ عندئذ نقول أنه:

$D: y=l$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $+\infty$

★ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ عندئذ نقول أنه:

$D: y=l$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$.

ملاحظة:

لدراسة الوضع النسبي للخط البياني (C) مع المقارب D الذي معادلته $y=l$ ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y_D$ ونميز حالتين:

1) $f(x)-y_D>0$ عندئذ (C) فوق D

2) $f(x)-y_D<0$ عندئذ (C) تحت D

★ إذا انعدم الفرق $f(x)-y_D$ فهناك نقطة مشتركة بين (C) و (D)

مثال: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $R/\{2\}$ وفق:

$f(x)=\frac{3x-1}{x-2}$

أوجد معادلة المقارب الأفقي D لـ (C) ثم ادرس وضع (C) مع D

الحل:

$D_f=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$

⇐ $D: y=3$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$

وضع (C) مع D:

$f(x)-y_D=\frac{3x-1}{x-2}-\frac{3}{1}$
(1) (x-2)

$$f(x)-y_0 = \frac{3x-1-3x+6}{x-2}$$

$$f(x)-y_0 = \frac{5}{x-2}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)-y_0$		$-$	||	$+$	
الوضع النسبي		(C) تحت D	||	(C) فوق D	

ملاحظة سابقة:

$$f(x)\in\,]c-r,\,c+r[\;\iff |f(x)-c|<r$$

$\frac{3}{42}$ أوجد نهاية التابع f المعرف بالعلاقة: $f(x)=\frac{-2x+1}{x+3}$ عند $+\infty$

ثم أوجد عدداً A يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]-2.05,-1.95[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2 = c$$

$$r=\frac{-1.95+2.05}{2}=\frac{0.1}{2}=\frac{1}{20}$$

$$f(x)\in\,]-2.05,-1.95[\;\iff |f(x)-c|<r$$

$$\iff \left|\frac{-2x+1}{x+3}+2\right|<\frac{1}{20}$$

$$\iff \left|\frac{-2x+1+2x+6}{x+3}\right|<\frac{1}{20}$$

$$\iff \left|\frac{7}{x+3}\right|<\frac{1}{20}$$

$x\to+\infty$ [illegible]

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	

$$\iff \frac{7}{x+3}<\frac{1}{20}$$

$$\iff \frac{x+3}{7}>20$$

$$\iff x+3>140$$

$$\iff x>137$$

$x<137$

$A=137$

$\frac{2}{34}$ احسب نهاية التابع f المعرف بالعلاقة: $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$

ثم أعط عدد A يحقق الشرط إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9,5.1[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5 = c$$

$$r=\frac{5.1-4.9}{2}=\frac{0.2}{2}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

$$f(x)\in\,]4.9,5.1[\;\iff |f(x)-c|<r$$

$$\iff \left|\frac{5x-1}{x-1}-5\right|<\frac{1}{10}$$

$$\iff \left|\frac{5x-1-5x+5}{x-1}\right|<\frac{1}{10}$$

$$\iff \left|\frac{4}{x-1}\right|<\frac{1}{10}$$

79

$$\overset{+\infty \text{ عند}}{\Longleftrightarrow} \frac{4}{x-1} < \frac{1}{10}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x-1}{4} > 10$$

$$\Longleftrightarrow x-1 > 40$$

$$\Longleftrightarrow x > 41$$

$$A = 41$$

للتدريب: ادرس نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{3x+4}{x+1}$

عند $+\infty$ أعط عدداً حقيقياً α

يحقق الشرط: إذا كان $x > \alpha$ كان $f(x) \in]2.9, 3.1[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3 = c$$

$$r = \frac{3.1 - 2.9}{2} = \frac{0.2}{2} = \frac{1}{10}$$

$$f(x) \in]2.9, 3.1[\Longleftrightarrow |f(x) - c| < r$$

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{3x+4}{x+1} - 3\right| < r$$

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{3x+4-3x-3}{x+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{1}{x+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\overset{+\infty \text{ عند}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{x+1} < \frac{1}{10}$$

$$\Longleftrightarrow x+1 > 10$$

$$\Longleftrightarrow x > 9$$

$$\alpha = 9$$

نغير التمرين عند $-\infty$

$$r = \frac{1}{10} \quad , \quad c = 3$$

$$f(x) \in]2.9, 3.1[\Longleftrightarrow |f(x) - c| < r$$

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{3x+4}{x+1} - 3\right| < \frac{1}{10}$$

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{3x+4-3x-3}{x+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{1}{x+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\overset{-\infty \text{ عند}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{-x-1} < \frac{1}{10}$$

$$\Longleftrightarrow -x-1 > 10$$

$$\Longleftrightarrow -x > 11$$

نضرب بـ (-1)

$$\Longleftrightarrow x < -11$$

$$\alpha = -11$$

في هذه الحالة يكون الشرط في السؤال

هو العدد α الحقيقي يحقق

$$x < \alpha$$

ALADIB

[2] النهاية اللانهائية عند $+\infty$ أو $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$$

لا يوجد مقاربات أفقية.

$\frac{1}{34}$ احسب نهايات التوابع الآتية عند $-\infty$ وعند $+\infty$

كثير الحدود: جميع الأسس أعداد طبيعية حصراً

مثال: $f(x) = x^2 + 2x$

ليس كثير حدود بل جذري $f(x) = \sqrt{x} + 2x$

(1) $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$$

(2) $f(x) = -3x^4 + 1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-3x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-3x^4) = -\infty$$

(3) $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 5x - 1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

(4) $f(x) = -2x^4 + 100x^3$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

نهاية تابع عند عدد حقيقي

[1] النهاية اللانهائية عند عدد حقيقي والمقارب الشاقولي.

* إذا كانت $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ عندئذٍ $x=a$ مقارب شاقولي

مقارب شاقولي لـ (C) والتقارب نحو oy^+

* إذا كانت $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ عندئذٍ $x=a$

مقارب شاقولي لـ (C)، التقارب نحو oy^+

* إذا كانت $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ عندئذٍ $x=a$

مقارب شاقولي لـ (C)، التقارب نحو oy^-

إذا كانت $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ عندئذٍ $x=a$

مقارب شاقولي لـ (C) والتقارب نحو oy^-

$\frac{3}{67}$ أوجد نهاية التابع f المعرف بالعلاقة $f(x) = \frac{-2x}{x+1}$ عند $-\infty$ و $+\infty$ وعند -1.

أ) أوجد معادلات المستقيمات المقاربة للخط البياني وبين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

$$D_f = R \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$ $\Rightarrow$ $D: y=-2$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x=-1$ مقارب شاقولي لـ (C) والتقارب نحو $(oy)^-$ ونحو $(oy)^+$

وضع (C) مع D: ندرس إشارة $f(x)-y_D$

$$f(x)-y_D = \frac{-2x}{x+1} + \frac{2}{1}$$

$$f(x)-y_D = \frac{-2x+2x+2}{x+1}$$

$$f(x)-y_D = \frac{2}{x+1}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-y_D$		$-$	$\|\|$	$+$	
الوضع النسبي		(C) تحت D	$\|\|$	(C) فوق D	

ت 67: أوجد نهايات التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ عند 1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$ ثم أوجد معادلات المستقيمات المقاربة للخط البياني وبين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

$$D_f =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

$\Rightarrow$ $D: y=2$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x=1$ مقارب شاقولي لـ (C) والتقارب نحو $(oy)^-$ ونحو $(oy)^+$

وضع (C) مع D: ندرس إشارة $f(x)-y_D$

$$f(x)-y_D = \frac{2x+1}{x-1} - \frac{2}{1}$$

$$f(x)-y_D = \frac{2x+1-2x+2}{x-1} = \frac{3}{x-1}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-y_D$		$-$	$\|\|$	$+$	
الوضع النسبي		C تحت D	$\|\|$	C فوق D	

تمرين: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{-2,2\}$ وفق $f(x)=\frac{3x}{x^2-4}$

أوجد نهاية التابع f عند الأطراف المفتوحة لمجالات التعريف ثم استنتج معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي لـ (C) ثم ادرس وضع مقاربته الأفقية.

$$D_f =]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$\Rightarrow$ $D: y=0$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$

② $f(x) = x^2 - 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$; $a = 1$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\} =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty\end{array}\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$

يوجد تربيع
على المقام
ومنه + حسب دون

③ $f(x) = x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2}$; $a = 1,2$

$D_f = \mathbb{R}/\{1,2\} =]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 + \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2 + \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \frac{-6}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \frac{-6}{0^-} = +\infty\end{array}\right) \Rightarrow$ $x=-2$ مقارب شاقولي لـ(C) والتقارب نحو oy^- ونحو oy^+

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty\end{array}\right) \Rightarrow$ $x=2$ مقارب شاقولي لـ(C) والتقارب نحو oy^- ونحو oy^+

وضع (C) مع Δ:

$f(x) - y_\Delta = \frac{3x}{x^2-4}$ (ينعدم ⇐ يوجد نقطة مشتركة)

$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow 3x = 0$

$\Rightarrow x = 0$ (يمكن التعويض بأحد f أو Δ)

$f(0) = 0$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
الوضع النسبي		(C) تحت Δ	‖	(C) فوق Δ		(C) تحت Δ	‖	(C) فوق Δ	

$(0,0)$ نقطة مشتركة بين (C) و Δ

$\frac{1}{42}$ احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقاط a المعطاة

① $f(x) = \frac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$; $a = 1,2$

$D_f = \mathbb{R}/\{1,2\} =]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 - \frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1 - \frac{1}{0^+} = -\infty$$

② النهاية الحقيقية عند عدد حقيقي

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = b$ وكانت $a \notin D_f$

عندئذٍ نسمي (a,b) نقطة مقاربة.

