@zip2n

@AL_JOUD_10

الفصل ال 8

الدائرة ومحيطها

قياس الزوايا و الأقواس

الأقواس والاوتار

الزوايا والمحيطية

المماسات

القاطع و المماس و قياس الزاوية

قطع المستقيمة خاصة الدائرة

معادلة الدائرة

سبحان الله وبحمده، سبحان الله العظيم

الدائرة و محيطها

المفاهيم الأساسية

مفهوم أساسي — قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

أضف إلى مطويتك

نصف القطر هو قطعة مستقيمة يقع أحد طرفَيها على المركز والطرف الآخر على الدائرة.

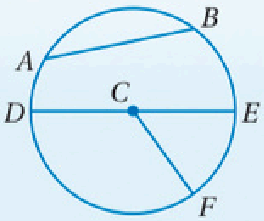
أمثلة: $\overline{CF}$, $\overline{CE}$, $\overline{CD}$ أنصاف أقطار في $\odot C$.

الوتر هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة.

أمثلة: $\overline{DE}$, $\overline{AB}$ وتران في $\odot C$.

القطر هو وتر يمر بمركز الدائرة، ويتكوّن من نصفَي قطرين يقعان على استقامة واحدة.

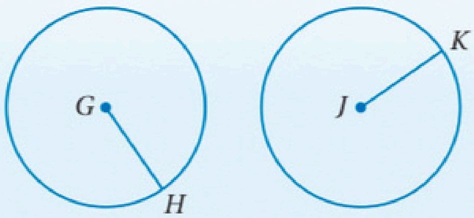
مثال: $\overline{DE}$ قطر في $\odot C$ ، ويتكون القطر $\overline{DE}$ من نصفَي القطرين $\overline{CE}$, $\overline{CD}$ الواقعين على استقامةٍ واحدة .



مفهوم أساسي — أزواج الدوائر

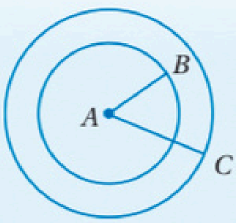
أضف إلى مطويتك

تكون **الدائرتان متطابقتين** إذا وفقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين.



مثال: $\overline{GH} \cong \overline{JK}$ ؛ إذن $\odot G \cong \odot J$

الدائرتان المتحدتان في المركز
هما الدائرتان اللتان تقعان في المستوى نفسه، ولهما المركز نفسه.



مثال: $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AB}$
و $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AC}$
دائرتان متحدتان في المركز.

مفهوم أساسي — العلاقة بين القطر ونصف القطر

أضف إلى مطويتك

إذا كان نصف قطر الدائرة r وقطرها d فإن:

صيغة نصف القطر: $r = \frac{d}{2}$ أو $r = \frac{1}{2}d$ صيغة القطر: $d = 2r$

المفهوم الاساسية

مفهوم أساسي — **محيط الدائرة** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان قطر الدائرة يساوي d، أو نصف قطرها يساوي r، فإن محيطها C يساوي حاصل ضرب القطر في π، أو مثلَي نصف القطر في π.

الرموز: $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

المفردات الاساسية

الدائرة هي المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى

المركز تبعد بعدا ثابتا عن نقطة معلومة

نصف القطر هو قطعه مستقيمة يقع احد طرفيها على المركز و الطرف الاخر على الدائرة

الوتر هو قطعه مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة

القطر هو وتر يمر بمركز الدائره و يتكون من نصفي قطرين يقعان على استقامة واحده

الدائرتان متطابقتين اذا كان نصفا القطريهما متطابقين

الدائرتان المتحدتان في المركز هما الدائرتان اللتان تقعان في المستوى نفسه ، و لهما المركز نفسه

