امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة / الفرع العلمي / الدورة الثانية عام ٢٠٢١م

الفرعية: متممة

سلم درجات مادة الرياضيات

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول:

عين قيمة n التي تحقق المعادلة $P^3_{n+2} = 16\binom{n+3}{2}$.

ملاحظة: الخطأ بتطبيق القانون يخسر ٥ درجات	٥ ٥ قانون توافيق + ٥ نشر + ٥ قانون ترتيب + ٥ نشر + ٥ خاطر الاحتمال المعادلة درجة أولى ٥	الحل $n \in \{0,1,2,\dots\}$ $(n+3)(n+2)(n+1) = 16\dfrac{(n+3)(n+2)}{2}$ $n+3 = 8$ $n = 5$
	٤٠	مجموع درجات السؤال الأول

السؤال الثاني: نشاط في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(2,1,3)$ والمستوي $P: 2x+y-2z-4=0$. **المطلوب:**

1) احسب بعد A عن المستوي P.

2) اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

ملاحظة: أي خطأ بتطبيق القانون يخسر ٥ درجات قانون + تعويض + نتيجة (3×5) تعويض + اصلاح + نتيجة إذا كتب قانون خاطئ يخسر ٢٠ درجة إذا كتب معادلة الكرة بدون ترفيع يخسر ٢٠ درجة قانون + تعويض	٥ ٥+٥+٥ ١٠ ٥+٥	$dis_{(A,P)} = \dfrac{\lvert ax_A+by_A+cz_A+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ $= \dfrac{\lvert 2+1-2-4\rvert}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{3}{3} = 1$ معرفة $d=3$ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=1$
	٤٠	مجموع درجات السؤال الثاني

السؤال الثالث: احسب التكامل الآتي: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

إذا بدل بالعمليات يأخذ ١٥ درجة فقط على كامل السؤال (قانون + اشتقاق + جداء أصلي)	٥+٥ ٥+٥ ٥ ٥+٥+٥	حساب التكامل نفترض $u=x$ و $v'=\sin x$ $u'=1$ و $v=-\cos x$ قانون التكامل بالتجزئة $I = -x\cos x + \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
	٤٠	مجموع درجات السؤال الثالث

السؤال الرابع: دالة جدول تغيرات التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ منحناه البياني C . والمطلوب:

1) بين $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ واكتب معادلة المقارب الأفقي.

2) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

3) دل على القيمة العظمى وبين نوعها.

4) حدد مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)>0$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$	+++	
المقارب الأفقي $y=0$	+	
عدد حلول المعادلة: حل وحيد	+	
القيمة الكبرى محليا $\frac{1}{e}$	+++	
مجموعة حلول المتراجحة المجال $]0,\frac{1}{e}[$	١٠	إذا أغلق المجال يخسر ٥ درجات إذا كتب مجال $]1,0[$ يخسر ١٠ درجات
مجموع درجات السؤال الرابع	١٠	

السؤال الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,0[$ وفق: $f(x)=\frac{2x^3+\cos^2 x}{x}$ والمطلوب:

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$ وادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

$f(x)-y_\Delta=\frac{\cos^2 x}{x}$	٥	
$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$	٥	
$-1\le\cos x\le 1$	٥	
$0\le\cos^2 x\le 1$	٣	عند القسمة على $x<0$ ولم يغير جهة التراجح يخسر درجتان
$\frac{-1}{x}\le\frac{\cos^2 x}{x}\le 0$	٢	
$\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=0$ حسب الإحاطة	٥	
$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos^2 x}{x}=0$	٥	
الوضع النسبي دراسة إشارة $g(x)=\frac{\cos^2 x}{x}$	٣	
البسط موجب		
إشارة الكسر من إشارة المقام والمقام سالب $g(x)<0$	٥	إذا كتب الشكل $g(x)<0$ والخط C يقع تحت
وعليه الخط C يقع تحت المقارب	٢	المقارب يدل الدرجات المخصصة
		دون الحاجة لذكر النقاط المشتركة
مجموع درجات السؤال الخامس	١٠	

