بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين

حل تمارين المقرر 101 ريض differential calculus

Chapter 0

إعداد د. عبد الله بن عثمان المغيره أستاذ مشارك بجامعة الملك سعود سابقاً والآن متقاعد

أعزائي طلاب وطالبات السنة الأولى المشتركة ؛ إن رأيتم أن هذا العمل مفيد فالرجاء إخبار زملائكم فالدال على الخير كفاعله

أرحب بآرائكم ومقترحاتكم وللتواصل بريد الكتروني
elmo1502@hotmail.com

لا تنسوني من دعائكم بارك الله فيكم

المحتويات رقم الصفحة

Section 0.1

حل تمارين (0.1) EXERCISES صفحة 10و11 في الكتاب

In Exercises 1 – 2 , Determine which of the following sets is a function . if it is a function ,what is its domain and range ? Explain your reason for any that do not define a function .

في التمارين 1 – 2 حدد أي من المجموعات الآتية تكون دالة (function) . وإذا كانت دالة فما هو مجالها (domain) وما هو مداها (range) وإن لم تكن دالة فما هو السبب؟

1. $f = \{ (2,3), (3,3), (-2,3), (1,3), (0,3) \}$ function

Domain = { 2,3,- 2,1,0,} = { - 2,0,1,2,3 } , range ={ 3 }

جرت العادة على ترتيب الأعداد من الأصغر إلى الأكبر ولكن الترتيب ليس ضرورياً في الاختبار لا ترتب إلا إذا كان لديك وقت كافي

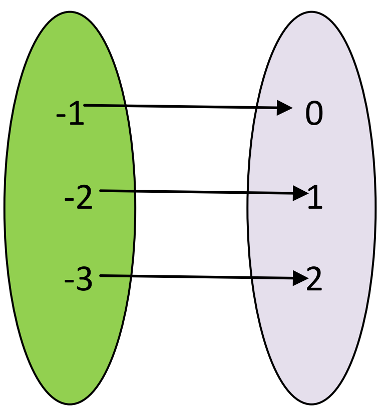
2. g= { (5,1) ,(2,2),(- 1.5,2), (5,3) ,(1,7) }

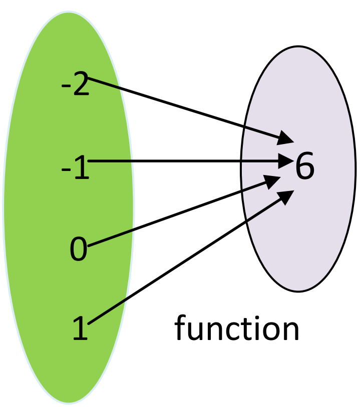
ليست دالة لأن العنصر 5 الذي في المجال ليس مرتبط بعنصر وحيد من المدى بل مرتبط بعنصرين مختلفين من المدى هما 1 و 3

In Exercises 3 - 4 ,Determine which of the following diagrams represent a function . Explain your reason for any that do not define a function .

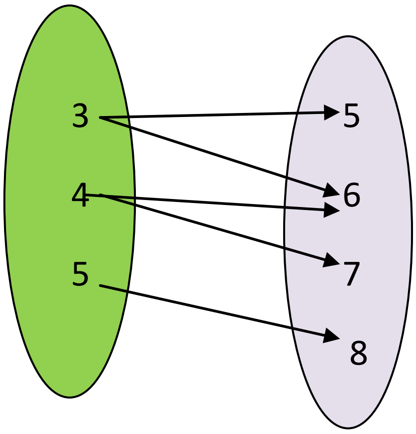
في التمارين 3 - 4 حدد أي من الرسوم البيانية الآتية تمثل دالة (function) . وإن لم تكن دالة فما هو السبب؟

3.

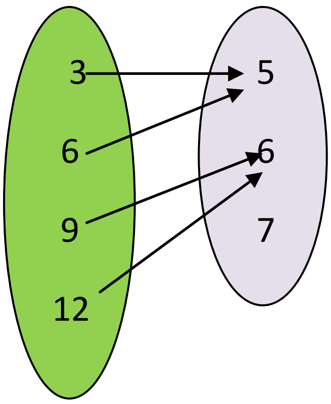




Function

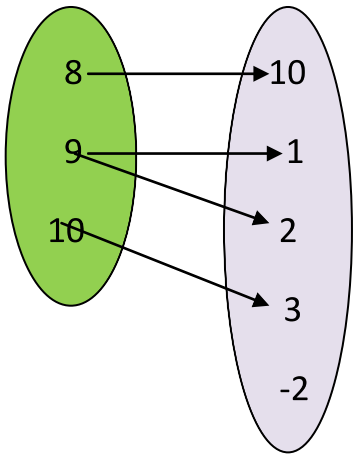


ليست دالة لأن العنصرين 3 و 4 كل منهما يرتبط بعنصرين مختلفين Not function



Function

4.



not function

ليست دالة لأن العنصر 9 الذي في المجال domain

مرتبط بعنصرين مختلفين في المدى range

In Exercises 5 - 7 find the numerical value of the function at the given value of a .

في التمارين 5 - 7 أوجد القيمة العددية للدالة عند القيمة المعطاة للعدد a .

5. $f(x) = 2x^3 - 3 \quad , \qquad a = 0 \, , -1$

$f(0) = 2\,0^3 - 3 = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$

$f(-1) = 2\,(-1)^3 - 3 = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$

6. $g(t) = \sqrt[3]{t} \quad , \qquad a = 27 \, , -\frac{1}{8} \quad , \qquad g(27) = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

$$g\left(-\frac{1}{8}\right) = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = -\frac{1}{2}$$

7. $g(x) = \dfrac{3x^2 - 4x - 1}{2x^2 + 5x - 3} \; , a = -1 \, ,$

$$g(-1) = \frac{3(-1)^2 - 4(-1) - 1}{2(-1)^2 + 5(-1) - 3} = \frac{3 + 4 - 1}{2 - 5 - 3} = \frac{6}{-6} = -1$$

لا تنسى إذا كانت n عدد صحيح زوجي فإن $(-1)^n = 1$

لا تنسى إذا كانت n عدد صحيح فردي فإن $(-1)^n = -1$

In exercises 8 - 13 find the domain of each function

في التمارين 8 - 13 أوجد مجال domain كل دالة

في مثل هذا النوع من المسائل إذا كان لا يوجد في الدالة جذور زوجية تحوي المتغير ولا يوجد مقامات تحوي المتغير والأسس أعداد صحيحة موجبة أو إذا كانت الدالة كثيرة حدود polynomial فإن المجال domain هو جميع الأعداد الحقيقية أي

$D_f = (-\infty, \infty) = \{x: x \text{ is real number}\} = \text{all real numbers} = R$

8. $f(x) = x^3 - 4x + 1 \ , D_f = \text{all real numbers} = R$

لأن f(x) كثيرة حدود

9. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 1} \ , D_f = \text{all real numbers} = R$

لا يوجد جذور زوجية

10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-5}} \ , \ x - 5 > 0 \ , \quad x > 5 \ , \quad D_f = (5, \infty)$

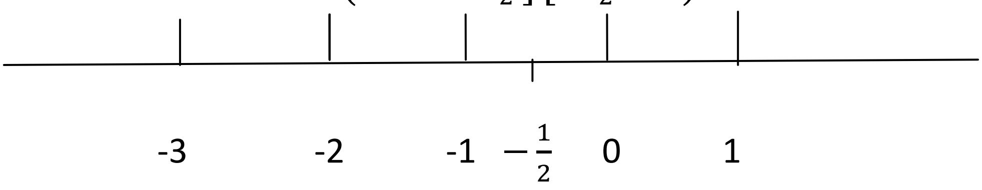
11. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x+2}}$

الآن لدينا بسط ومقام داخل الجذر لذلك لدينا طريقتين للحل

الطريقة الأولى نساوي كل من البسط والمقام بالصفر ونجد عددين وهذين العددين يقسمان خط الأعداد الحقيقية إلى ثلاث فترات حيث نجرب كل فترة ونختار منها الذي يحقق أن ما تحت الجذر أكبر من أويساوي الصفر أي

$2x + 1 = 0 \ , \ x = -\dfrac{1}{2} \quad , and \ \ x + 2 = 0, \quad x = -2$

$(-\infty, -2) \left(-2 \ , \ -\frac{1}{2}\right] \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$



لنجرب الفترة

$(-\infty, -2)$

لنأخذ منها العدد 3 - ونعوضه فيما تحت الجذر أي

$$\frac{2x+1}{x+2} = \frac{2(-3)+1}{-3+2} = \frac{-6+1}{-1} = \frac{-5}{-1} = \frac{5}{1} = 5 > 0$$

هذه الفترة تحقق المطلوب لذلك هي ضمن المجال *domain*

لنجرب الفترة

$$(-2, -\frac{1}{2}]$$

لاحظ المساواة عند العدد ناقص نصف لأن البسط يمكن أن يساوي الصفر أما المقام فيجب أن لا يساوي الصفر لأن القسمة على الصفر لا تجوز

لنأخذ منها العدد 1 - ونعوضه فيما تحت الجذر أي

$$\frac{2x+1}{x+2} = \frac{2(-1)+1}{-1+2} = \frac{-2+1}{+1} = \frac{-1}{1} = -1 < 0$$

هذه الفترة لا تحقق المطلوب وهو أن ما تحت الجذر يجب أن يكون عدد غير سالب

إذاً هذه الفترة ليست ضمن المجال domain

لنجرب الفترة الأخيرة

$$\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

لنأخذ منها العدد 1 ونعوضه فيما تحت الجذر أي

$$\frac{2x+1}{x+2} = \frac{2(1)+1}{1+2} = \frac{3}{3} = 1 > 0$$

هذه الفترة تحقق المطلوب لذلك هي ضمن المجال *domain*

إذاً لدينا الفترتين

$$(-\infty, -2) \quad or \quad [-\frac{1}{2}, \infty)$$

و هما فترتين منفصلتين لذلك نأخذ إتحادهما أي أن مجال *domain* هذه الدالة هو

$$D_f = (-\infty, -2) \cup [-\frac{1}{2}, \infty)$$

الطريقة الثانية بالتحليل أي البسط غير سالب والمقام موجب أو البسط غير موجب والمقام سالبٍ فيكون خارج القسمة موجباً أو صفر أي

$$2x+1 \geq 0 \ \ and \ \ x+2 > 0 \ \ or \ 2x+1 \leq 0 \ and \ \ x+2 < 0$$

$$2x+1 \geq 0\,, x \geq -\frac{1}{2} \quad and\ x+2 > 0, x > -2$$

$$-\frac{1}{2} \leq x = \left[-\frac{1}{2}\,,\infty\right) \ and -2 \ < x = (-2\ ,\infty)$$

$$(-2\ ,\infty) \cap \left[-\frac{1}{2}\,,\infty\right) = \left[-\frac{1}{2}\,,\infty\right)$$

في التقاطع ؛ إذا كان يوجد عناصر مشتركة بين الفترتين ؛ نأخذ العدد الأصغر بين البدايتين والأكبر بين النهايتين , نأخذ العدد مع قوسه وفي الاتحاد العكس

هنا البدايتين نفسهما والعدد ناقص نصف أكبر من العدد -2

Or

$$2x+1 \leq 0\,, x \leq -\frac{1}{2} \quad and\ x+2 < 0, x < -2$$

$$x \leq -\frac{1}{2} = \left(-\infty\,, -\frac{1}{2}\right] \ and \ \ x < -2 = (-\infty\,, -2)$$

$$(-\infty\,, -2) \cap \left(-\infty\,, -\frac{1}{2}\right] = (-\infty\,, -2)$$

هنا العدد الأصغر بين البدايتين أي بين ناقص نصف و -2 هو -2 والنهايتين نفسهما

إذاً المجال *domain* هو

$$D_f = \left[-\frac{1}{2}\,,\infty\right) \ or \ (-\infty\,,-2) = \left[-\frac{1}{2}\,,\infty\right) \cup (-\infty\,,-2)$$

$$= (-\infty\,,-2) \cup \left[-\frac{1}{2}\,,\infty\right)$$

جرت العادة على أن نبدأ من اليسار إلى اليمين وإلا $A \cup B = B \cup A$

12. $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 4x}{x^3 - x}$

من البسط

$\sqrt{x}$, $x \geq 0$

من المقام

$x^3 - x = 0$, $x(x^2 - 1) = 0$, $x(x-1)(x+1) = 0$

$x = 0$ *or* $x = 1$ *or* $x = -1$

$x > 0$, $x \neq 1$

$0 < x$ *and* $x \neq 1 = (0, 1) \cup (1, \infty)$

$D_f = (0, 1) \cup (1, \infty)$

13. $g(w) = \frac{w - 1}{w^2 - w - 6}$

$w^2 - w - 6 = 0$, $(w - 3)(w + 2) = 0$, $w = 3$ *or* $w = -2$

عددان حاصل ضربهما -6 وحاصل جمعهما -1 واضح أنهما 2 و -3

$D_g = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, \infty) = R - \{-2,3\}$

أي جميع الأعداد الحقيقية ما عدى العددين -2 و 3

In Exercises 14 – 16 Determine which of the following functions define a polynomial function . Explain your reason for any that do not define polynomial function .

في التمارين *14 - 16* حدد أي من الدوال الآتية يعرف دالة كثيرة الحدود . وضح سببك عندما أي منها لا تكون دالة كثيرة حدود

14. $f(x) = 3x^{-4} + 2x^{15} + x^{-2} + 13$

Not polynomial function ,negative exponent

ليست دالة كثيرة حدود لوجود أسس سالبة

15. $g(x) = 5x^2 - x^3 + x^7$, polynomial function

16. $h(x) = \dfrac{x-2}{1-7x}$

Not polynomial function , because the variable is in the denominator

ليست دالة كثيرة حدود لوجود المتغير في المقام

In exercises 17 - 20 , Find the domain of the following functions

في التمارين 17 - 20 أوجد مجال كل من الدوال الآتية

17. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$, $\quad polynomial\ so\ D_f = R$

.

18. $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 4}{\sqrt{x} - 2}$

الآن لدينا جذر زوجي ومقام شرط الجذر هو أن ما تحت الجذر يكون غير سالب أي

$x \geq 0$

وشرط المقام هو متى يكون المقام يساوي الصفر أي

$\sqrt{x} - 2 = 0 , \sqrt{x} = 2 , \left(\sqrt{x} \right)^2 = 4 \ , x = 4$

إذاً المجال هو جميع الأعداد الحقيقية غير السالبة ما عدى العدد 4

$Domain = D_f = 0 \leq x \ \ and\ x \neq 4 = [\ 0 , 4\ ) \cup (\ 4 , \infty\ )$

$$16.\ f(x)=\frac{3x^2-x+4}{\sqrt{2x-4}-3}$$

$$2x-4\geq 0,\qquad 2x\geq 4\quad ,\qquad x\geq 2$$

$$\sqrt{2x-4}-3=0\ \ ,\ \ \sqrt{2x-4}=3\ ,\ \ 2x-4=9\ \ ,\ \ x=\frac{13}{2}=6.5$$

$$D_f=\left[\,2\,,\frac{13}{2}\right)\left(\frac{13}{2}\,,\infty\right)$$

$$19.\ f(x)=\frac{x+3}{x^2-3x+2}$$

لدينا مقام ونريد أن نعرف متى يكون هذا المقام يساوي صفر أي نحل المعادلة

$$x^2-3x+2=0$$

وكما تعلم لدينا ثلاث طرق لحل معادلة الدرجة الثانية وهي التحليل وإكمال المربع والقانون العام والحل بالقانون العام سريع ومضمون إذا طبقته بالطريقة الصحيحة.

عادة تكون المسائل في الاختبارات ذات طابع بسيط مثل هذا التمرين .

فلو لاحظت أن طريقة التحليل هنا واضحة ومباشرة لأننا نبحث عن عددين حاصل ضربهما العدد 2 + وعوامل العدد 2 هي فقط 1 و 2 و 2- و 1- ومجموعهما العدد 3- .

واضح أنهما 2- و1- أي أن

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0\,,x=1\ or\ x=2$$

إذاً عندما نعوض عن x بالعدد 1 أو بالعدد 2 يصبح المقام يساوي صفر أي

$$f(1)=\frac{1+3}{1^2-3(1)+2}=\frac{4}{0}\quad ,f(2)=\frac{2+3}{2^2-3(2)+2}=\frac{5}{4-6+2}=\frac{5}{0}$$

ولكن التعبيرين 4 قسمة صفر و 5 قسمة صفر ليسا أعداداً حقيقية أي أن *f(x)* لا تربط العدد 1 الذي بالمجال بعدد من المدى وبالمثل العدد 2 أي أن *f(x)* ليست دالة

لذلك لكي تكون *f(x)* دالة يجب أن نحذف العددين 1 و 2 من مجالها domain أي

$$Domain\ of\ f(x)=D_f=\{x\!:x\in R\,,x\neq 1\ and\ x\neq 2\}$$

= R - { 1 , 2 }

$=(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

20. $f(x) = \dfrac{1-2x^5}{x^3-9x^2+20x}$

$x^3 - 9x^2 + 20x = 0 \,, x(x^2 - 9x + 20) = 0$

$x = 0 \;\; or \; x^2 - 9x + 20 = 0 \,, \qquad (x-4)(x-5) = 0$

إذا لم تستطع حل معادلة الدرجة الثانية بالتحليل فحلها بالقانون

إذاً المقام يساوي 0 عندما x=0 أو x=4 أو x=5

Domain = R – { 0,4,5 }

In exercises 21 - 23 , divide

في التمارين *21 - 23* اقسم

21. $\dfrac{20x^4 + x^3 + 2x^2}{4x^3}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x + \frac{1}{4} \\
\hline
4x^3 & 20x^4 + x^3 + 2x^2 \\
 & -20x^4 \\
\hline
 & 0 \quad + x^3 \\
 & -x^3 \\
\hline
 & 0 \quad + 2x^2
\end{array}
$$

$$\frac{20x^4 + x^3 + 2x^2}{4x^3} = 5x + \frac{1}{4} + \frac{2x^2}{4x^3}$$

22. $\dfrac{x^2 - 4x - 38}{x - 8}$

$$\begin{array}{r|l}
 & x + 4 \\
\hline
x - 8 & x^2 - 4x - 38 \\
 & -x^2 + 8x \\
\cline{2-2}
 & 0 + 4x - 38 \\
 & -4x + 32 \\
\cline{2-2}
 & 0 - 6
\end{array}$$

$$\frac{x^2 - 4x - 38}{x - 8} = x + 4 - \frac{6}{x - 8}$$

23. $\dfrac{4x^2 - 33x + 28}{4x - 5}$

$$\begin{array}{r|l}
 & x - 7 \\
\hline
4x - 5 & 4x^2 - 33x + 28
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll} -4x^2 & +5x & & \\ \hline 0 & -28x & +28 & \\ & +28x & -35 & \\ \hline & 0 & -7 & \end{array}$$

$$\frac{4x^2 - 33x + 28}{4x - 5} = x - 7 - \frac{7}{4x - 5}$$

In Exercises 24 - 26 , Use long division to find the quotient Q(x) and remainder R(x) of each rational function .

في التمارين *24 - 26* استخدم القسمة الطويلة لتجد خارج القسمة Q(x) والباقي R(x) لكل دالة نسبية

24. $\dfrac{x^3 + 15x^2 + 49x - 55}{x + 7}$

$$\begin{array}{r|llll} & x^2 + 8x - 7 & & & \\ \hline x + 7 & x^3 & +15x^2 & +49x & -55 \\ & -x^3 & -7x^2 & & \\ \hline & 0 & +8x^2 & +49x & \\ & & -8x^2 & -56x & \\ \hline & & 0 & -7x & -55 \\ & & & +7x & +49 \\ \hline & & & 0 & -6 \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 + 8x - 7$$

$$R(x) = -\frac{6}{x+7}$$

25. $\dfrac{3x^3 + 9x^2 - 64x - 68}{x+6}$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3x^2 & -9x & -10 & & \\
\hline
x+6 & 3x^3 & +9x^2 & -64x & -68 & \\
 & -3x^3 & -18x^2 & & & \\
\hline
 & 0 & -9x^2 & -64x & & \\
 & & +9x^2 & +54x & & \\
\hline
 & & 0 & -10x & -68 & \\
 & & & +10x & +60 & \\
\hline
 & & & 0 & -8 &
\end{array}
$$

$$Q(x) = 3x^2 - 9x - 10$$

$$R(x) = -\frac{8}{x+6}$$

26. $\dfrac{x^6 + 2x^4 + 6x - 9}{x^3 + 3}$

$$\begin{array}{r|lllllll}
 & \multicolumn{7}{l}{x^3 + 2x - 3} \\
\hline
x^3 + 3 & x^6 & +0x^5 & +2x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +6x & -9 \\
 & -x^6 & & & -3x^3 & & & \\
\hline
 & 0 & & +2x^4 & & & +6x & \\
 & & & -2x^4 & & & -6x & \\
\hline
 & & & 0 & -3x^3 & & 0 & -9 \\
 & & & & +3x^3 & & & +9 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$Q(x) = x^3 + 2x - 3$$

R(x) = 0

Section 0.2

تمارين (0.2) EXERCISES صفحة 25 و 26 في الكتاب

In Exercises 1 – 10 sketch the graph of the function .

في التمارين 1 – 10 ارسم منحنى الدالة

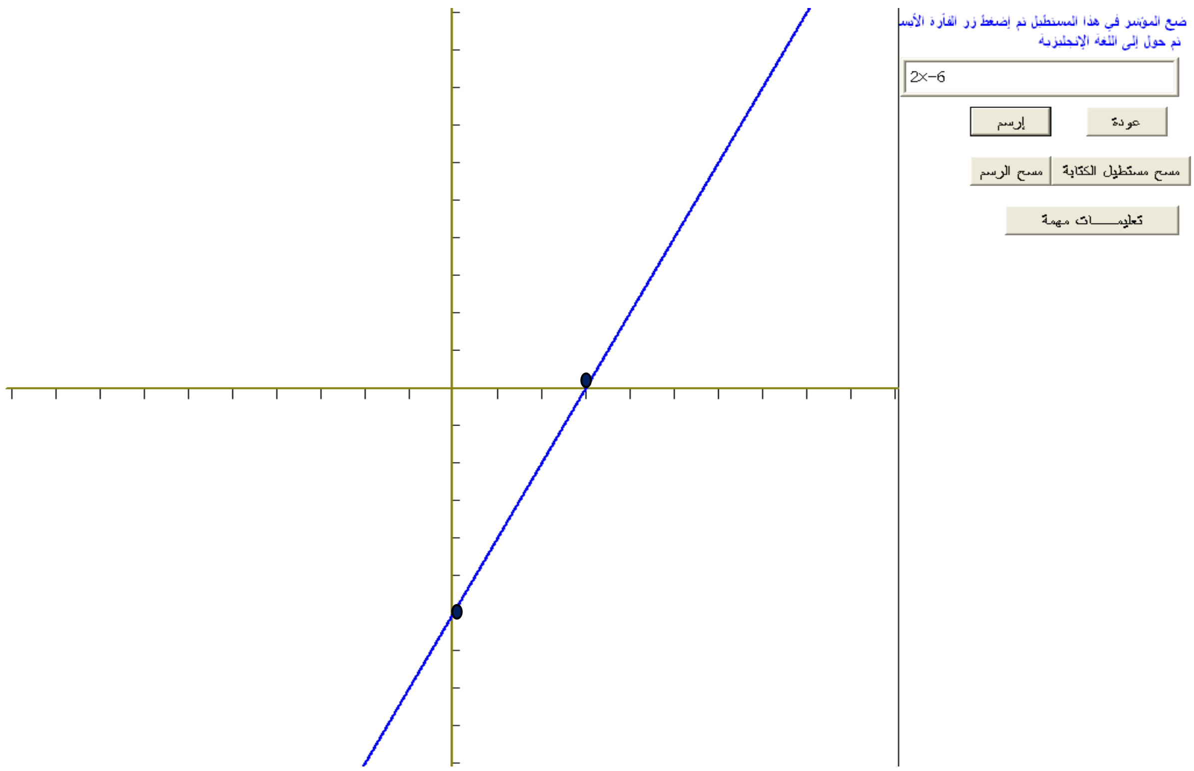
1. $f(x) = 2x - 6$ or $y = 2x - 6$

معادلة الدرجة الأولى هي معادلة مستقيم لذلك لرسمها يكفي أن نعين نقطتين فقط ثم نصلهما بمستقيم نمده من الجهتين , لاحظ أن رسم الدالة يقطع محور Y عندما تكون $x = 0$ ويقطع محور X عندما تكون $y= 0$ هنا نرسم النقطتين (3 , 0) و (0 , - 6)

X	0	3
Y	- 6	0

Domain = (- ∞ , ∞) = المجال

Range = (- ∞ , ∞) = المدى



$2. f(x) = 3x - 6 \;, \qquad x < 2$

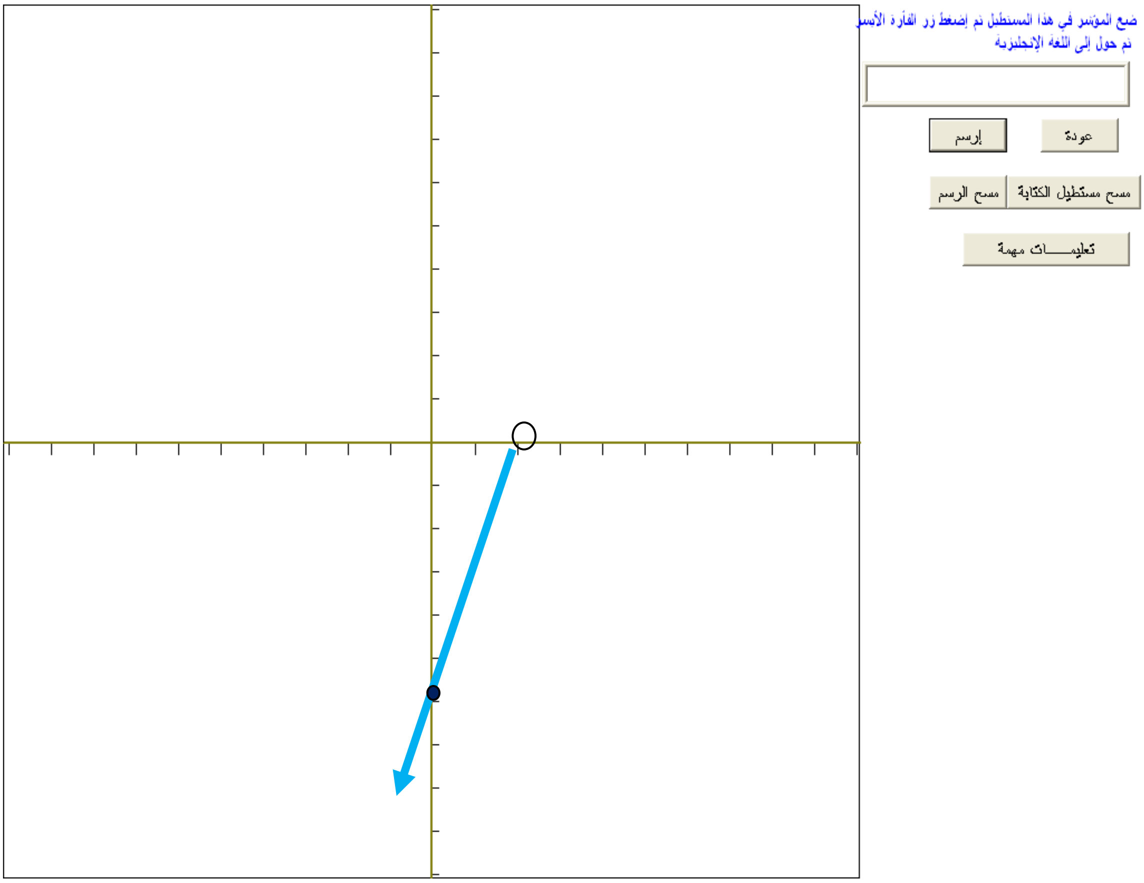
لا حظ أن النقطة (2 , 0) ليست ضمن الرسم لذلك وضعنا عندها دائرة مفرغة

هنا المجال Domain معطى مع التمرين أي محدد مسبقاً

X	0	2
Y	- 6	0

Domain = x<2 = (- ∞ , 2) = المجال

Range = (- ∞ , 0) = المدى

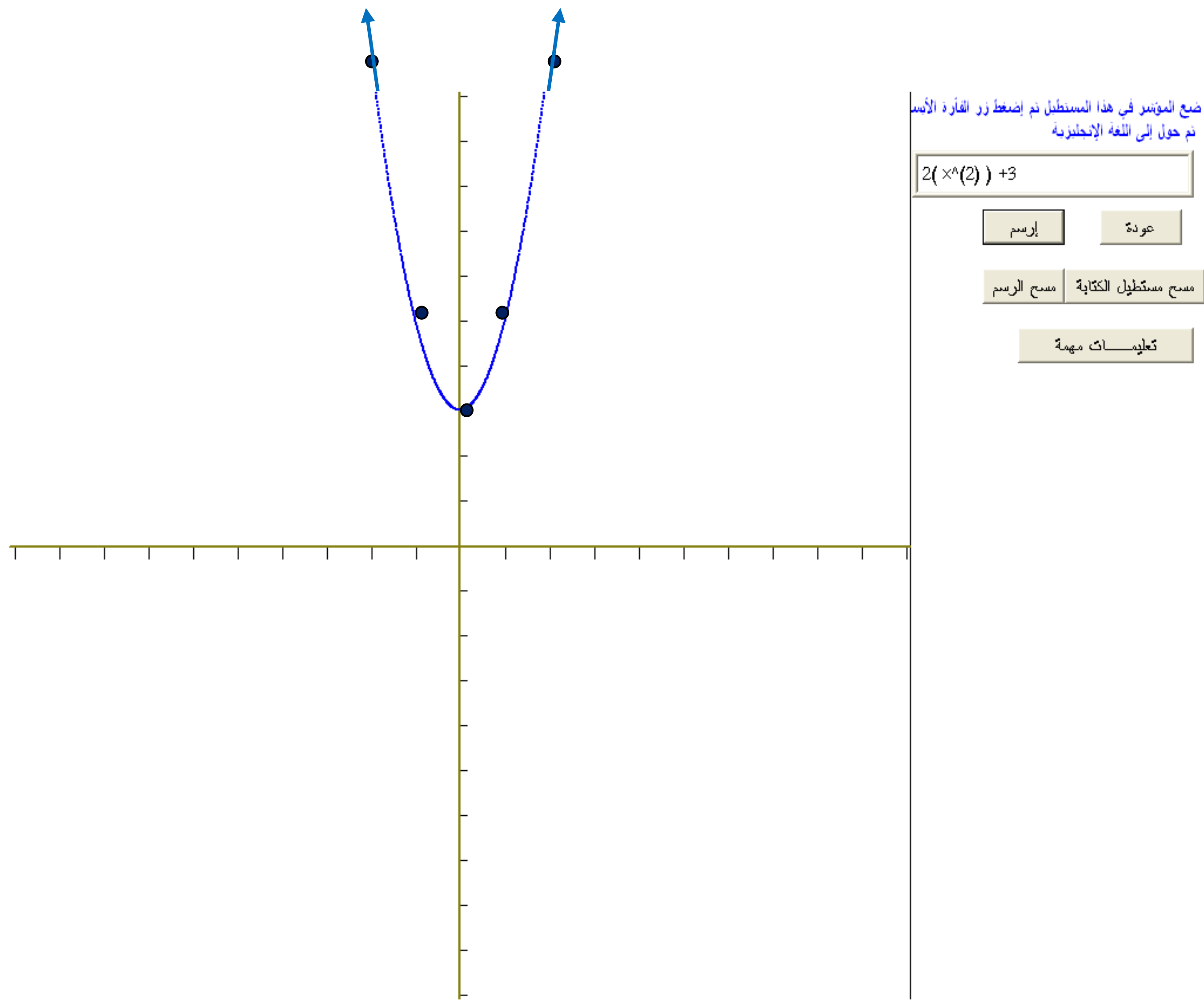


3. $f(x) = \ 2x^2 + \ 3$

X	- 2	- 1	0	1	2
Y	11	5	3	5	11

Domain = R

Range = [3 , ∞)