4/42 أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة: $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ عند (5)

ثم أوجد مجالاً I مركزه (5) يحقق الشرط

إذا انتمى x إلى المجال I انتمى $f(x)$

إلى المجال $]3.95 ; 4.05[$

$$\lim_{x\to 5} f(x) = 4$$

مركز المجال الملاحق $f(x)$ ، مركز المجال I

$$3.95 < f(x) < 4.05$$

ومنه

$$3.95 < \frac{x+3}{x-3} < 4.05$$

ناتج القسمة الإقليدية

$$3.95 < 1 + \frac{6}{x-3} < 4.05$$

الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{نفس المقام}}$

ومنه

$$2.95 < \frac{6}{x-3} < 3.05$$

ومنه

$$\frac{1}{2.95} > \frac{x-3}{6} > \frac{1}{3.05}$$

ومنه

$$\frac{6}{2.95} > x-3 > \frac{6}{3.05}$$

ومنه

$$\frac{6}{2.95} + 3 > x > \frac{6}{3.05} + 3$$

ومنه

$$5.1 > x > 4.9$$

$$I =]4.9 ; 5.1[$$

مثال ص37: نعلم أن $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

حيث $f(x) = \sqrt{4x+1}$.

عيّن مجالاً I مركزه 2 يحقق الشرط:

إذا كان x من المجال I كان $f(x)$ من

المجال $]2.99 , 3.01[$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

$$2.99 < f(x) < 3.01$$

$$2.99 < \sqrt{4x+1} < 3.01$$

نربع

$$(2.99)^2 < 4x+1 < (3.01)^2$$

$$(2.99)^2 - 1 < 4x < (3.01)^2 - 1$$

$$\frac{(2.99)^2-1}{4} < x < \frac{(3.01)^2-1}{4}$$

$$1.99 < x < 2.01$$

$$I =]1.99 , 2.01[$$

/ /

$\frac{2}{38}$ جد نهاية التابع f المعين بالعلاقة

$f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند (1)

$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

جِد عدد α يحقق الشرط:

إذا كان x عنصر من المجال $]1-\alpha, 1+\alpha[$ مختلف عن (1) كان ... $f(x) > 10^3$

البحث عن α

* حصر البسط

$1-\alpha < x < 1+\alpha$

$5-5\alpha < 5x < 5+5\alpha$

$4-5\alpha < 5x-1 < 4+5\alpha$

نأخذ هذا الأخير لأن المطلوب أن يكون كبير باعتبار $f(x) > 10^3$

البسط $\boxed{5x-1 > 4-5\alpha}$

* حصر المقام

$1-\alpha < x < 1+\alpha$

$-\alpha < x-1 < \alpha$

$|x-a| < b \Leftrightarrow -b < x-a < b$

$|x-a| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x-1 < \alpha$

نضع القيمة المطلقة مع الكبير

$|x-1| < \alpha$

$(x-1)^2 < \alpha^2$

المقام $\boxed{\frac{1}{(x-1)^2} > \frac{1}{\alpha^2}}$

* حصر $f(x)$:

ومنه $f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2} > \frac{4-5\alpha}{\alpha^2}$

* نختار قيمة مناسبة لـ α

نختار $\alpha = 0.01$

نختار قيمة لـ α كي تكون القيمة المعطاة في المتراجحة. إذا كانت 10^3 نأخذ $\alpha = 10^{-3}$ والعكس صحيح

$f(x) > \frac{3.95}{10^{-4}}$

$f(x) > 3.95 \times 10^4$

$f(x) > 39500 > 10^3$

$I =]1-0.01, 1+0.01[\setminus \{1\}$

$I =]0.99, 1.01[\setminus \{1\}$

$\frac{12}{70}$ ليكن f التابع المعين بالعلاقة

$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$

1. ادرس نهاية f في جوار I ← يقصد في المجال I

2. أوجد مجال I مركزه 1 ويحقق $f(x) > 10^6$ أيا تكن x من $I \setminus \{1\}$

1. $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

2. $I =]1-\alpha, 1+\alpha[$

• $I =]1-\alpha, 1+\alpha[$

البحث عن α

$1-\alpha < x < 1+\alpha$

البسط $\boxed{x > 1-\alpha}$

$1-\alpha < x < 1+\alpha$

$-\alpha < x-1 < \alpha$

$|x-1| < \alpha$

$(x-1)^2 < \alpha^2$

المقام $\boxed{\frac{1}{(x-1)^2} > \frac{1}{\alpha^2}}$

$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2} > \frac{1-\alpha}{\alpha^2}$

باختيار $\alpha = 0.0001 = 10^{-4}$

نفرض: $f(x) > \frac{0.9999}{10^{-8}}$

$f(x) > 99990000 > 10^6$

$I =]1-0.0001 ; 1+0.0001[$

$I =]0.9999 , 1.0001[$

$f(x) > 10^6$ أياً كان $x \in I\setminus\{1\}$

لتعيين الحالات هناك ثلاث حالات

1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ مركز مجال f نستخدم المبرهنة

$|f(x)-c| < r$ لتحديد قيمة A.

2) $\lim_{x\to a} f(x) = b$ مركز مجال f نستخدم الحصر

مركز I (مجال x)

ومن خلال حصر $f(x)$ نتوصل لحصر x

3) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ نعين مجال من الشكل $]a-\alpha , a+\alpha[$ مركزه a يسمى I

ولتعيين α:

I) نحصر البسط.

II) نحصر المقام.

III) نحصر الكسر (التابع $f(x)$)

IIII) نختار قيمة مناسبة لـ α.

صيغ حالات عدم التعيين.

$(+\infty-\infty , \frac{\infty}{\infty} , \frac{0}{0} , 0.\infty)$

1) إزالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$

« ضرب بالمرافق - إخراج عامل مشترك »

قاعدة:

إذا كان التابع من الشكل: $\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d}$ $(a=c)$

وكان هناك عدم تعيين من الشكل $+\infty-\infty$

نضرب ونقسم على المرافق.

مثال: أوجد نهاية التابع

$f(x) = \sqrt{x-4} - \sqrt{x+3}$ عند $+\infty$

الحل:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $+\infty-\infty$ عدم تعيين

عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+3})}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x+3}}$$

$$f(x) = \frac{(x-4)-(x+3)}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x+3}} = \frac{-7}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x+3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$\sqrt{x^2}=|x|$, $\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$

$(\sqrt{x})^2=x$

قاعدة:

إذا كان التابع من الشكل: $f(x)=\sqrt{ax+b}-cx$

وكان هناك عدم تعيين من الشكل $+\infty-\infty$

نخرج مضمون الجذر عامل مشترك.

مثال أوجد نهاية التابع

1) $f(x)=x-4\sqrt{x}$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $+\infty-\infty$ عدم تعيين.

عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$f(x)=x\left(1-\frac{4\sqrt{x}}{x}\right)$

$f(x)=x\left(1-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(1-0)=+\infty$

2) $f(x)=2x-3\sqrt{x-4}$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $+\infty-\infty$ عدم تعيين

عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$f(x)=(x-4)\left[\frac{2x}{x-4}-\frac{3\sqrt{x-4}}{x-4}\right]$

$f(x)=(x-4)\left[\frac{2x}{x-4}-\frac{3}{\sqrt{x-4}}\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.(2-0)=+\infty.$

قاعدة: (الأمثال منها أساسية)

إذا كان التابع من الشكل: $f(x)=\sqrt{ax^2+b}\pm cx$

وكان هناك حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty-\infty$

نميز حالتين:

1) $a=c^2$ ⟸ نضرب ونقسم على المرافق

2) $a\neq c^2$ ⟸ نخرج x^2 من مضمون الجذر عامل مشترك

مثال: أوجد نهاية التابع:

1) $f(x)=\sqrt{9x^2+1}-3x$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $+\infty-\infty$ عدم تعيين

عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{9x^2+1}-3x)(\sqrt{9x^2+1}+3x)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$

$$f(x)=\frac{9x^2+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2) $f(x)=\sqrt{4x^2+3}-5x$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $+\infty-\infty$ عدم تعيين

عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$f(x)=\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}-5x$

$f(x)=|x|\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-5x$

$f(x)=x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-5x$

موجبة لأنه $x\to+\infty$

حزب الزعايات حزب الإشارات لا يوجد عدم

الصفحة (ا) عدم تعيين

$f(x) = x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x^2}} - 5\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(-3) = -\infty$

3) $f(x) = \sqrt{16x^2+3x} + 4x$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ من الشكل $+\infty - \infty$ عدم تعيين

لما $x \to -\infty$ نكتب:

$f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{16x^2+3x}+4x\right)\left(\sqrt{16x^2+3x}-4x\right)}{\sqrt{16x^2+3x}-4x}$

$f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{16x^2+3x}-4x}$

$f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2\left(16+\frac{3}{x}\right)}-4x}$

$f(x) = \dfrac{3x}{-x\sqrt{16+\frac{3}{x}}-4x}$

$f(x) = \dfrac{3x}{x\left(-\sqrt{16+\frac{3}{x}}-4\right)}$

$f(x) = \dfrac{3}{-\sqrt{16+\frac{3}{x}}-4}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{-3}{8}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{2}{x^2-9}$ عند $-\infty, +\infty, 3, -3$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$

$D_f =]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]3, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

لما $x \to 3$ نكتب:

$f(x) = \dfrac{x+3-2}{x^2-9} = \dfrac{x+1}{x^2-9}$ توحيد المقامات

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$

2) إزالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

1) إخراج عامل مشترك مناسب

مثال: أوجد نهاية التابع:

1) $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x-4}$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$f(x)=\frac{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}{x(1-\frac{4}{x})}$

$f(x)=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{4}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+0}{1-0}=1$

2) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{2x-1}$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ من الشكل $\frac{+\infty}{-\infty}$ عدم تعيين

عندما $x\to-\infty$ نكتب:

$f(x)=\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{9}{x^2})}}{x(2-\frac{1}{x})}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}{x(2-\frac{1}{x})}$

$f(x)=\frac{-\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$

3) $f(x)=\frac{5x+1}{\sqrt{9x^2+2}}$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$f(x)=\frac{x(5+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(9+\frac{2}{x^2})}}=\frac{x(5+\frac{1}{x})}{x\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}$

$f(x)=\frac{5+\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{5+0}{\sqrt{9}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{5}{3}$

4) $f(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x-3}$ عند (3) و $+\infty$

$D_f=]3,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to3} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

5) $f(x)=\frac{\sqrt{x+5}}{x-3}$ عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$f(x)=\frac{\sqrt{x(1+\frac{5}{x})}}{x(1-\frac{3}{x})}=\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{5}{x}}}{x(1-\frac{3}{x})}$

$f(x)=\frac{\sqrt{1+\frac{5}{x}}}{\sqrt{x}\,(1-\frac{3}{x})}$

يفضل إخراج x^2 / إخراج عامل مشترك من الجذر

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{\infty}=0$

3 إزالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

(تحليل لعوامل - ضرب بالمرافق - قوانين مثلثية)

قاعدة: إذا كان لدينا تابع كسري (كثير حدود على كثير حدود) وكان هناك حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ عند نقطة نحلل ثم نختصر ثم نعوض.