السؤال السادس: يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء ، عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء المطلوب: 1) نسحب عشوائياً من الصندوق كرة، ما احتمال أن تكون بيضاء التي

2) نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة، نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاثة. اكتب مجموعة قيم X وعين القانون الاحتمالي:

ب : الحدث تكرة البيضاء $P(b)=\frac{1}{4}$	٨	في قيم المتحول العشوائي يجب مرحلتان إذا أضفت فهمة أو النص فهمة
$X=\{0,1,2,3\}$	٨	
$p(X=0)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{64}$	٣٠٥	
$p(X=1)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times 3=\frac{27}{64}$	٣٠٣	
$p(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times 3=\frac{9}{64}$	٣٠٢	عدد الضرب بالتكامل يجب ٣ مرحلات
$p(X=3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$	٣٠٢	
x_i | $p(X=x_i)$: ٣ | ٢ | ١ | ٠	٣	تنظيم الجدول
مجموع درجات السؤال السادس	١٠	
نعلم أن: حسب $P=\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ ، $q=\frac{1}{4}$	١٠٥	عدد المحاولات بين الأولى و الثانية يجب مرحلتين فقط
$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$	٨	
القانون برنولي حساب $P(0)$ و $P(1)$ و $P(2)$ و $P(3)$	٢ التعويض ٢ ٢ النتيجة الكل احتمال	$4\times(2+3)$

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية (70 درجة تمثل من التمرينين الأول والثاني - 60 درجة للتمرين الثالث)

التمرين الأول : نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_0=\frac{5}{2}$ وأياً كان العدد الطبيعي n: $u_{n+1}=(u_n-2)^2+2$

المطلوب: ١) أثبت بالتدريج أن $2\leq u_n\leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n.

٢) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة. ٣) استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وعين $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الرموز العلمية	؟	
إثبات صحة $E(0)$	٥	
افتراض صحة $E(n)$	٥	
وإثبات $E(n+1)$	٥×٤	
$E(n+1)$ محققة فإن $E(n)$ صحيحة أياً كانت $n\geq 0$	٢	
إثبات أنها متناقصة: $u_{n+1}-u_n\leq 0$	٥	لو تبرير أنها متناقصة ومحدودة من الأدنى $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$
$(u_n-2)^2+2-u_n=(u_n-3)(u_n-2)$	٥٥٥٥	
$u_n-3\leq 0$ ، $u_n-2\geq 0$ ومنه	٣٠٣	
$(u_n-3)(u_n-2)\leq 0$	٤	
المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة. النهاية هي حل المعادلة $x=f(x)$	٥	
ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$	٥	
المجموع	٧٠	

طريقة ثانية لبرهان التناقص بطريقة التدريج		طريقة ثانية لبرهان المحدودية	
$Q(n):u_{n+1}\leq u_n$: $n\geq 0$	٥	إثبات صحة $E(0)$	
$Q(0):u_1\leq u_0$ محققة $\frac{9}{4}\leq\frac{5}{2}$	٥	افتراض صحة $E(n)$	
نفرض $Q(n)$ صحيحة من أجل n	٥	وإثبات $E(n+1)$	
$Q(n+1):u_{n+2}\leq u_{n+1}$: $n\geq 0$		لتعرف تابع $f(u_n)=u_{n+1}$	
من الفرض $u_{n+1}\leq u_n$		$f(x)=(x-2)^2+2$	٢
$u_{n+1}-2\leq u_n-2$	٢	$f'(x)=2(x-2)$	٢
$(u_{n+1}-2)^2\leq(u_n-2)^2$	٢	$x\geq 2$	٢
$(u_{n+1}-2)^2+2\leq(u_n-2)^2+2$	٢	f متزايد تماماً على $[2,+\infty[$	٢
$u_{n+2}\leq u_{n+1}$	٢	من الفرض $2\leq u_n\leq 3$	
$Q(n+1)$ محققة ومنه $Q(n)$ صحيحة أياً كانت $n\geq 0$	٢	$f(2)\leq f(u_n)\leq f(3)$	٥
		$2\leq u_{n+1}\leq 3$	٥
		$E(n+1)$ محققة فإن $E(n)$ صحيحة أياً كانت $n\geq 0$	٣