محيط الدائرة هو طول المنحنى المغلق الذي يمثل الدائرة و يرمز له بالرمز C

باي (π) تعرف النسبة $\frac{C}{d}$ بانها غير نسبي و يساوي 3.14 أو $\frac{22}{7}$

يكون المضلع **محاطاً بدائرة** اذا وقعت رؤوسه جميعها على الدائرة

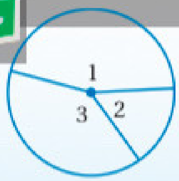
و تسمى هذه الدائرة **الدائرة الخارجية**

قياس الزوايا والأقواس

المفاهيم الأساسية

مفهوم أساسي — مجموع قياسات الزوايا المركزية

أضف إلى مطويتك

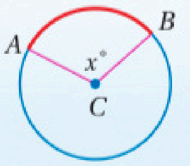
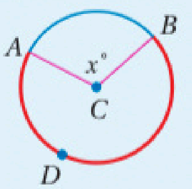
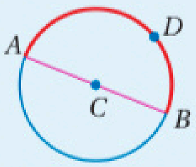


التعبير اللفظي: مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة، والتي لا تحوي نقاطًا داخلية مشتركة يساوي $360°$.

مثال: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360°$

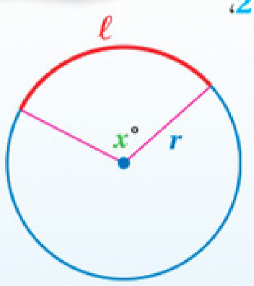
مفاهيم أساسية — الأقواس وقياسها

أضف إلى مطويتك

القوس	قياسه	
القوس الأصغر هو القوس الأقصر الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يقل قياس القوس الأصغر عن $180°$ ، ويساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له. $m\widehat{AB} = m\angle ACB = x°$	
القوس الأكبر هو القوس الأطول الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يزيد قياس القوس الأكبر على $180°$، ويساوي $360°$ مطروحًا منه قياس القوس الأصغر الذي يصل بين النقطتين نفسيهما. $m\widehat{ADB} = 360° - m\widehat{AB} = 360° - x°$	
نصف الدائرة هي قوس تقع نقطتا طرفيه على قطر الدائرة.	قياس نصف الدائرة يساوي $180°$ $m\widehat{ADB} = 180°$	

مفهوم أساسي — طول القوس

أضف إلى مطويتك



التعبير اللفظي: إذا كان طول القوس يساوي ℓ ومحيط الدائرة يساوي $2\pi r$، وقياس القوس بالدرجات يساوي $x°$ فإن نسبة طول القوس إلى محيط الدائرة يساوي نسبة قياس القوس بالدرجات إلى $360°$

الرموز: $\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{x°}{360°}$

أي أن: $\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$

قياس الزوايا و الاقواس

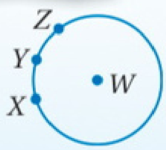
المسلمة

أضف إلى مطويتك

مسلَّمة 8.1 مسلَّمة جمع الأقواس

التعبير اللفظي: قياس القوس المتكوّن من قوسين متجاورين يساوي مجموع قياسَي هذين القوسين.

مثال: $m\widehat{XZ} = m\widehat{XY} + m\widehat{YZ}$



النظرية

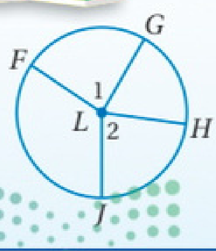
أضف إلى مطويتك

نظرية 8.1

التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون القوسان متطابقين، إذا وفقط إذا كانت الزاويتان المركزيّتان المقابلتان لهما متطابقتين.

مثال: إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ ، فإن $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$.

إذا كان $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.