مثال: أوجد نهاية التابع

1) $f: x \to \dfrac{2x-6}{x^2-4x+3}$ عند (3)

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

عندما $x\to 3$ نكتب:

$$f(x) = \frac{2(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \frac{2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 1$$

مثال: أوجد نهاية التابع عند (1)

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

عندما $x\to 1$ نكتب:

$$f(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1}$$

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{4}{3}$$

تذكرة:

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

2) $f(x) = \dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ عند $-\infty, +\infty, -2, 1$

$D_f =]-\infty,-2[\cup]-2,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \dfrac{-21}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \dfrac{-21}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

عند $x\to 1$ نكتب:

العامل الصفري $(x-1)$

(ملاحظة): لدينا $2x^3-x^2-1=0$

$x=1 \Rightarrow (x-1)$

نقسم $2x^3-x^2-1$ على $x-1$ إقليدياً

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x^2-1 & x-1 \\ \hline \mp 2x^3 \pm 2x^2 & 2x^2+x+1 \\ x^2-1 & \\ \mp x^2 \pm x & \\ x-1 & \\ \mp x \pm 1 & \\ 0 & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{2x^2+x+1}{x+2}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{4}{3}$$

يوجد في المقام جذر وفي البسط جذر
نضرب ونقسم على المرافقين

قاعدة:

إذا كان لدينا كسر بسطه أو مقامه جذر تربيعي وكان لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ عندئذ نضرب ونقسم على المرافق.

مثال: أوجد نهاية التابع

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{5}}{x-1}$ عند (1)

$\lim\limits_{x\to1} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

عندما $x\to1$ نكتب:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{5})(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{5})}{(x-1)(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{5})}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{5})}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{5})}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{5}}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^3-1}-1}{x-1}$ عند (1)

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2x^3-1}-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$f(x) = \frac{2x^3-2}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)} = \frac{2(x^3-1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$f(x) = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)} = \frac{2(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3-1}+1}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{6}{2} = 3$$

3) $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ عند (2)

$\lim\limits_{x\to2} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

عندما $x\to2$ نكتب:

$$f(x) = \frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}\cdot\frac{2+\sqrt{3x-2}}{2+\sqrt{3x-2}}\cdot\frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3}$$

$$f(x) = \frac{4-3x+2}{2x+5-9}\cdot\frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}}$$

$$f(x) = \frac{-3x+6}{2x-4}\cdot\frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}}$$

$$f(x) = \frac{-3(x-2)}{2(x-2)}\cdot\frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}}$$

$$f(x) = \frac{-3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}}$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = -\frac{3}{2}\times\frac{6}{4} = \frac{-9}{4}$$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}$ عند (0)

$\lim\limits_{x\to0} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

عندما $x\to0$ نكتب:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x\sqrt{x^2+x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

مبرهنة مسابقة:

0^+ الزاوية نفس المقام

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1}$$

المهم تصغر الزاوية

(المهم الزاوية نفسها و x لو بين ساعات مابلم)

مثال: أوجد نهاية التابع $f(x)=\frac{x^2-x}{\sin x}$ عند الصفر

$\lim_{x\to0} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

لما $x\to0$ نكتب:

$$f(x)=\frac{x(x-1)}{\sin x}$$

$$f(x)=\frac{x}{\sin x}.(x-1)$$

لكن: $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$

فإن: $\lim_{x\to0} f(x)=(1)(-1)=-1$

$\frac{6}{68}$ نتأمل التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة: $f(x)=\frac{\sin 3x}{x}$

ادرس نهاية f عند الصفر.

$\lim_{x\to0} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$$f(x)=\frac{3\sin 3x}{3x}$$

لكن: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

فإن: $\lim_{x\to0} f(x)=3(1)=3$

مثال: ادرس نهاية التابع $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $0.\infty$ عدم تعيين

عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$$f(x)=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \quad , \quad 3\times2=\frac{3}{\frac{1}{2}}$$

لكن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

$t\to0$ ذاتاً

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

تذكر:

$$1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

$$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

مثال: أوجد نهاية التابع $f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$ عند الصفر

طريقة أولى:

$\lim_{x\to0} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

عندما $x\to0$ نكتب:

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$f(x) = \frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot 2\cos\frac{x}{2}$

$\lim_{x\to0} f(x) = 2$

مثال: أوجد نهاية التابع

1) $f(x) = \frac{4-4\cos 2x}{x^2}$ عند (0)

$\lim_{x\to 0} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

عند $x \to$ نكتب:

$f(x) = \frac{4(1-\cos 2x)}{x^2}$

$f(x) = \frac{4(1-\cos 2x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}$

$f(x) = \frac{4\sin^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}$

$f(x) = \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2 \cdot \frac{4}{1+\cos 2x}$

$f(x) = \left(\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2 \cdot \frac{4}{1+\cos 2x}$

لكن $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t} = 1$

نتج: $\lim f(x) = (4)(2) = 8$

2) $f(x) = \frac{x^3+5-5\cos x}{x^2}$ عند (0)

$\lim_{x\to0} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين ;

عندما $x\to$ نكتب:

$f(x) = \frac{x^3}{x^2} + \frac{5-5\cos x}{x^2}$

$f(x) = x + \frac{5(1-\cos x)}{x^2}$

$f(x) = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{0}{1} = 0$

طريقة ثانية:

عندما نرى $1-\cos\theta$ وحالة $\frac{0}{0}$ نضرب بالمرافق

$f(x) = \frac{1-\cos\theta}{\sin x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$

$f(x) = \frac{1-\cos^2\theta}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$

$f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{0}{2} = 0$

مثال:

2) $f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$ عند (0)

حل: $\lim_{x\to0} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

عندما $x\to$ نكتب:

$f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$

$f(x) = \frac{x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{x(1+\cos x)}{\sin x}$

$f(x) = \frac{x}{\sin x}\cdot(1+\cos x)$

لكن $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x} = 1$

ومنه $\lim_{x\to0} f(x) = 1\times(2) = 2$

حل 2:

$f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \frac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$

$f(x) = \frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2}x\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}$

بحيث دراسة x
غير معلوم = cos ∞
عند الصفحة علينا لتفسير صيغة المتراجحة

$$f(x) = x + \frac{5(1-\cos x)}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$f(x) = x + \frac{5\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$f(x) = x + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{5}{1+\cos x}$$

لدينا $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

يأتي $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 + (1)^2\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$

مبرهنات الإحاطة والمقارنة

المبرهنة (1)

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

$$x \to a \qquad \to \ell$$

$-1 \le \sin\alpha \le 1$ ، $-1 \le \cos\alpha \le 1$

$0 \le \sin^2\alpha \le 1$ ، $0 \le \cos^2\alpha \le 1$

أوجد نهاية التابع

1) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ عند (0) وعند $+\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

عندما $x \to 0$ نكتب:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot (\sqrt{x})$$

لدينا $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

فإنّ $\lim_{x\to 0} f(x) = (1)(0) = 0$

لإيجاد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ نستخدم مبرهنة الإحاطة

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نقسم على $\sqrt{x} > 0$ فنجد

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2) $f(x) = 3x - 2\cos x$ عند $(+\infty)$

$$-1 \le \cos x \le 1$$

ومنه $2 \ge -2\cos x \ge -2$

ومنه $3x+2 \ge f(x) \ge 3x-2$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} (3x+2) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (3x+2) = +\infty$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

4/67 أوجد نهاية التابع المعرف على $]1,+\infty[$ وفق

$$f(x) = \frac{2x+\sin x}{x-1}$$

عند $+\infty$

1) $-1 \leq \sin x \leq 1$

ومنه $2x-1 \leq 2x+\sin x \leq 2x+1$

نقسم على $x-1>0$

$$\frac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x-1}$$

أيا كان $x>1$

2) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

46/1) f تابع يحقق

$$\frac{3x+\cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$$

أيا كان $x>1$

ما نهاية f عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+7}{x-1} = 3$

ولإيجاد $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3x+\cos x}{x}\right)$ نستخدم مبرهنة الإحاطة

$-1 \leq \cos x \leq 1$

ومنه $3x-1 \leq 3x+\cos x \leq 3x+1$

نقسم على $x>0$

$$\frac{3x-1}{x} \leq \frac{3x+\cos x}{x} \leq \frac{3x+1}{x}$$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{x} = \lim \frac{3x+1}{x} = 3$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+\cos x}{x} = 3$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

مثال: أوجد نهاية التابع

$f: x \to \frac{\cos x}{x+1}$ عند $-\infty$

عندما $x \to -\infty$ نكتب

$-1 \leq \cos x \leq 1$

نقسم على $x+1<0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

$$\frac{-1}{x+1} \geq f(x) \geq \frac{1}{x+1}$$

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{-1}{x+1}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{+1}{x+1}\right) = 0$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

مثال: ادرس نهاية التابع

$f: x \to x\sin\frac{1}{x}$ عند 0

$D_f = \mathbb{R}^*$ الحالة الثانية

$D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

أيا كان $x \in D_f$: $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

الحالة الأولى: من أجل $x>0$ نكتب:

$-x \leq f(x) \leq x$

$5+5+5+5+5 \geq 1+2+3+4+5 \geq 1+1+1+1+1$

$5(5) \geq S \geq 1(5)$

بالعكس يستبدل المجموع بمجموعين: في الأصغر يستبدل بالأصغر من ... والأكبر بالأكبر من ... $\frac{2}{46}$

لدينا: $\lim\limits_{x\to0^+}(-x) = \lim\limits_{x\to0^+}(x) = 0$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$

الحالة الثانية 2] من أجل $x<0$ نكتب:

$-x \geq f(x) \geq x$

لدينا: $\lim\limits_{x\to0^-}(-x) = \lim\limits_{x\to0^-}(x) = 0$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$

من: الحالة الأولى والحالة الثانية:

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$

فإن: $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$

للتدريب: ادرس نهاية التابع $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ عند $(+\infty)$ وعند (0).