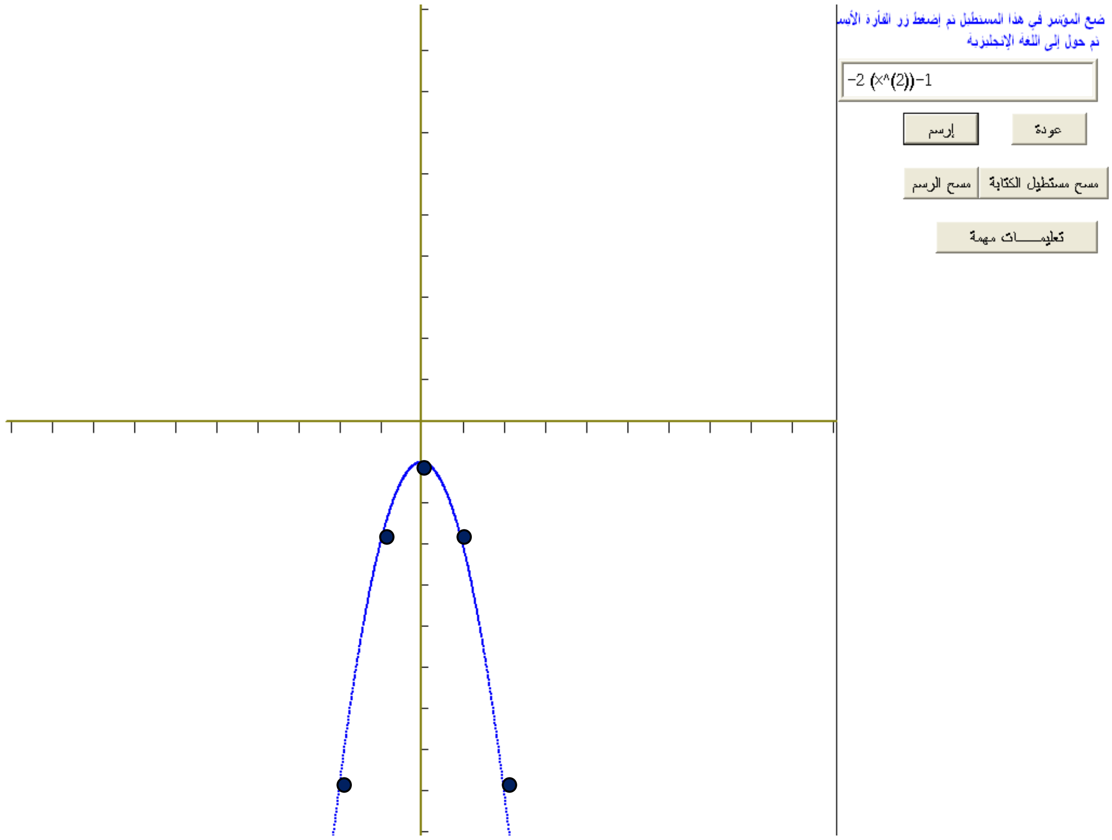


4. $g(x) = -2x^2 - 1$

X	- 2	- 1	0	1	2
Y	- 9	- 3	- 1	- 3	- 9

Domain = R

Range =(- ∞ , - 1]



Domain = x قيم , Range = y قيم

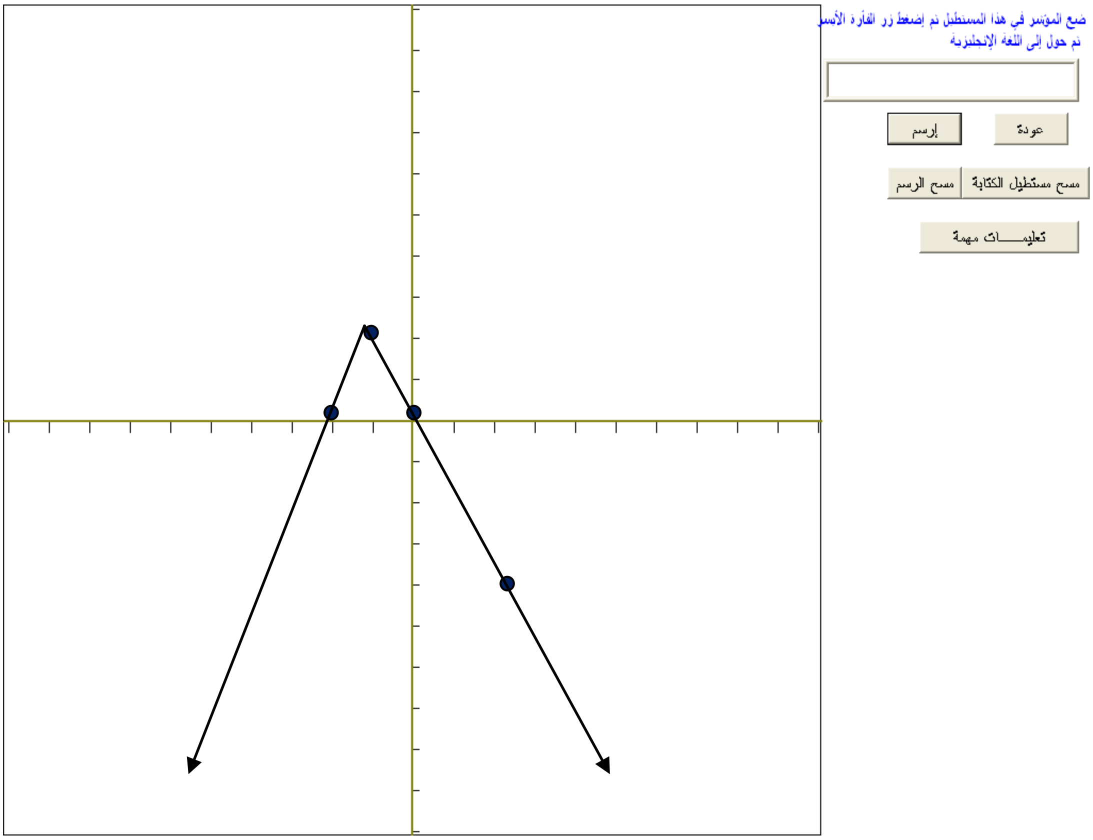
5. $g(x) = -2|x+1| + 2$

X	- 2	- 1	0	2
Y	0	2	0	- 4

Domain = R

$|x+1| \geq 0 \;, -2|x+1| \leq 0 \;\;, -2|x+1| + 2 \leq 2$

$y = -2|x+1| + 2 \leq 2 \;, Range = (-\infty, 2\,]$

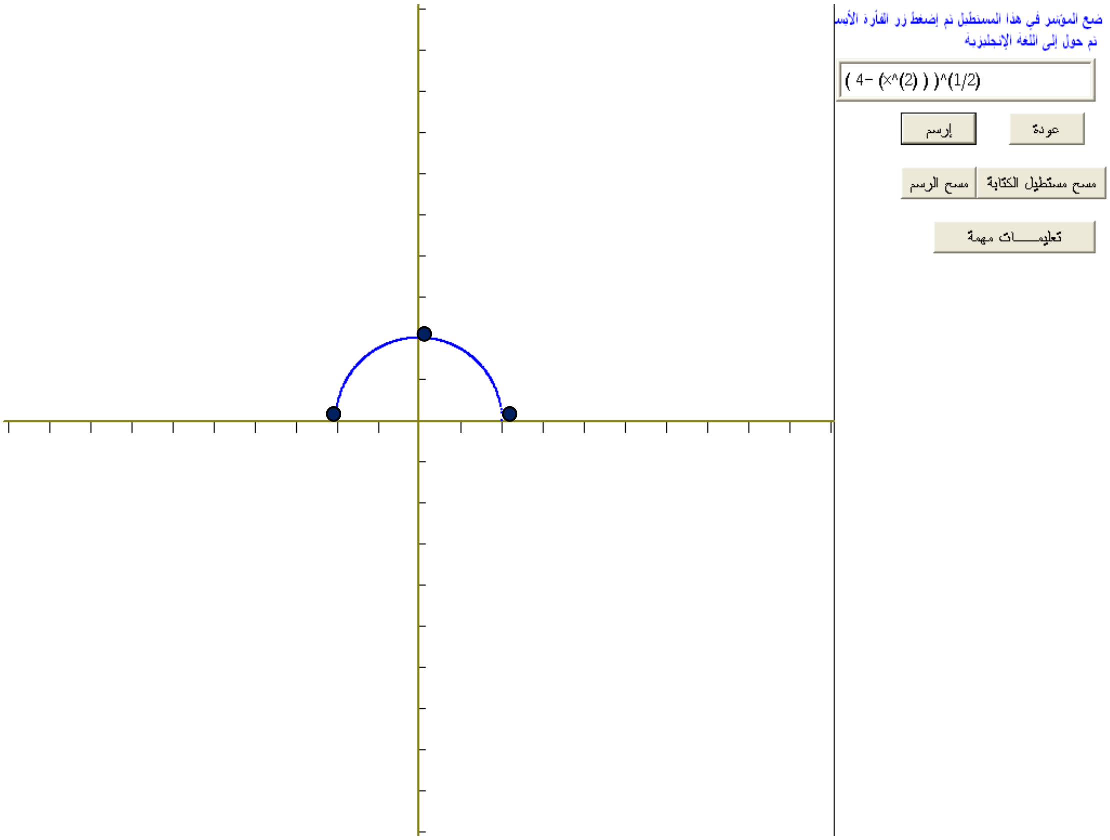


6. $y = \sqrt{4 - x^2}$

$4 - x^2 \geq 0$, $4 \geq x^2$, $x \leq 2$, $x \geq -2$

Domain=[- 2 , 2]   range=[0 , 2]

X	- 2	0	2
Y	0	2	0

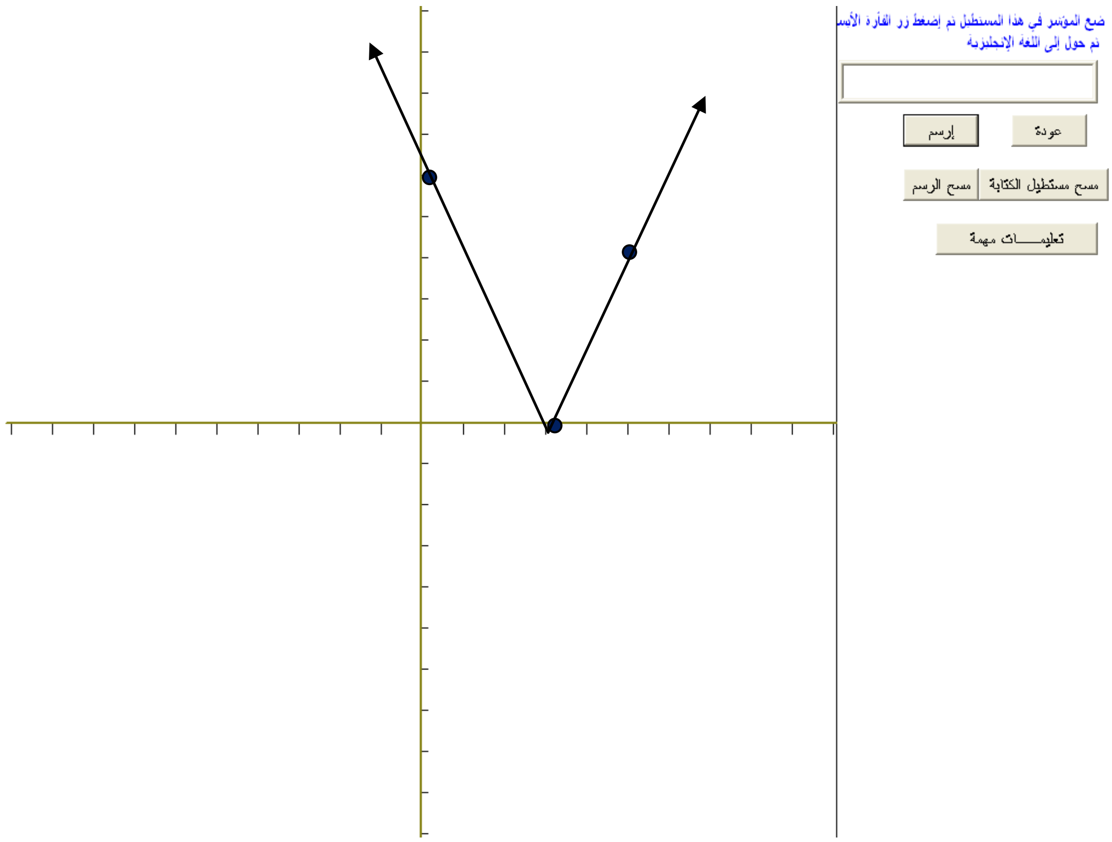


7. $f(x) = |2x - 6|$

Domain= R

$y = |2x - 6| \geq 0$, $Range = [\,0\,, \infty\,)$

X	0	3	5
Y	6	0	4



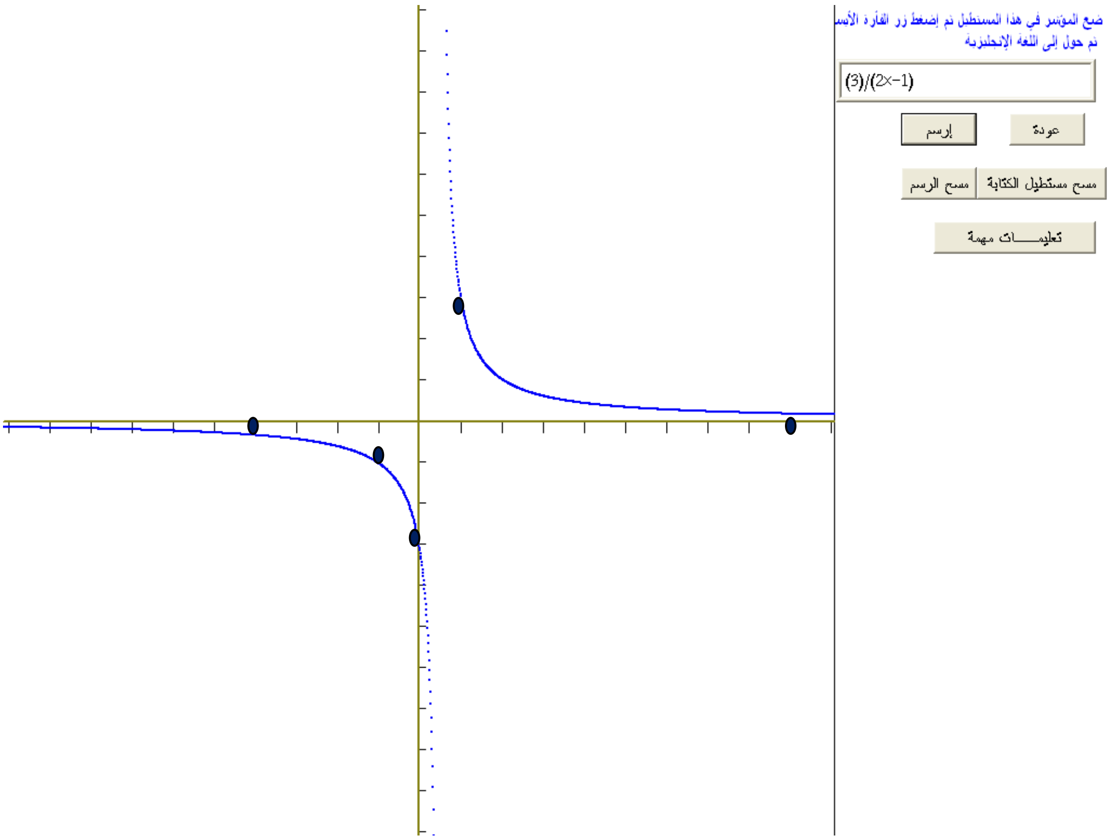
8. $f(x) = \dfrac{3}{2x-1}$

$2x - 1 = 0\,, \;\; x = \dfrac{1}{2} \;\;, \qquad Domain = R - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

X	- 4	- 1	0	1	3000000
y	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	3	$\cong \frac{1}{2000000}$

لاحظ أنه عندما تكون x كبيرة جداً جداً فإن y تكون صغيرة جداً جداً أي أن y تقترب من العدد 0 ولاكن لا تساويه أي أن

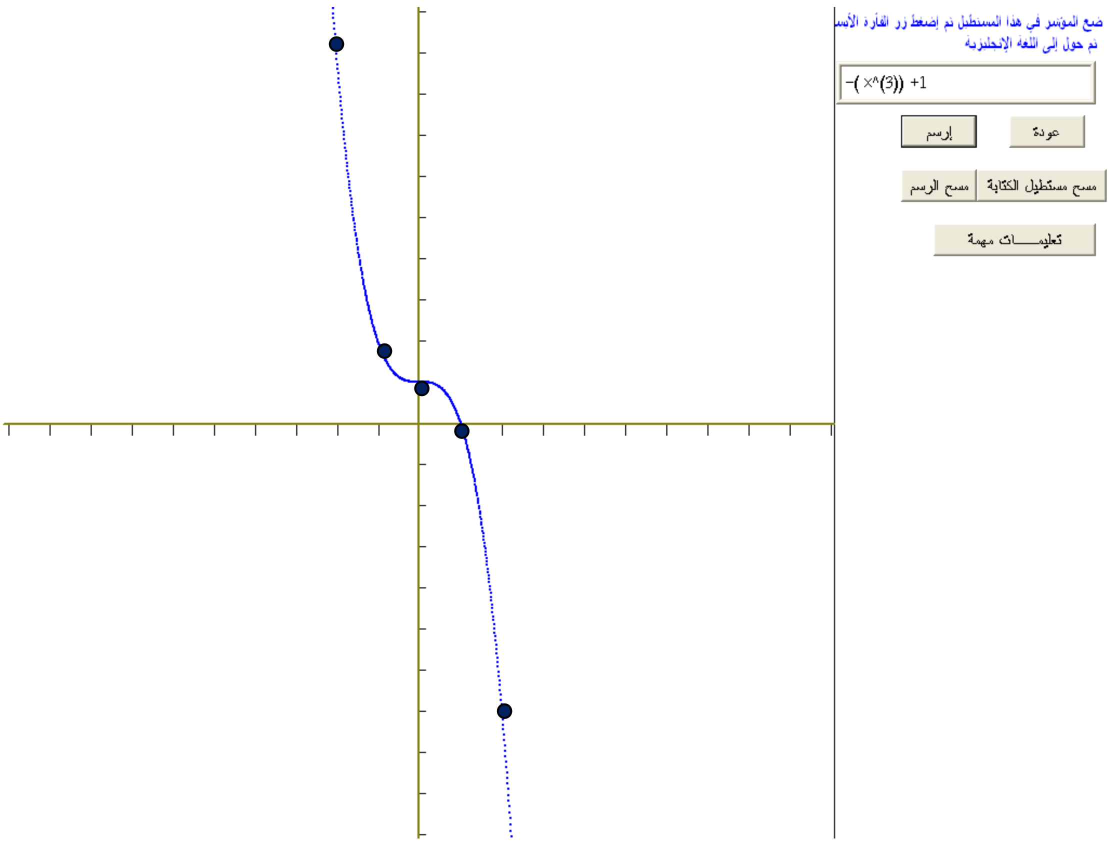
Range = R – { 0 }



9. $f(x) = -x^3 + 1$

Polynomial Domain = Range = R = المدى = المجال حدود كثيرة

X	- 2	- 1	0	1	2
Y	9	2	1	0	- 7



$$10.\ f(x) = \begin{cases} x \ \ for \ \ x < 0 \\ \\ 2x \ \ for \ \ x \geq 0 \end{cases}$$

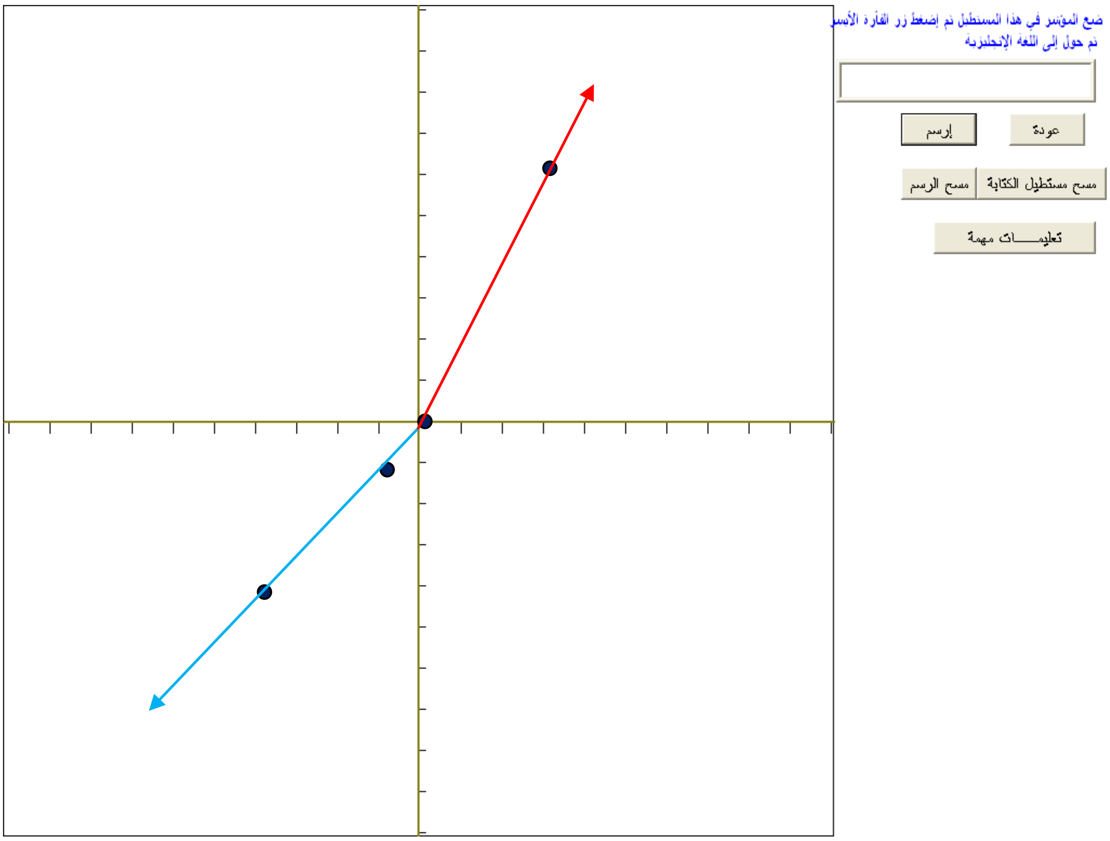
$$Domain = Range = (-\infty, \infty)$$

X	- 4	- 1
Y	- 4	- 1

for x< 0

x	0	3
y	0	6

$for\ x \geq 0$

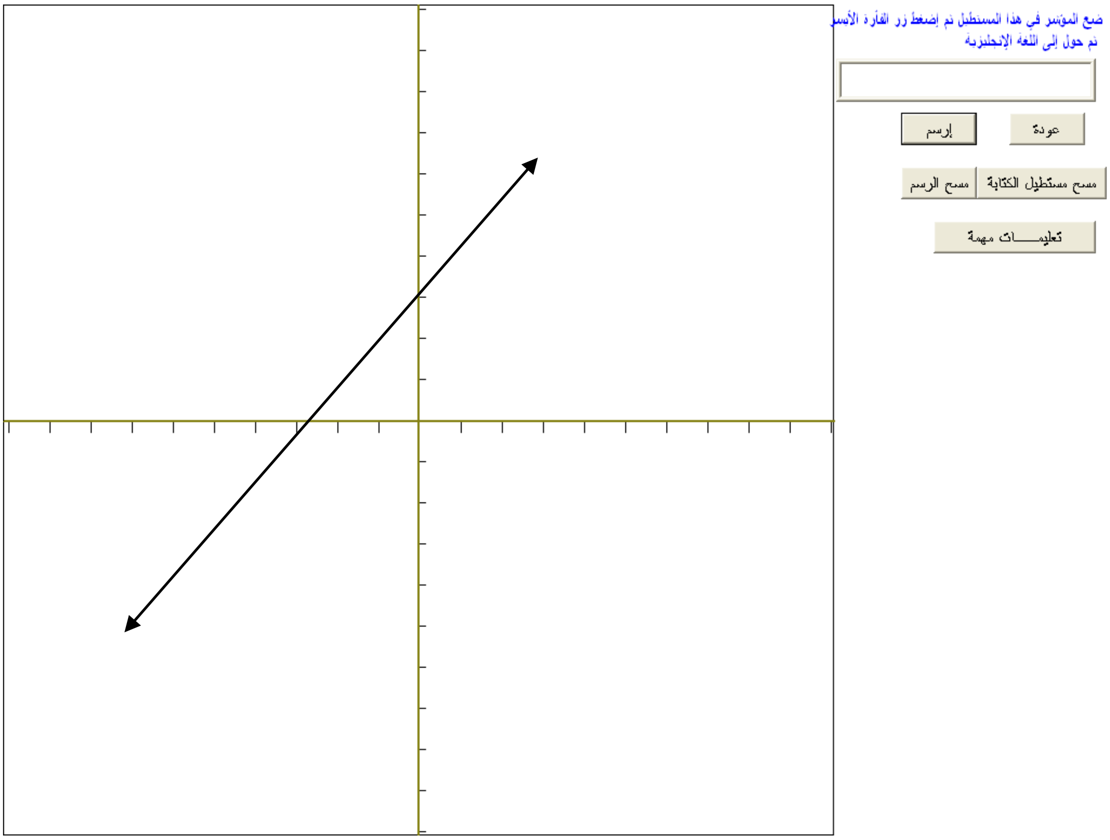


In exercises 11- 13 , Determine which of the following curves represent a graph of a function . Explain your reason for any that do not define a function.

في التمارين 11 - 13 حدد أي من المنحنيات الآتية يمثل رسم دالة . وضح سببك لأي منها لا يعرف دالة .

في مثل هذا النوع من الأسئلة أي عندما تعطى رسماً وتسأل هل هو رسم دالة أولا , استخدم اختبار المستقيم الرأسي vertical line test أي إذا كان أي مستقيم رأسي (مستقيم يوازي محور y) يقطع الرسم المعين في أكثر من نقطة واحدة فإن الرسم لا يمثل دالة

11.