المفردات الاساسية

الزاوية المركزية في الدائرة هي زاوية يقع راسها في المركز و ضلعاها نصفا قطرين في الدائرة

القوس هو جزء من دائرة يحدد بنقطتي طرفيه و عند رسم زاوية مركزية

القوس الاصغر هو القوس الاقصر الذي يصل بين نقطتين على الدائرة

القوس الاكبر هو القوس الاطول الذي يصل بين نقطتين على الدائرة

النصف الدائرة هي القوس تقع نقطتا طرفية علىقطر الدائرة

الاقواس المتطابقة هي الاقواس التي تقع في الدائرة نفسها ، او دائرتين متطابقتين و يكون لها القياس نفسه

الاقواس المتجاورة هي اقواس في الدائرة تشترك مع بعضها في نقطة واحدة فقط

طول القوس هو المسافة على الدائرة بين نقطتي طرفيه ، و يقاس بوحدات الطول ، و بما أن القوس جزء من الدائرة فإن طوله جزء من محيطها

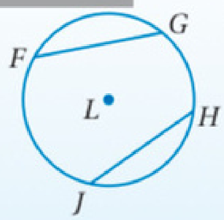
الاقواس و الاوتار

النظرية

نظرية 8.2

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون القوسان الأصغران متطابقين، إذا وفقط إذا كان الوتران المناظران لهما متطابقين.

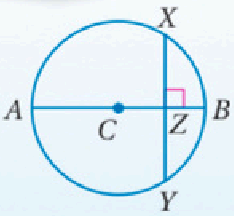


مثال: $\overline{FG} \cong \overline{HJ}$، إذا وفقط إذا كان $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$.

نظريات

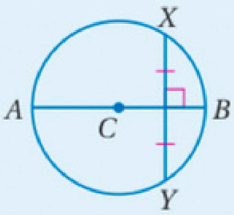
أضف إلى مطويتك

8.3 إذا كان قطر (أو نصف قطر) الدائرة عموديًا على وتر فيها، فإنه يُنصّف ذلك الوتر، ويُنصّف قوسه.



مثال: إذا كان القطر $\overline{AB}$ عموديًا على $\overline{XY}$ في النقطة Z،
فإن: $\overline{XZ} \cong \overline{ZY}, \widehat{XB} \cong \widehat{BY}$.

8.4 العمود المنصّف لوتر في الدائرة هو قطر (أو نصف قطر) لها.



مثال: إذا كان $\overline{AB}$ عمودًا منصّفًا للوتر $\overline{XY}$،
فإن $\overline{AB}$ قطر في $\odot C$.

الاقواس و الاوتار

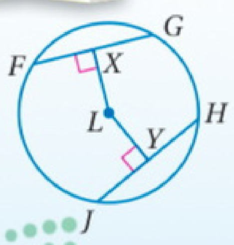
النظرية

نظرية 8.5

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون الوتران متطابقين إذا وفقط إذا كان بُعداهما عن مركز الدائرة متساويين.

مثال: $LX = LY$ إذا وفقط إذا كان $\overline{FG} \cong \overline{JH}$.



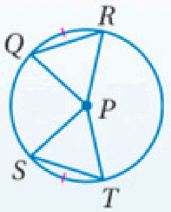
البرهان

برهان نظرية 8.2 (الجزء 1 : دائرة واحدة)

المعطيات: $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$ في $\odot P$.

المطلوب: $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

البرهان:



العبارات	المبررات
1) $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$ في $\odot P$	1) معطيات
2) $\angle QPR \cong \angle SPT$	2) إذا تطابقت الأقواس، فإن الزوايا المركزية المقابلة لها تكون متطابقة.
3) $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$	3) أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة.
4) $\triangle PQR \cong \triangle PST$	4) SAS
5) $\overline{QR} \cong \overline{ST}$	5) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.

الزوايا المحيطية

النظرية

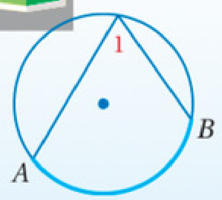
نظرية 8.6

أضف إلى مطويتك

نظرية الزاوية المحيطية

التعبير اللفظي: قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

مثال: $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{AB}\ ,\ m\widehat{AB} = 2m\angle 1$

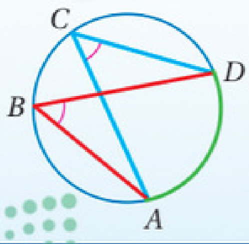


نظرية 8.7

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا قابلت زاويتان محيطيَّتان في دائرة القوس نفسه أو قوسين متطابقين، فإن الزاويتين تكونان متطابقتين.