$\frac{2}{46}$

$f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$

1) تحقق أنه: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

أياً يكن $x \geq 0$

2) استنتج أنه: $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

في حالة $x>0$

3) نهاية f عند $+\infty$

1)

$f(x) = \dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

أياً يكن $x \geq 0$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

2) ملاحظة:

- يمكن حصر المجموع بين مجموعين: * في جهة الأكبر نضع مجموع أكبر حد * في جهة الأصغر نضع مجموع أصغر حد

$5+5+5+5+5 \geq 1+2+3+4+5 \geq 1+1+1+1+1$

$5(5) \geq S \geq 1(5)$

لدينا:

$\sqrt{x}+\sqrt{x} \leq \sqrt{1+x}+\sqrt{x} \leq \sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}$

أياً يكن $x \geq 0$

ومنه

$2\sqrt{x} \leq \sqrt{1+x}+\sqrt{x} \leq 2\sqrt{1+x}$

ومنه

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} \geq \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3) لدينا:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

مبرهنة (2):

ليكن f و g تابعين معرفين على المجال $I =]b, +\infty[$ ولنفترض أنه عند كل x من I تتحقق المتراجحة $|f(x) - l| \leq g(x)$

ثم لنفترض أنّ $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\to ?}} g(x) = 0$

عندئذٍ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

تبقى المبرهنة صحيحة كما $x\to-\infty$ أو $x\to$ عدد مع استبدال I

إذا الأصغير $+\infty$ $\Leftarrow$ الأكبر

إذا الأكبر $-\infty$ $\Leftarrow$ الأصغر $-\infty$

مثال :

f تابع يحقق $|f(x)-3| \le \frac{1}{x+1}$

أياً كان $x \ge 0$ ما نهاية f عند $+\infty$

الحل :

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ صفراً

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

مثال : f تابع يحقق

$|f(x)+4| \le \sqrt{9x^2+1}-3x$

ما نهاية f عند $+\infty$

$g(x) = \sqrt{9x^2+1}-3x$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)$ من الشكل $+\infty-\infty$ عدم تعيين

عندما $x\to\infty$ نضرب :

$$g(x) = \frac{(\sqrt{9x^2+1}-3x)(\sqrt{9x^2+1}+3x)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -4$$

مبرهنة المقارنة : { أكبر $+\infty$ ، أصغر $-\infty$ }

ليكن f و g تابعين معرفين على مجال $I=]b,+\infty[$

1) إذا كان $f(x) \ge g(x)$ عند كل x من I وكان $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ كان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) إذا كان $f(x) \le g(x)$ عند كل x من I وكان $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ كان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

تبقى المبرهنة صحيحة عندما $x\to-\infty$ أو $x\to a$ مع استبدال I

مثال : f تابع يحقق أياً يكن $x \le 0$ $\left(f(x) \ge \frac{1}{4}x^2\right)$ نهاية f عند $-\infty$

لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{4}x^2\right) = +\infty$$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

مثال : أثبت أنه أياً كان العدد الحقيقي x ، $x^2-5\sin x \ge x^2-5$ واستنتج من الناحية النهاية نهاية التابع $x \to x^2-5\sin x$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$

$$-1 \le \sin x \le 1$$

ومنه $5 \ge -5\sin x \ge -5$

ومنه

$$x^2+5 \ge x^2-5\sin x \ge x^2-5$$

أي

$$\boxed{x^2-5\sin x \ge x^2-5}$$

لدينا أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-5)=+\infty$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-5\sin x)=+\infty$$

ولدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-5)=+\infty$$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-5\sin x)=+\infty$$

$\frac{10}{20}$ ليكن التابع g المعرف على R وفق

$$g(x)=\frac{1}{3+2\sin x}$$

1) اثبت أنّ g محدود

2) استنتج كلاً من النهايتين

يمكن أن يأتي دون الطلب الأول ونقوم بنفس الخطوات

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{3+2\sin x}\right] \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+\sin x}{3+2\sin x}\right]$$

1) $-1\le\sin x\le1$

ومنه $-2\le2\sin x\le2$

ومنه $1\le3+2\sin x\le5$

ومنه

$$1\ge\frac{1}{3+2\sin x}\ge\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5}\le g(x)\le1$$

ومنه g محدود

2) * وجدنا سابقاً أنّ

$$\frac{1}{5}\le\frac{1}{3+2\sin x}\le1$$

نضرب بـ $x^2>0$

$$\frac{x^2}{5}\le\frac{x^2}{3+2\sin x}\le x^2$$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3+2\sin x}\right)=+\infty$$

* وجدنا سابقاً أنّ

$$\frac{1}{5}\le\frac{1}{3+2\sin x}\le1$$

نضرب بـ $x+\sin x>0$ ؟ الصغير

$$\frac{x+\sin x}{5}\le\frac{x+\sin x}{3+2\sin x}\le x+\sin x$$

لإيجاد $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sin x}{5}\right)$

نستخدم مبرهنة الإحاطة

$-1\le\sin x\le1$

ومنه $x-1\le x+\sin x\le x+1$

ومنه

$$\frac{x-1}{5}\le\frac{x+\sin x}{5}\le\frac{x+1}{5}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{5}\right)=+\infty$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sin x}{5}\right)=+\infty$$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sin x}{3+2\sin x}\right)=+\infty$$

5) $f(x) = \left[x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right]^2$ $\quad a=+\infty$

$D =]0,+\infty[$

$g(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ عند الحد $+\infty-\infty$ عدم تعيين

حيث $x\to+\infty$ نكتب:

$g(x) = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

إذن

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

6) $f(x) = \cos^2\left(\pi \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$ $\quad a=+\infty$

$D =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

لدينا:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\pi \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right] = \pi$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \cos^2\pi = 1$

ملاحظة هامة:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a \in D_f \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = f(a)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a \notin D_f \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

نهاية تابع مركب

$\frac{1}{49}$) نتعامل بأي نقطة تابعا f معرفا على مجموعة D ونطلب حساب نهاية f عند a

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$ $\quad a=5$

$D =]5,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to5^+}\left(\frac{x+3}{x-5}\right) = \frac{8}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to5^+} f(x) = +\infty$

2) $f(x) = \sqrt{-x^3+x^2+x}$ $\quad a=-\infty$

$D = \left]-\infty, \frac{1-\sqrt5}{2}\right]$

لدينا:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+x^2+x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

3) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right)$ $\quad a=+\infty$

$D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

لدينا:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right) = \pi$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \cos\pi = -1$

4) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\quad a=+\infty$

$D =]0,+\infty[$

لدينا:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sin(0) = 0$

$\left(\frac{2}{49}\right.$ ليكن التابع f المعرف على $]5,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$

2) أعد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \in D_f$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = f(1) = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

2) $f(f(x)) = f\left(\frac{x-3}{x+5}\right)$

$$= \frac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5} = \frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x+25}{x+5}}$$

$$= \frac{-2x-18}{6x+22}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$\left(\frac{15}{70}\right.$ ليكن g التابع المعرف على المجال $]3,+\infty[$ وفق $g(x)=\frac{3x-1}{x-3}$

① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))$

② أعد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))$ بعد كتابة $g(g(x))$ بدلالة x

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 3 \in D_f$

$$\lim_{x\to+\infty} g(g(x)) = \lim_{x\to3^+} g(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

2) $g(g(x)) = g\left(\frac{3x-1}{x-3}\right)$

$$= \frac{3\left(\frac{3x-1}{x-3}\right)-1}{\frac{3x-1}{x-3}-3} = \frac{\frac{9x-3-x+3}{x-3}}{\frac{3x-1-3x+9}{x-3}}$$

$$= \frac{8x}{8} = x$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(g(x)) = +\infty$$

المقارب المائل

تعريف:

(للفرق $f(x)-y_D$ نهاية مساوية الصفر عندما تسعى x إلى $+\infty$ أو $-\infty$) $\Leftrightarrow$ (المستقيم D الذي معادلته $y=ax+b$ $(a\neq0)$ مقارب مائل لـ (C))

ملاحظة: ② الإثبات

لدراسة الوضع النسبي للخط (C) مع المقارب المائل D الذي معادلته $y=ax+b$ $(a\neq0)$ ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_D$

$\left(\frac{1}{51}\right.$ بين إذا كان D مقارب مائلاً لـ (C) عند $+\infty$, $-\infty$ ثم ادرس وضع (C) مع D

1) $f(x) = 2x+3+\frac{10}{x+1}$, $D: y=2x+3$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$f(x)-y_D = \frac{10}{x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)=0$$

$\Rightarrow$ Δ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$.