التمرين الثاني: في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(1,3,0)\ ,\ B(0,6,0)\ ,\ N(0,0,3)\ ,\ M(0,6,2)$

المطلوب:

1) اكتب معادلة المستوي (AMN).

2) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي (AMN).

3) اثبت أن المستوي الذي معادلته $z-1=0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BM]$.

الوصول إلى معادلة المستوي (AMN)	٦	ملاحظات:
إيجاد من العلاقة $ax+by+cz+d=0$	$1+1+1$	إيجاد $\overrightarrow{AM}\ ,\ \overrightarrow{AN}$
تعويض النقاط	$1+1+1+1$	$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AN}=0\ ,\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$
وحساب قيم $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d$	٥	نفرض $\vec{n}(a,b,c)$
كتابة معادلة المستوي	٥	إيجاد قيم الوسطاء $a\ ,\ b\ ,\ c$
المعادلات الوسيطية – قانون	3×3	كتابة معادلة المستوي
شعاع توجيه	2×3	٥
نتيجة		لو $K(x,y,z)$ نقطة من المستوي
اثبات أن $z-1=0$ معادلة المستوي المحوري		$\overrightarrow{AK}=\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{AN}$
إيجاد إحداثيات المنتصف	3×3	إيجاد $\alpha\ ,\ \beta$
معرفة الشاعر $\overrightarrow{BM}$	2×3	الوصول إلى معادلة المستوي
كتابة معادلة المستوي المحوري	٥	
المجموع	٢٠	

طريقة: المستوي المحوري		$z-1=0$
$D(x,y,1)\quad D\in\pi$	٥	$\vec{n}(0,0,1)$
$BD=\sqrt{x^2+(y-6)^2+1}$	٤+٣	$\overrightarrow{MB}(0,0,2)$
$MD=\sqrt{x^2+(y-6)^2+1}$	٣	$I(0,6,0)$
$BD=MD$	٣	$I(0,6,1)$ تنتمي معادلة المستوي π
π المستوي المحوري	٥	$\vec{n}\ ,\ \overrightarrow{MB}$ مرتبطان خطياً
		π المستوي المحوري
طريقة:		
لو $K(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري	٥	في التمثيل الوسيطي عند استخدام نقطة غير البدء يخسر درجة واحدة
$KM=MB$ ومنه $KM^2=MB^2$	٥	
تعويض – إصلاح – نتيجة	٢+٣+١	

ثانياً: حل المسائل الأتية: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: لتكن $P(z)$ كثير حدود معرف بالصيغة

$P(z)=z^3-2(a+1+\sqrt{3})z^2+4(a-1+\sqrt{3})z+8$ حيث $a\in\mathbb{R}$. المطلوب:

1) احسب العدد a الذي يكون من أجله $z=2$ حلاً للمعادلة $P(z)=0$.

2) نعوض $a=-1$ في كثير الحدود من الدرجة الثالثة $P(z)$ يحقق: $P(z)=(z-2)Q(z)$.

ثم استنتج حلول المعادلة $P(z)=0$.

الحل: لتكن A و B و C نقاط المستوي التي تمثل الأعداد العقدية بالترتيب: $c=-1+i\sqrt{3}$ ، $b=1+i\sqrt{3}$ ، $a=2$

المطلوب: a) اثبت أن: $\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{i\pi}{3}}$ ، واستنتج طبيعة المثلث ABC.

b) ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل، حيث A' و B' و C' التي تمثلها نقاط المستوي A' ، B' ، C' على الترتيب.