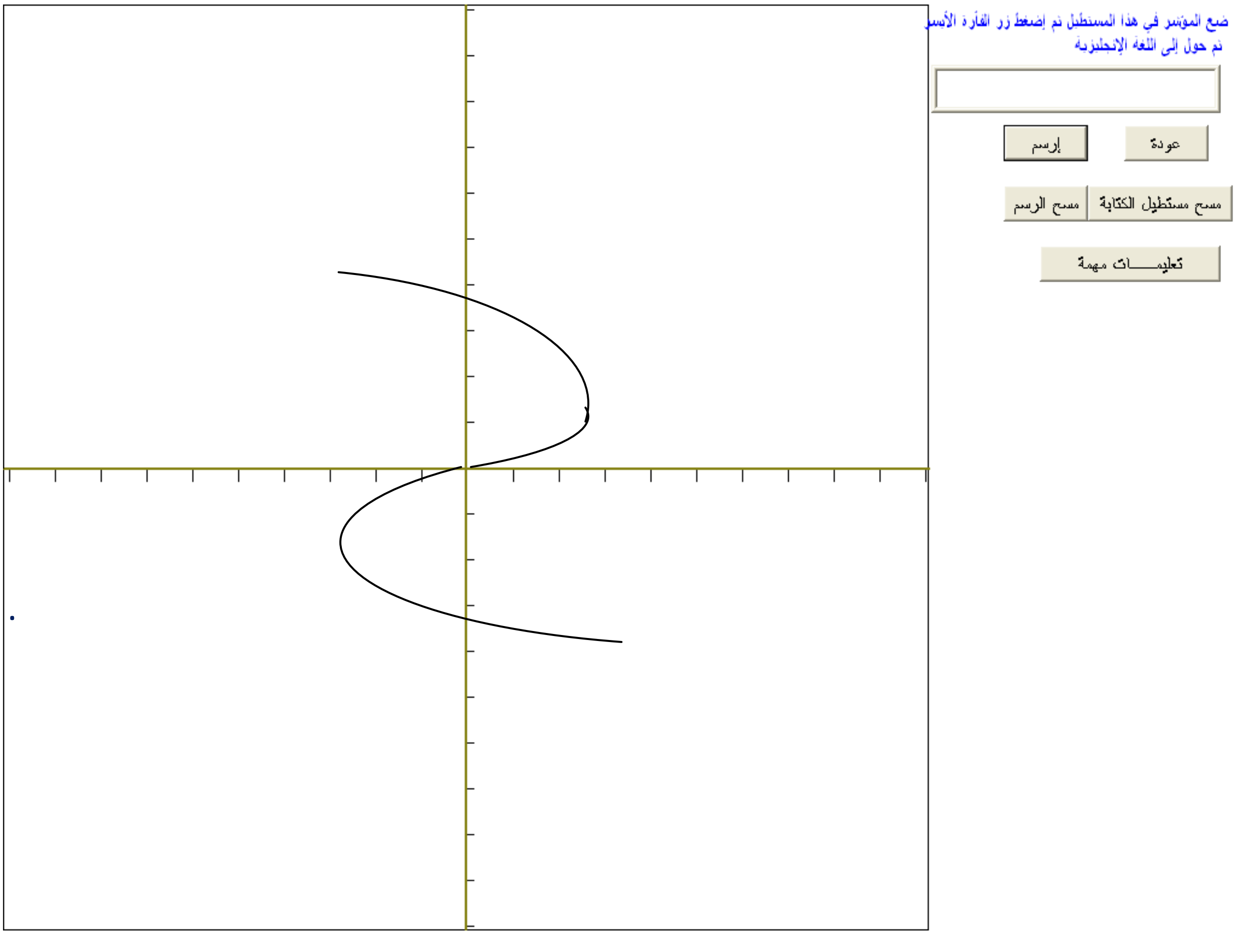
Function دالة

أي مستقيم رأسي ترسمه لن يقطع الرسم إلا في نقطة واحدة

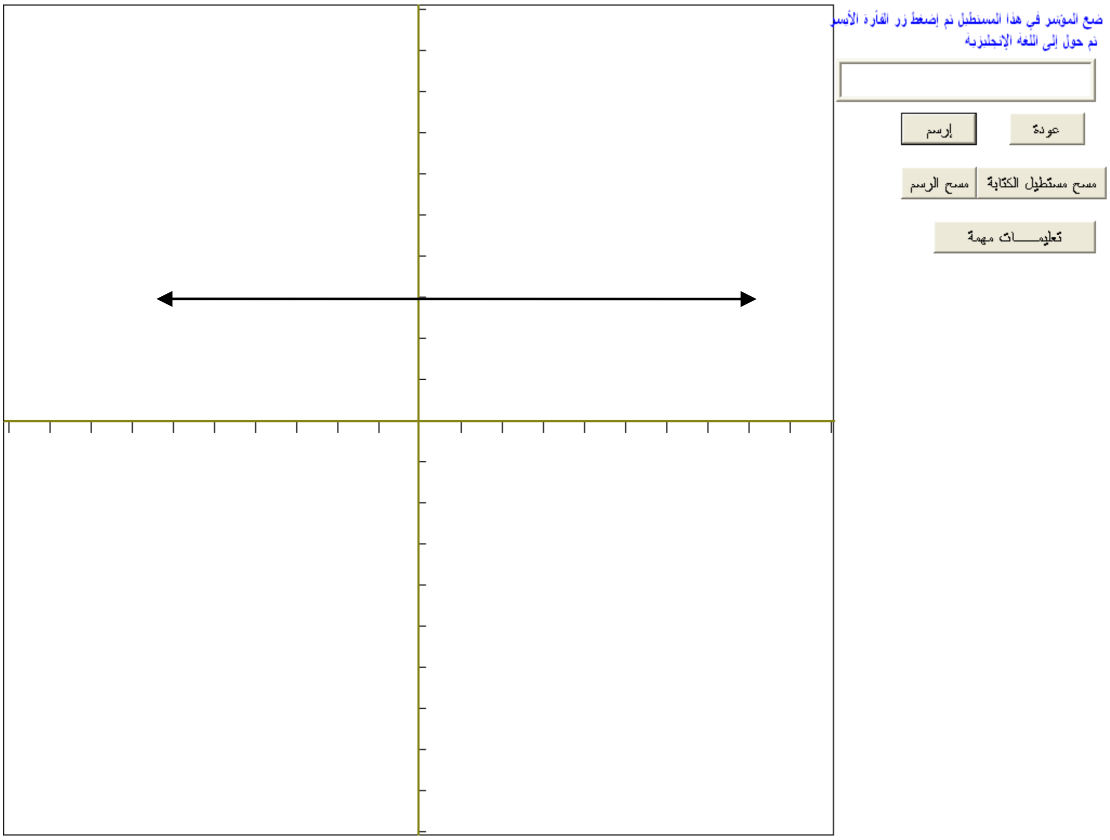
12.

Not Function ليست دالة

واضح أنه لورسمنا مستقيم رأسي لقطع رسم الدالة في أكثر من نقطة (لاحظ أن مجور y يقطع الرسم في ثلاث نقاط)



13.



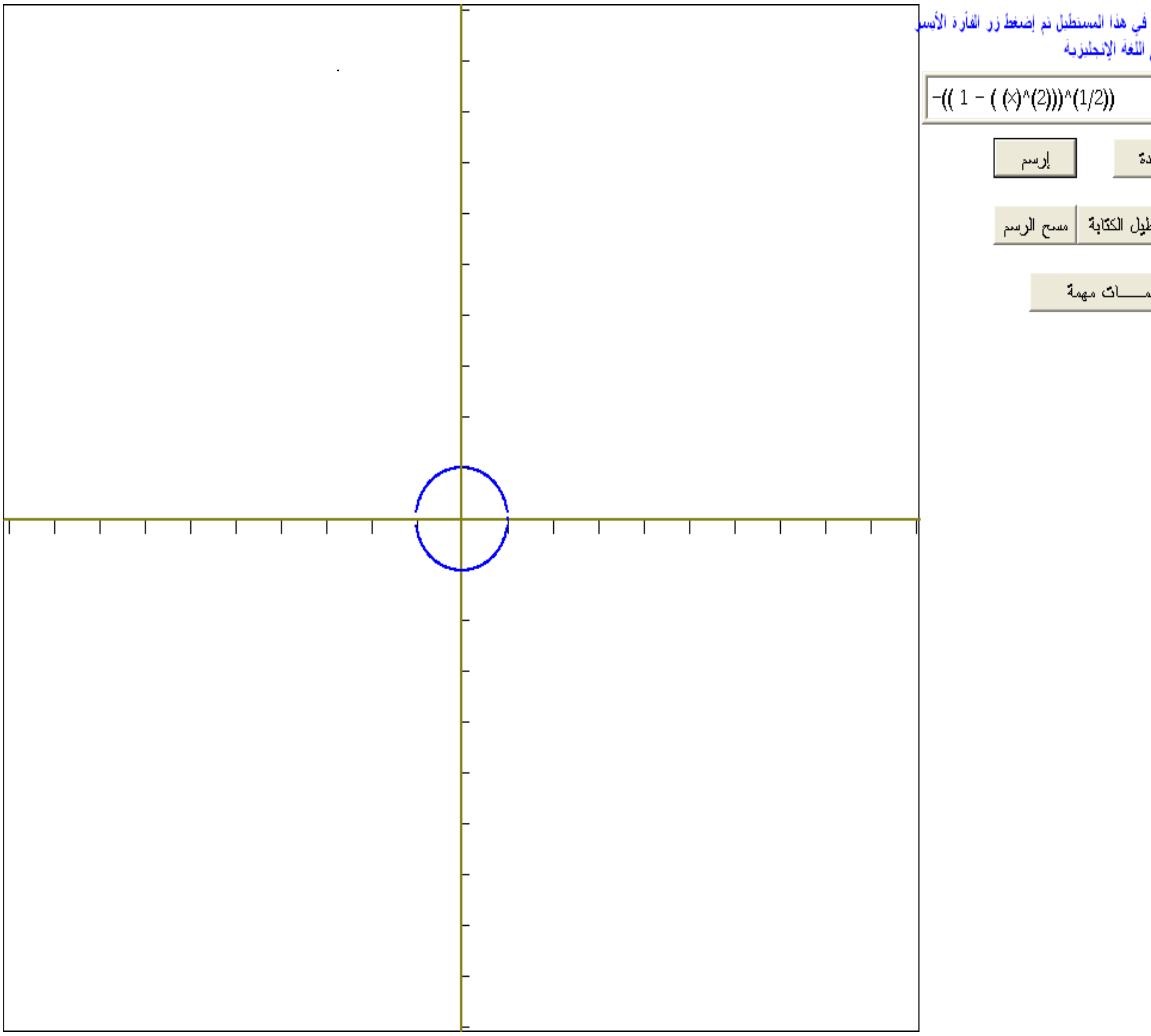
Function دالة

أي مستقيم رأسي ترسمه لن يقطع الرسم إلا في نقطة واحدة

In Exercises 14 - 19 , sketch the graph of the equation . In each case determine whether the graph is that of a function.

في التمارين 14 - 19 ارسم منحني المعادلة . في كل حالة قرر فيما إذا كان الرسم هو رسم دالة أم لا .

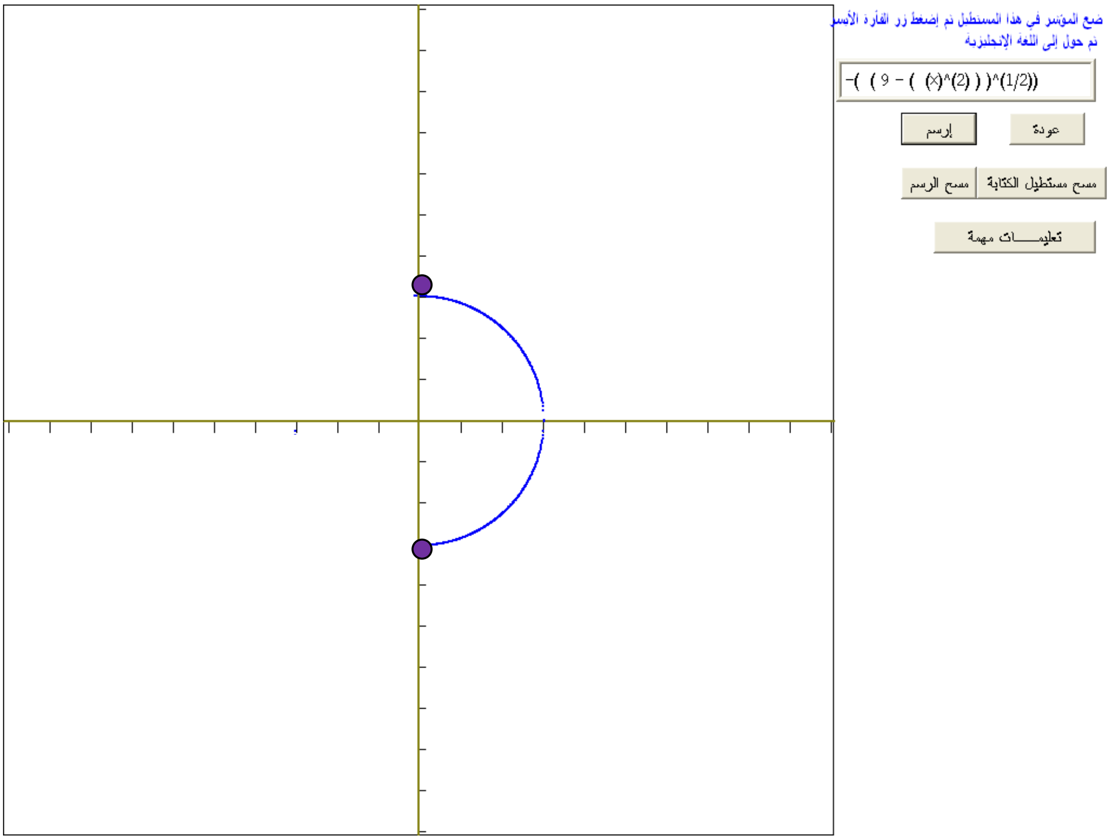
14. $x^2 + y^2 = 1$



Not function

معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1 وليست دالة لأن المستقيم الرأسي المار بالرسم سيقطع الدائرة في نقطتين مختلفتين .

15. $x^2 + y^2 = 9 \quad for \;\; x \geq 0$

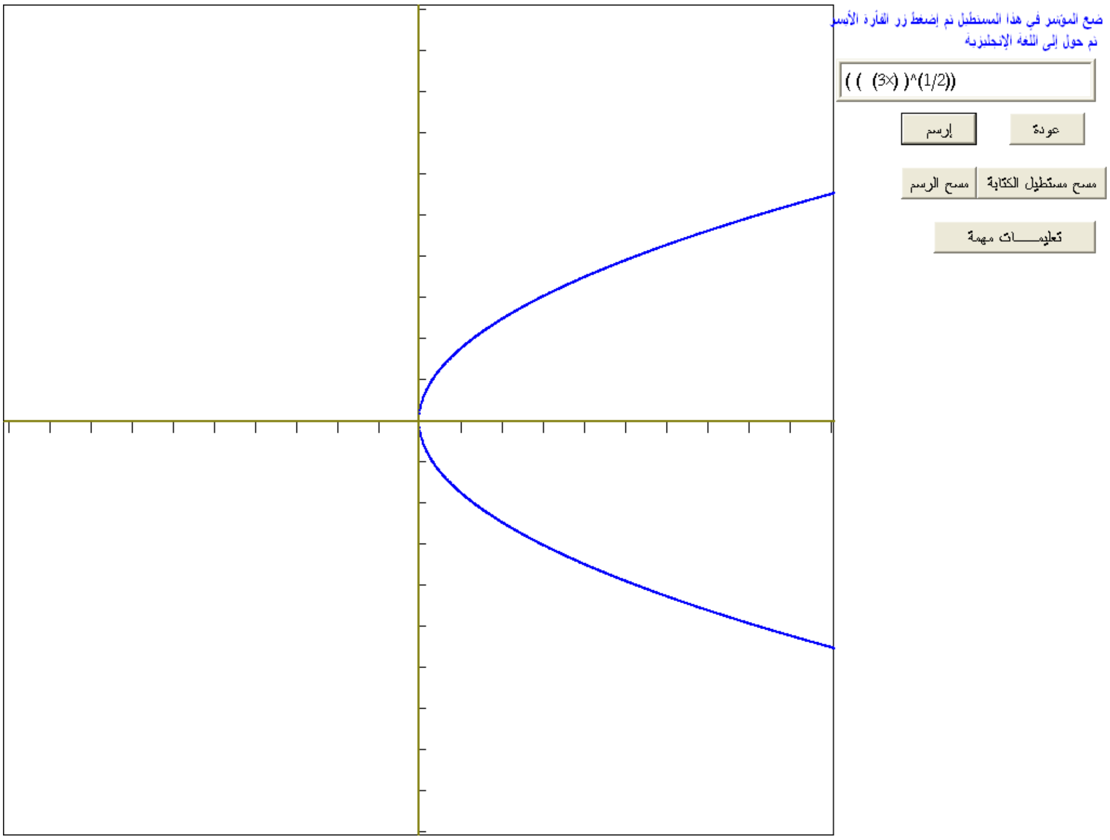


Not function

معادلة نصف دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 وليست دالة لأن المستقيم الرأسي المار بالرسم سيقطع الدائرة في نقطتين مختلفتين .

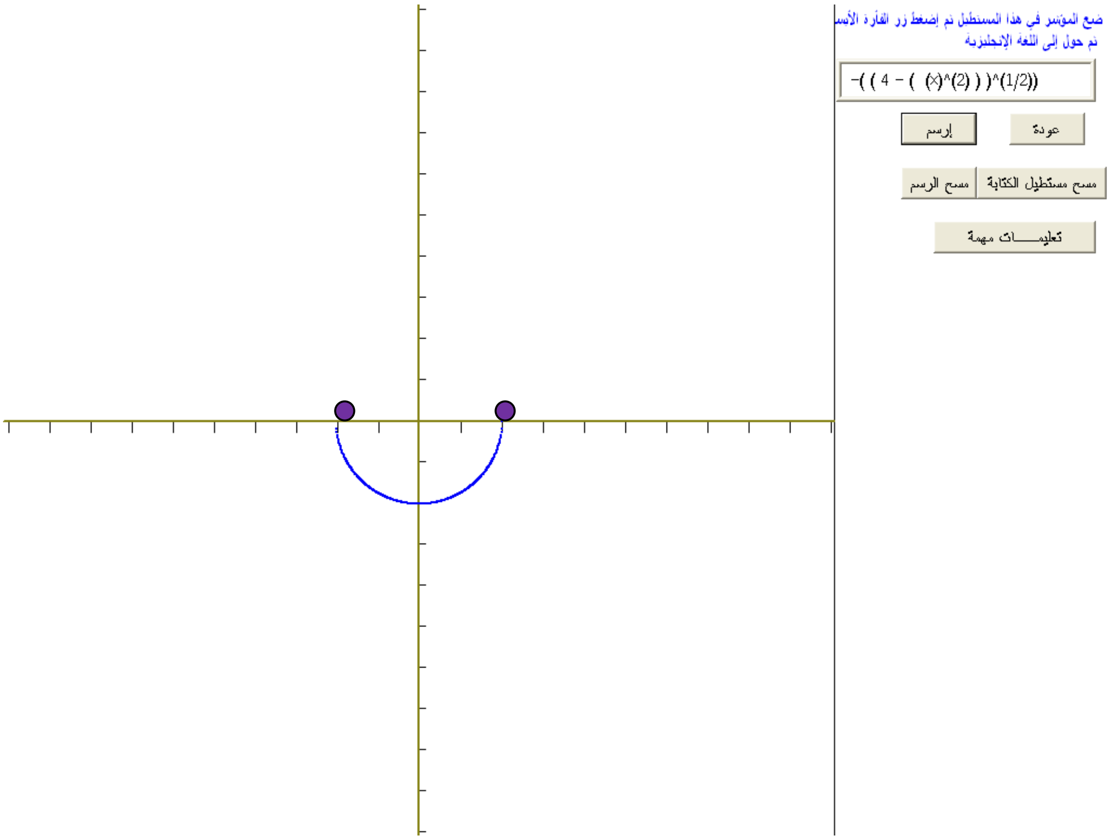
16. $x = \dfrac{1}{3}\, y^2$

$y^2 = 3x \;, \qquad y = \pm\sqrt{3x}$



Not function

17. $x^2 + y^2 = 4 \quad for\ y \leq 0$



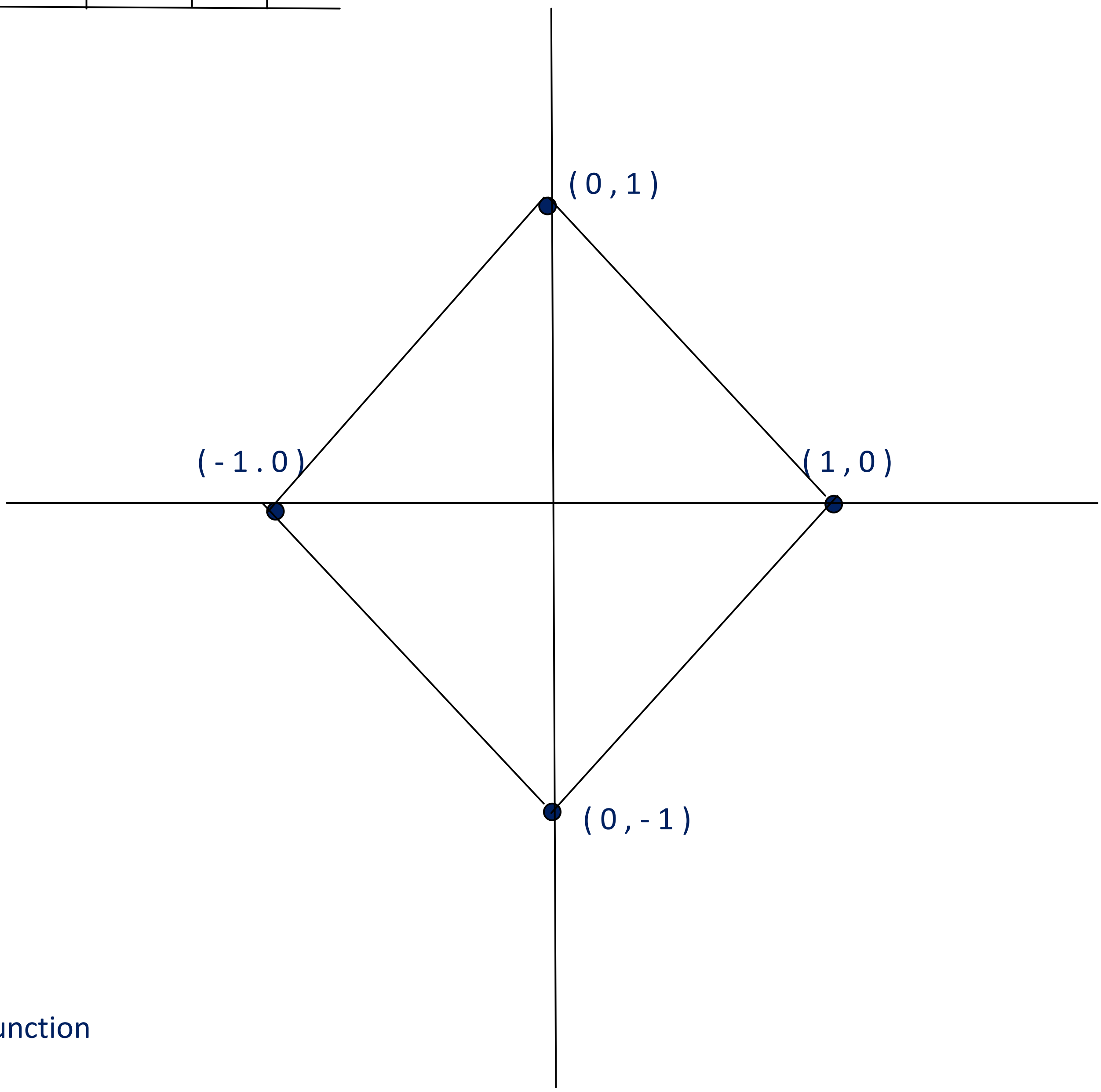
Function دالة

18. $|x| + |y| = 1$

لكي يكون حاصل الجمع يساوي العدد 1 لذلك فإن

$-1 \leq x \leq 1$ *and* $-1 \leq y \leq 1$

x	-1	0	0	1
y	0	-1	1	0

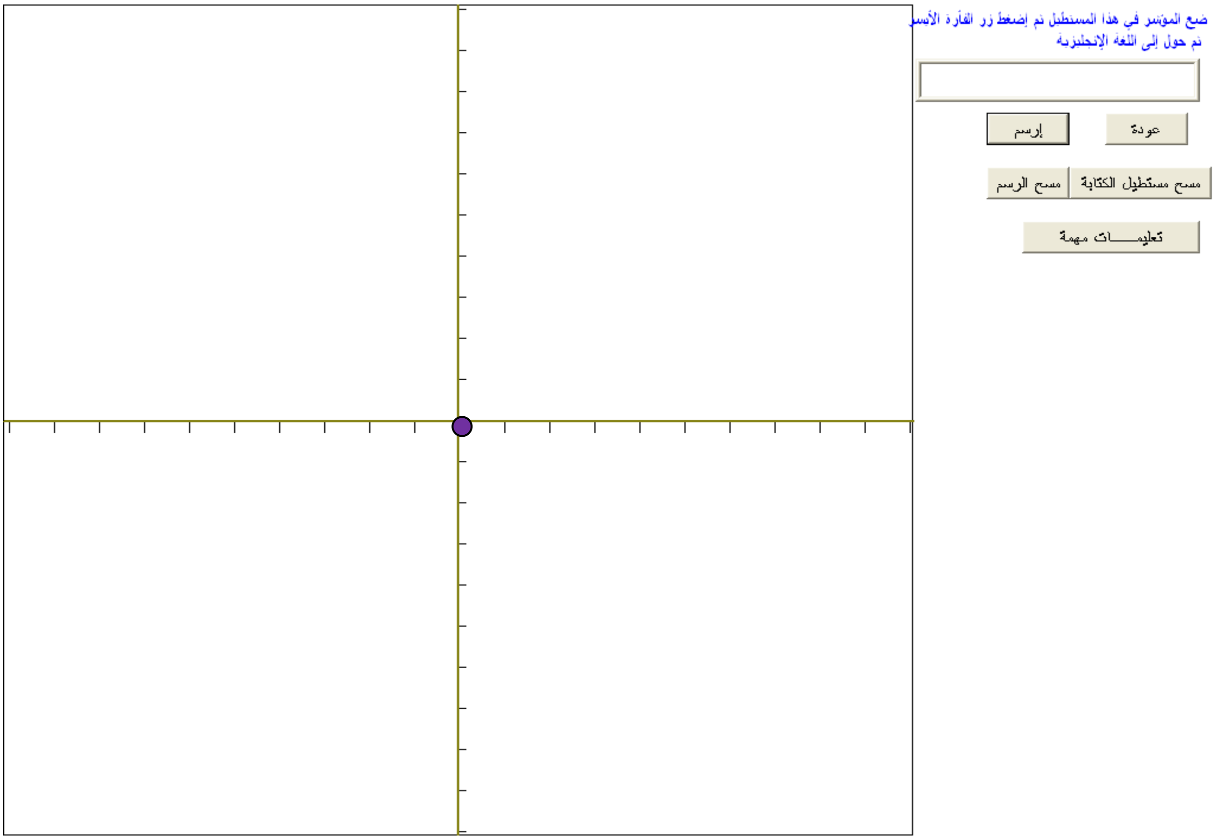


Not function

19. $x^2 + y^2 = 0$

$x^2 \geq 0 \quad , \qquad y^2 \geq 0 \quad , \qquad x^2 + y^2 \geq 0$

X = 0 and y=0



Function , Domain ={0} and Range={0}

Function = (0 , 0)

دالة تتكون من نقطة واحدة هي نقطة الأصل في الاحداثيات

In Exercises 20 - 27 , determine all intercepts of the graph of the equation . Then decide whether the graph is symmetric x-axis , y-axis or the origin .

في التمارين 20 -27 حدد جميع تقاطعات رسم المعادلة . ثم قرر فيما إذا كان الرسم متماثل مع محور x , محور y أو نقطة الأصل .

1) الرسم يقطع محور الصادات (y-axis) عندما x=0 لذلك لكي نجد قيمة y التي عندها يقطع الرسم محور y (y-intercept) نعوض في المعادلة عن كل x بالعدد 0 ونحل الناتج بالنسبة للمتغير y .

2) الرسم يقطع محور السينات (x-axis) عندما y=0 لذلك لكي نجد قيمة x التي عندها يقطع الرسم محور x (x-intercept) نعوض في المعادلة عن كل y بالعدد 0 ونحل الناتج بالنسبة للمتغير x .

3) يكون رسم المعادلة متماثل بالنسبة لمحور x (symmetric with x-axis) إذا لم تتغير المعادلة عندما نستبدل كل y بسالب y .

لاحظ أنه إذا كانت كل أسس y في المعادلة أعداداً زوجية فإن رسم المعادلة يكون متماثلاً بالنسبة لمحور x لأن

$(-y)^{2n} = y^{2n}$, عدد صحيح n

4) يكون رسم المعادلة متماثل بالنسبة لمحور y (symmetric with y-axis) إذا لم تتغير المعادلة عندما نستبدل كل x بسالب x . أي

$\boldsymbol{f}(-x) = \boldsymbol{f}(x)$

لاحظ أنه إذا كانت كل أسس x في المعادلة أعداداً زوجية فإن رسم المعادلة يكون متماثلاً بالنسبة لمحور y لأن

$(-x)^{2n} = x^{2n}$, عدد صحيح n

5) يكون رسم المعادلة متماثل بالنسبة لنقطة الأصل (symmetric with origin) إذا لم تتغير المعادلة عندما نستبدل كل x بسالب x وكل y بسالب y .

لاحظ أنه إذا كانت كل أسس x وكل أسس y في المعادلة أعداداً زوجية فإن رسم المعادلة يكون متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل origin .