مثال: $\angle C$ ، $\angle B$ تقابلان $\widehat{AD}$ ، إذن $\angle C \cong \angle B$.



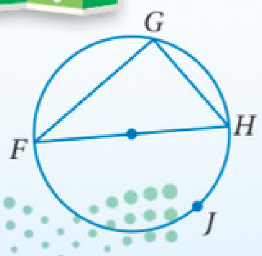
النظرية 8.8

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تقابل الزاوية المحيطية في مثلث قطرًا أو نصف دائرة، إذا وفقط إذا كانت هذه الزاوية قائمة.

مثال: إذا كانت $\widehat{FJH}$ نصف دائرة، فإن $m\angle G = 90°$.

إذا كان $m\angle G = 90°$ ، فإن $\widehat{FJH}$ هي نصف دائرة، ويكون $\overline{FH}$ قطرًا فيها.



المفردات الاساسية

الزاوية المحيطية هي الزاوية يقع رأسها على الدائرة ، و يحتوي ضلعاها على وترين في الدائرة

القوس المقابل للزاوية المحيطية هو قوس يقع داخل الزاوية المحيطية و يقع طرفاه على ضلعيها

الزوايا المحيطية

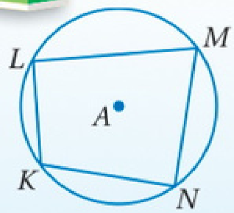
النظرية

نظرية 8.9

أضف إلى مطويتك

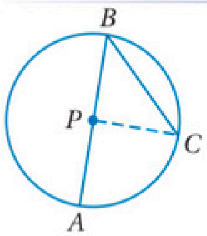
التعبير اللفظي: إذا كان الشكل الرباعي محاطًا بدائرة، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

مثال: إذا كان الشكل الرباعي $KLMN$ محاطًا بـ $\odot A$، فإن $\angle L, \angle N$ متكاملتان و $\angle K, \angle M$ متكاملتان أيضًا.



البرهان

برهان نظرية الزاوية المحيطية (الحالة الأولى)



المعطيات: $\angle B$ محيطية في $\odot P$.

المطلوب: $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$

البرهان: تعلم أن $\angle B$ محيطية في $\odot P$، وأن $\overline{PB}$ نصف قطر في $\odot P$.
ارسم نصف قطر آخر $\overline{PC}$ حيث إن كل نقطتين تحددان مستقيمًا واحدًا، وهذا سيقودنا إلى:

العبارات	المبررات
1) $\overline{PB} \cong \overline{PC}$	1) أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة.
2) $\triangle PBC$ متطابق الضلعين.	2) تعريف المثلث المتطابق الضلعين
3) $m\angle B = m\angle C$	3) نظرية المثلث المتطابق الضلعين
4) $m\angle APC = m\angle B + m\angle C$	4) نظرية الزاوية الخارجية
5) $m\angle APC = 2m\angle B$	5) بالتعويض (من الخطوة 3 في الخطوة 4 ثم الجمع)
6) $m\widehat{AC} = m\angle APC$	6) تعريف قياس القوس
7) $m\widehat{AC} = 2m\angle B$	7) بالتعويض (من الخطوة 5 في الخطوة 6)
8) $2m\angle B = m\widehat{AC}$	8) خاصية التماثل للمساواة
9) $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$	9) خاصية القسمة للمساواة

المماسات

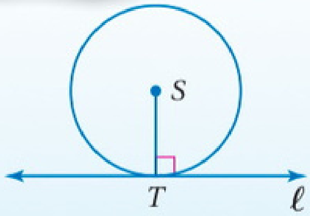
النظرية

النظرية 8.10

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون المستقيم مماسًا لدائرة في المستوى نفسه، إذا وفقط إذا كان عموديًا على نصف القطر عند نقطة التماس.