وضع (C) مع Δ

$$f(x)-y_\Delta=\frac{10}{x+1}$$

x	$-\infty$ -1	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	$+$
الوضع النسبي	(C) تحت Δ	(C) فوق Δ

2) $f(x)=-x+1-\dfrac{1}{x^2}$, $\Delta: y=-x+1$

$D_f=\mathbb{R}^*$

$$f(x)-y_\Delta=-\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y_\Delta\right]=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_\Delta\right]=0$$

$\Rightarrow$ ومنه Δ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$

وضع (C) مع Δ

$$f(x)-y_\Delta=\frac{-1}{x^2}<0$$

ومنه (C) تحت Δ.

3) $f(x)=3x+7-\dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$, $\Delta: y=3x+7$

$D_f=\mathbb{R}^*$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{-5}{\sqrt{|x|}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y_\Delta\right]=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_\Delta\right]=0$$

$\Rightarrow$ ومنه Δ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$

وضع (C) مع Δ

$$f(x)-y_\Delta=-\frac{5}{\sqrt{|x|}}<0$$

ومنه (C) تحت Δ دوما

4) $f(x)=\dfrac{2x^2-7x-3}{x-4}$, $\Delta: y=2x+1$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{2x^2-7x-3}{x-4}-\frac{(2x+1)(x-4)}{(x-4)}$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{2x^2-7x-3-2x^2+8x-x+4}{x-4}$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y_\Delta\right]=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_\Delta\right]=0$$

$\Rightarrow$ Δ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$

وضع (C) مع Δ

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-4}$$

x	$-\infty$ 4	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	$+$
الوضع النسبي	(C) تحت Δ	(C) فوق Δ

$$f(x)-y_D=\frac{1}{2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_D\right]=0$$

ومنه D مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

وضع (C) بالنسبة D:

$$f(x)-y_D=\frac{\sqrt{x}}{2x+1}$$

$$f(x)-y_D=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=1$$

x	0	$+\infty$
$f(x)-y_D$	0	$+$
الوضع النسبي		(C) فوق D

$(0;1)$ نقطة مشتركة بين (C) و D

تمرين: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على R^* بـ

$$f(x)=\frac{-x^2-4x+\sin x}{x}$$

1) اثبت أنّ $D: y=-x-4$ مقارب مائل لـ (C)

2) ادرس وضع (C) بالنسبة لـ D على المجال $[-2\pi,2\pi]/\{0\}$

$$D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

1)
$$f(x)-y_D=\frac{-x^2-4x+\sin x}{x}-\frac{(-x-4)}{1}\,(x)$$

$$f(x)-y_D=\frac{-x^2-4x+\sin x+x^2+4x}{x}$$

$$f(x)-y_D=\frac{\sin x}{x}$$

5)
$$f(x)=\frac{x^3-3x-5}{(x+1)^2} \qquad D: y=x-2$$

$$D_f=R/\{-1\}$$

$$f(x)-y_D=\frac{x^3-3x-5}{x^2+2x+1}-\frac{(x-2)}{1}\,(x^2+2x+1)$$

$$f(x)-y_D=\frac{x^3-3x-5-x^3-2x^2-x+2x^2+4x+2}{(x+1)^2}$$

$$f(x)-y_D=\frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y_D\right]=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_D\right]=0$$
$\Rightarrow$ ومنه D مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$

وضع (C) بالنسبة D:

$$f(x)-y_D=\frac{-3}{(x+1)^2}<0$$

ومنه C تحت D دوماً

6)
$$f(x)=\frac{x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1}{2x+1} \qquad D: y=\frac{1}{2}x+1$$

$$D_f=[0,+\infty[$$

$$f(x)-y_D=\frac{x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1}{2x+1}-\frac{\left(\frac{1}{2}x+1\right)}{1}\,(2x+1)$$

$$f(x)-y_D=\frac{x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1-x^2-\frac{1}{2}x-2x-1}{2x+1}$$

$$f(x)-y_D=\frac{\sqrt{x}}{2x+1}$$

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_D\right]$ من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين، لذلك نخرج عند $x\to+\infty$:

$$f(x)-y_D=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

الدور ، مجال الدراسة

عند ذلك حالات عدم التعيين أو نستخدم الإحاطة

102

نفصل كل جوار على حدا ($-\infty$; $+\infty$)

• لإيجاد $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]$ نستخدم

مبرهنة الإحاطة

$-1 \le \sin x \le 1$

نقسم على $x<0$ لأن x تسعى إلى $-\infty$

$-\frac{1}{x} \ge f(x)-y_\Delta \ge \frac{1}{x}$

بما أن: $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$

ومنه Δ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

• لإيجاد $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]$ نستخدم مبرهنة

الإحاطة:

$-1 \le \sin x \le 1$

نقسم على $x>0$

$-\frac{1}{x} \le \sin x \le \frac{1}{x}$

$-\frac{1}{x} \le f(x)-y_\Delta \le \frac{1}{x}$

بما أن: $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$

ومنه Δ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

وضع (C) مع Δ:

$f(x)-y_\Delta=\frac{\sin x}{x}$

$f(x)-y_\Delta=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=\pi K$

نبدأ من بداية المجال

$K=-2 \Rightarrow x=-2\pi \qquad f(-2\pi)=2\pi-4$

$K=-1 \Rightarrow x=-\pi \qquad f(-\pi)=\pi-4$

الصفر مرفوض

$K=1 \Rightarrow x=\pi \qquad f(\pi)=-\pi-4$

$K=2 \Rightarrow x=2\pi \qquad f(2\pi)=-2\pi-4$

دور $\sin x$

x	-2π		$-\pi$		0		π		2π
$f(x)-y_\Delta$	0	$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	0
الوضع النسبي		(C) تحت Δ		(C) فوق Δ		(C) فوق Δ		(C) تحت Δ	

(C) يشترك مع Δ بالنقاط

$(-2\pi, 2\pi-4)$, $(-\pi, \pi-4)$

$(\pi, -\pi-4)$, $(2\pi, -2\pi-4)$

تذكرة:

$\sin x=0 \Rightarrow x=\pi K$

$\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi K$

$\sin x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi K$

$\cos x=1 \Rightarrow x=2\pi K$

$\sin x=-1 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi K$

$\cos x=-1 \Rightarrow x=\pi+2\pi K$

ملاحظة في التمرين السابق

إذا لم نحدد مجال يمكن أخذ أحد المجالات التالية

$]0, 2\pi]$, $[-2\pi, 0[$, $[-\pi, \pi]/\{0\}$

, $[2\pi, 0[$,

ALADIB

ابن الحضارة

Scanned with CamScanner

تمرين (20/72)

ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

1) ادرس نهاية f عند $-\infty$ واشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة

2) أثبت أنّ $D: y = 2x$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$

3) ادرس الوضع النسبي لـ (C) و D

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ من الشكل $-\infty+\infty$ عدم تعيين

عندما $x \to -\infty$ نكتب:

$$f(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$f(x) = \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

ومنه $y=0$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$

2) $f(x) - y_D = x + \sqrt{x^2+1} - 2x$

$$f(x) - y_D = \sqrt{x^2+1} - x$$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_D)$ من الشكل $+\infty-\infty$ عدم تعيين

عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$f(x) - y_D = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_D] = 0$$

ومنه D مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

وضع (C) مع D

$$f(x) - y_D = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$ موجب

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)-y_D$	+	
الوضع النسبي	C فوق D	

تمرين (21/72) (هام جداً) $f(x) = x + \sqrt{|4x^2-1|}$ $D=R$

① أوجد نهاية f عند $(+\infty)$ وعند $(-\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty-\infty$

$f(x) = x + \sqrt{4x^2-1}$

$$f(x) = x - x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}$$

$$f(x) = x\left(1-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)(-1) = +\infty$$

تعليل ذلك

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2-1$		+	0	−	0	+	

ALADIB

رسم القيمة المطلقة لا تتغير عند $+\infty$ و $-\infty$

صنع الحضارة

(a) 2) أحسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$

$f(x)-3x = \sqrt{|4x^2-1|}-2x$

ح.ع.ت $+\infty-\infty$ عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$$f(x)-3x = \frac{\left(\sqrt{|4x^2-1|}-2x\right)\left(\sqrt{|4x^2-1|}+2x\right)}{\sqrt{|4x^2-1|}+2x}$$

$$f(x)-3x = \frac{|4x^2-1|-4x^2}{\sqrt{|4x^2-1|}+2x}$$

نزيل القيمة المطلقة لأن المقدار + عند $+\infty$

$$f(x)-3x = \frac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{|4x^2-1|}+2x} = \frac{-1}{\sqrt{|4x^2-1|}+2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=0$$

نستنتج أن $\Delta: y=3x$ مقارب مائل للخط (C) عند $(+\infty)$

دراسة الوضع النسبي لـ (C) و Δ

$f(x)-y_\Delta = \sqrt{|4x^2-1|}-2x$

$f(x)-y_\Delta = 0$

$\sqrt{|4x^2-1|}-2x = 0$

$\sqrt{|4x^2-1|} = 2x$ نربع بشرط $\boxed{x>0}$

$|4x^2-1| = 4x^2$

إما $4x^2-1=4x^2$

$0=-1$ مرفوض

أو $-4x^2+1=4x^2$

$8x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{8}$

ومنه إما $x=\frac{1}{2\sqrt2}$ مقبول أو $x=-\frac{1}{2\sqrt2}$ مرفوض

x	$-\infty$		$\frac{1}{2\sqrt2}$		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		+	0	−	
		(C) فوق (Δ)		(C) تحت Δ	

نقطة مشتركة $\left(\frac{1}{2\sqrt2}, \frac{3}{2\sqrt2}\right)$

(b) أحسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]$

$f(x)+x = \sqrt{|4x^2-1|}+2x$

عندما $x\to-\infty$ نكتب:

$f(x)+x = \sqrt{4x^2-1}+2x$

$$f(x)+x = \frac{\left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right)}{\sqrt{4x^2-1}-2x}$$

$$f(x)+x = \frac{-1}{\sqrt{4x^2-1}-2x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=0$$

③ ⓐ استنتج أن الخط (C) يقبل مقاربين مائلين Δ_1 , Δ_2 ، وأوجد معادلتيهما

وجدنا سابقاً أن

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=0$$

ومنه $D_1: y=3x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

وأيضاً وجدنا

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=0$$

ومنه $D_2: y=-x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

ⓑ ادرس الوضع النسبي لـ (C) مع Δ_1 , Δ_2

وضع (C) مع $D_1: y=3x$

$$\boxed{f(x)-y_{D_1}=\sqrt{|4x^2-1|}-2x}$$

نعود إلى الفرق الأصلي وليس إلى الفرق عند إزالة عدم التعيين لأنه تم بجوار محدد $(x\to+\infty)$

$$f(x)-y_{D_1}=0 \Rightarrow \sqrt{|4x^2-1|}-2x=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{|4x^2-1|}=2x$$

نربع بشرط $x\geq 0$

$$|4x^2-1|=4x^2$$

إما $4x^2-1=4x^2$ مستحيلة $-1=0$

أو $4x^2-1=-4x^2 \Rightarrow 8x^2=1$

$x^2=\frac{1}{8}$: $x=-\frac{1}{2\sqrt2}$ مرفوض ، $x=\frac{1}{2\sqrt2}$ مقبول

$$f\left(\frac{1}{2\sqrt2}\right)=\frac{3}{2\sqrt2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2\sqrt2}$		$+\infty$
$f(x)-y_{D_1}$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C) فوق Δ		(C) تحت Δ	

نقطة مشتركة بين (C) و Δ : $\left(\frac{1}{2\sqrt2},\frac{3}{2\sqrt2}\right)$

وضع (C) مع $D_2: y=-x$

$$f(x)-y_{D_2}=\sqrt{|4x^2-1|}+2x$$

$$f(x)-y_{D_2}=0 \Rightarrow \sqrt{|4x^2-1|}=-2x$$

نربع بشرط $x\leq 0$

$$|4x^2-1|=4x^2$$

إما $4x^2-1=4x^2$ مستحيلة $-1=0$

أو $4x^2-1=-4x^2$

$$8x^2=1$$

$x^2=\frac{1}{8}$: $x=-\frac{1}{2\sqrt2}$ مقبول ، $x=\frac{1}{2\sqrt2}$ مرفوض

$$f\left(-\frac{1}{2\sqrt2}\right)=\frac{1}{2\sqrt2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2\sqrt2}$		$+\infty$
		$-$	0	$+$	
		(C) تحت Δ		(C) فوق Δ	

نقطة مشتركة بين (C) و Δ : $\left(-\frac{1}{2\sqrt2},\frac{1}{2\sqrt2}\right)$

$\frac{23}{72}$ ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على R

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

① a) أثبت أن المستقيم $D: y = x+1$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

نشكل الفرق

$$f(x) - y_D = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - x - 1$$

$$f(x) - y_D = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$$

$\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x) - y_D]$ من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$$f(x) - y_D = \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{9}{x^2})}} - 1$$

$$f(x) - y_D = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} - 1$$

$$f(x) - y_D = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} - 1$$

$$\lim_{x \to +\infty}[f(x) - y_D] = 0$$

ومنه $D: y = x+1$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

b) ادرس وضع C مع D

$$f(x) - y_D = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{1}$$

$(1\times)$ $(\sqrt{x^2+9}\times)$

$$f(x) - y_D = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$f(x) - y_D = \frac{x - \sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$f(x) - y_D = 0 \Rightarrow x - \sqrt{x^2+9} = 0$$

$$\sqrt{x^2+9} = x$$

نربع الطرفين بشرط $\boxed{x \geq 0}$

$$x^2 + 9 = x^2$$

$9 = 0$ مستحيلة

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f(x) - y_D$	$-$
الوضع النسبي	C تحت D دوماً

② أثبت أن $D': y = x-1$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

$$f(x) - y_{D'} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + 1$$

$\lim\limits_{x \to -\infty}[f(x) - y_{D'}]$ من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

عندما $x \to -\infty$ نكتب:

$$f(x) - y_{D'} = \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} + 1$$

$$f(x) - y_{D'} = \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} + 1$$

$$\lim_{x \to -\infty}[f(x) - y_{D'}] = 0$$

ومنه $D': y = x-1$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

وضع (C) مع Δ'.

$$f(x) - y_{\Delta'} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + 1$$

$$f(x) - y_{\Delta'} = \frac{x + \sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$f(x) - y_{\Delta'} = 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2+9} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+9} = -x$$

نربع بشرط $x \le 0$

$$\Rightarrow x^2 + 9 = x^2$$

$$\Rightarrow 9 = 0$$ مستحيلة

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x) - y_{\Delta'}$	$+$
الوضع النسبي	(C) فوق Δ'

ب) البحث عن المقارب المائل

قاعدة:

إذا كان التابع من الشكل $f(x) = ax + b + g(x)$

وكانت $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$

قلنا أنّ $\Delta: y = ax + b$ مقارب مائل.

مثال: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعين بالعلاقة

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$$

أوجد معادلة المقارب المائل Δ لـ (C) ثم ادرس وضع (C) مع Δ.

$D_f = \mathbb{R}^*$

لنبرهن أن المستقيم $\Delta: y = 1 + \frac{x}{2}$ مقارب مائل لـ (C)

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{2}{x}$$

ندرس عند أطراف مجموعة التعريف

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

ومنه Δ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$

وضع (C) مع Δ

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{2}{x}$$

x	$-\infty$ $\quad$ 0	0 $\quad$ $+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$+$	$-$
	(C) فوق Δ	(C) تحت Δ

مثال: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعين بالعلاقة

$$f(x) = 1 - x + \frac{3x}{x^2+2}$$

أوجد معادلة المقارب المائل Δ لـ (C) ثم ادرس وضع (C) مع Δ

$D_f = \mathbb{R}$

لنبرهن أن المستقيم $\Delta: y = 1 - x$ مقارب مائل لـ (C)

$$f(x) - y_\Delta = \frac{3x}{x^2+2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

ومنه Δ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

وبجوار $+\infty$

وضع (C) مع Δ

لدينا: $f(x)-y_\Delta = \frac{3x}{x^2+2}$

$f(x)-y_\Delta = 0 \Rightarrow x=0$

$f(0)=1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C) تحت Δ		(C) فوق Δ	

$(0,1)$ نقطة مشتركة بين (C) و Δ

تمرين: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعين بالعلاقة

$$f(x) = \frac{x^2+2+\sin x}{x}$$

نبرهن معادلة المقارب المائل Δ لـ (C)

ثم ادرس وضع (C) مع Δ

$D_f = \mathbb{R}^*$

معادلة المقارب المائل تكون تابع كثير حدود (لا يوجد x بالمقام)

$$f(x) = x + \frac{2+\sin x}{x}$$

لنبرهن أن $\Delta: y=x$ مقارب مائل لـ (C)

$$f(x)-y_\Delta = \frac{2+\sin x}{x}$$

لإيجاد $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]$ نستخدم مبرهنة الإحاطة

$-1 \le \sin x \le 1$

$1 \le 2+\sin x \le 3$

نقسم على $x>0$

$$\frac{1}{x} \le f(x)-y_\Delta \le \frac{3}{x}$$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = 0$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta] = 0$ (1)

لإيجاد $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]$ نستخدم مبرهنة الإحاطة

$-1 \le \sin x \le 1$

$1 \le 2+\sin x \le 3$

نقسم على $x<0$

$$\frac{1}{x} \ge f(x)-y_\Delta \ge \frac{3}{x}$$

لدينا: $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3}{x}\right] = 0$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta] = 0$ (2)

من (1) و (2) نجد

Δ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$

وضع (C) مع Δ

$$f(x)-y_\Delta = \frac{2+\sin x}{x}$$

$f(x)-y_\Delta = 0 \Rightarrow 2+\sin x = 0$

$\sin x = -2$

مستحيلة لأن $\sin x$ محصور بين 1 و -1

البسط $(2+\sin x > 0)$

⇐ إشارة الفرق هي إشارة المقام

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y_D$	$-$	‖	$+$
الوضع النسبي	(C) تحت D	‖	(C) فوق D

قاعدة:
كل تابع كسري درجة بسطه أكبر بـ درجة مقامه بدرجة واحدة فقط ، يقبل مقارباً مائلاً هو ناتج القسمة الإقليدية

مثال:
ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعين بالعلاقة

$$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$$

أوجد معادلة المقارب المائل D لـ (C) ثم ادرس وضع (C) مع D

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2-3x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^2+x & x-2 \\ \hline -2x+1 & \\ +2x-2 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$f(x)=x-2-\frac{1}{x-1}$$

لنبرهن أنّ $D: y=x-2$ مقارب مائل لـ (C)

$$f(x)-y_D=-\frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y_D\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_D\right]=0$$

ومنه D مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$

وضع (C) مع D

$$f(x)-y_D=-\frac{1}{x-1}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y_D$	$+$	‖	$-$
الوضع النسبي	(C) فوق D	‖	(C) تحت D

مثال:
ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعين بالعلاقة

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$$

أوجد معادلة المقارب المائل D لـ (C) ثم ادرس وضع (C) مع D

$$\boxed{D=\mathbb{R}}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x^2+2 \\ \cline{2-2} -x^3-2x & x \\ \hline -2x+1 & \end{array}$$

$$f(x)=x-\frac{2x+1}{x^2+2}$$

لنبرهن أنّ $D: y=x$ مقارب مائل لـ (C)

صيغة قانونية ← نصف، ثلث، ربع مربع، نصف الأشكال

① x^2 ← ...