20. $\boldsymbol{x = 3y^2 - 2}$

يقطع محور الصادات عندما x=0 أي

$0 = 3y^2 - \ 2\ , \qquad 3y^2 = 2\ , \qquad y^2 = \frac{2}{3}\ , y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$y - intercepts : \sqrt{\frac{2}{3}}\ and\ - \sqrt{\frac{2}{3}}$

يقطع محور السينات عندما y=0 أي

X=0 – 2 = - 2 , x-intercept : - 2

نستبدل كل y بسالب y في المعادلة أي

$x = 3(-y)^2 - \ 2 = 3y^2 - \ 2\ , \quad (\ -a\ )^2 = a^2$ لا تنسى

لم تتغير المعادلة إذاً رسم المعادلة متماثل حول محور x , symmetric with x-axis

نستبدل كل x بسالب x في المعادلة أي

$-\ x = 3y^2 - \ 2\ \ or\ x = -3y^2 + 2$

تغيرت المعادلة إذاً رسم المعادلة غير متماثل مع محور y

Not symmetric with y-axis

نستبدل كل x بسالب x و كل y بسالب y في المعادلة أي

$-x = 3(\ -y\ )^2 - 2 = 3y^2 - \ 2\ , \qquad x = -3y^2 + 2$

تغيرت المعادلة إذاً رسم المعادلة غير متماثل مع نقطة الأصل

Not symmetric with origin

21. $x^2 - y^2 = 1$

يقطع محور الصادات عندما x=0 أي

$-y^2 = 1\,,\ \ y^2 = -1\,, \qquad no\ solution$

لا يوجد حل حقيقي لأن $y^2 \geq 0$ إذاً الرسم لا يقطع محور y أي

No y-intercept

يقطع محور السينات عندما y=0 أي

$x^2 = 1\,, \qquad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

x-intercepts : 1 , - 1

أسس كل من x و y هي أعداد زوجية إذاً

لو استبدلنا كل x بسالب x و كل y بسالب y لما تغيرت المعادلة إذاً

رسم المعادلة متماثل حول محور x , symmetric with x-axis

رسم المعادلة متماثل حول محور y , symmetric with y-axis

رسم المعادلة متماثل حول نقطة الأصل symmetric with origin

22. $x^4 = 3y^3$

يقطع محور الصادات عندما x=0 أي

$3y^3 = 0\,, \qquad y = 0$

y-intercepts : 0

يقطع محور السينات عندما y=0 أي

$x^4 = 0\ , x = 0$

x-intercept : 0

أسس x في المعادلة زوجية أي أن f(-x)=f(x) إذاً الرسم متماثل حول محور y

symmetric with y-axis

عندما نستبدل كل y بسالب y ينتج

$x^4 = 3(-y)^3 = -3y^3$

تغيرت المعادلة أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور x

Not symmetric with x-axis

أيضا يكون الرسم غير متماثل مع نقطة الأصل لأنه عند استبدال y بسالب y تغيرت المعادلة

Not symmetric with origin

23. $x^2y^4 - 2x^4 = 1$

يقطع محور الصادات عندما x=0 أي

0=1 عبارة غير صحيحة لذلك لا يقطع محور الصادات

No y-intercept

يقطع محور السينات عندما y=0 أي

$-2x^4 = 1, \qquad x^4 = -\frac{1}{2} \;, \qquad x^4 \geq 0$

لا يوجد حل لذلك لا يقطع محور السينات

No x-intercept

المعادلة لن تتغير عندما نستبدل x بسالب x أو y بسالب y لأن أسسهما زوجية

أي أن الرسم متماثل حول المحور وحول نقطة الأصل

symmetric with x-axis , symmetric with y-axis , symmetric with origin

24. $y = x - \frac{1}{x}$

المعادلة غير معرفة عندما x = 0 أي لا يوجد قيمة للمتغير y

No y-intercept

$0 = x^2 - 1$, $(x-1)(x+1) = 0 , x = \pm 1$

x-intercept 1 , - 1

نستبدل كل y بسالب y أي

$-y = x - \frac{1}{x}$, $y = -x + \frac{1}{x}$

تغيرت المعادلة أي أن الرسم غير متماثل مع محور x

Not symmetric with x-axis

نستبدل كل x بسالب x أي

$y = -x + \frac{1}{x}$

تغيرت المعادلة أي أن الرسم غير متماثل مع محور y

Not symmetric with y-axis

نستبدل كل y بسالب y و كل x بسالب x أي

$-y = -x + \frac{1}{x}$, $y = x - \frac{1}{x}$

ضربنا الطرفين بـ 1 -

لم تتغير المعادلة أي أن الرسم متماثل حول نقطة الأصل

symmetric with origin

25. $y = \sqrt{9 - x^2}$

$when\ x = 0\ ,\qquad y = \sqrt{9 - 0} = \sqrt{9}\,,\qquad y = 3$

y-intercept : 3

$when\ y = 0\,, 0 = \sqrt{9 - x^2}\ ,\ 9 - x^2 = 0\,, x = \pm 3$

x-intercept : - 3 , 3

$-y = \sqrt{9 - x^2}\ ,\qquad y = -\sqrt{9 - x^2}$

تغيرت المعادلة عند استبدال y بسالب y أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور x

Graph Not symmetric with x-axis

$y = \sqrt{9 - (-x)^2}\ ,\qquad y = \sqrt{9 - x^2}$

لم تتغير المعادلة عند استبدال x بسالب x أي أن رسم المعادلة متماثل مع محور y

Graph symmetric with y-axis

$-y = \sqrt{9 - (-x)^2}\ ,\ -y = \sqrt{9 - x^2}\ ,\qquad y = -\sqrt{9 - x^2}$

تغيرت المعادلة عند استبدال y بسالب y و استبدال x بسالب x أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع نقطة الأصل

Graph Not symmetric with origin

لا حظ أن المعادلة هي معادلة الجزء العلوي لدائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3

26. $\sqrt{y} + \sqrt{x} = 1$

$x = 0\ ,\qquad \sqrt{y} = 1\ , y = 1$

y-intercept : 1

$y = 0\ ,\qquad \sqrt{x} = 1\ , x = 1$

x-intercept : 1

$\sqrt{-y} + \sqrt{x} = 1\ ,\ \sqrt{y}\,i + \sqrt{x} = 1$

تغيرت المعادلة عند استبدال y بسالب y أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور x

Graph Not symmetric with x-axis

$i = \sqrt{-1}$ لا تنسى

$\sqrt{y} + \sqrt{-x} = 1\ ,\ \sqrt{y} + \sqrt{x}\ i = 1$

تغيرت المعادلة عند استبدال x بسالب x أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور y

Graph Not symmetric with y-axis

$\sqrt{-y} + \sqrt{-x} = 1\ ,\qquad \sqrt{y}\,i + \sqrt{x}\ i = 1\ \ , i(\sqrt{y} + \sqrt{x}) = 1$

عدد مركبcomplex number يساوي عدد حقيقي real number

Graph Not symmetric with origin

$0 \le x \le 1\ , 0 \le y \le 1$ لاحظ أن

27. $y^2 = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

$x = 0\,, \qquad y^2 = \dfrac{1}{-1} = -1\,, \qquad but\ \ y^2\ \geq 0\,, no\ solution$

No y-intercept

$y = 0\,, \qquad 0 = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

$x^2+1 = 0\,, but\ \ x^2+1 \geq 1\,, no\ solution$

No x-intercept

أسس كل من y و x أعداد زوجية إذاً الرسم متماثل مع محور x و محور y ونقطة الأصل

Graph is symmetric with y-axis , Graph is symmetric with x-axis

Graph is symmetric with origin

In Exercises 28 - 32 , sketch the graph .List the intercepts and describe the symmetry (if any) of the graph .

في التمارين 28 - 32 ارسم المنحني , اسرد التقاطعات وصف التماثل (ان وجد) للمنحني

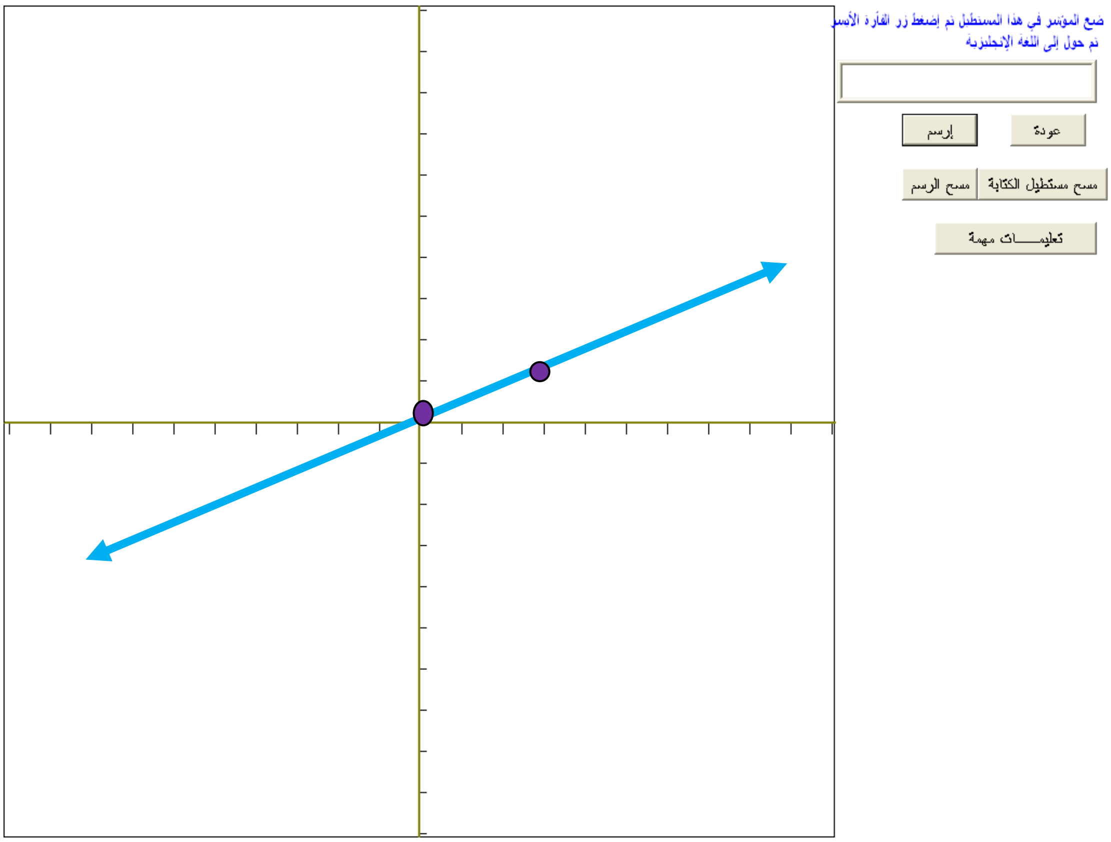
منحني المعادلة يعني رسم المعادلة

28. $y = \frac{1}{3}x$

هذه معادلة الدرجة الأولى ورسم معادلة الدرجة الأولى هو مستقيم لذلك لرسم المستقيم يكفي ايجاد نقطتين فقط نصلهما مع بعض بمستقيم ثم نمده من الجهتين

X	0	3
Y	0	1

أي نرسم النقطتين (0 , 0) و (3 , 1)



If X=0 , then y=0 so y-intercept : 0

If y=0 , then x=0 so x-intercept : 0

$-y = \frac{1}{3}x \ , \ y = -\frac{1}{3}x$

عند استبدال y بسالب y تغيرت المعادلة إذاً الرسم غير متماثل حول محور x

Graph is not symmetric with x-axis

$y = \frac{1}{3}(-x\,)\,, \qquad y = -\frac{1}{3}x$

عند استبدال x بسالب x تغيرت المعادلة إذاً الرسم غير متماثل حول محور y

Graph is not symmetric with y-axis

$-y = \frac{1}{3}(-x\,), \qquad -y = -\frac{1}{3}x\ , \qquad y = \frac{1}{3}x$

عند استبدال x بسالب x و عند استبدال y بسالب y لم تتغير المعادلة أي أن الرسم متماثل حول نقطة الأصل

Graph is symmetric with origin

لا تنسى ضرب جميع حدود المعادلة بعدد لا يغير المعادلة هنا ضربنا بالعدد 1-

29. $y = x^2 - 3$

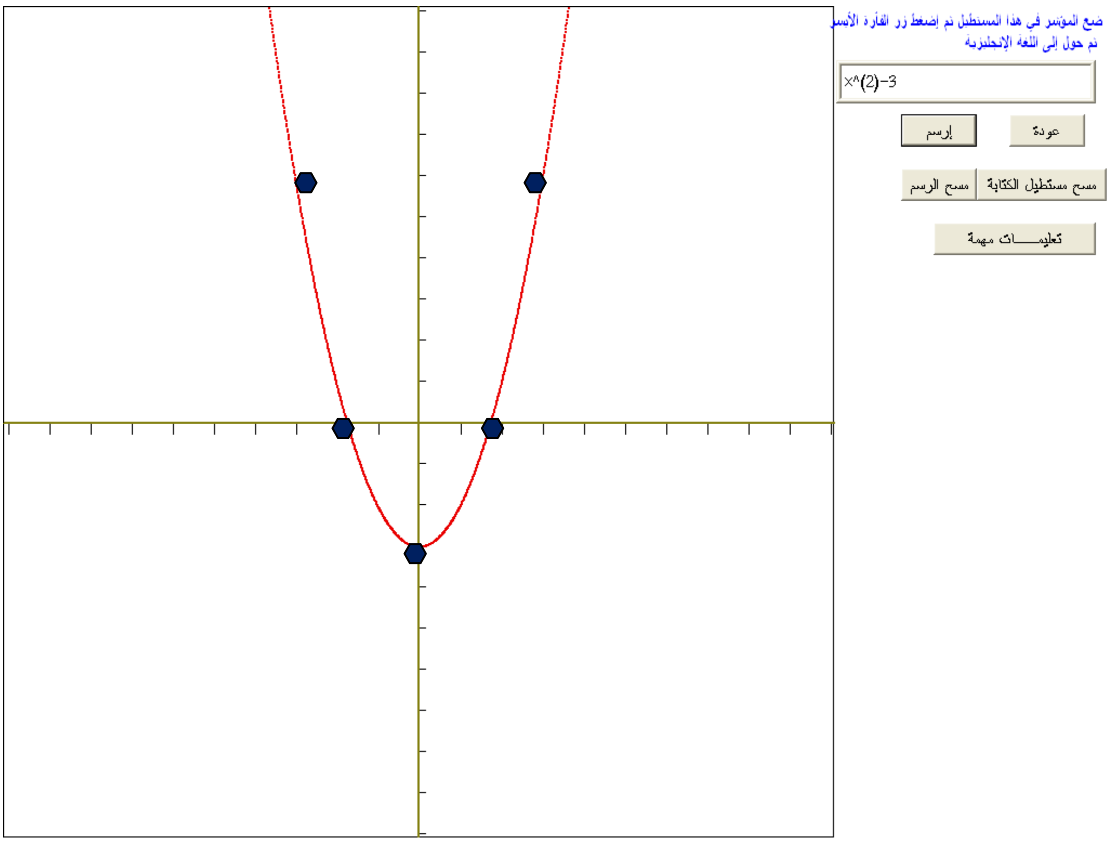
x	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	3	-3
y	-3	0	0	6	6

من جدول القيم ومن الرسم نجد أن

y-intercept : - 3 , $x-$ intercept : $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

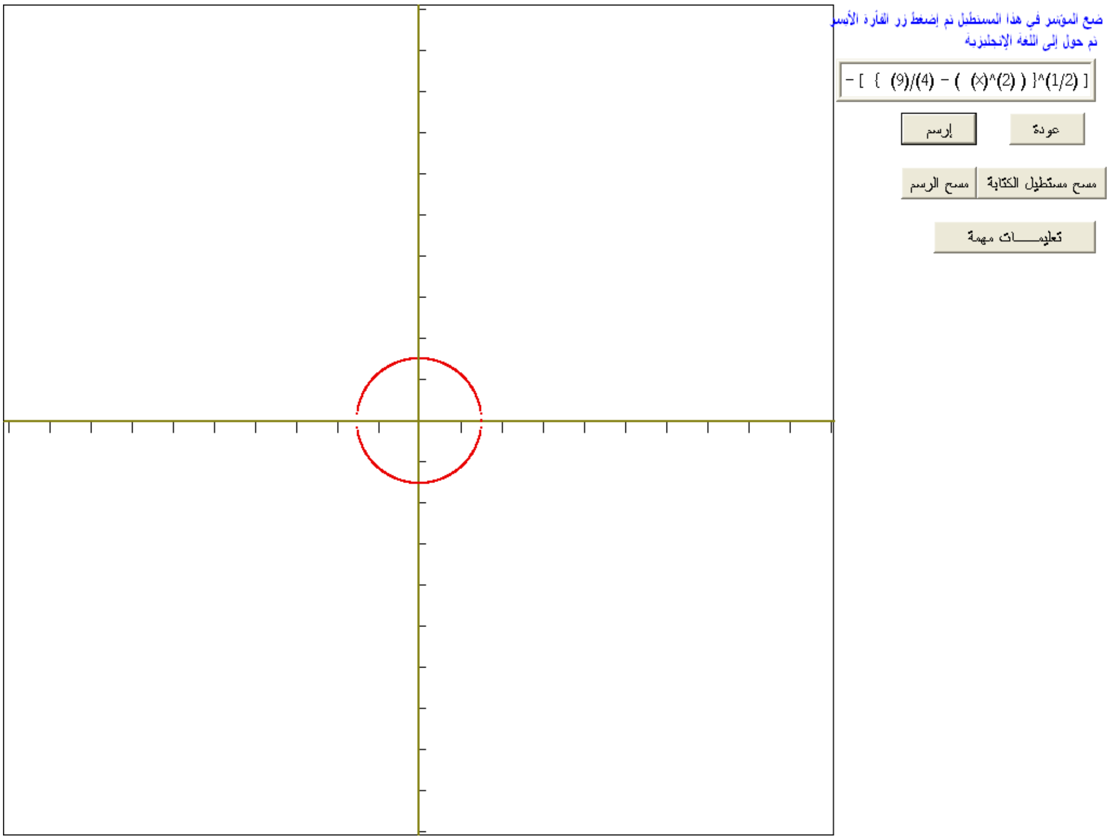
Graph is symmetric with y-axis , Graph is not symmetric with x-axis

Graph is not symmetric with origin



30. $4x^2+4y^2=9\,,\;\; x^2+y^2=\dfrac{9}{4}\,,\;\; y^2=\dfrac{9}{4}-x^2\;,\qquad y=\pm\sqrt{\dfrac{9}{4}-x^2}$

$\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}=1.5$ معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل origin ونصف قطرها



من الرسم يتضح أن

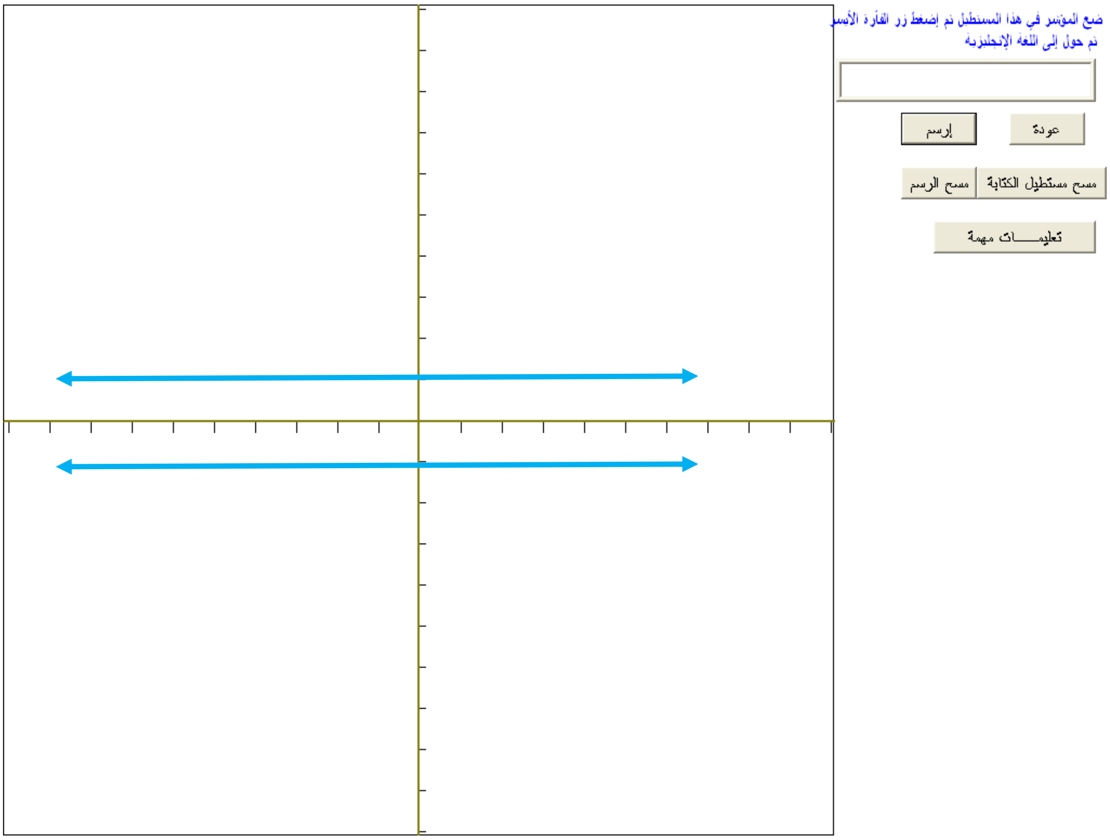
x-intercept: - 1.5 , 1.5 , y-intercept : - 1.5 , 1.5

Graph is symmetric with x-axis , Graph is symmetric with y-axis Graph is symmetric with origin

31. $|y| = 1 , \qquad y = 1 \;\; or \;\; y = \; -1$

Y=1 مستقيم أفقي (موازي لمحور x) يقطع محور y عند (0 ,1)

Y=-1 مستقيم أفقي (موازي لمحور x) يقطع محور y عند (0 , -1)



من الرسم يتضح أن

No x-intercept: , y-intercept : - 1 , 1

Graph is symmetric with x-axis , Graph is symmetric with y-axis , Graph is symmetric with origin

32. $x = \sqrt{4 - y^2}$

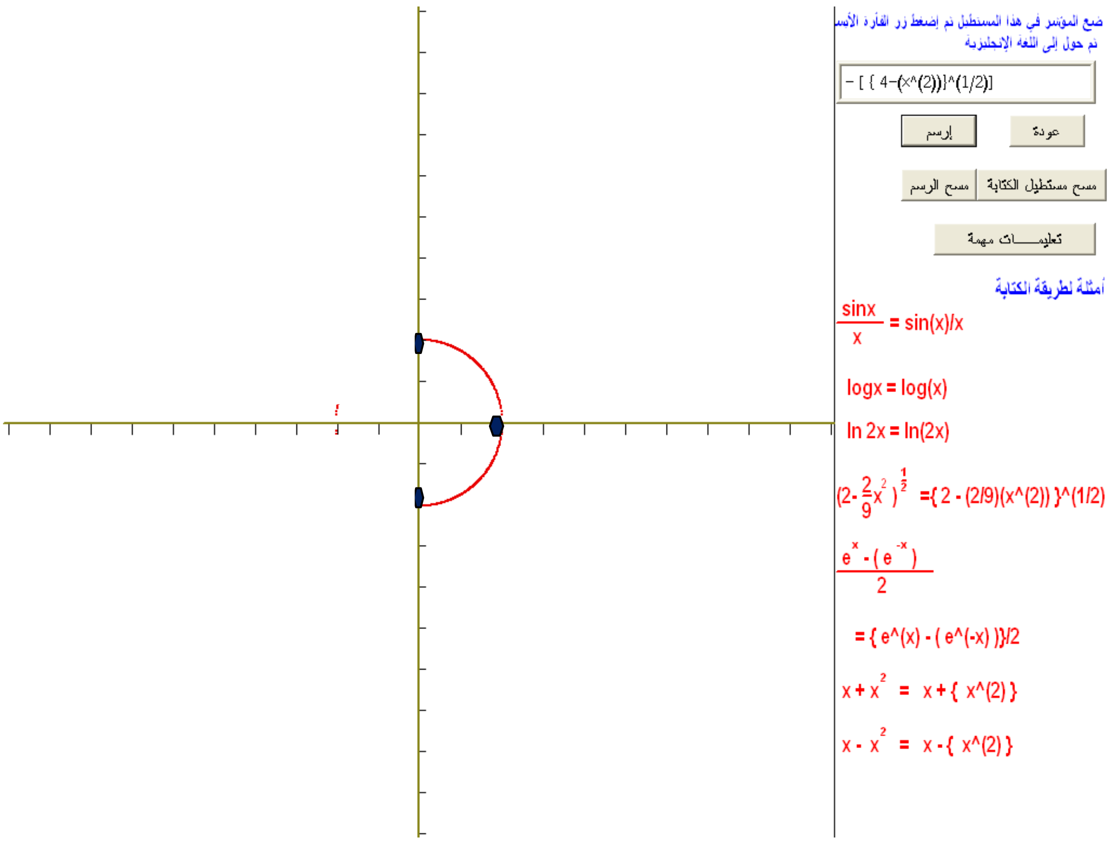
لاحظ أن x بدلالة y وليس العكس

$$4 - y^2 \geq 0 , \qquad y^2 \leq 4 , \qquad y \leq 2 \; or \; y \geq -2$$

$$4 - y^2 \geq 0 \; so \; \sqrt{4 - y^2} \geq 0 \; so \; x \geq 0$$

لا حظ أن $x \geq 0$ وأن $-2 \leq y \leq 2$ أي أن الرسم هو النصف الأيمن لدائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2

y	-2	0	2
x	0	2	0



من الرسم يتضح أن

x-intercept: 2 , y-intercept : - 2 , 2

Graph is symmetric with x-axis

In Exercises 33 – 38 sketch the graph of the given equation with the help of a suitable translation . Show both the x and y axis and the X and Y axis.

في التمارين 33 – 38 ارسم منحنى المعادلة المعطاة وذلك بمساعدة انسحاب (translation) مناسب. وضح على الرسم محور x و y ومحور X و Y.

انتبه: x – a تعني انسحاب إلى اليمين على محور x و x + a تعني انسحاب إلى اليسار على محور x أي عكس ما تتوقع , a عدد موجب

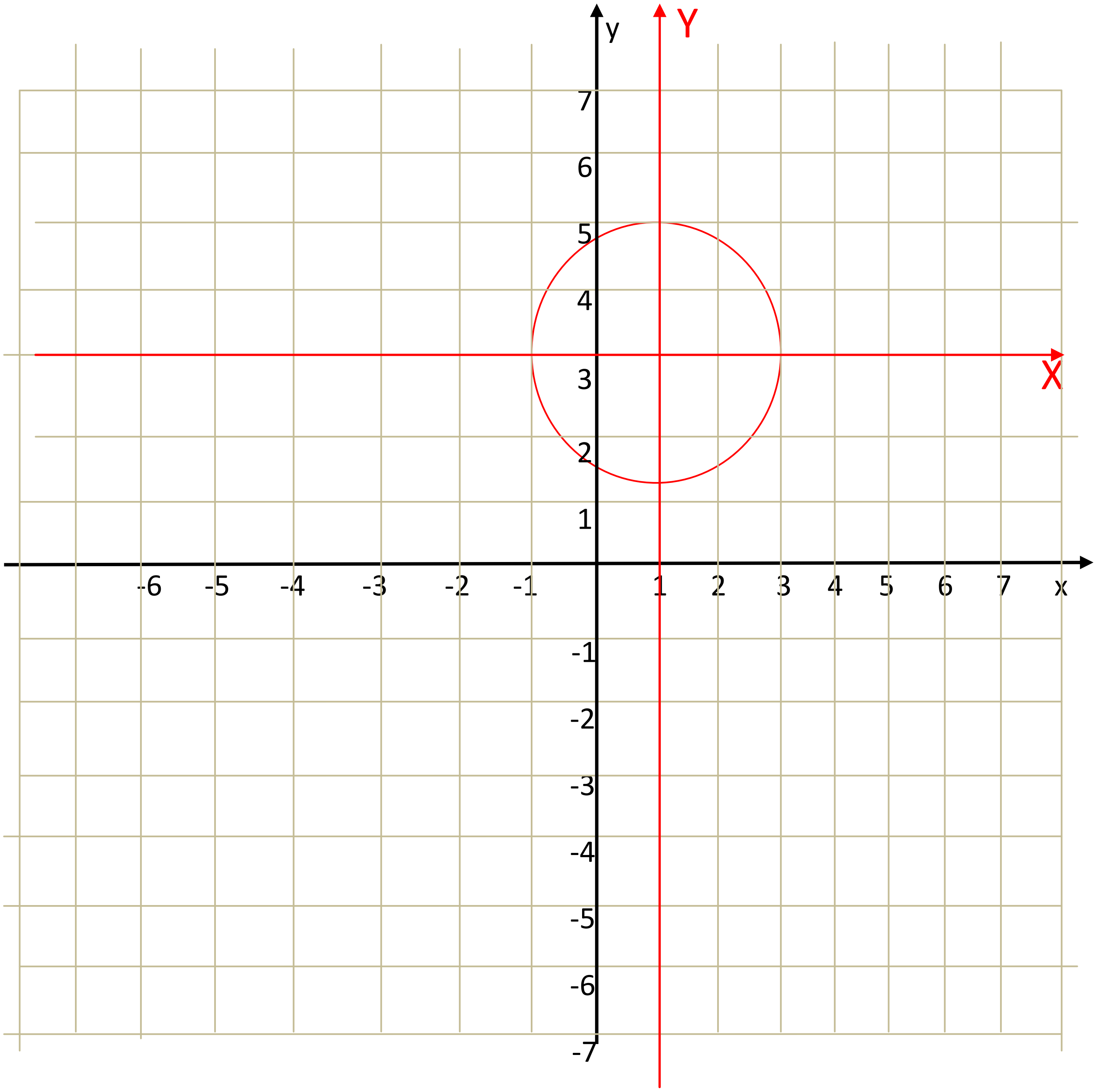
y – a تعني انسحاب إلى الأعلى على محور y و y + a تعني انسحاب إلى الأسفل على محور y أي عكس ما تتوقع

33. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$

معادلة دائرة مركزها (1 , 3) ونصف قطرها 2

$$X = x - 1 \quad , Y = y - 3$$

$$X^2 + Y^2 = 4 \quad \text{إذاً}$$

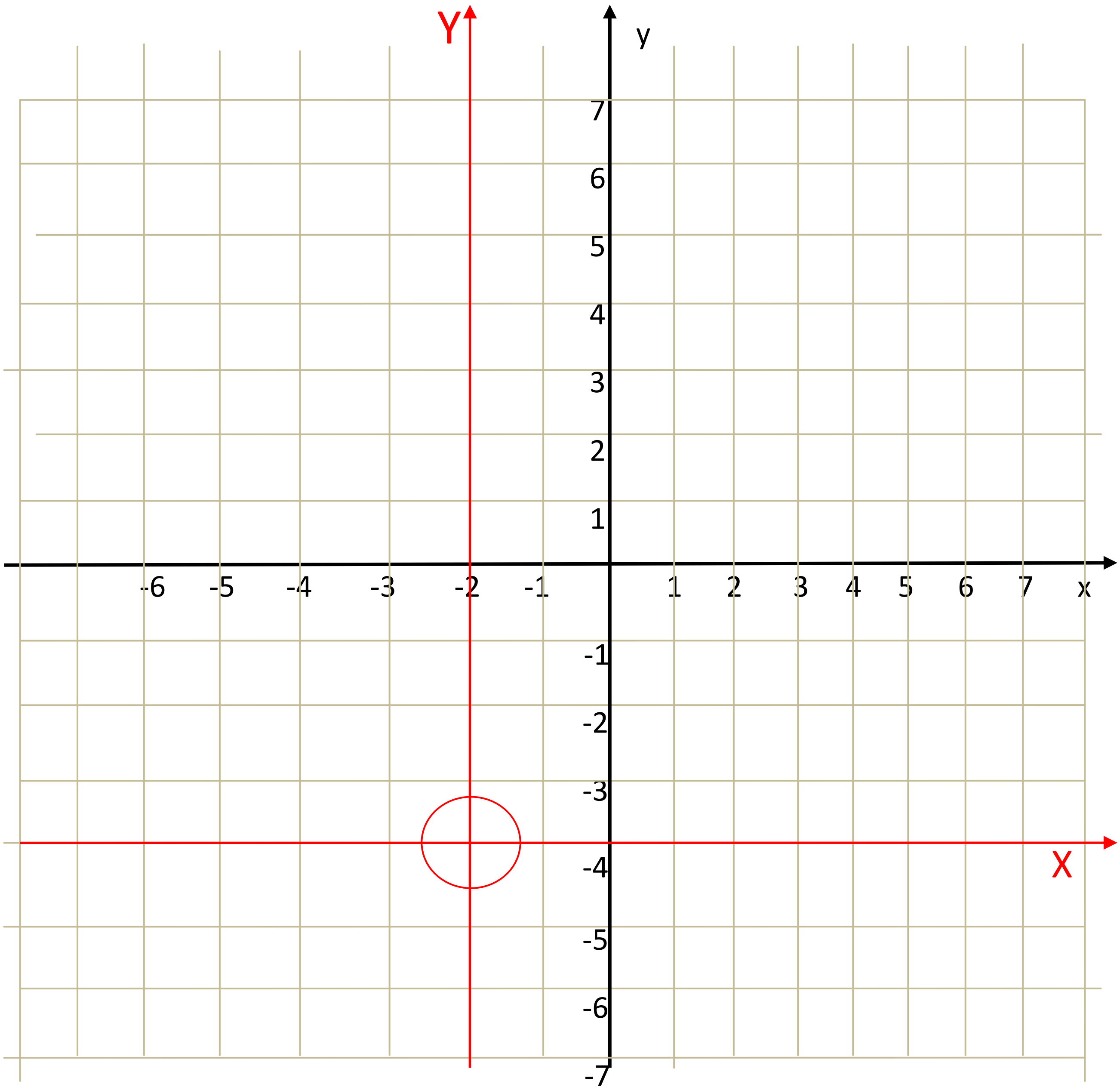

y
Y
7
6
5
4
3
X
2
1
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
x
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7

34. $(x+2)^2+(y+4)^2=\frac{1}{4}$

معادلة دائرة مركزها (4 - , 2 -) ونصف قطرها $\frac{1}{2}$

$X = x+2 \quad , Y = y+4$

إذاً $X^2+Y^2=\frac{1}{4}$



35. $x^2 - 2x + y^2 = 3$

نكمل المربع في x وذلك بإضافة مربع نصف معامل x إلى الطرفين , معامل x هو -2 ونصفه هو -1 ومربعه 1 =(-1)(-1) أي

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 3 + 1$$

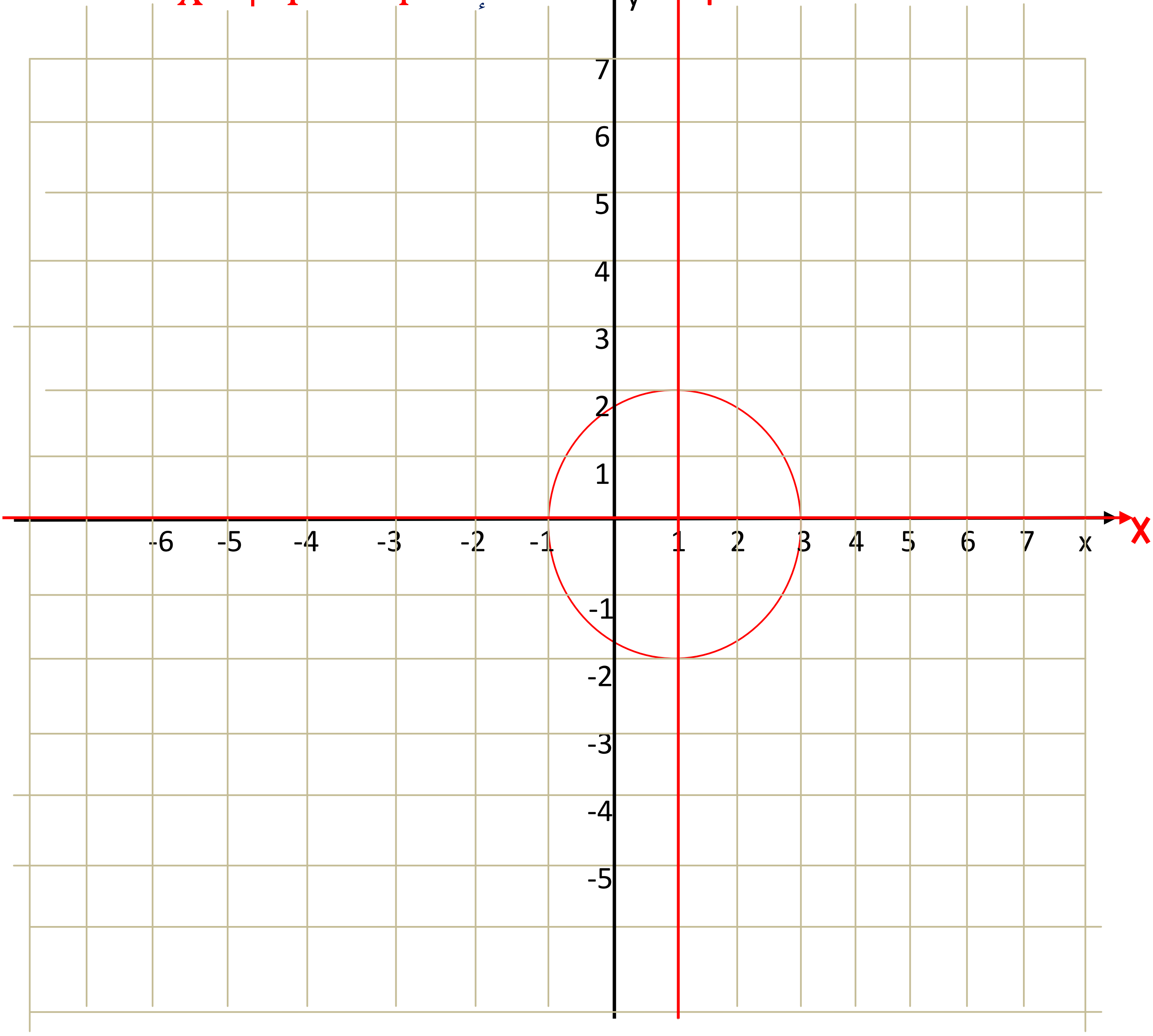
$(x - 1$

$$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 4$$

معادلة دائرة مركزها (1 , 0) ونصف قطرها $\sqrt{4} = 2$

$$\mathrm{X} = x - 1 \quad , \mathrm{Y} = y$$

إذاً $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = 4$



-6

30. $x^2 + y^2 + 4y = -1$

نكمل المربع في y وذلك بإضافة مربع نصف معامل y إلى الطرفين , معامل y هو 4 ونصفه هو 2 ومربعه 4 أي

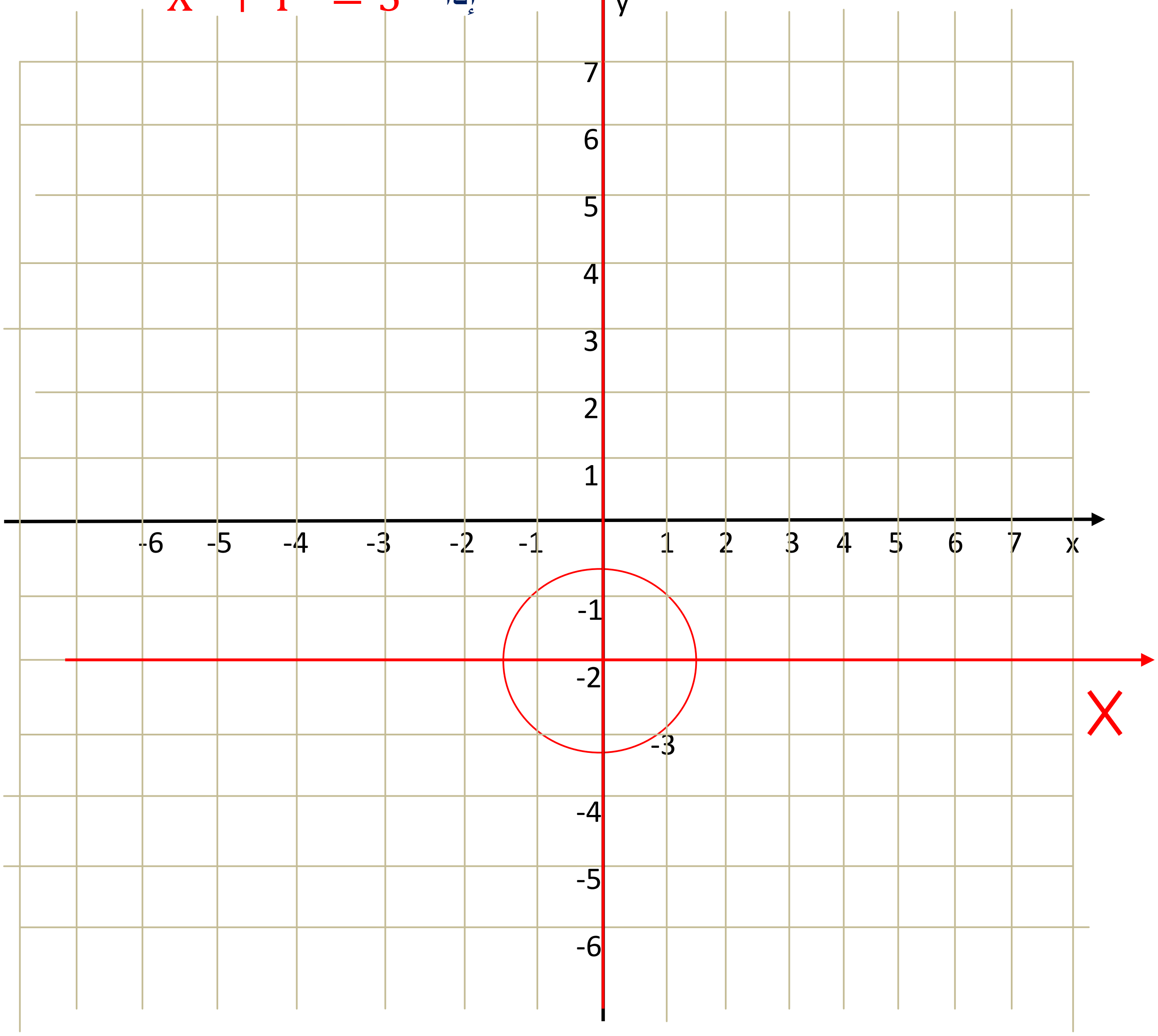
$$x^2 + y^2 + 4y + 4 = -1 + 4$$

$$(x + 0)^2 + (y + 2)^2 = 3$$

معادلة دائرة مركزها (0 , -2) ونصف قطرها $\sqrt{3}$

$\mathrm{X} = x \quad , \mathrm{Y} = y + 2$ $\quad Y$

$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = 3$ إذاً

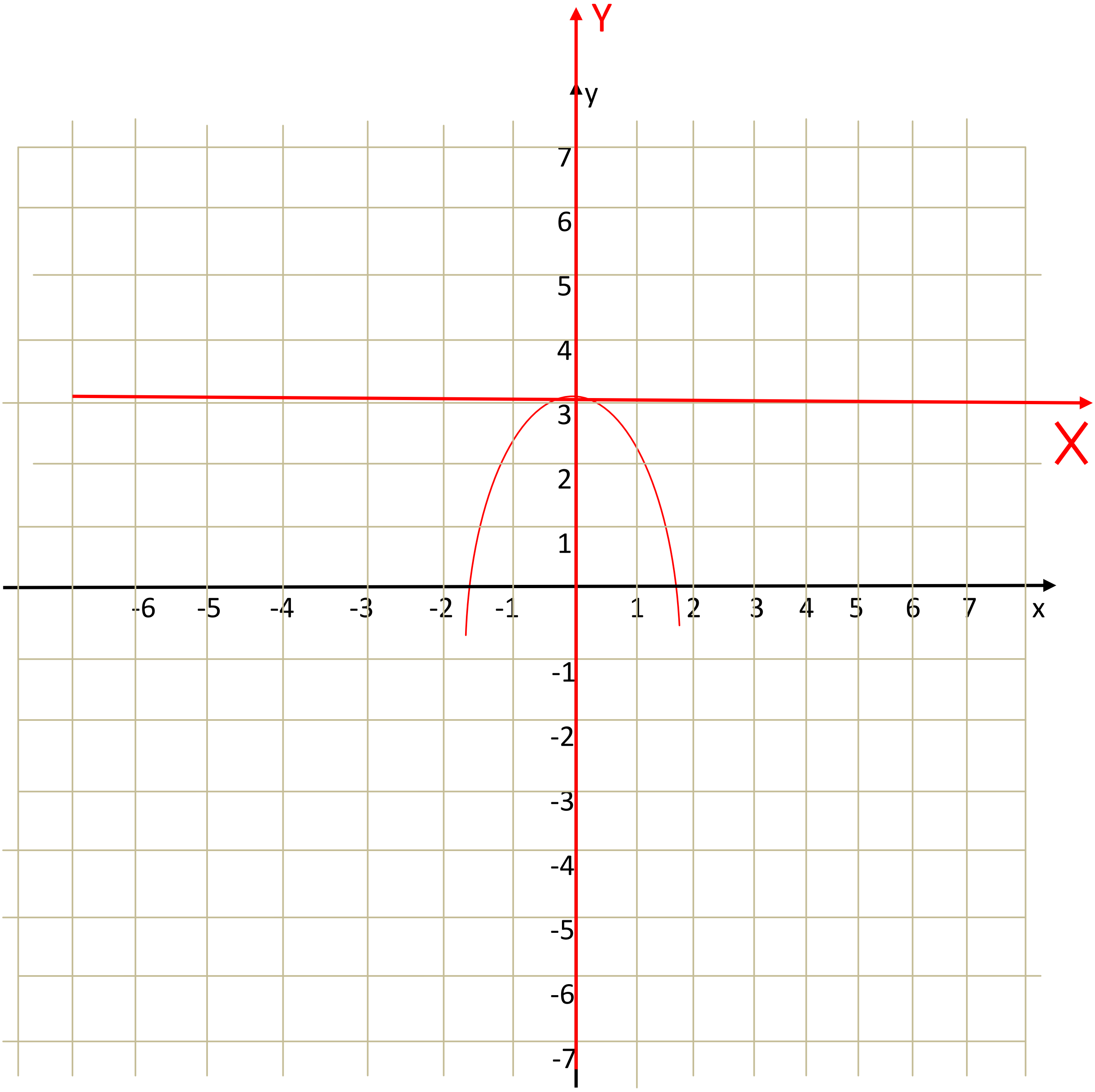


37. $x^2 + y - 3 = 0$

$X = x \quad , \qquad Y = y - 3$

$X^2 + Y = 0$

نقطة الأصل الجديدة هي (0 , 3)



38. $x^2 - 4x + y = 5$

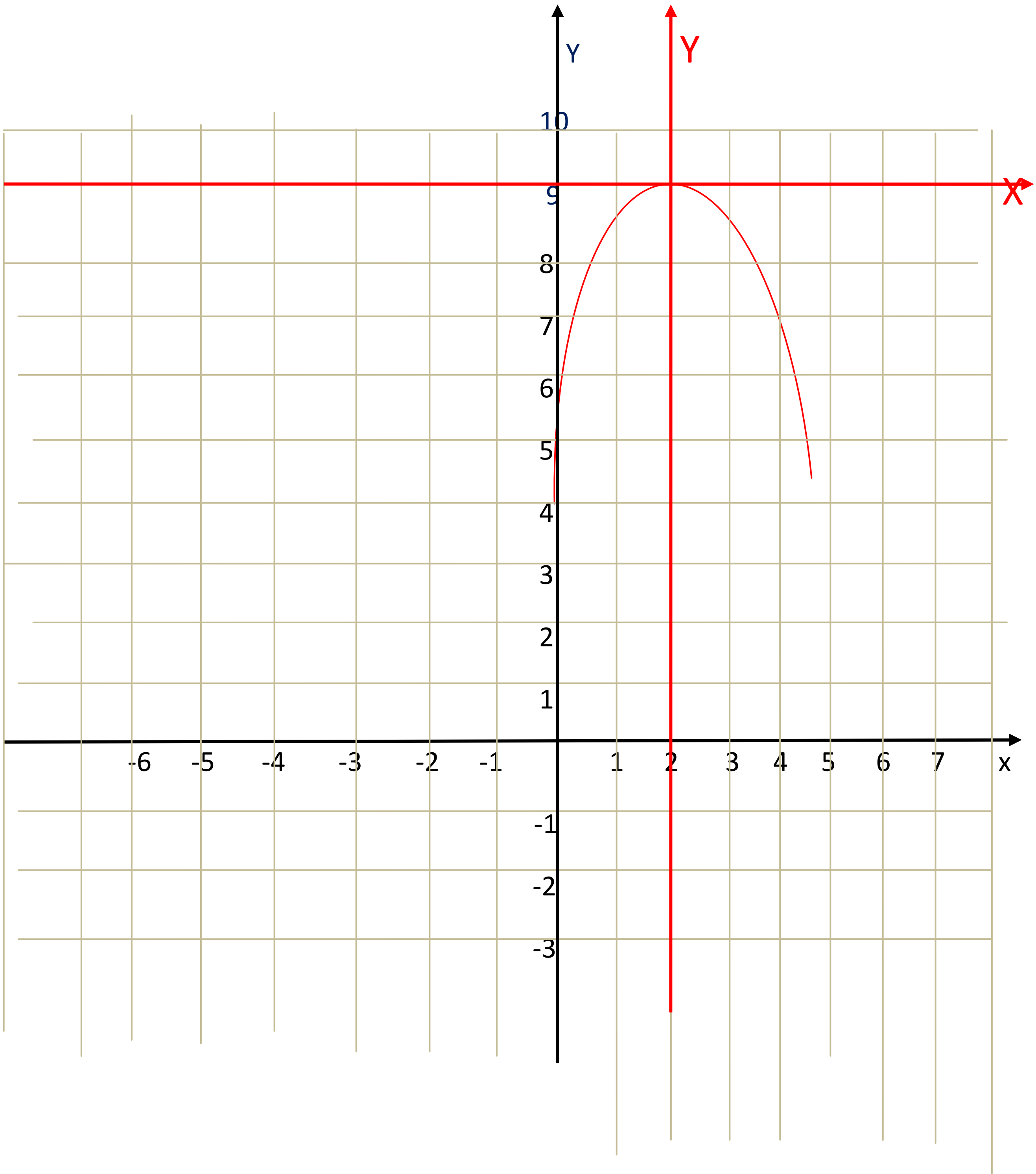
بإكمال المربع في x , أي إضافة مربع نصف معامل x إلى الطرفين ينتج

$x^2 - 4x + 4 + y = 5 + 4\,, \qquad (x-2)^2 + (y-9) = 0$

$X = x - 2 \quad , \qquad Y = y - 9$

$X^2 + Y = 0$

نقطة الأصل الجديدة هي (2 , 9)



In Exercises 39 – 44 , determine which of the following functions are odd , which are even , and which are neither.

في التمارين 39 – 44 حدد أي من الدوال الآتية تكون فردية أو تكون زوجية أو تكون لا ذا ولا ذاك

تكون الدالة زوجية even إذا كانت f(-x) = f(x) وتكون فردية odd إذا كانت f(-x) = - f(x)

39. $f(x) = -x$, $f(-x) = -(-x) = -f(x)$ odd

40. $f(x) = x^2 + 1$, $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$ $even$

41. $f(x) = 5x^2 - 3$, $f(-x) = 5(-x)^2 - 3 = 5x^2 - 3 = f(x)$ $even$

42. $f(x) = (x-2)^2$, $f(-x) = (-x-2)^2 = \{(-1)(x+2)\}^2$

$= (-1)^2(x+2)^2 = (x+2)^2$ $neither$

43. $f(x) = (x^2+2)^3$, $f(-x) = \{ (-x)^2 + 2 \}^3 = (x^2+2)^3 = f(x)$ $even$

44. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$, $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+4} = -\frac{x}{x^2+4} = -f(x)$ odd

Section 0.3

تمارين (0.3) EXERCISES صفحة 34 و 35 في الكتاب

In Exercices $1 - 10$, let $f(x) = x^2 + 4x - 2$ *and* $g(x) = 2 - x^2$

Find the specified values

في التمارين 1- 10 لتكن $f(x) = x^2 + 4x - 2$ و $g(x) = 2 - x^2$

أوجد القيم المحددة

1. $(f + g)(-1) = f(-1) + g(-1)$

$$= (-1)^2 + 4(-1) - 2 + 2 — 12$$

$$= 1 - 4 - 2 + 2 - 1 = 3 - 7 = -4$$

أو: أولاً نوجد (f+g)(x)

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 4x - 2 + 2 - x^2 = 4x$$

إذاً $(f + g)(x) = 4x$ ومنه $(f + g)(-1) = 4(-1) = -4$

2. $(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 2^2 + 4(2) - 2 - (2 - 2^2)$

$$= 4 + 8 - 2 - 2 + 4 = 16 - 4 = 12$$

أو: أولاً نوجد (f-g)(x)

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 4x - 2 - (2 - x^2)$$

$$= x^2 + 4x - 2 - 2 + x^2 = 2x^2 + 4x - 4$$

إذاً $(f - g)(x) = 2x^2 + 4x - 4$ ومنه

$$(f - g)(2) = 2(2)^2 + 4(2) - 4 = 8 + 8 - 4 = 12$$

3. $(f - g)(a)$, $a\epsilon R$

$$(f - g)(a) = f(a) - g(a) = a^2 + 4a - 2 - (2 - a^2)$$

$$= a^2 + 4a - 2 - 2 + a^2) = 2a^2 + 4a - 4$$

أو: من التمرين السابق وجدنا أن

$(f-g)(x) = 2x^2 + 4x - 4$

إذاً

$(f-g)(a) = 2(a)^2 + 4(a) - 4 = 2a^2 + 4a - 4$

4. $(f.g)(0) = f(0).g(0) = (0+0-2)(2-0) = (-2)(2) = -4$

أو ::

$(f.g)(x) = \{f(x)\}\{g(x)\} = (x^2 + 4x - 2)(2 - x^2)$

$= (2 - x^2)(x^2 + 4x - 2) = 2(x^2 + 4x - 2) - x^2(x^2 + 4x - 2)$

$= 2x^2 + 8x - 4 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 = -x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8x - 4$

$(f.g)(0) = -(0)^4 - 4(0)^3 + 4(0)^2 + 8(0) - 4 = -4$

5. $\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{1^2 + 4(1) - 2}{2 - 1^2} = \frac{1 + 4 - 2}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$

أو::

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 4x - 2}{2 - x^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{1^2 + 4(1) - 2}{2 - 1^2} = \frac{5 - 2}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$

6. $(f\ o\ g)(3) = f(\,g(3)\,) = f(2 - 3^2) = f(-7)$

$= (-7)^2 + 4(-7) - 2 = 49 - 28 - 2 = 49 - 30 = 19$

أو::أولاً نوجد $(f\ o\ g\ )(x)$

$(f\ o\ g)(x) = f(\,g(x)\,) = f(\,2 - x^2) = (2 - x^2)^2 + 4(2 - x^2) - 2$

$(f\ o\ g)(3) = (2 - 3^2)^2 + 4(2 - 3^2) - 2 = (-7)^2 + 8 - 36 - 2$

= 49+8-38= 19

7. $(g\ o\ f)(3) = g(\,f(3)\,) = g(3^2 + 4(3) - 2) = g(9 + 12 - 2)$

$= g(19) = 2 - (19)^2 = 2 - 361 = -359$

أو::

$(g\ o\ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g(\ x^2 + 4x - 2) = 2 - (\ x^2 + 4x - 2)^2$

$(g\ o\ f)(3) = 2 - (3^2 + 4(3) - 2)^2 = 2 - (9 + 12 - 2)^2$

$= 2 - (19)^2 = 2 - 361 = -359$

8. $(f\ o\ f)(-2) = f(\ f(-2)\ ) = f(\ (-2)^2 + 4(-2) - 2\ )$

$= f(4 - 8 - 2) = f(-6) = (-6)^2 + 4(-6) - 2 = 36 - 24 - 2 = 10$

أو::

$(f\ o\ f)(x) = f(\ f(x)\ ) = f(x^2 + 4x - 2)$

$= (x^2 + 4x - 2)^2 + 4(x^2 + 4x - 2) - 2$

$(f\ o\ f)(-2) = (\ (-2)^2 + 4(-2) - 2)^2 + 4((-2)^2 + 4(-2) - 2) - 2$

$= (4 - 8 - 2)^2 + 4(4 - 8 - 2) - 2 = 36 - 24 - 2 = 10$

9. $(g\ o\ g)(2) = g(\ g(2)\ ) = g(2 - 2^2) = g(-2) = 2 — 22$

$= 2 - 4 = -2$

أو::

$(g\ o\ g)(x) = g\big(\ g(x)\big) = g(2 - x^2) = 2 - (2 - x^2)^2$

$(g\ o\ g)(2) = 2 - (2 - (2)^2)^2 = 2 — 22 = 2 - 4 = -2$

10. $(g\ o\ f)(2 - a), a \epsilon R$

$(g\ o\ f\ )(2 - a) = g(\ f(2 - a)\ ) = g(\ \ (2 - a)^2 + 4(2 - a) - 2\ \ )$

$= 2 - ((2 - a)^2 + 4(2 - a) - 2)^2$

$= 2 - (a^2 - 4a + 4 + 8 - 4a - 2)^2 = 2 - (a^2 - 8a + 10)^2$

أو::

من التمرين 7 وجدنا أن

$(g\ o\ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g(\ x^2 + 4x - 2) = 2 - (\ x^2 + 4x - 2)^2$

$(g\ o\ f)(\ 2 - a) = 2 - ((2 - a)^2 + 4(2 - a) - 2)^2$

$$= 2 - (a^2 - 4a + 4 + 8 - 4a - 2)^2 = 2 - (a^2 - 8a + 10)^2$$

لاحظ في التمارين السابقة أن الحل المباشر أسهل وأسرع من الحل العام لذلك استخدم الحل المباشر في مثل هذا النوع من المسائل وبالذات في الاختبار

In Exercices $11 - 15$, let $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$ and $g(x) = (x)^{\frac{1}{4}}$

Find the specified values

في التمارين 11- 15 لتكن $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$ و $g(x) = (x)^{\frac{1}{4}}$

أوجد القيم المحددة

11. $(f.g)(1) = f(1).g(1) = \dfrac{1-1}{1+2} .(1)^{\frac{1}{4}} = \dfrac{0}{3}.1 = 0.1 = 0$

12. $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = (x)^{\frac{1}{4}} \left(\dfrac{x^2+2}{x-1}\right) = \dfrac{x^{2+\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{1}{4}}}{x-1}$

$$= \frac{x^{\frac{9}{4}} + 2x^{\frac{1}{4}}}{x-1}$$

$\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a.\dfrac{c}{b}$, لا تنسى $x^a.x^b = x^{a+b}$

13. $(f\ o\ g)(16) = f\big(\, g(16)\big) = f(2) = \dfrac{2-1}{2^2+2} = \dfrac{1}{6}$

$g(16) = (16)^{\frac{1}{4}} = (\,2^4)^{\frac{1}{4}} = \ 2^{4.\frac{1}{4}} = 2^{\frac{4}{4}} = 2^1 = 2$

14. $(f\ o\ g)(x) = f(\,g(x)\,) = f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \dfrac{x^{\frac{1}{4}} - 1}{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 + 2} = \dfrac{x^{\frac{1}{4}} - 1}{x^{\frac{1}{2}} + 2}$

$x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

15. $(g\ o\ g)(x) = g\big(\,g(x)\big) = g\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}.\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{16}}$

لا تنسى $(x^a)^b = x^{a.b}$, $(x^3)^4 = x^{12}$

In Exercises 16 – 24 , find the domains and rules of f+g , f.g , and $\frac{f}{g}$.