مثال: يكون المستقيم ℓ مماسًا لـ $\odot S$، إذا وفقط إذا كان $\overline{ST} \perp \ell$.

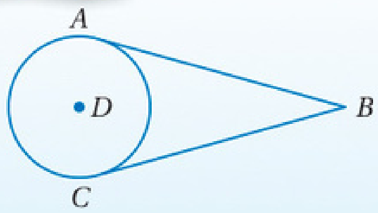


نظرية 8.11

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا رُسمت قطعتان مستقيمتان مماستان لدائرة من نقطة خارجها فإنهما متطابقتان.

مثال: إذا كان $\overline{AB}, \overline{CB}$ مماسان لـ $\odot D$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.



المفردات الاساسية

المماس هو مستقيم يقع في المستوى نفسه الذي تقع فيه الدائرة

نقطة التماس يقطعها في نقطة واحدة فقط ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماس لِـ $\odot C$ عند نقطة A ، ويسمى كل من $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ مماساً للدائرة ايضاً

المماس المشترك هو مستقيم او نصف مستقيم او قطعه مستقيمة تمس الدائرتين في المستوى نفسة

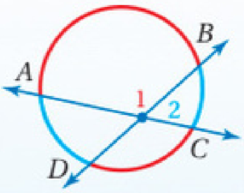
القاطع و المماس و قياس الزاوية

النظرية

نظرية 8.12

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تقاطع قاطعان أو وتران داخل دائرة، فإن قياس الزاوية المتكوّنة من التقاطع يساوي نصف مجموع قياسَي القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.



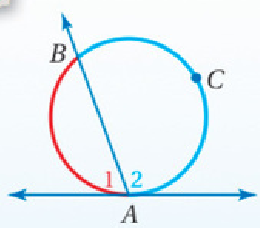
مثال: $m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\widehat{DA} + m\widehat{BC})$ و $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$

نظرية 8.13

أضف إلى مطويتك

نظرية الزاوية المماسية

التعبير اللفظي: إذا تقاطع مماس وقاطع عند نقطة التماس، فإن قياس كل زاوية متكونة من التقاطع يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.



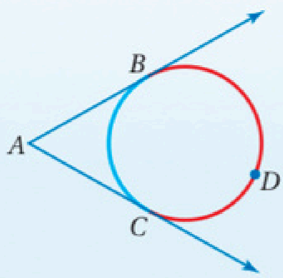
مثال: $m\angle 2 = \frac{1}{2} m\widehat{ACB}$ و $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{AB}$

نظرية 8.14

أضف إلى مطويتك

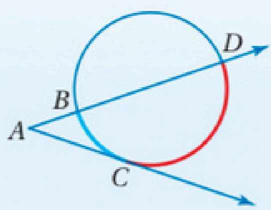
التعبير اللفظي: إذا تقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان في نقطة خارج دائرة، فإن قياس الزاوية المتكوّنة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلين لها.

أمثلة:



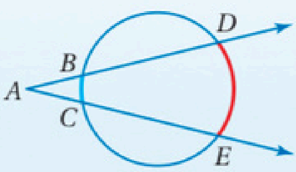
مماسان

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{BDC} - m\widehat{BC})$



قاطع ومماس

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DC} - m\widehat{BC})$



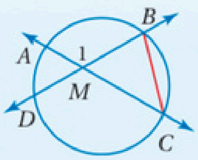
قاطعان

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$

القاطع و المماس و قياس الزاوية

البرهان

برهان



المعطيات: $\overleftrightarrow{AC}$ ، $\overleftrightarrow{BD}$ قاطعان للدائرة ويتقاطعان داخلها في M.