110

$$f(x)-y_\Delta = \frac{-2x+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$$

ومنه Δ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$.

وضع (C) مع Δ

$$f(x)-y_\Delta = \frac{-2x+1}{x^2+2}$$

$f(x)-y_\Delta=0 \Rightarrow -2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C) فوق Δ		(C) تحت Δ	

$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ نقطة مشتركة بين C و Δ

قاعدة:

أفضل أداة لإيجاد معادلة المقارب المائل Δ للتابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ نكتب ثلاثي الحدود ax^2+bx+c بالصيغة القانونية.

$\left(\frac{19}{71}\right.$ ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$$

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ⓐ اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية

ⓑ استنتج وجود مقارب مائل Δ لـ (C) بجوار $+\infty$ ثم ادرس وضع (C) مع Δ

(1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

(2 ⓐ

$$x^2+4x+5 = x^2+4x+4-4+5 = (x+2)^2+1$$

ⓑ عندما $x\to+\infty$ فإن العدد (1) يهمل أمام المقدار $(x+2)^2$ وبالتالي

$$\sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = x+2 \quad (x\to+\infty)$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

لنبرهن $\Delta: y=x+2$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

$$f(x)-y_\Delta = \sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)$$

$$f(x)-y_\Delta = \sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)$$ نعوض بالقانونية

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]$ من الشكل $+\infty-\infty$ عدم تعيين

عندما $x\to+\infty$ نكتب

$$f(x)-y_\Delta = \frac{\left(\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)\right)\left(\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)\right)}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$$

$$f(x)-y_\Delta = \frac{(x+2)^2+1-(x+2)^2}{\sqrt{(x+2)^2+1}+x+2} = \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}+x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$$

ومنه Δ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

وضع (C) مع Δ:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}+x+2}$$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$+$
الوضع النسبي	(C) فوق Δ

68) ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}$$

أثبت أن (C) يقبل مقارباً مائلاً Δ بجوار $-\infty$

ثم ادرس وضع (C) مع Δ

نكتب ثلاثي الحدود $2x^2+x+1$ بالصيغة القانونية

$$2x^2+x+1=2\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)+1$$
$$=2\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)+1$$
$$=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}+1$$
$$=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$$

عندما $x\to-\infty$ فإن العدد $\frac{7}{8}$ يهمل أمام المقدار $2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2$ وبالتالي

$$\sqrt{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{2}\left|x+\frac{1}{4}\right|=-\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)\quad(x\to-\infty)$$

لنبرهن أن $\Delta: y=-\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)$$

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}+\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]$ من الشكل $+\infty-\infty$ عدم تعيين

عندما $x\to-\infty$ نكتب:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{\left(\sqrt{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}+\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)\left(\sqrt{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}-\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)}{\sqrt{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}-\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)}$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{\frac{7}{8}}{\sqrt{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}-\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$$

ومنه Δ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

وضع (C) مع Δ

$$f(x)-y_\Delta=\frac{\frac{7}{8}}{\sqrt{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}-\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)}$$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$+$
الوضع النسبي	(C) فوق Δ

التدريب: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=\sqrt{3x^2+1}$$

أوجد معادلة المقارب المائل Δ لـ (C) بجوار $+\infty$

ثم ادرس وضع (C) مع Δ

نكتب ثلاثي الحدود $3x^2+1$ بالصيغة القانونية

$$3x^2+1=3(x)^2+1$$

عندما $x\to+\infty$ فإن العدد (1) يهمل أمام المقدار $3(x)^2$

وبالتالي.

$\sqrt{3(x)^2} = \sqrt{3}\,|x| = +\sqrt{3}\,x$

لنبرهن أن $D: y = \sqrt{3}x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

$f(x) - y_D = \sqrt{3(x)^2+1} - \sqrt{3}\,x$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_D]$ من الشكل $\infty-\infty$ عدم تعيين

عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$$f(x)-y_D = \frac{\left(\sqrt{3(x)^2+1}-\sqrt{3}\,x\right)\left(\sqrt{3(x)^2+1}+\sqrt{3}\,x\right)}{\sqrt{3(x)^2+1}+\sqrt{3}\,x}$$

$$f(x)-y_D = \frac{1}{\sqrt{3(x)^2+1}+\sqrt{3}\,x}$$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_D] = 0$

ومنه $D: y=\sqrt{3}x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

وضع (C) مع D.

$$f(x)-y_D = \frac{1}{\sqrt{3(x)^2+1}+\sqrt{3}\,x}$$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y_D$	$+$
الوضع النسبي	(C) فوق D

تمرين: ليكن f التابع المعرف على R وفق

$f(x) = \sqrt{x^2+2x+4}$

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) اثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = a$

وأن نهاية $x \to f(x)-ax$ عند $-\infty$ عدد حقيقي b

3) استنتج وجود مقارب مائل Δ لـ (C) بجوار $-\infty$.

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2) * $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ من الشكل $\frac{+\infty}{-\infty}$ عدم تعيين

عندما $x\to-\infty$ نكتب:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} = -\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}$$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -1 = a \in R$

* $f(x)-ax = \sqrt{x^2+2x+4} + x$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$ من الشكل $\infty-\infty$ عدم تعيين

عندما $x \to -\infty$ نكتب:

$$f(x) - ax = \frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$f(x) - ax = \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$f(x) - ax = \frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-x}$$

$$f(x) - ax = \frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x}$$

$$f(x) - ax = \frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1\right)}$$

$$f(x) - ax = \frac{2+\frac{4}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right] = -1 = b$$

3) وجدنا سابقاً

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right] = b$$

ومنه

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax-b\right] = 0$$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

ومنه $D: y = ax+b = -x-1$

مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

16/71) ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x-d}$$

حيث a, b, c, d أعداد حقيقية

أن الخواص الآتية محققة

1) المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=3$ مقارب لـ (C)

2) المستقيم المائل الذي معادلته $y=2x-5$ مقارب للخط (C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$

3) تنتمي النقطة $A(1,2)$ إلى الخط (C)

1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{d\} =]-\infty,d[\cup]d,+\infty[$

نهاية التابع f عند $x\to d^-$ أو $x\to d^+$ هي $+\infty$ أو $-\infty$

ومنه $x=d$ مقارب شاقولي لـ (C)

ولكن $x=3$ مقارب شاقولي لـ (C)

ومنه $\boxed{d=3}$

2) لنفرض أن $D: y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C)

$$f(x) - y_D = \frac{c}{x-d}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y_D\right]=0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_D\right]=0$$

~~ومنه $D: y=ax+b$ مقارب~~

"70 ص" 114

$c=8$ $a=3$ $b=1$

/ /

ومنه $D: y = ax + b$ مقارب مائل لـ (C)

بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$

ولدينا $y = 2x - 5$ مقارب مائل لـ (C)

بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$.

$\boxed{a=2}$, $\boxed{b=-5}$

(3

$$f(x) = 2x - 5 + \frac{c}{x-3}$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow 2 - 5 + \frac{c}{-2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{c}{-2} = 5 \Rightarrow \boxed{c = -10}$$

ومنه
$$\boxed{f(x) = 2x - 5 - \frac{10}{x-3}}$$

70 (11. ليكن f التابع

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - x - 2}$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف f

(2) أوجد الأعداد a , b , c التي تحقق

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

أياً تكن x من D_f

(3) ادرس نهاية f عند حدود المجالات

الثلاث التي تؤلف D_f

(1)

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

لما $x = -1$ أو $x = 2$

ومنه $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, +\infty[$$

(2)

لدينا $f(x) = \dfrac{3x^2 + 6x}{(x-2)(x+1)}$ *

ولدينا $f(x) = \dfrac{a}{1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-2}$

$(x-2)(x+1)$ $(x-2)$ $(x+1)$

$$f(x) = \frac{a(x-2)(x+1) + b(x-2) + c(x+1)}{(x-2)(x+1)}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 - ax - 2a + bx - 2b + cx + c}{(x-2)(x+1)}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + (-a+b+c)x - 2a - 2b + c}{(x-2)(x+1)} \quad **$$

بالمطابقة بين * و **

$a = 3$ ---- (I

$-a + b + c = 6$ ---- (II

$-2a - 2b + c = 0$ ---- (III

نعوض في (I) و (II) و (III) فنجد:

$b + c = 9$ ---- (1)

$-2b + c = 6$ ---- (2)

$(1) - (2) \Rightarrow 3b = 3 \Rightarrow \boxed{b = 1}$

نعوض في (1) فنجد $\boxed{c = 8}$

$$\boxed{f(x) = 3 + \frac{1}{x+1} + \frac{8}{x-2}}$$

الاستمرار

تعريف:

★ لتكن a نقطة من D_f ، نقول إن التابع f مستمر عند a إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$ (نهاية موجودة (يمين ويسار))

★ نقول إن التابع f مستمر على مجموعة D محتواة من D_f إذا وفقط إذا كان f مستمر عند كل نقطة من نقاط D

مثال) ليكن التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & ; x>1 \\ 2x-1 & ; x\leq 1 \end{cases}$$

ادرس استمرار التابع f عند (1) ، وهل f مستمر على R ولماذا؟

$1 \in D_f$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

إذاً f مستمر عند (1)

التابع $x \to 3x-2$ مستمر على $]1,+\infty[$

التابع $x \to 2x-1$ مستمر $]-\infty,1]$

و f مستمر عند (1) إذاً f مستمر على R

مثال) ليكن التابع f المعرف على R وفق

$$f(x) = \begin{cases} 5x-1 & : x>2 \\ 3x-2 & ; x<2 \\ 4 & ; x=2 \end{cases}$$

ادرس استمرار f عند (2)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^+} f(x) = 9 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

ومنه f غير مستمر عند (2)

إذاً f غير مستمر على R

مثال) ليكن التابع f المعرف على R وفق

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \quad \text{(النهاية)} \\ 0 & x=0 \quad \text{(الصورة)} \end{cases}$$

① احسب نهاية f عند الصفر

② هل f مستمر عند الصفر؟ هل هو مستمر على R؟ علل إجابتك.