في التمارين 16 – 24 أوجد مجالات وصيغ (قواعد) $f + g\, ,\ f.g\ ,\ \frac{f}{g}$

مجالات domains f+g و f-g و f.g و $\frac{f}{g}$ هي تقاطع المجالين أي $D_f \cap D_g$

المجال هو فترة أعداد ولإيجاد تقاطع فترتين نأخذ العدد الأصغر من عددي البداية ويكون هو بداية فترة التقاطع نأخذه بأقواسه ونأخذ العدد الأكبر من عددي النهاية ويكون هو نهاية فترة التقاطع أيضاً نأخذه بأقواسه

لاحظ أنه في أقواس البداية يكون مثلاً (a أقل من a] وفي أقواس النهاية يكون (a أكبرمن [a لاحظ أن بداية الفترة دائماً أكبر من نهايتها والعكس يعني الفترة الخالية أي لا يوجد تقاطع والأمثلة الآتية توضح ذلك

$(1,5) \cap (2,6) = (2,5)$

عددي البداية هما 6 و 5 والأصغر منهما هو 5 وعددي النهاية هما 2 و 1 والأكبر منهما هو 2

$(-\infty, 8) \cap (-4,10) = (-4,8)$

عددي البداية هما 10 و 8 والأصغر منهما هو 8 وعددي النهاية هما 4- و ∞- والأكبر منهما هو 4 –

$(-\infty, 8) \cap (-4,8] = (-4,8)$

عددي البداية هما 8] و 8) والأصغر منهما هو 8) وعددي النهاية هما 4- و ∞- والأكبر منهما هو 4 –

$(2,3) \cap (4,5) = (4,3) = \{\ \} = \emptyset =$ المجموعة الخالية

(4,3) جميع الأعداد التي أقل من 3 وفي نفس الوقت أكبر من 4 لايوجد عدد بهذه الصفة

لاحظ أن (2,3) و (4,5) لا يوجد بينهما عناصر مشتركة أي أن تقاطعهما هو المجموعة الخالية

$[-1,1] \cap (-1,1) = (-1,1)$

لاحظ أن (-1,1) هي مجموعة جزئية من [-1,1]

إن وجدت أن هذه الطريقة لا تعجبك فخذ طريقة الكتاب حيث تقوم طريقة الكتاب على رسم الفترات ومن الرسم يتضح التقاطع

لا حظ أنه في حالة القسمة أي $\frac{f}{g}$ يكون المجال domain هو تقاطع المجالين بعد حذف الأعداد التي عندها تكون g(x)=0 لأن القسمة على الصفر لاتجوز

16. $f(x) = 2x + 1 \, , g(x) = 3 - x$

صيغة f+g هي $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x+1) + (3-x) = x + 4$

$Domain(f+g) = D_f \cap D_g = R \cap R = R$

صيغة f.g هي $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (2x+1)(3-x)$

$= 2x(3-x) + 1(3-x) = 6x - 2x^2 + 3 - x$

$= -2x^2 + 5x + 3$

$Domain(f.g) = D_f \cap D_g = R \cap R = R$

صيغة $\frac{f}{g}$ هي $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+1}{3-x} \; , \; g(x) \neq 0$

g(x)=0 عندما x=3 إذن مجال domain g(x) هو R-{3}

$Domain\left(\frac{f}{g}\right) = D_f \cap D_g = R \cap (R - \{3\}) = R - \{3\}$

تقاطع أي فترة مع R هو الفترة نفسها لأن أي فترة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R

17. $f(x) = x - 2 \, , g(x) = x^2 - 2$

صيغة f+g هي $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x-2) + (x^2 - 2)$

$= x^2 + x - 4$

$Domain(f+g) = D_f \cap D_g = R \cap R = R$

صيغة f.g هي $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x-2)(x^2-2)$

$= x(x^2 - 2) - 2(x^2 - 2) = x^3 - 2x - 2x^2 + 4$

$= x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

$Domain(f.g) = D_f \cap D_g = R \cap R = R$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-2}{x^2-2}$, $g(x) \neq 0$ هي $\frac{\text{f}}{\text{g}}$ صيغة

هو *g(x) domain* إذن مجال $x = -\sqrt{2}$ أو $x = \sqrt{2}$ عندما *g(x)*= 0

$R - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

$$Domain \left(\frac{f}{g}\right) = D_f \cap \ D_g = R \cap (R - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}\ ) = \ R - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

تقاطع أي فترة مع R هو الفترة نفسها لأن أي فترة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R

18. $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $g(x) = x - 1$

$$(f+g)(x) = \frac{2}{x-1} + x - 1 = \frac{2 + (x-1)^2}{x-1}$$

Domain f=R-{1} , domain g=R , domain (f+g)=R-{1}

$$(f.g)(x) = \frac{2}{x-1}(x-1) = 2 \ , x \neq 1$$

Domain f=R-{1} , domain g=R , domain (f.g)=R-{1}

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2}{x-1} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{2}{(x-1)^2} \ , g(x) \neq 0$$

x=1 عندما g(x)=0

$$domain\ f = R - \{1\}\ and\ \ domain\ g = R - \{1\}$$

$$domain\ \frac{f}{g} = (R - \{1\}) \cap (R - \{1\} = R - \{1\}$$

19. $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, $g(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$

$$(f+g)(x) = \frac{x+2}{x-3} + \frac{x+3}{x^2-4} = \frac{(x+2)(x^2-4) + (x+3)(x-3)}{(x-3)(x^2-4)}$$

$$= \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8 + x^2 - 9}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12} = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 17}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}$$

Domain f =R-{3} , domain g=R-{-2,2}

$$domain(f+g) = (R-\{3\} \cap \left(R-2,2\right\} = R-\{-2,2,3\}$$

$$(f.g)(x) = \frac{x+2}{x-3} . \frac{x+3}{x^2-4} = \frac{x+2}{x-3} . \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{(x-3)(x-2)}$$

$$= \frac{x+3}{x^2-5x+6}$$

$$domain(f.g) = (R-\{3\} \cap (R-2,2\} = R-\{-2,2,3\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+2}{x-3} . \frac{x^2-4}{x+3} = \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-9} \quad , g(x) \neq 0$$

لاتنسى في قسمة الكسور نشقلب ونحول القسمة إلى ضرب

g(x)=0 عندما x=- 3 لذلك نحذف -3 من مجال domain $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$$domain\left(\frac{f}{g}\right) = R-\{-3,-2,2,3\}$$

20. $f(t) = t^{\frac{3}{4}}, g(t) = t^2+3$

$$(f+g)(t) = t^{\frac{3}{4}} + t^2 + 3$$

$$f(t) = t^{\frac{3}{4}} = (t^3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{t^3}$$

$D_f = t^3 \geq 0$, $\quad D_f = t \geq 0 = [0,\infty)$

$D_g = R$, $D_f \cap D_g = [0,\infty) \cap R = [0,\infty)$

$$(f.g)(t) = t^{\frac{3}{4}}\,(t^2+3) = t^{\frac{11}{4}} + 3t^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{3}{4} + 2 = \frac{3}{4} + \frac{8}{4} = \frac{11}{4}$$

$$D_{f.g} = D_f \cap D_g = [0,\infty) \cap R = [0,\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(t) = \frac{t^{\frac{3}{4}}}{t^2+3} \quad , t^2 \geq 0, t^2+3 \geq 3 > 0$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g = [0,\infty) \cap R = [0,\infty)$$

21. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \sqrt{2+x-x^2}$

$$(f+g)(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{2+x-x^2}$$

$$1 - x^2 \geq 0 \ , \quad 1 \geq x^2 \, , x^2 \leq 1 \, , -1 \leq x \leq 1$$

$$D_f = -1 \leq x \leq 1 = [-1,1]$$

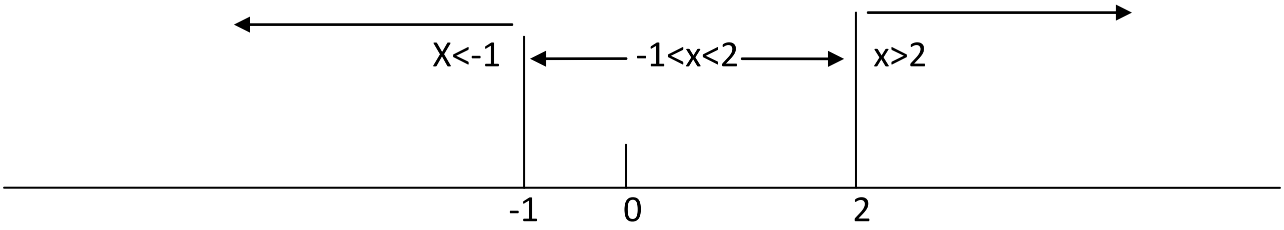
في بعض الأحيان يكون تحديد ما تحت الجذر ليس واضحاً لذلك في مثل هذه الحالة نوجد جذور أو أصفار ما تحت الجذر حيث تقسم هذه الجذور الأعداد الحقيقية إلى فترات وبالتعويض المباشر نحدد المجال domain فمثلاً لإيجاد مجال domain g(x) نقوم بما يلي

$$2 + x - x^2 = 0 \, , -x^2 + x + 2 = 0 \ , a = -1, b = 1, c = 2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)(2)}}{2(-1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \ , x = \frac{2}{-2} = -1 \ \ or \ x = \frac{-4}{-2} = 2$$

جذور المعادلة هي 2 و -1 وهي تقسم الأعداد الحقيقية إلى ثلاث فترات هي الأعداد التي أكبر من 2 والأعداد التي بين 2 و -1 والأعداد التي أقل من -1



الآن نختار أي عدد في الفترة x>2 وليكن العدد 3 ونعوضه فيما تحت الجذر أي

$$2 + (3) - (3)^2 = 5 - 9 = -4$$

النتيجة عدد سالب وجذر العدد السالب ليس عدد حقيقي أي أن الفترة x>2 ليست ضمن مجال domain g(x)

والآن نختار أي عدد في الفترة -1<x<2 وليكن العدد 0 أي

$2+(0)-(0)^2=2$

النتيجة عدد موجب أي أن ما تحت الجذر عدد موجب وهذا يعني أن الفترة 2>x>1- هي ضمن مجال g(x) domain

والآن نختار أي عدد في الفترة x<-1 واليكن العدد 2- أي

$2+(-2)—22=2-2-(4)=-4$

النتيجة عدد سالب وجذر العدد السالب ليس عدد حقيقي أي أن الفترة x<-1 ليست ضمن مجال g(x) domain

وبما أن ما تحت الجذر يجب أن يكون أكبر من أو يساوي الصفر وحيث أن كلاً من الجذرين يجعل ما تحت الجذر يساوي الصفر لذلك فإن الجذرين 2 و 1- هما ضمن مجال g(x) domain أي أن

$D_g=-1\leq x\leq 2=[-1,2]$

$$domain(f+g)=(domian\ f)\cap(domain\ g)=[-1,1]\cap[-1,2]$$
$$=[-1,1]$$

لا حظ أن العدد الأصغر بين البدايتين [2 و [1 هو [1 أما النهايتين فمتساويتين

تمرين : طبق الطريقة السابقة لإيجاد مجال domain $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

$$(f.g)(x)=\sqrt{1-x^2}.\sqrt{2+x-x^2}=\sqrt{(1-x^2)(2+x-x^2)}$$
$$=\sqrt{2+x-x^2-2x^2-x^3+x^4}$$
$$=\sqrt{x^4-x^3-3x^2+x+2}$$

$$domain(f.g)=(domian\ f)\cap(domain\ g)=[-1,1]\cap[-1,2]$$
$$=[-1,1]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2+x-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{-(x^2-x-2)}}=\sqrt{\frac{(1-x)(1+x)}{-(x-2)(x+1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-x}{2+x}} \ , \ g(x) \neq 0$$

1+x=x+1

وجدنا أعلاه أن g(x)=0 عندما x=2 أو x=-1 لذلك نحذف هذين العددين من مجال domain g(x)

Domain g(x)=(-1,2)

$$domain\left(\frac{f}{g}\right) = (domian\ f) \cap (domain\ g) = [-1,1] \cap (-1,2)$$

$$= (-1,1]$$

لا تنسى $(-1 < [-1$

لا تنسى في التقاطع نأخذ الأصغر من البدايتين والأكبر من النهايتين إنتبه المقارنة بالأقواس فقط عندما تتساوى الأعداد

22. $f(x) = |x|\ , \qquad g(x) = \sqrt{x^2-1}$

$(f+g)(x) = |x| + \sqrt{x^2-1}$

$domain\ f = D_f = R = (-\infty, \infty)$

$x^2 - 1 \geq 0\ , x^2 \geq 1\ , x \geq 1\ or\ x \leq -1$

$domain\ g = x \geq 1\ or\ x \leq -1 = [1, \infty) \cup (-\infty, -1]$

أو $x^2 - 1 = 0, (x-1)(x+1) = 0\ , x = 1\ or\ x = -1$

الجذران 1 و -1 يقسمان الأعداد الحقيقية إلى ثلاث فترات هي x>1 و -1<x<1 و x<-1

لنختبر الفترة x>1 حيث نأخذ أي عدد فيها وليكن x=2 ونعوضه في $x^2 - 1$ أي

$(2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$

إذاً جميع الأعداد التي في الفترة x>1 أي الفترة $(1, \infty)$ تجعل ما تحت الجذر موجب إذا الفترة $(1, \infty)$ ضمن مجال domain g(x)

لنختبر الفترة 1<x<1- حيث نأخذ أي عدد فيها وليكن x=0 ونعوضه في x^2-1 أي

$$(0)^2-1=0-1=-1<0$$

إذاً جميع الأعداد التي في الفترة   1<x<1-   أي الفترة $(-1,1)$ تجعل ما تحت الجذر سالب إذا الفترة $(-1,1)$ ليست ضمن مجال domain g(x)

لنختبر الفترة x<-1 حيث نأخذ أي عدد فيها وليكن x=-2 ونعوضه في x^2-1 أي

$$(-2)^2-1=4-1=3>0$$

إذاً جميع الأعداد التي في الفترة x<-1 أي الفترة $(-\infty,-1)$ تجعل ما تحت الجذر موجب إذا الفترة $(-\infty,-1)$ ضمن مجال domain g(x)

إذاً مجال *domain* g(x) هو الفترة $(1,\infty)$ أو $(-\infty,-1)$ ولكن ماتحت الجذر يجب أن يكون أكبر من أو يساوي الصفر أي أن الأعداد التي تجعل ماتحت الجذر يساوي الصفر هي ضمن مجال domain g(x) أي أن الجذرين 1 و 1- هما ضمن مجال domain g(x)

إذاً مجال g(x) *domain* هوالفترة $[1,\infty)$ أو $(-\infty,-1]$ أي $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

إنتبه : إذا كان الجذر في المقام فإن ماتحت الجذر يجب أن يكون أكبر من الصفر أي أن الجذور والتي تجعل ماتحت الجذر يساوي الصفر ليست ضمن المجال domain

لا تنسى أنه إذا كانت a عدد موجب فإن

$$x^2-a\ge 0\,,x^2\ge a\ ,\qquad x\ge\sqrt{a}\quad or\ \ x\le-\sqrt{a}$$

$$a-x^2\ge 0\ ,\qquad a\ge x^2,\qquad x^2\le a\ ,\ \ x\le\sqrt{a}\,,\qquad x\ge-\sqrt{a}$$

$x^2+a\ge a>0$ دائماً , $1=1^2$, $\sqrt{1}=1$

هذا الكلام الطويل أعلاه هو للتوضيح أي في الاختبار أكتب الجواب مباشرة

$$D_f+D_g=\ R\cap\{\,(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\,\}$$

لا تنسى أنه إذا كانت A و B و C مجموعات فإن $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

إذاً

$$D_f+D_g=\ R\cap\{\,(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\}$$

$$=\{R\cap(-\infty,-1]\}\cup\{R\cap[1,\infty)\}=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$$

$$(f.g)(x)=|x|\sqrt{x^2-1}$$

$$D_f.D_g = R \cap \{ (-\infty,-1] \cup [1,\infty)\}$$

$$= \{R \cap (-\infty,-1]\} \cup \{R \cap [1,\infty)\} = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} \quad , \qquad g(x) \neq 0$$

مما سبق نعلم أن g(x)=0 عندما x=1 أو عندما x=-1 لذلك نحذف هذين العددين من مجال domain حاصل القسمة أي عندما نحذف العدد -1 من $(-\infty,-1]$ تصبح $(-\infty,-1)$

وعندما نحذف العدد 1 من $[1,\infty)$ تصبح $(1,\infty)$ إذاً

$$D_{\frac{f}{g}} = R \cap \{ (-\infty,-1) \cup (1.\infty)\} = \{R \cap (-\infty,-1)\} \cup \{R \cap (1,\infty)\}$$

$$= (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$$

لا تنسى أن أي فترة هي مجموعة جزئية من R وأن تقاطع ∩ أي فترة مع R هو الفترة نفسها

23. $f(t) = t^{\frac{2}{3}} \quad , \qquad g(t) = t^{\frac{3}{5}} - 1$

$$(f+g)(t) = t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{3}{5}} - 1$$

Domain f= domain g =R

$$D_{f+g} = R \cap R = R$$

لا حظ أن

$$f(t) = t^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{t^2} \quad , \qquad g(t) = t^{\frac{3}{5}} - 1 = \sqrt[5]{t^3} - 1$$

وأن ماتحت الجذر الذي دليله عدد فردي يمكن أن يكون أي عدد حقيقي أي أن مجال f(t) domain و g(t) هو جميع الأعداد الحقيقية أي R

$$(f.g)(t) = t^{\frac{2}{3}}\left(t^{\frac{3}{5}} - 1\right) = t^{\frac{2}{3}+\frac{3}{5}} - t^{\frac{2}{3}} = t^{\frac{19}{15}} - t^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2(5)}{3(5)} + \frac{3(3)}{5(3)} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15}$$ لا تنسى

$$D_{f.g} = R \cap R = R$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(t) = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{3}{5}} - 1} \quad , g(t) \neq 0$$

$$t^{\frac{3}{5}} - 1 = 0 \, , t^{\frac{3}{5}} = 1 \ , \qquad t = 1$$

نحذف من مجال domain $g(t)$ العدد 1 ليصبح مجالها R-{1}

$$D_{\frac{f}{g}} = R \cap (R - \{1\}) = R - \{1\}$$

24. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+6} \quad , \qquad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$(f+g)(x) = \frac{x-2}{x+6} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

مقام $f(x)$ يصبح صفراً عندما x=-6 إذاً مجال domain $f(x)$ هو R-{-6}

ومجال domain $g(x)$ هو x>0 أي $(0,\infty)$ إنتبه: x لاتساوي صفر لأن الجذر في المقام

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = (R - \{-6\} \cap (0,\infty) = (0,\infty)$$

$$(f.g)(x) = \frac{x-2}{x+6} . \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x-2}{\sqrt{x}(x+6)}$$

$$D_{f.g} = D_f \cap D_g = (R - \{-6\} \cap (0,\infty) = (0,\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-2}{x+6} . \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}(x-2)}{x+6} \quad , \qquad g(x) \neq 0$$

$$\frac{x-2}{x+6} \div \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x-2}{x+6} . \frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{x}(x-2)}{x+6}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g = (R — 6\} \cap (0,\infty) = (0,\infty)$$

In Exercises 25 – 33 find the domains and rules of g o f and f o g

في التمارين 25 – 33 جد مجالات وقواعد (معادلات) g o f و f o g

قبل أن نبدأ بحل التمارين سنورد بعض المقترحات التي تساعدنا على تحديد مجال domain الدالة المركبة composite function f(g(x))

المقترح الأول :

The domain of a composite function f(g(x)) is the set of all x in the domain of g(x) for which g(x) is in the domain of f(x).

هذا المقترح يقول

مجال الدالة المركبة (The domain of a composite function) f(g(x)) هو جميع الأعداد x التي في مجال domain g(x) والتي منها فقط يكون العدد g(x) في مجال domain f(x) أي

1) أوجد مجال domain كل من g(x) و f(x)

2) من مجال domain g(x) إحذف جميع الأعداد x والتي من أجلها يكون العدد g(x) ليس في مجال domain f(x) وتكون الفترة الناتجة بعد ذلك من مجال domain g(x) هي مجال domain الدالة المركبة f(g(x))

إنتبه : إنتبه للترتيب (f o g)(x) = f(g(x)) تختلف عن (g o f)(x)= g(f(x))

ملا حظة مهمة :

في التركيب (f o g)(x) = f(g(x)) إذا كان مجال domain الدالة الخارجية f(x) هو جميع الأعداد الحقيقية أي R فإن مجال domain الدالة المركبة (f o g)(x) هو مجال domain الدالة الداخلية g(x) وذلك لأن f(x) معرفة لجميع الأعداد الحقيقية والتي من ضمنها مجال domain g(x)

If domain f(x)=R then domain (f o g)(x)=domain g(x)

المقترح الثاني :

$Domain\ (f\circ g)(x)=\text{domain}\ g(x)\cap domain\ \ f(\ g(x)\ )$

هذا المقترح يقول

أوجد مجال domain الدالة الداخلية g(x) وأوجد مجال domain الدالة المركبة f(g(x)) ثم أوجد تقاطع هذين المجالين فتكون الفترة الناتجة هي مجال الدالة المركبة f(g(x))

أو

$Domain\ (\text{g}\circ \text{f})(x))=domain\ \text{f}(x)\cap domain\ \text{g}(\ \text{f}(x)\ )$

هذا المقترح يقول

أوجد مجال domain الدالة الداخلية f(x) وأوجد مجال domain الدالة المركبة g(f(x)) ثم أوجد تقاطع هذين المجالين فتكون الفترة الناتجة هي مجال الدالة المركبة g(f(x))

إنتبه : في (f o g)(x)=f(g(x)) تكون الدالة الداخلية هي g(x)

في (g o f)(x)=g(f(x)) تكون الدالة الداخلية هي f(x)

هنا قد تقول بما أنني أوجدت مجال الدالة المركبة g(f(x)) فليس هناك حاجة بعد ذلك ولكن المجال الناتج من الدالة المركبة ليس هو المجال الحقيقي لأن ما يجري بالداخل قد يكون يختلف عن النتيجة النهائية والمثال الآتي يوضح ذلك

$f(x)=\sqrt{x}\quad ,\qquad g(x)=x^2$

$domain\ f(x)=x\geq 0=[0,\infty), domin\ g(x)=R$

$(g\ o\ f\ )(x)=g\big(\ f(x)\big)=g\big(\ \sqrt{x}\ \ \big)=\big(\ \sqrt{x}\ \big)^2=\ x$

لا حظ هنا أن مجال *domain g(f(x))* هو جميع الأعداد الحقيقية *R* أي أن الأعداد السالبة هي من ضمن مجال *g(f(x))* ولكن في الحقيقة لا نستطيع حساب قيمة الدالة عندما مثلاً *x=-3* حيث $f(-3)=\sqrt{-3}$ *ليست في مجال* f(x) *فما يجري في الداخل مختلف*

لذلك فإن

$domain\ \ g(\ f(x)\ )=domain\ \ f(x)\cap domain\ g(\ f(x)\ )$

$$= \quad [0,\infty) \cap R = [0,\infty)$$

25. $f(x) = 1 - x \ , \ g(x) = 2x + 5$

Domain f =domain g = R لأنها كثيرات حدود

$$(g\ o\ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g(1-x) = 2(1-x) + 5 = 2 - 2x + 5$$

$$= \ -2x + 7$$

$$(f\ o\ g)(x) = f\big(\ g(x)\big) = f(2x+5) = 1 - (2x+5) = -2x - 4$$

Domain (g o f)=domain (f o g)=R

إذا كانت كل من f(x) و g(x) كثيرة حدود فإن f(g(x)) و g(f(x)) هما أيضاً كثيرتي حدود وتكون مجالات domains الكل هو R أي جميع الأعداد الحقيقية

26. $f(x) = x^2 + 2x + 3 \ , \qquad g(x) = x - 1$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g(\ x^2 + 2x + 3\ ) = (x^2 + 2x + 3\ ) - 1$$

$$= x^2 + 2x + 2$$

$$(f\ o\ g)(x) = f\big(\ g(x)\big) = f(x-1) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 3$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 3 = x^2 + 2$$

Domain f(x)= domain g(x)=domain f(g(x))=domain g(f(x))=R

أنظر الملاحظة السابقة في التمرين 25

27. $f(x) = x^2 \, , \qquad g(x) = \sqrt{x}$

$$domain\ f(x) = R \quad , \qquad domain\ g(x) = x \geq 0 = [0,\infty)$$

$$(g\ o\ f)(x) = g\big(\ f(x)\big) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$$

$domain\ g(\ f(x)\ ) = R$

$domain\ (g\ o\ f)(x) = domain\ f(x) \cap domain\ g(\ f(x)\ )$

$$= R \cap\ R\ = R$$

إنتبه للترتيب هنا الدالة الداخلية هي f(x)

$(f\ o\ g)(x) = f\big(\ g(x)\big) = f\big(\ \sqrt{x}\ \big) = \big(\ \sqrt{x}\ \big)^2 = x$

$domain\ \ (f\ o\ g)(x) = domain\ g(x) = [0, \infty)$

أنظر ملاحظة مهمة قبل البدء في حل هذه التمارين

أو

$domain\ f\big(\ g(x)\big) = R$

$domain\ (f\ o\ g) = domain\ g(x) \cap domain\ f\big(\ g(x)\big)$

$$= [0, \infty) \cap R = [0, \infty)$$

إنتبه للترتيب هنا الدالة الداخلية هي g(x)

28. $f(x) =\ x^6\ \ ,\qquad g(x) = x^{\frac{3}{4}}$

$domain\ f(x) = D_f\ = R\ \ ,\qquad g(x) = x^{\frac{3}{4}} =\ \sqrt[4]{x^3}$

$domain\ g(x) = D_g\ = x^3 \geq 0 =\ x \geq 0 = [0, \infty)$

$(g\ o\ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g(x^6) = (x^6)^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{18}{4}} = x^{\frac{9}{2}} = \sqrt{x^9}$

$$= \sqrt{(x^4)^2 . x} = x^4\sqrt{x}$$

$domain\ g\big(\ f(x)\big) = domain\ \ x^4\sqrt{x} = x \geq 0 = [0, \infty)$

$domain\ (g\ o\ f) = D_{g\ o\ f} = domain\ f(x) \cap domain\ g(f(x))$

$$= R \cap [0, \infty) = [0, \infty)$$

$$(f\ o\ g)(x) = f(\ g(x)) = f\left(x^{\frac{3}{4}}\right) = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)^6 = x^{\frac{18}{4}} = x^{\frac{9}{2}} = \sqrt{x^9}$$

$$= \sqrt{(x^4)^2 . x} = x^4\sqrt{x}$$

$domain\ \ (f\ o\ g)(x) = domain\ g(x) = [0, \infty)$

أنظر ملاحظة مهمة قبل البدء في حل هذه التمارين

Or:

$domain\ f(\ g(x)) = domain\ \ x^4\sqrt{x} = x \geq 0 = [0, \infty)$

$domain\ (f\ o\ g)(x) = D_{f\ o\ g} = domain\ g(x) \cap domainf(g(x))$

$$= [0, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$$

إنتبه : تقاطع أي فترة مع نفسها يساوي الفترة نفسها

29. $f(x) = \sqrt{x}$, $\qquad g(x) = x^2 - \ 5x + 6$

$domain\ f(x) = x \geq 0 = [0, \infty)$

$domain\ g(x) = R$ كثيرة حدود

$$(g\ o\ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g(\sqrt{x}\ ) = (\ \sqrt{x}\ )^2 - 5(\sqrt{x}\ \ ) + 6$$

$$= x - 5(\sqrt{x}\ ) + 6$$

بما أن مجال domain g(x)=R لذلك فإن

Domain (g o f)(x)=domain f(x) =[0,∞)

If domain g(x)=R then domain (g o f)(x)=domain f(x)

Or:

$domain\ g(f(x)) = x \geq 0 = [0, \infty)$

$domain\ (g\ o\ f)(x) = domain\ f(x) \cap domain\ g(\ f(x))$

$$= [0, \infty) \cap [0, \infty) = [0. \infty)$$

$$(f\ o\ g)(x) = f(\,g(x)\,) = f(x^2 -\ 5x + 6) = \sqrt{x^2 -\ 5x + 6}$$

$$x^2 -\ 5x + 6 \geq 0\ \ ,(x-2)(x-3) \geq 0$$

تذكر : عددان حاصل جمعهما -5 وحاصل ضربهما 6 إذاً هما -2 و -3

$$(x-2) \geq 0\ and\ (x-3) \geq 0\ \ or\ \ (x-2) \leq 0\ and\ (x-3) \leq 0$$

$$x \geq 2 \quad and \quad x \geq 3 \qquad or \qquad x \leq 2 \quad and \quad x \leq 3$$

$$[2,\infty) \quad \cap \quad [3,\infty) \qquad \cup \qquad (-\infty,2] \quad \cap \quad (-\infty,3]$$

$$[3,\infty) \qquad\qquad \cup \qquad\qquad (-\infty,2]$$

تقاطع:أصغر البدايتين وأكبر النهايتين تقاطع:أصغر البدايتين وأكبر النهايتين

$$domain\ f\big(g(x)\big) =\ [3,\infty) \cup (-\infty,2] = (-\infty,2] \cup [3,\infty)$$

$$domain\ (f\ o\ g)(x) = domain\ g(x) \cap domain\ f(\,g(x))$$

$$= \quad R \cap \{\,(-\infty,2] \cup [3,\infty)\,\}$$

$$= (\,R \cap (-\infty,2]\,) \cup (\,R \cap [3,\infty)\,)$$

$$= \ \ (-\infty,2] \cup [3,\infty)$$

لاحظ أن هاتين الفترتين لا يوجد بينهما عناصر مشتركة ولذلك لا يمكن كتابتهما كفترة واحدة

طريقة أخرى لإيجاد مجال domain الدالة f(g(x))

$$(f\ o\ g)(x) = f(\,g(x)\,) = f(x^2 -\ 5x + 6) = \sqrt{x^2 -\ 5x + 6}$$

$$x^2 -\ 5x + 6 = 0\ \ ,(x-2)(x-3) = 0\,, x = 2\ or\ x = 3$$

الآن الجذران 2 و3 يقسمان الأعداد الحقيقية إلى ثلاث فترات هي الأعداد التي أكبر من 3 والأعداد التي بين 2 و 3 والأعداد التي أقل من 2

الآن لنجرب كل فترة حيث نأخذ منها عدداً ونعوضه فيما تحت الجذر حيث ما تحت الجذر يجب أن يكون عدد موجب

لنأخذ العدد 4 من الفترة x>3

$$(4)^2 - 5(4) + 6 = 16 - 20 + 6 = 22 - 20 = 2 > 0$$

إذن الفترة x>3 ضمن المجال domain

لنأخذ العدد $2.5 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ من الفترة $2<x<3$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4} = \frac{49}{4} - \frac{50}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} < 0$$

الناتج عدد سالب أي أن الفترة $2<x<3$ ليست ضمن المجال domain

لنأخذ العدد 0 من الفترة $x<2$

$$(0)^2 - 5(0) + 6 = 6 > 0$$

إذن الفترة $x<2$ ضمن المجال domain

وبما أن كل من الجذرين 3 و 2 يجعلان ما تحت الجذر مساوياً للصفر والصفر تحت الجذر مقبول (لو كان الجذر في المقام لما قبلنا ذلك لأن القسمة على الصفر لا تجوز) لذلك فإن المجال domain هو

$$x \leq 2 \ or \ x \geq 3 = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$$

30. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\qquad g(x) = x^2 - 3x - 10$

Domain f(x)=R-{0} , domain g(x)=R

$$(g \ o \ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\ \frac{1}{x}\ \right)^2 - 3\left(\frac{1}{x}\right) - 10$$
$$= \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 10$$

بما أن domain g(x)=R إذاً

Domain (g o f)(x)=domain f(x)=R-{0}

Or:

Domain g(f(x))=R-{0}

$$domain\ (g\ o\ f)(x) = domain\ f(x) \cap domain\ g(\ f(x))$$

$$= R - \{0\} \cap R = R - \{0\}$$

$$(f\ o\ g)(x) = f(\ g(x)\ ) = f(\ x^2 - 3x - 10\ \ ) = \frac{1}{x^2 - 3x - 10}$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0\ , \qquad (x-5)(x+2) = 0$$