أولاً: 1- التعويض $z=2$ في المعادلة	0		
الوصول إلى معادلة خطية	0		
الوصول إلى قيمة a	0		
2- إجراء القسمة الإقليدية أو أي طريقة أخرى صحيحة	5+5+5	طريقة ثانية لإيجاد $Q(z)$	0
وإيجاد $Q(z)$	0	$P(z)=(z-2)(az^2+bz+c)$	0+0+0+0
حساب Δ	0	إيجاد a و b و c	
جذر أول	0		
جذر ثاني	0		
جذر ثالث	0		

ثانياً: a- إثبات $\frac{b-a}{c-a}=e^{\frac{i\pi}{3}}$		طريقة ثانية $e^{\frac{i\pi}{3}}$ بالشكل المثلثي	0
تعويض	5+5	ثانية $e^{\frac{i\pi}{3}}$ بالشكل الجبري	0+0
الشكل الجبري	0	حساب $\frac{b-a}{c-a}$ وكتابتها بالشكل الجبري والنتيجة	0+0+0
الشكل المثلثي	0	ملاحظة: إذا كتب الطالب مثلث متساوي الساقين و قائم يعتبر الدرجة المخصصة	
الشكل الأسي	10	ملاحظة: إذا قام الطالب بحساب AB ، AC ، BC واستنتج أن المثلث متساوي الساقين يأخذ 0 درجات	
استنتاج مثلث متساوي الساقين و متقايس الزاوية	0	ملاحظة: إذا كتب الطالب المثلث متساوي الساقين أو متقايس الزاوية يأخذ 0 درجات المخصصة للفقرة	
b- إيجاد a' ، b' ، c'	3+3+3	متساوي الساقين إذا $\frac{a-b}{c-b}=1$	
المجموع	100		

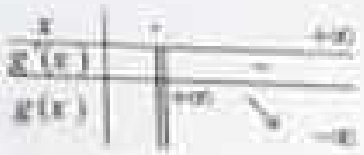
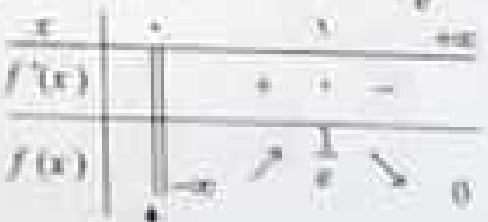
المسألة الثانية: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=e^{-x}(1+\ln x)$

والتابع g المعرف على I وفق: $g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$. المطلوب:

1) ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها. 2) بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلاً وحيداً α، ثم تحقق أن $\alpha<1$.

3) حدد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه. 4) أثبت أن: $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$.

5) مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها. 6) في معلم متعامد أرسم الخط C_f.

	5+5	$\lim_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$
	5+5	$g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$
	a	
	a	
	5×4	$f(]0,+\infty[)=]-\infty,0[$ ، g مستمر على $]0,+\infty[$ ، g متناقص على $]0,+\infty[$
		فالمعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً
	5	$g(1)=1-1-\ln 1=0$ .....
	5	$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ .....
نتيجة + تحليل	5+5	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{e^x}=0$
	5+5	$f'(x)=-\frac{1}{x}e^{-x}+(-e^{-x})(1+\ln x)=\frac{\frac{1}{x}-1-\ln x}{e^x}=\frac{g(x)}{e^x}$
نقبل المشتقة وسهم متوازن سهمها ٥ درجات إذا لم يكتب المشتقة أعد ١ ونظم جدولاً يتوازن مع خطأ ورصيع المشتقة واحدة مع سهم متوازن يخسر ٥ درجات	5+5	
يقبل المشتقة درجة الرسم المتوازن مع الجدول الذي نظمه	١٠	
المجموع	١٠٠	