المطلوب: $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$

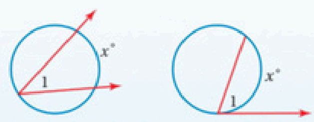
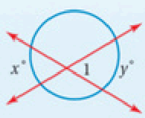
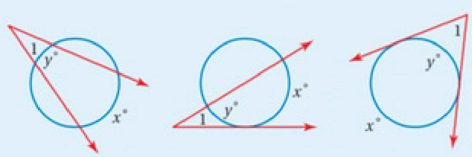
البرهان: تعلم أن $\overleftrightarrow{AC}$ ، $\overleftrightarrow{BD}$ قاطعان للدائرة، وأنهما يتقاطعان داخلها في M.

ارسم القطعة المستقيمة BC؛ لتحصل على المثلث MBC وهذا سيقودنا إلى ما يلي:

العبارات	المبررات
1) $m\angle 1 = m\angle MBC + m\angle MCB$	1) نظرية الزاوية الخارجية للمثلث
2) $m\angle MBC = \frac{1}{2} m\widehat{DC}, m\angle MCB = \frac{1}{2} m\widehat{BA}$	2) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.
3) $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{DC} + \frac{1}{2} m\widehat{BA}$	3) بالتعويض
4) $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{DC} + m\widehat{BA})$	4) خاصية التوزيع

ملخص المفهوم

ملخص المفهوم الدائرة وعلاقات الزوايا — أضف إلى مطويتك

موقع رأس الزاوية	نماذج	قياس الزاوية
على الدائرة		نصف قياس القوس المقابل $m\angle 1 = \frac{1}{2}x^\circ$
داخل الدائرة		نصف مجموع قياسَي القوس المقابل للزاوية، والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس. $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x^\circ + y^\circ)$
خارج الدائرة		نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلَين لها $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x^\circ - y^\circ)$

المفردات الاساسية

القاطع هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين فقط

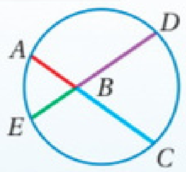
قطع المستقيمة خاصة الدائرة

النظرية

أضف إلى مطويتك

نظرية 8.15 نظرية قِطَع الوتر

التعبير اللفظي: إذا تقاطع وتران في دائرة، فإن حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الأول يساوي حاصل ضرب طولَي جزأي الوتر الثاني.

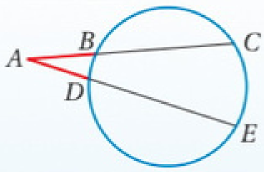


مثال: $AB \cdot BC = DB \cdot BE$

أضف إلى مطويتك

نظرية 8.16 نظرية القاطع

التعبير اللفظي: إذا رُسم قاطعان لدائرة من نقطة خارجها، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه، يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه.

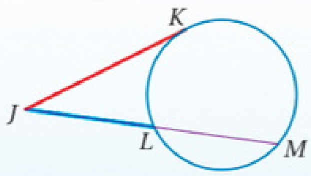


مثال: $AC \cdot AB = AE \cdot AD$

أضف إلى مطويتك

نظرية 8.17

التعبير اللفظي: إذا رُسم مماسٌ وقاطع لدائرة من نقطة خارجها، فإن مربع طول المماس يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول الجزء الخارجي منه.



مثال: $JK^2 = JL \cdot JM$

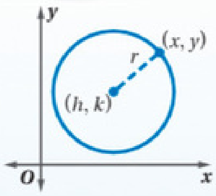
معادلة الدائرة

المفهوم الاساسي

مفهوم أساسي — الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

أضف إلى مطويتك

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ،
وطول نصف قطرها r هي: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.



الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة تُسمّى أيضًا صيغة المركز ونصف القطر.

المفردات الاساسية

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

التي مركزها (h , k) , و طول نصف قطرها r هي $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$