X=5 or x=-2

Domain f(g(x))=R-{ - 2 , 5 }

$$domain\ (f\ o\ g)(x) = domain\ g(x) \cap domain\ f(\ g(x))$$

$$= \ R \cap R - \{-2, 5\} = R - \{-2, 5\}$$

$$31.\ f(x) = \frac{3}{x+2}\ , \qquad g(x) = \frac{-1}{\frac{1}{3}x + 1} = (-1)\left(\frac{3}{x+3}\right) = -\frac{3}{x+3}$$

$$\frac{1}{3}x + 1 = \frac{x}{3} + \frac{3}{3} = \frac{x+3}{3}$$

Domain f(x)= R-{ - 2 } , domain g(x)=R-{ -3 }

$$(g\ o\ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g\left(\frac{3}{x+2}\right) = -\ \frac{3}{\frac{3}{x+2} + 3}$$

$$= \ -3 \div \frac{3}{x+2} + 3 = \ -3\ \div \frac{3x+9}{x+2} = (-3)\left(\frac{x+2}{3x+9}\right)$$

$$= (-3)\left(\frac{x+2}{3(x+3)}\right) = -\frac{x+2}{x+3}$$

$$\frac{3}{x+2} + 3 = \frac{3}{x+2} + \frac{3(x+2)}{x+2} = \frac{3 + 3x + 6}{x+2} = \frac{3x+9}{x+2}$$

إيجاد مجال domain (g o f) بطريقة الحذف

مجال domain g(x) هو R-{-3} أي أن العدد -3 ليس في مجال domain g(x)

إذا متى يكون $g(-3) = g\left(\frac{3}{x+2}\right) = g\big(f(x)\big)$? يكون عندما

$$\frac{3}{x+2} = -3 \ , 3 = -3(x+2), 3 = -3x - 6, 3x = -9, x = -3$$

مجال domain f(x) هو R-{2} والآن نحذف منه العدد 3- ليصبح R-{-3,-2} وهذا هو مجال domain الدالة المركبة composite function أي

Domain (g o f)(x)=R-{-3,-2}

إيجاد مجال domain (g o f) بطريقة التقاطع

$$domain\ g(f(x)) = domain - \frac{x+2}{x+3} = R - \{-3\}$$

$$domain(g\ o\ f)(x) = domain\ f(x) \cap domaing(f(x))$$

$$= \quad R - \{-2\} \cap R - \{-3\} = R - \{-2\,, -3\}$$

$$(f\ o\ g)(x) = f(\,g(x)) = f\left(-\frac{3}{x+3}\right) = \frac{3}{\frac{-3}{x+3} + 2}$$

$$= 3 \div \frac{-3}{x+3} + 2 = 3 \div \frac{2x+3}{x+3} = (3)\left(\frac{x+3}{2x+3}\right) = \frac{3x+9}{2x+3}$$

$$\frac{-3}{x+3} + 2 = \frac{-3+2(x+3)}{x+3} = \frac{-3+2x+6}{x+3} = \frac{2x+3}{x+3}$$

إيجاد مجال domain (f o g) بطريقة الحذف

مجال domain f(x) هو R-{-2} أي أن العدد 2- ليس في مجال domain f(x)

إذا متى يكون $f(-2) = f\left(-\frac{3}{x+3}\right) = f(\,g(x))$? يكون عندما

$$\frac{-3}{x+3} = -2 \ , -3 = -2(x+3), -3 = -2x - 6, 2x = -3, x = -\frac{3}{2}$$

مجال domain g(x) هو R-{-3} والآن نحذف منه العدد $-\frac{3}{2}$ ليصبح $R - \{-3, -\frac{3}{2}\}$ وهذا هو مجال domain الدالة المركبة composite function أي

$$domain\ (f\ o\ g)(x) = R - \{-3, -\frac{3}{2}\}$$

إيجاد مجال domain (f o g) بطريقة التقاطع حيث وجدنا أعلاه أن

$$f(g(x)) = \frac{3x+9}{2x+3}$$

$$2x + 3 = 0\ ,\ \ 2x = -3\ ,\ \ x = -\frac{3}{2}$$

$$domain\ f(g(x)) = R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

$$domain\ (f\ o\ g)(x) = domain\ \ g(x) \cap domain\ f(g(x))$$

$$= R - \{-3\} \cap R - \left\{-\frac{3}{2}\right\} = R - \left\{-3\ , -\frac{3}{2}\right\}$$

32. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}\ , g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

$f(1) = \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} =??$, لا تقسم على الصفر , $g(-1) = \dfrac{1}{-1+1} = \dfrac{1}{0} =??$

$$domain\ \ f(x) = R - \{1\}\ ,\qquad domain\ \ g(x) = R - \{-1\}$$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\,f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{x-1} + 1}$$

$$= 1 \div \left\{\frac{1}{x-1} + 1\right\} = 1 \div \{\frac{1 + 1(x-1)}{x-1}\}$$

$$= \ 1 \div \left\{\frac{1 + x - 1}{x-1}\right\} = 1 \div \frac{x}{x-1} = (1)\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x-1}{x}$$

$$g(\,f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = g(-1) = \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0} =??$$

تكون $g\left(\frac{1}{x-1}\right) = g(-1)$ عندما

$$\frac{1}{x-1}=-1, \qquad 1=-1(x-1), 1=-x+1, x=1-1=0$$

أي عندما x=0 إذاً نحذف 0 من مجال domain f(x) ليصبح $R-\{1,0\}$

إذاً $domain\ (g\ o\ f)(x)=R-\{0,1\}$

$$(f\ o\ g)(x)=f(\ g(x)\ )=f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x+1}-1}=\frac{1}{\frac{1-1(x+1)}{x+1}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1-x-1}{x+1}}=\frac{1}{\frac{-x}{x+1}}=-\frac{x+1}{x}$$

$$f\big(\ g(x)\big)=f\left(\frac{1}{x+1}\right)=f(1)=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=??$$

تكون $f\left(\frac{1}{x+1}\right)=f(1)$ عندما

$$\frac{1}{x+1}=1, \qquad 1=x+1, x=1-1\ , x=0$$

أي عندما x=0 إذاً نحذف 0 من مجال domain g(x) ليصبح $R-\{-1,0\}$

إذاً $domain\ (f\ o\ g)(x)=R-\{-1,0\}$

33. $f(x)=\sqrt{x^2+3}\ , \qquad g(x)=\sqrt{x^2-4}$

$x^2+3\geq 3>0, \qquad so\ \ domain\ f(x)=R$

$x^2-4\geq 0\ , x^2\geq 4, \qquad x\geq 2\ \ or\ \ x\leq -2$

$domain\ \ g(x)=x\geq 2\ \ or\ \ x\leq -2=[2,\infty)\cup(-\infty,-2]$

$=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

$$(g\ o\ f)(x)=g(\ f(x)\ )=g\left(\sqrt{x^2+3}\right)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-4}$$

$$= \sqrt{x^2 + 3 - 4} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$x^2 - 1 \geq 0\,, x^2 \geq 1, \qquad x \geq 1 \;\; or \;\; x \leq -1$

$$domain\;\; g(\,f(x)) = x \geq 1 \;\; or \;\; x \leq -1 = [1, \infty) \cup (-\infty, -1]$$
$$= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$domain(g\; o\; f)(x) = domain\, f(x) \cap domain\; g(f(x))$$
$$= R \cap (\;\; (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \;\;)$$
$$= R \cap (\;\; (-\infty, -1]\;) \cup R \cap (\,[1, \infty))$$
$$= \;\; (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$(f\; o\; g)(x) = f(\,g(x)\,) = f\left(\;\sqrt{x^2 - 4}\;\right) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 - 4}\right)^2 + 3}$$
$$= \sqrt{x^2 - 4 + 3} = \sqrt{x^2 - 1}$$

بما أن مجال domain f(x)=R إذاً

$$\text{Domain (f o g)(x)} = \text{domain g(x)} \;\;\; = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

لا تنسى : إذا كان مجال domain الدالة الخارجية هو R فإن مجال الدالة المركبة يساوي مجال domain الدالة الداخلية

In Exercises 34 – 41 ,Write F as the composite g o f of two functions f and g (neither of which equal to F)

في التمارين 34 – 41 أكتب F كالتركيب g o f للدالتين f و g (واللآتي كل منهما لا تساوي F)

سنورد مع الحل بعض المقترحات التي قد تساعد على إيجاد الدالتين g(x) و f(x) وستكون f(x) هي الدالة الداخلية و g(x) هي الدالة الخارجية أي (g o f)(x)=g(f(x))

34. $F(x) = (6x - 5)^3$

الدالة F(x) بها قوس مرفوع لقوة , خذ f لتساوي ما بداخل القوس وخذ g لتساوي الباقي بعد وضع x بدل ما بداخل القوس

$f(x) = 6x - 5 \ , g(x) = (x)^3 = x^3$

$(g\ o\ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(6x - 5\ ) = (6x - 5)^3 = F(x)$

35. $F(x) = \sqrt{x + 2}$

الدالة عبارة عن جذر فقط , خذ f لتساوي ما تحت الجذر وخذ g لتساوي جذر x

$f(x) = x + 2\ , \qquad g(x) = \sqrt{x}$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g(x + 2) = \sqrt{x + 2}$$

36. $F(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{2}$

الدالة بسط ومقام , خذ f لتكون مقلوب البسط والمقام وتكون $g(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x}} \quad , \qquad g(x) = \dfrac{1}{x}$

$(g\ o\ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g\left(\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}\right) = \dfrac{1}{\frac{2}{\sqrt[4]{x}}} = 1 \div \dfrac{2}{\sqrt[4]{x}} = (1)\dfrac{\sqrt[4]{x}}{2} = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{2}$

لا تنسى : في قسمة الكسور شقلب واضرب

37. $F(x) = 3x^2 + 7$

الدالة كثيرة حدود بها حد لا يحوي x , خذ f لتساوي جميع الحدود التي تحوي x وخذ g لتساوي x زائد أو ناقص الحد الذي لا يحوي x

$f(x) = 3x^2, \qquad g(x) = x + 7$

$(g\ o\ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g(3x^2\,) = 3x^2 + 7$

38. $F(x) = |2x + 9|$

الدالة قيمة مطلقة , خذ f لتساوي ما بداخل القيمة المطلقة وخذ g=|x|

$$f(x) = 2x + 9 , \qquad g(x) = |x|$$

$$(g \; o \; f)(x) = g(\, f(x)\,) = g(2x + 9\,) = |2x + 9|$$

39. $F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{2}}$

الدالة F(x) بها قوس مرفوع لقوة , خذ f لتساوي ما بداخل القوس وخذ g لتساوي الباقي بعد وضع x بدل ما بداخل القوس

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad , \qquad g(x) = x^{\frac{5}{2}}$$

$$(g \; o \; f)(x) = g\big(\, f(x)\big) = g\left(x + \frac{1}{x} \;\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{2}}$$

40. $F(x) = \dfrac{2}{x-3}$

الدالة بسط ومقام , خذ f لتكون مقلوب البسط والمقام وتكون $g(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{x-3}{2} \, , \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$(g \; o \; f)(x) = g(\, f(x)\,) = g\left(\frac{x-3}{2}\right) = \frac{1}{\frac{x-3}{2}} = \frac{2}{x-3}$$

41. $F(x) = \sqrt{x} + 1$

الدالة عبارة عن جذر x وأعداد , خذ f لتساوي الجذر وخذ g لتساوي x مع الأعداد

$$f(x) = \sqrt{x} \, , \qquad g(x) = x + 1$$

$$(g \; o \; f)(x) = g\big(\, f(x)\big) = g\big(\sqrt{x}\,\big) = \sqrt{x} + 1$$

إذا لم يكن الشرط (neither of which equal to F) أي لا أي منهما يساوي F غير موجود فإن الحل العام الذي يعمل مع أي دالة F هو أن تكون f(x)=F وتكون g(x)=x لأن

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(F(x))= F(x)$

42. Find g if $f(x)=|x|$ and $(f+g)(x)=|x|-|2x-5|$

أوجد g إذا $f(x)=|x|$ و $(f+g)(x)=|x|-|2x-5|$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x))=|x|-|2x-5|$

$f(x)-|x|+g(x)=-|2x-5|$, $0+g(x)=|2x-5|$, $g(x)=|2x-5|$

43. Find g if $f(x)=|x|$ and $(fg)(x)=|x||2x-5|$

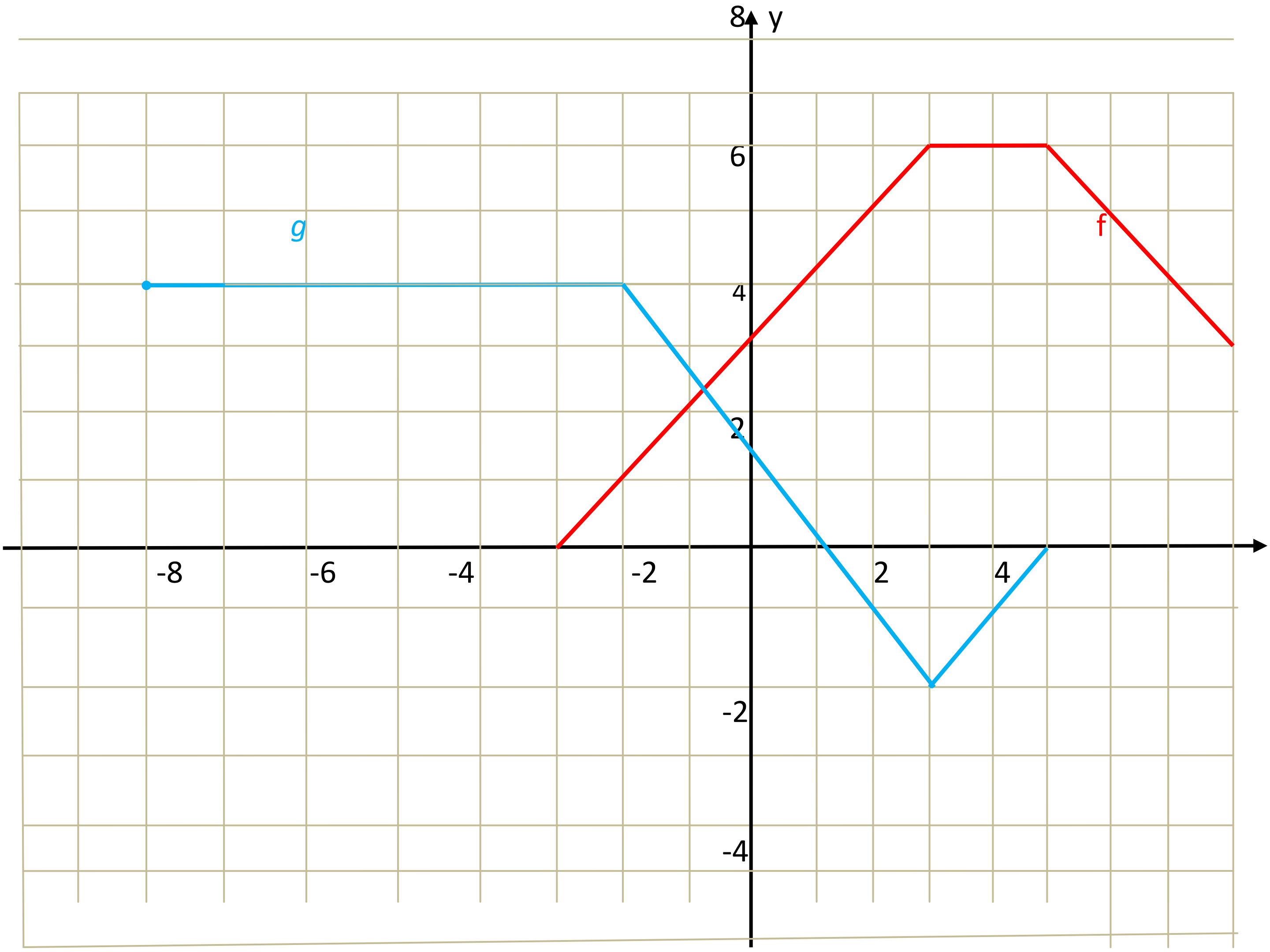
أوجد g إذا $f(x)=|x|$ و $(fg)(x)=|x||2x-5|$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)) = |x||2x - 5|$$

$$g(x) = \frac{|x||2x-5|}{f(x)} \quad , \quad x \neq 0 , \qquad g(x) = \frac{|x||2x-5|}{|x|} = |2x-5|$$

In exercises 44 – 50 find the specified values of each of the following by using the graph in Figure 0.3.8 page 35

في التمارين 44 – 50 أوجد القيم المعينة لكل مما يلي باستخدام الرسم في الشكل الآتي



$44. (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 5 + 0 = 5$

$45. (f-g)(4) = f(4) - g(4) = 6 - (-2) = 6 + 2 = 8$

$46. (f.g)(-2) = f(-2).g(-2) = 1.4$=4

47. $\left(\frac{g}{f}\right)(5) = \frac{g(5)}{f(5)} = \frac{0}{6} = 0$

48. $(g\ o\ f)(-3) = g\big(f(-3)\big) = g(0) = 2$

49. $(f\ o\ f)(2) = f(\,f(2)\,) = f(5) = 6$

50. $(g\ o\ g)(1) = g\big(\,g(1)\big) = g(1) = 1$

Section 0.4

تمارين (0.4) EXERCISES صفحة 44 و 45 و 46 في الكتاب

In Exercises 1 – 5 Using the horizontal-line test , determine whether the function is one-to-one.

في التمارين 1 – 5 باستخدام اختبار الخط الأفقي حدد فيما إذا كانت الدالة واحد لواحد

اختبار الخط الأفقي horizontal-line test : ينص على أنه إذا قطع أي مستقيم أفقي horizontal-line رسم الدالة في أكثر من نقطة واحدة فإن الدالة ليست واحد لواحد

one-to-one = 1-1 = واحد لواحد

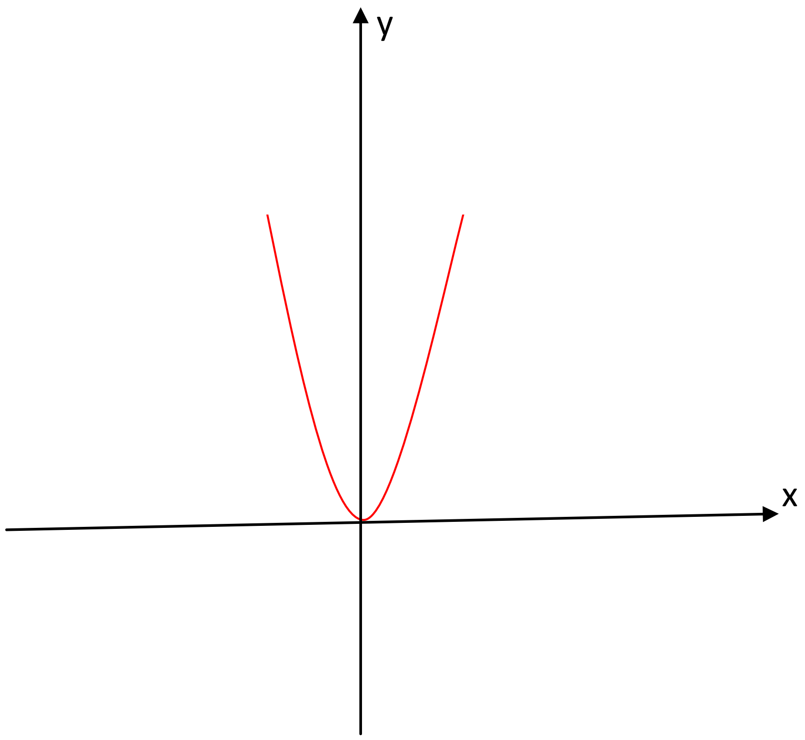
هذا خط أفقي ——————— horizontal line

هذا خط رأسي | vertical line

إنتبه : الخط الأفقي horizontal-line لاختبار هل الدالة واحد لواحد one-to-one

الخط الرأسي vertical line لاختبار هل الرسم يمثل دالة

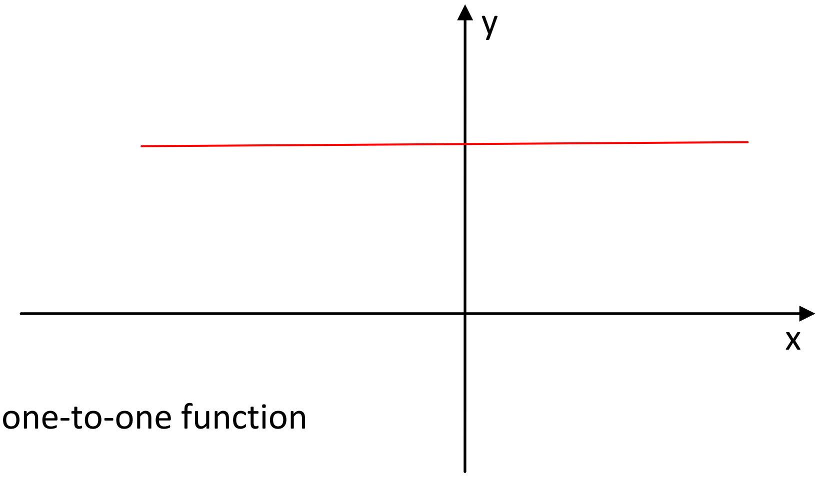
1.



not one-to-one function = not 1-1

ليست دالة واحد لواحد(ليست 1-1) لأنه لو رسمنا مستقيم أفقي horizontal line لقطع رسم الدالة في نقطتين

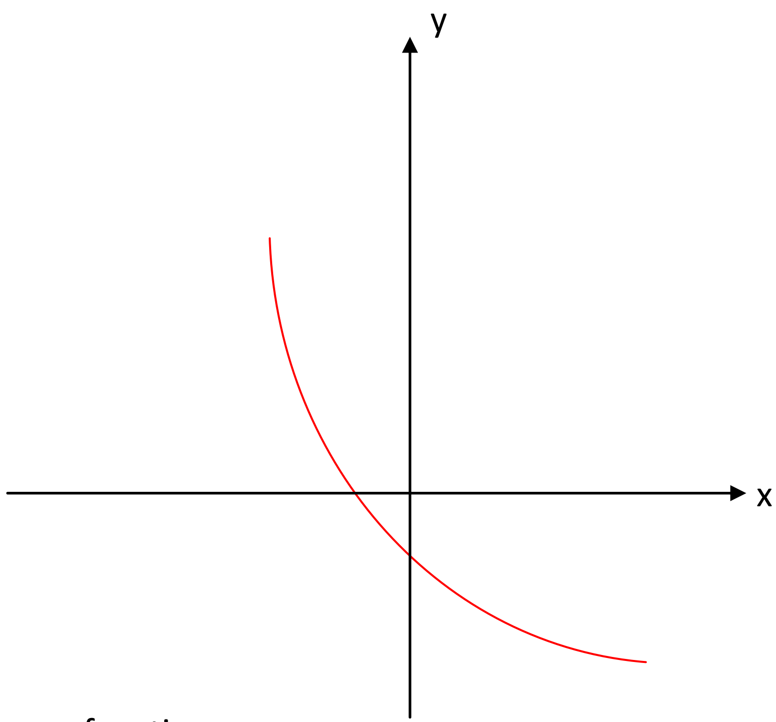
2.



not one-to-one function

ليست 1-1 لأن الرسم نفسه هو مستقيم أفقي أي أنه يقطع نفسه في ما لا نهاية من النقاط

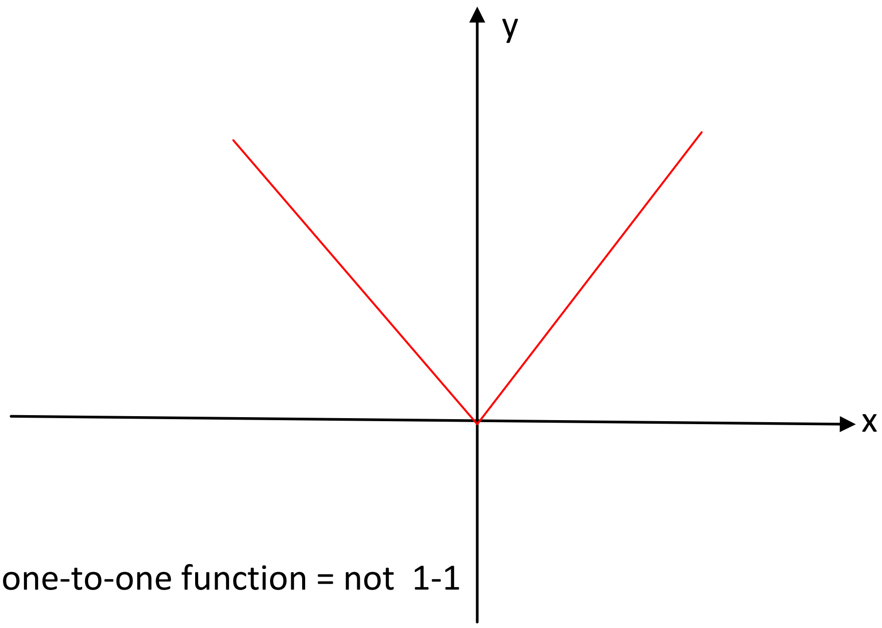
3.



one-to-one function

دالة 1-1 لأن أي مستقيم أفقي سيقطع رسم الدالة في نقطة واحدة فقط

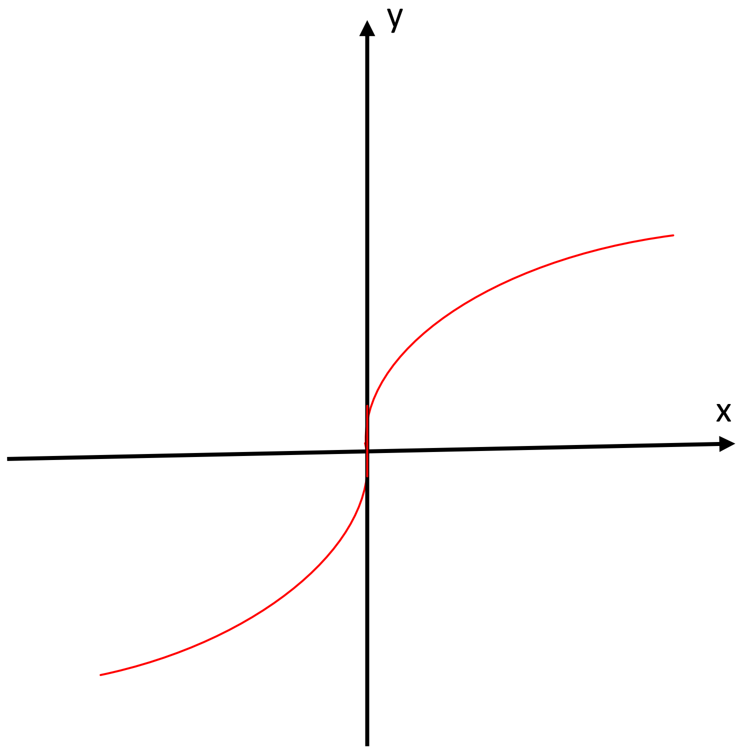
4.



not one-to-one function = not 1-1

ليست دالة واحد لواحد(ليست 1-1) لأنه لو رسمنا مستقيم أفقي لقطع رسم الدالة في نقطتين

5.



one-to-one function

دالة 1-1 لأن أي مستقيم أفقي سيقطع رسم الدالة في نقطة واحدة فقط

In Exercises 6- 11.Assume the following functions are one-to-one .Find their inverse at the specified values.

في التمارين 6 – 11 إعتبر أن الدوال الآتية هي واحد لواحد . أوجد معكوساتها عند القيمة المعينة

إنتبه :هذا النوع من المسائل حله سهل وسريع لذلك في الاختبار إبدأ بالمسائل التي حلها سهل وسريع

6. $if\ \ f(4) = 3\,, find\ \ f^{-1}(3)$

إذا كانت $f(4) = 3$ فأوجد $f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3) = 4$

أنتبه : $f(4) = 3$ تعني أن الدالة $f(x)$ ترسل العدد 4 إلى العدد 3 . إذاً معكوسها $f^{-1}(x)$ يعمل العكس أي يرسل العدد 3 إلى العدد 4

أي إذا كان الزوج المرتب (4,3) في f فإن الزوج المرتب (3,4) في f^{-1}

7. $if\ \ f(2) = 4\,, find\ \ f^{-1}(4)$

$f^{-1}(4)$ =2

أنظر الملاحظات في التمرين 6

8. $if\ \ g(-5) = 6\,, find\ \ g^{-1}(6)$

$g^{-1}(6) = -5$

أنظر الملاحظات في التمرين 6

9. $Find\ (f\ o\ f^{-1})(-5)$

$(f\ o\ f^{-1})(-5) = -5$

لا تنسى $(f\ o\ f^{-1})(x) = (f^{-1}\ o\ f)(x) = x$

10. $Find\ (f\ o\ f^{-1})(0)$

$(f\ o\ f^{-1})(0) = 0$

11. $Find\ (g\ o\ g^{-1})(-1)$

$(g\ o\ g^{-1})(-1) = -1$

In Exercises 12 – 16 prove that f and g are inverses of each other.