انتهى السلم

ملاحظات عامة tm

١- في ركن تسجيل الدرجات على القسيمة تخصص الحقول على التالي كما يأتي :

الحقل	رقم السؤال	موضوع السؤال
١	السؤال الأول	تحليل توافقي
٢	السؤال الثاني	معادلة كثرة
٣	السؤال الثالث	التكامل
٤	السؤال الرابع	جدول تغيرات
٥	السؤال الخامس	المقارب المائل
٦	السؤال السادس	الاحتمالات
٧	السؤال السابع/ التمرين الأول	متتاليات
٨	السؤال الثامن/ التمرين الثاني	تمرين الأشعة
٩	السؤال التاسع/ التمرين الثالث	القيمة المطلقة
١٠	السؤال العاشر / المسألة الأولى	مسألة الطفاية
١١	السؤال الحادي عشر / المسألة الثانية	مسألة دراسة تابع أسي

٢- في الأسئلة الاختيارية في حال أجاب الطالب على جميع الأسئلة تصحح أول خمس إجابات منها فقط حسب ترتيب إجاباته ويكتب جانب الإجابة الأخيرة (اختياري ملغى)

٣- تحذف (درجة واحدة) لكل خطأ حسابي من الدرجات المخصصة للخطوة التي وقع فيها الخطأ.

٤- إذا دمج الطالب خطوتين أو أكثر وكان باستطاعة الطالب الحزء أن يقوم بذلك الدمج، يعطى الطالب مجموع الدرجات المخصصة لما دمج من خطوات .

٥- لا يجوز تجزئة الدرجات المخصصة للخطوة الواحدة إلا عند وجود خطأ حسابي .

٦- إذا أخطأ الطالب في خطوة من خطوات الحلّ ثم تابع الحلّ بمنطق سليم ومفيد يعطى عن الخطوات التي تليها ما يستحق من درجات وفق السلّم بشرط ألا يؤدي خطؤه إلى خفض سوية السؤال أو تغيير مضمونه .

٧- إذا أجاب الطالب عن موقف بطريقة غير واردة في السلّم ومبرراً خطوات حلّه، فعلى المصحح أن يعرض الطريقة على ممثل الفرع الذي عليه أن يقوم والموفدون الاختصاصيّون بدراسة هذه الطريقة والتأكد من صحتها علمياً ومن ثمّ توزيع الدرجات لتلك الطريقة بما يكافئ التوزيع الوارد على الطريقة الواردة في السلّم ثم يعتمد هذا التوزيع بعد أخذ موافقة التوجيه الأول لمادة الرياضيات في وزارة التربية.

٨- عند الاضطرار إلى تعديل درجة حصل عليها الطالب عن سؤال ما، يجب على كلّ من المصحح والمدقق تسجيل اسمه مقروناً بتوقيعه في جوار الدرجة المعدلة مرفقاً بمهر خاتم الامتحانات.

٩- إذا حلّ الطالب سؤالاً بأكثر من طريقة نصحح طريقة كاملة وتعتمد الدرجة الأعلى.

١٠- إذا لم يجب الطالب عن سؤال ما، نكتب(إلى جانب السؤال)العبارة الآتية:(صفر للسؤال..... لأن لا إجابة)

١١- تكتب الدرجات الجزئية لكل سؤال ضمن دائرة وبالأرقام العربية (....1,2,3,4)

١٢- تسجّل الدرجات التي يستحقها الطالب عن طلبات السؤال ومراحله (رقماً) وبوضوح على الهامش، أما الدرجة المستحقة عن السؤال كاملاً فتسجّل على الهامش الأيمن (مقابل بداية الإجابة) رقماً وكتابة.

	الآحاد	العشرات	المئات
	٢	١	

بعد استبدال حقل الكسور بالآحاد. حقل الآحاد بالعشرات. حقل العشرات بالمئات.