$(x\neq 0) \quad -1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

نضرب بـ $x^2>0$

$$-x^2 \leq f(x) \leq x^2$$

بما أن $\lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0}(x^2) = 0$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

لإيجاد $\lim_{x\to 0} f(x)$ نستخدم مبرهنة الإحاطة:

2) $f(0)=0$

إذاً $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

ومنه f مستمر عند (0)

بما أن التابع $x \to x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ مستمر على المجالين $]0,+\infty[\cup]-\infty,0[$ و f مستمر عند (0) إذاً f مستمر على R

29/73) ليكن التابع f المعرف على R وفق

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & : x \neq 0 \\ m & : x = 0 \end{cases}$$

عيّن قيمة m التي تجعل f مستمراً على R

التابع $x \to \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}$ مستمر على المجالين $]0,+\infty[$ ؛ $]-\infty,0[$ ... ومنه يكون f مستمر على R يجب أن يكون f مستمر عند (0)

شرط الاستمرار عند (0)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

عندما $x \to 0$ نكتب:

$$f(x) = \frac{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$f(x) = \frac{-x^2}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$f(x) = \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \Rightarrow f(0)=0$$

ولكن $f(0)=m$

إذاً $\boxed{m=0}$ وهي قيمة m التي تجعل f مستمرة عند (0)

ليكن التابع f المعرف على R وفق

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-3\cos x}{x} & : x \neq 0 \\ 2m-1 & : x = 0 \end{cases}$$

عيّن قيمة m التي تجعل f مستمرة عند (0)

شرط الاستمرار عند (0)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

عندما $x \to 0$ نكتب:

$$f(x) = \frac{3(1-\cos x)}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$f(x) = \frac{3\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{3\sin x}{1+\cos x}$$

لكن $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

فإن $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \Rightarrow f(0)=0$

ولكن $f(0) = 2m-1$

إذاً $2m-1=0$

ومنه $\boxed{m=\frac{1}{2}}$ ، هي قيمة m التي تجعل f مستمراً عند 1.

للتدريب: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x-1} & ; x\neq 1\\[2mm] \frac{1}{3}m+2 & ; x=1\end{cases}$$

ماقيمة m التي تجعل f مستمر على $\mathbb{R}$

التابع $x\to\dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x-1}$ مستمر على المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ ومن يكون f مستمراً على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمراً عند 1

* شرط الاستمرار: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)$ من الشكل $\frac{0}{0}$ عدم تعيين

عندما $x\to1$ نكتب:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x-1}\times\frac{\sqrt{x^2+8}+3}{\sqrt{x^2+8}+3}$$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow f(1)=\frac{1}{3}$$

لكن $f(1)=\frac{1}{3}m+2$

ومنه $\frac{1}{3}m+2=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}m=\frac{1}{3}-2=\frac{1}{3}-\frac{6}{3}=-\frac{5}{3}$

ومنه $\boxed{m=-5}$

وهي قيمة m التي تجعل f مستمراً على $\mathbb{R}$

تمرين) ليكن التابع f المعرف على $I=[0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x^2+1}$$

اثبت أن f مستمر على I

التابع $x\to\sqrt{x}$ مستمر على I

التابع $x\to\dfrac{1}{x^2+1}$ مستمر على I

فالتابع f مستمر على I لأنه مجموع تابعين مستمرين على I

تابع الجزء الصحيح

هو التابع

$E:\mathbb{R}\to\mathbb{Z} : x\to E(x)=n$ حيث $n\leq x<n+1$ (عدد صحيح)

مثال:

* $E(1.8)=1$ لأن $1\leq 1.8<2$
* $E(\sqrt{2})=1$ لأن $1\leq\sqrt{2}<2$
* $E(\pi)=3$ لأن $3\leq\pi<4$
* $E(-2.3)=-3$ لأن $-3\leq -2.3<-2$
* $E(5)=5$ * $E(-2)=-2$

ملاحظة: $\boxed{x-1<E(x)\leq x}$ يستفاد منها في إيجاد النهاية

مثال) أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{3+2E(x)}{x+1}$ عند $+\infty$

عند كتابة التابع ذو الفروع في كل فرع يكون أحد المجال مغلق والآخر مفتوح .

118

$D_f = R / \{-1\}$

عندما $x \to +\infty$ نكتب :

$x-1 < E(x) \le x$

ومنه

$2x-2 < 2E(x) \le 2x$

ومنه

$2x+1 < 3+2E(x) \le 2x+3$

نقسم على $x+1>0$

$$\frac{2x+1}{x+1} < f(x) \le \frac{2x+3}{x+1}$$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x+1} = 2$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

للتدريب

احسب نهاية التابع f المعين بالعلاقة عند $+\infty$

$$f(x) = \frac{5-2E(x)}{x-1}$$

$D_f = R / \{1\}$

عندما $x \to +\infty$ نكتب :

$f(x)$: $x-1 \le E(x) \le x$

$-2x+2 \ge -2E(x) \ge -2x$

$-2x+7 \ge 5-2E(x) \ge 5-2x$

نقسم على $x-1>0$

$$\frac{-2x+7}{x-1} \ge f(x) \ge \frac{-2x+5}{x-1}$$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x+7}{x-1} = -2$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x+5}{x-1} = -2$

فإنه حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$

(30/73) نرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x، ليكن التابع f المعرف على المجال $[0,2]$ وفق:

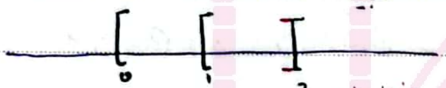
$f(x) = x - E(x)$

① ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$

② هل f مستمر على المجال $[0,2]$

① نكتب f بصيغة مستقلة عن $E(x)$

$[a,b[$

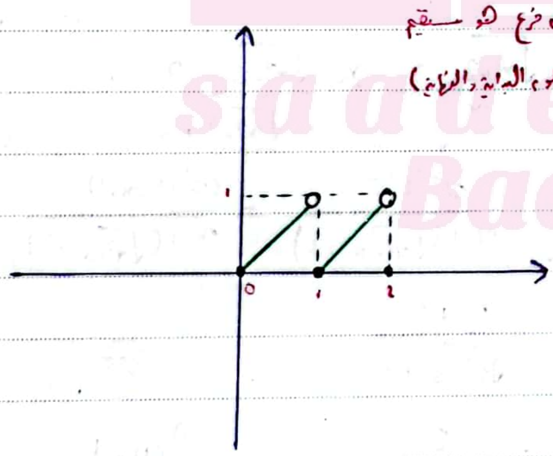


(نفرض بالمغلق أحد طرفي المجال)

$$f(x) = \begin{cases} x & : x \in [0,1[\\ x-1 & : x \in [1,2[\\ x-2 & : x = 2 \end{cases}$$

كل فرع هو مستقيم

(معلوم البداية والنهاية)



② التابع $x \to x$ مستمر على $[0,1[$

التابع $x \to x-1$ مستمر على $[1,2[$

ومنه يكون f مستمر على المجال $[0,2]$

يجب أن يكون f مستمر عند (1) وعند (2)

(المجالات المفتوحة)

ندرس الاستمرار عند (1)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$$

ومنه f غير مستمر عند (1) إذاً f غير مستمر على المجال $[0,2]$

31/73) يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x. ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ ومنه $f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$

① اكتب عبارة $f(x)$ منفصلة عن $E(x)$

② اثبت أنّ f مستمر على المجال $[0,2]$

③ ارسم الخط البياني للتابع f

①

نعوض نجد

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & : x\in[0,1[\\ 1+(x-1)^2 & : x\in[1,2[\\ 2+(x-2)^2 & : x=2 \end{cases}$$

②

التابع $x\to x^2$ مستمر على المجال $[0,1[$

التابع $x\to 1+(x-1)^2$ مستمر على المجال $[1,2[$

حتى يكون f مستمر على المجال $[0,2]$ يجب أن يكون f مستمر عند (1) وعند (2)

ندرس الاستمرار عند (1)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1 \\ f(1)=1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1)$$

إذاً f مستمر عند (1)

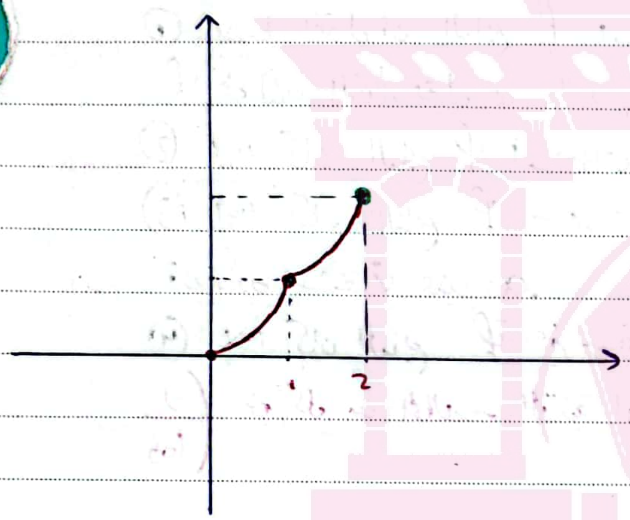
ندرس الاستمرار عند (2)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 2 \\ f(2)=2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = f(2)$$

ومنه f مستمر عند (2)

إذاً f مستمر على المجال $[0,2]$

③



(عندما يُطلب منا اثبات استمرار على مجال أفصل التابع ثم أثبت الاستمرار عند الأطراف الذي يكون عنده المجال مغلق.)