في التمارين 12 – 16 أثبت أن f و g كل منهما معكوس للآخر

لإثبات أن كل منهما معكوس للآخر , يجب أن نثبت أن

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

12. $f(x) = 3x$, $g(x) = \frac{x}{3}$

$(f \circ g)(x) = f(\,g(x)\,) = f\left(\frac{x}{3}\right) = 3\frac{x}{3} = x$

$(g \circ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g(\,3x) = \frac{3x}{3} = x$

13. $f(x) = \frac{x+2}{6}$, $g(x) = 6x - 2$

$(f \circ g)(x) = f(\,g(x)\,) = f(\,6x-2) = \frac{(6x-2)+2}{6} = \frac{6x}{6} = x$

$(g \circ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g\left(\frac{x+2}{6}\right) = 6\left(\frac{x+2}{6}\right) - 2$

$= x + 2 - 2 = x$

14. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 , x \geq 0$

$(f \circ g\,)(x) = f(\,g(x)\,) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = x$

$(g \circ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g(\sqrt{x}) = (\,\sqrt{x})^2 = x$

15. $f(x) = \sqrt{6-x}$, $g(x) = 6 - x^2$, $0 \leq x \leq 6$

$(f \circ g)(x) = f(\,g(x)\,) = f(6-x^2) = \sqrt{6-(6-x^2)}$

$$= \sqrt{6-6+x^2} = \sqrt{x^2} = x$$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g\left(\sqrt{6-x}\,\right) = 6 - \left(\sqrt{6-x}\,\right)^2$$

$$= 6 - (6-x) = 6 - 6 + x = x$$

16. $f(x) = x^3 - 3$, $\qquad g(x) = \sqrt[3]{x+3}$

$$(f\ o\ g)(x) = f(\,g(x)\,) = f\left(\sqrt[3]{x+3}\right) = \left(\sqrt[3]{x+3}\right)^3 - 3$$

$$= x + 3 - 3 = x$$

لا تنسى : إذا كانت a عدد صحيح موجب فإن

$$\left(\sqrt[a]{f(x)}\,\right)^a = \left((f(x)\,)^{\frac{1}{a}}\right)^a = (\,f(x)\,)^{\frac{a}{a}} = \left(\,f(x)\right)^1 = f(x)$$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g(x^3 - 3\ \ ) = \sqrt[3]{(x^3-3)+3}$$

$$= \sqrt[3]{x^3} = x$$

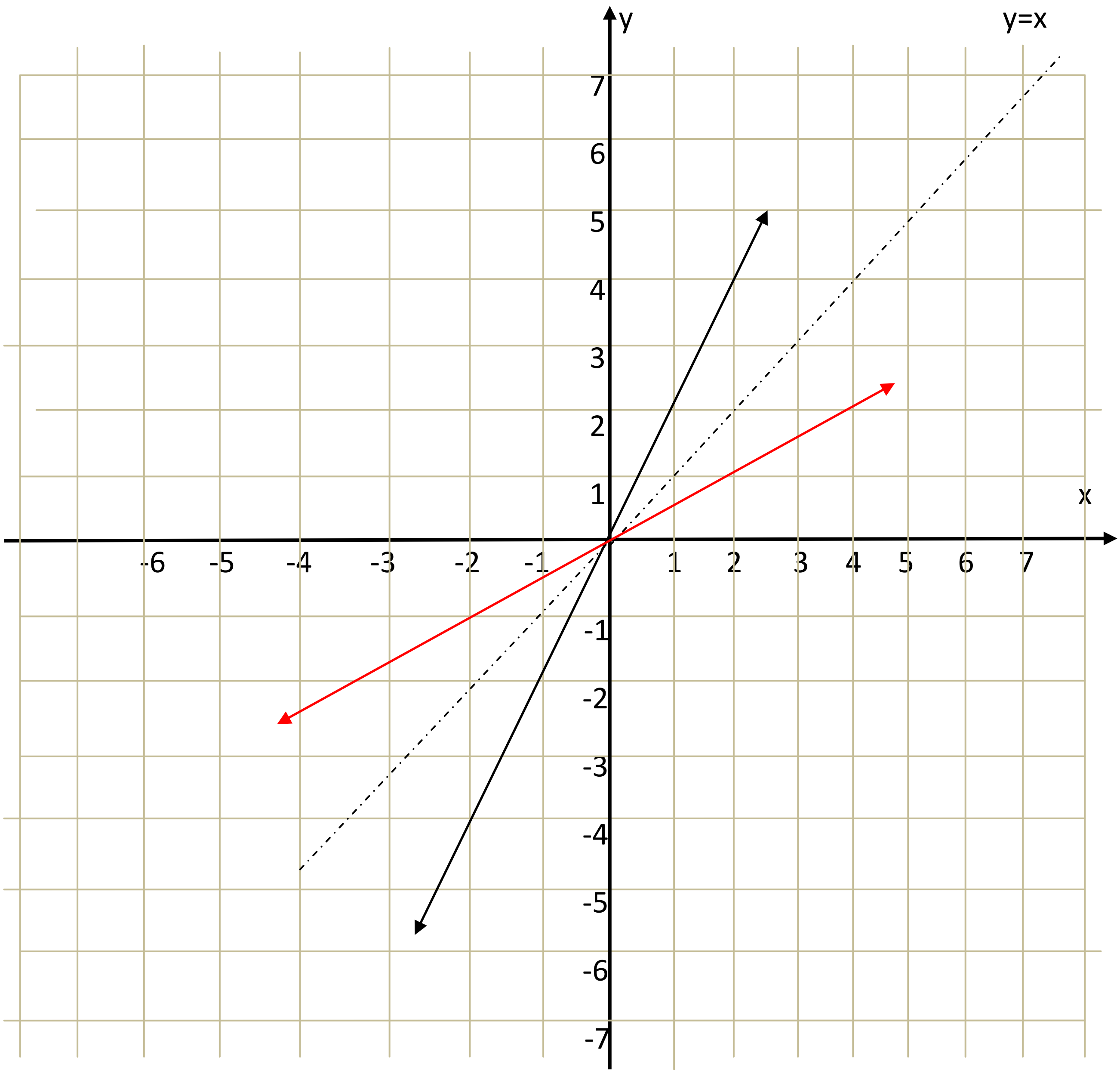
In Exercises 17—22 . The graph of a function f is given . On the same axis ,sketch the graph of f^{-1} .

في التمارين 17 – 22 . منحني (رسم) الدالة f معطى . على نفس مستوي الاحداثيات ارسم منحني f^{-1}

في مثل هذا النوع من التمارين يكون رسم الدالة متماثل مع رسم معكوسها حول المستقيم y=x أي أن المستقيم y=x يمثل مرآة بين الدالة ومعكوسها لذلك ارسم المستقيم y=x إذا لم يكن موجود (في هذه التمارين المستقيم y=x مرسوم مع رسم الدالة)

لاتنسى أنه إذا كانت النقطة (a,b) تقع على رسم الدالة فإن النقطة (b,a) تقع على رسم معكوسها

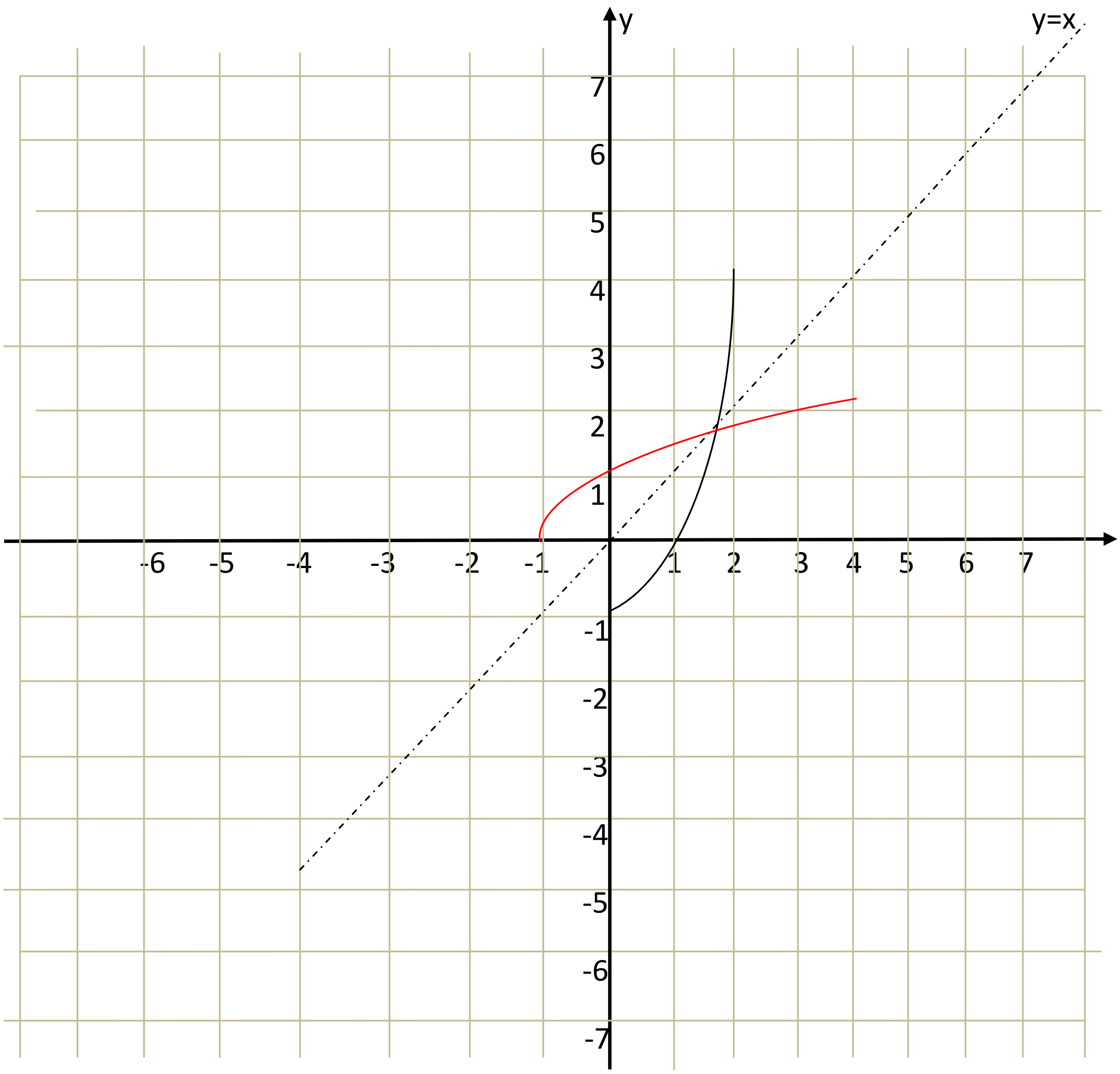
17.



رسم الدالة هو مستقيم لذلك رسم معكوس المستقيم هو أيضاً مستقيم

رسم الدالة يمر بالنقطة (0,0) إذاً رسم المعكوس يمر بالنقطة (0,0) ورسم الدالة يمر بالنقطة (2,4) إذاً رسم المعكوس يمر بالنقطة (4,2) إذاً نرسم المستقيم الذي يمر بالنقطتين (0,0) و (4,2) ونمده بالاتجاهين وهذا هو رسم المعكوس (المستقيم الأحمر في الشكل)

18.



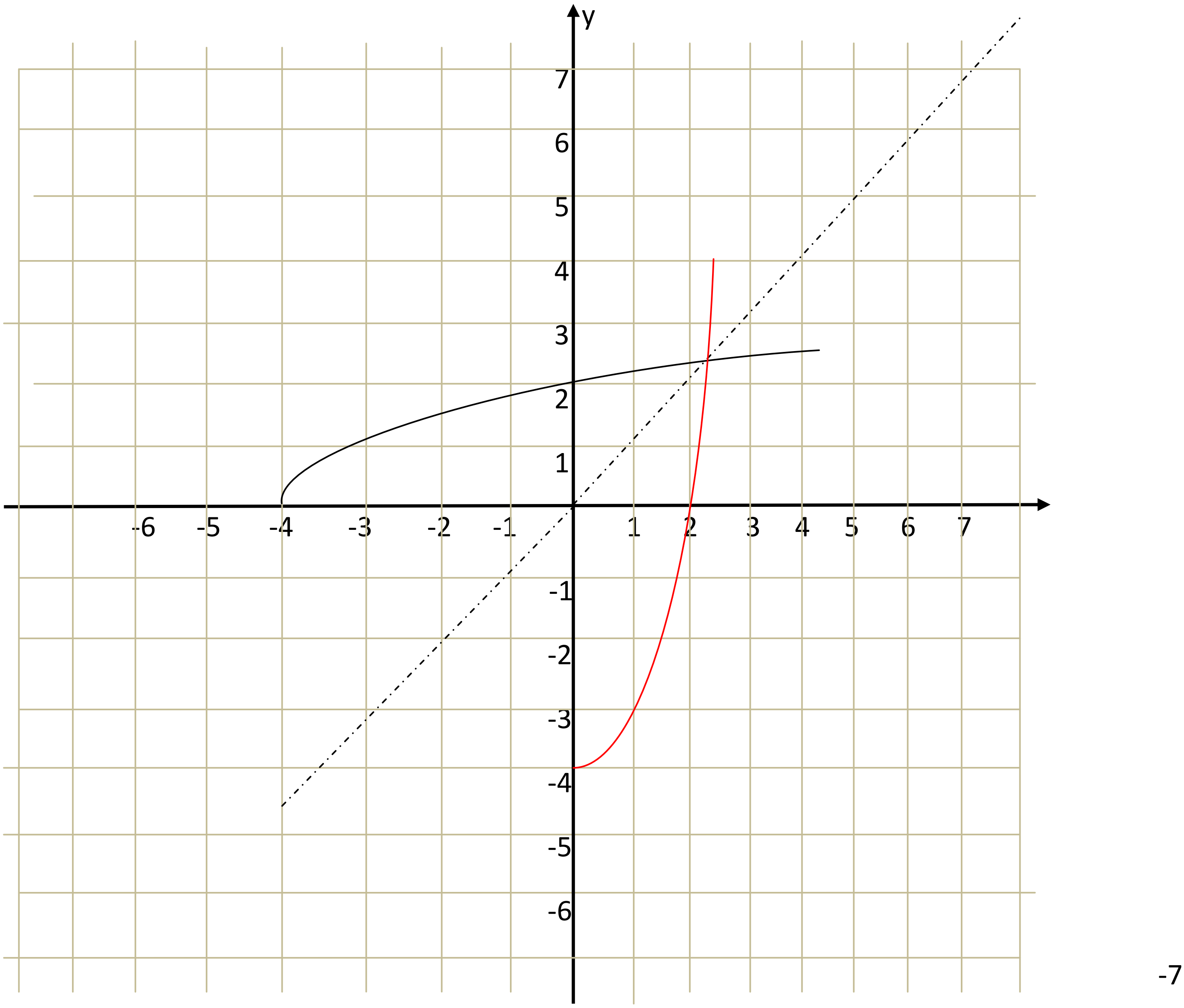
رسم الدالة يمر بالنقاط (0,-1) و (1,o) و (2,3) ويقطع المستقيم y=x عند (a,a)

رسم معكوس الدالة يمر بالنقاط (-1,0) و (0,1) و (3,2) ويقطع المستقيم y=x عند(a,a)

على الرسم نرسم النقاط (-1,0) و(0,1) و(3,2) ونقطة التقاطع مع المستقيم ثم نصل هذه النقاط بمنحي ناعم فيكون هو رسم المعكوس (المنحني الأحمر في الشكل)

ملاحظة: إذا قطع رسم الدالة المستقيم y=x عند نقاط معينة فإن رسم معكوس الدالة يقطع المستقيم y=x عند نفس النقاط (المستقيم y=x يمثل مرآة بين رسم الدالة ورسم معكوسها)

19.



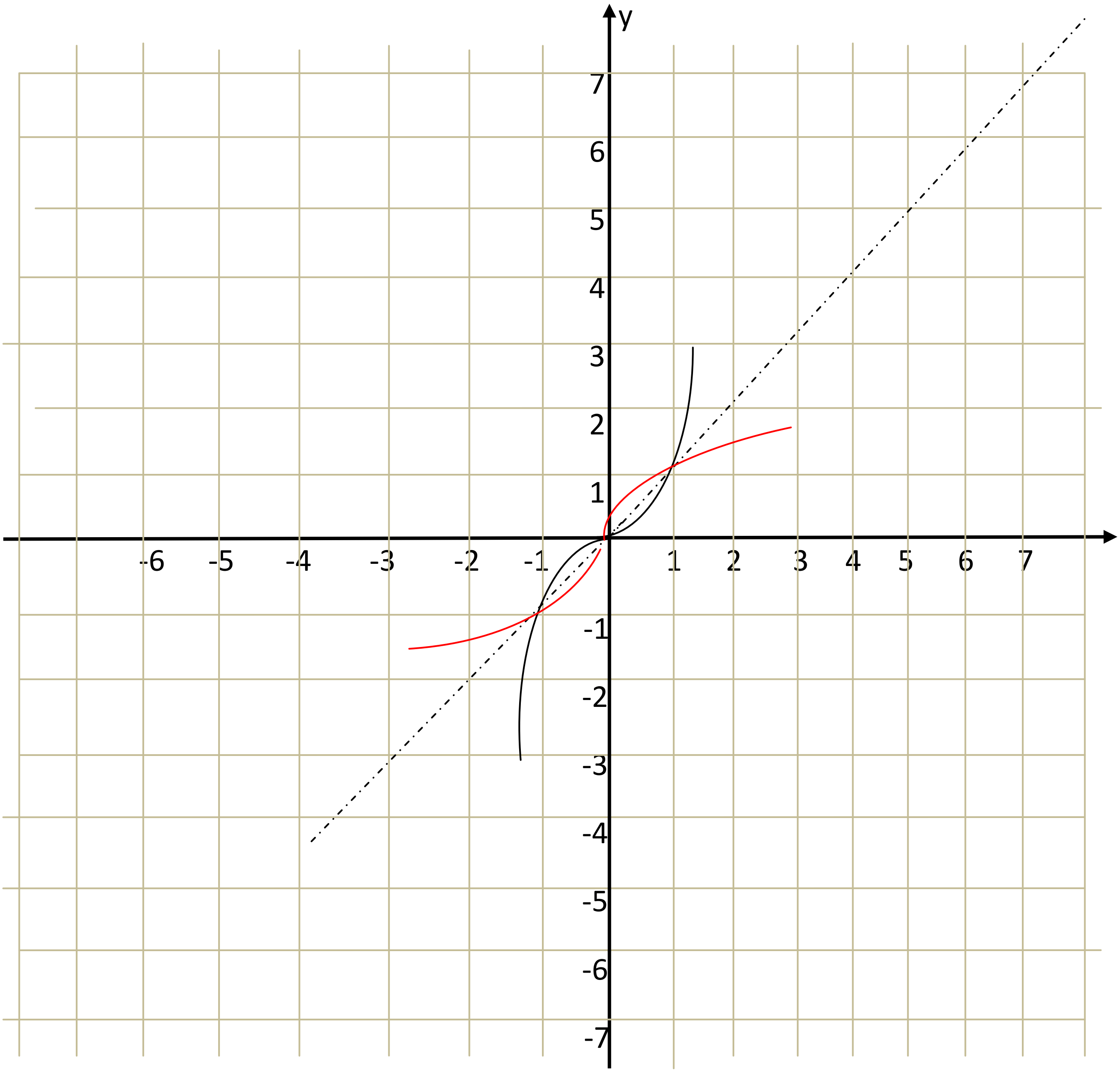
رسم الدالة يمر بالنقاط (-4,0) و (0,2) و (4,2.5) ويقطع المستقيم y=x عند (a,a)

رسم معكوس الدالة يمر بالنقاط (0,-4) و (2,0) و (2.5,4) ويقطع المستقيم y=x عند (a,a)

على الرسم نرسم النقاط (0,-4) و(2,0) و(2.5,4) ونقطة التقاطع مع المستقيم ثم نصل هذه النقاط بمنحي ناعم فيكون هو رسم المعكوس (المنحني الأحمر في الشكل)

ملاحظة: إذا قطع رسم الدالة المستقيم y=x عند نقاط معينة فإن رسم معكوس الدالة يقطع المستقيم y=x عند نفس النقاط (المستقيم y=x يمثل مرآة بين رسم الدالة ورسم معكوسها)

20.



رسم الدالة يمر بالنقاط

(1.25,3) , (1,1) , (0,0) , (-1,-1) , (-1.25,-3)

رسم معكوس الدالة يمر بالنقاط

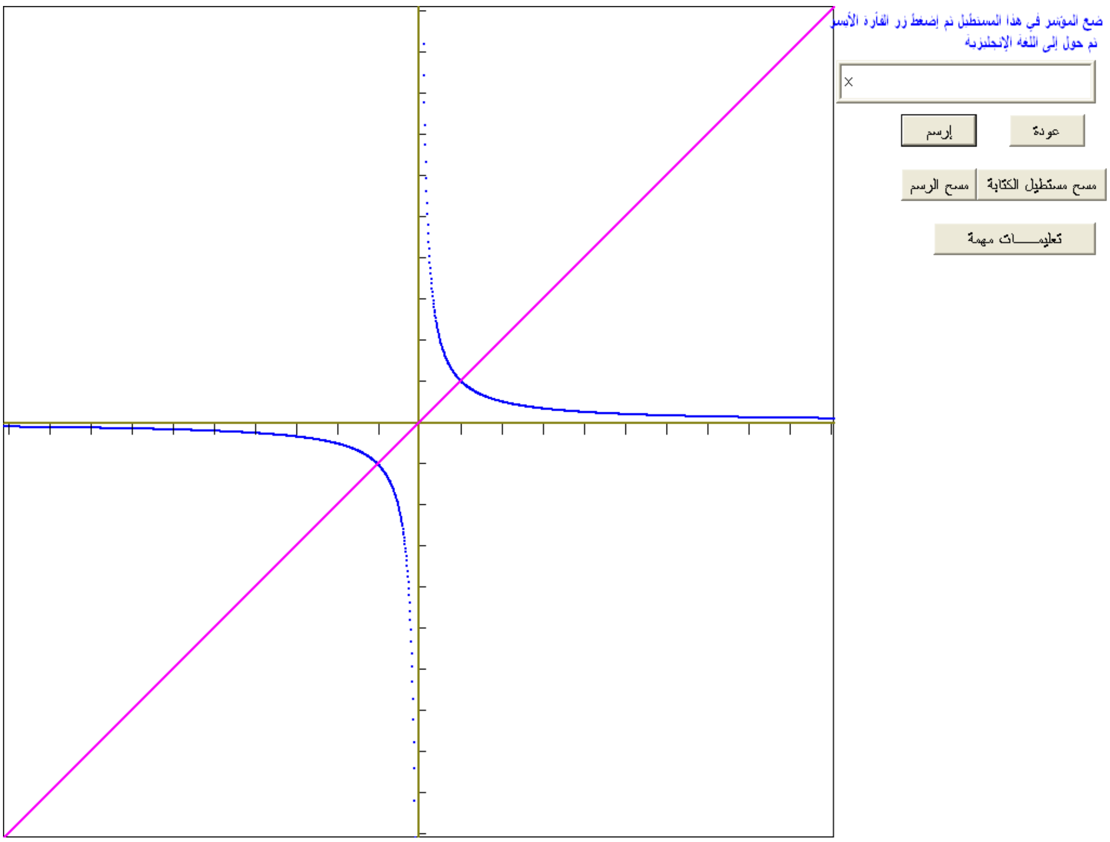
(3,1.25) , (1,1) , (0,0) , (-1,-1) , (-3,-1.25)

على الرسم نرسم النقاط

(3,1.25) , (1,1) , (0,0) , (-1,-1) , (-3,-1.25)

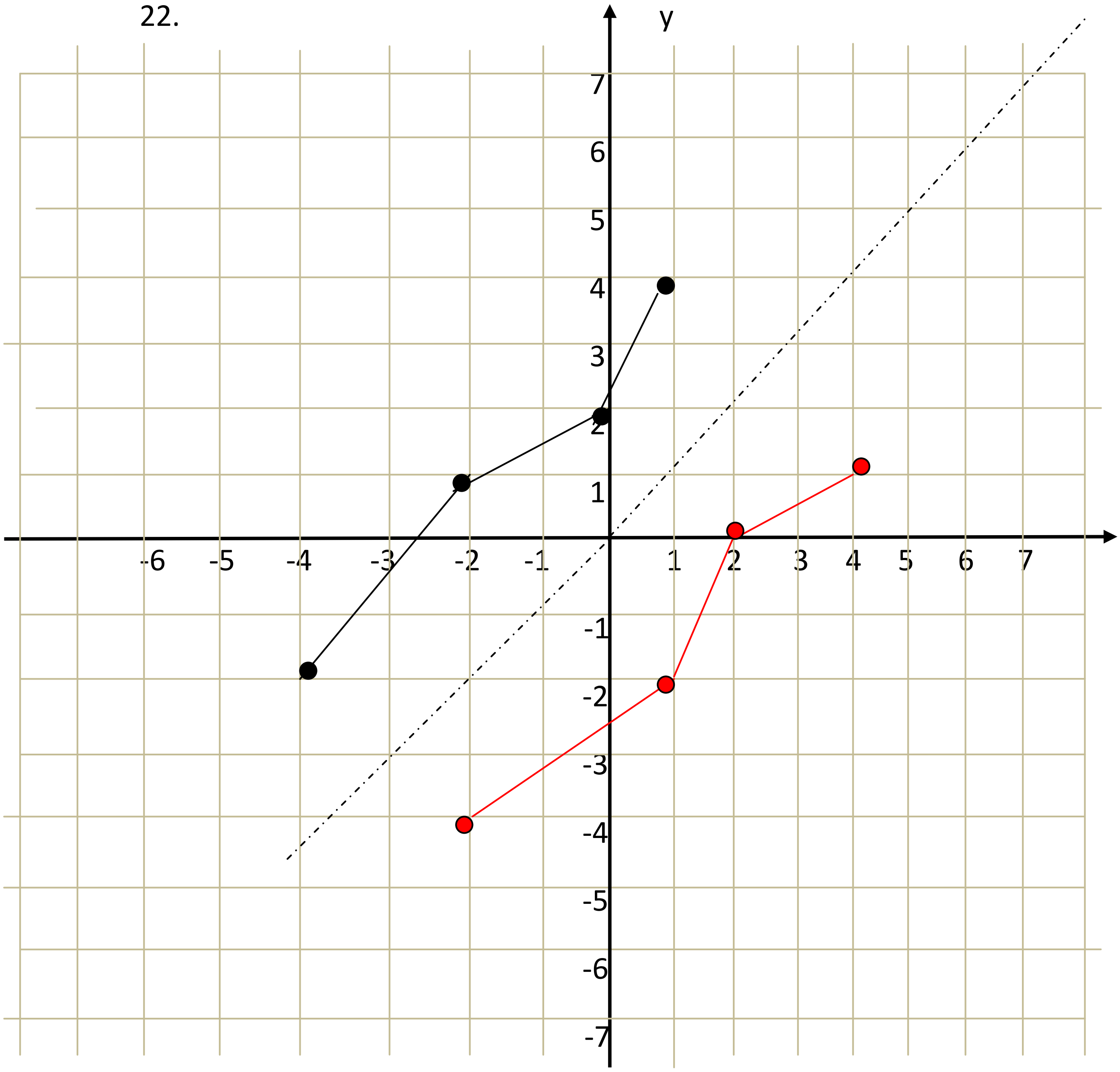
ثم نصل هذه النقاط بمنحي ناعم فيكون هو رسم المعكوس (المنحني الأحمر في الشكل)

21.



$$f(x) = f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

22.



رسم الدالة يمر بالنقاط

(-4,-2) , (-2,1) , (0,2) , (1,4)

إذاً رسم معكوس الدالة يمر بالنقاط

(-2,-4) , (1,-2) , (2,0) , (4,1)

نصل الناط

(-2,-4) , (1,-2) , (2,0) , (4,1)

بمستقيمات فيكون الشكل الناتج هو رسم المعكوس (الرسم الأحمر في الشكل)

In Exercises 23 – 33 .Determine whether the given functions are one-to-one .If it is one-to-one ,find its inverse.

في التمارين 23 – 33 حدد فيما إذا كانت الدوال المعطاة واحد لواحد . إذا كانت واحد لواحد فأوجد معكوسها

23. f = {(12,2),(15,4),(19,-1),(25,6),(78,0)} is one-to-one

$f^{-1} = \{(2,12),(4,15),(-1,19),(6,25),(0,78)\}$

24. $g = \{(-1,2),(0,4),(9,-4),(18,6),(23,-4)\}$

$not\ one - to - one\ \ because\ \ g(9) = -4, g(23) = -4\ , 9 \neq 23$

25. $h(x) = x^2 + 2\ \ not\ one - to - one$

$h(1) = (1)^2 + 2 = 3\ , h(-1) = (-1)^2 + 2 = 3, h(1) = h(-1), 1 \neq -1$

26. $I(x) = \dfrac{1}{2x - 4}\ \ , x \neq 2$

لنثبت أنها واحد لواحد one-to-one نفرض أن $I(a) = I(b)$ ونثبت أن $a = b$ أي

$I(a) = \dfrac{1}{2a - 4}\ \ , a \neq 2\ ,\qquad I(b) = \dfrac{1}{2b - 4}\ \ , b \neq 2$

$\dfrac{1}{2a - 4} = \dfrac{1}{2b - 4}\ \ ,\qquad 2b - 4 = 2a - 4\ , 2b = 2a\ , b = a$

إذاً الدالة واحد لواحد function is one-to-one

لإيجاد المعكوس نتبع الخطوات الآتية

1) نستبدل اسم الدالة بالمتغير y

هنا اسم الدالة هو $I(x)$ لذلك نكتب

$$y = \frac{1}{2x - 4}$$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي تكون x في جهة واحدة لوحدها

$$y(2x-4)=1\ \ ,2xy-4y=1\ \ ,2xy=1+4y\ ,x=\frac{1+4y}{2y}$$

3) نستبدل x التي في جهة لوحدها برمز المعكوس ونستبدل كل y في الجهة الأخرى بالمتغير x

$$x=\frac{1+4y}{2y}$$

إذاً معكوس الدالة هو

$$I^{-1}(x)=\frac{1+4x}{2x}$$

27. $J(x)=-5x+\frac{5}{3}$

لنثبت أنها واحد لواحد one-to-one نفرض أن $J(a)=J(b)$ ونثبت أن $a=b$ أي

$$j(a)=-5a+\frac{5}{3}\ \ ,\qquad j(b)=-5b+\frac{5}{3}$$

$$-5a+\frac{5}{3}=-5b+\frac{5}{3}\ \ ,-5a=-5b\ \ ,a=b$$

إذاً الدالة واحد لواحد function is one-to-one

لإيجاد المعكوس نتبع الخطوات الآتية

1) نستبدل اسم الدالة بالمتغير y

هنا اسم الدالة هو $J(x)$ لذلك نكتب

$$y==-5x+\frac{5}{3}$$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي تكون x في جهة واحدة لوحدها

$$y==-5x+\frac{5}{3}\ ,5x=-y+\frac{5}{3}\ ,x=-\frac{y}{5}+\frac{5}{5(3)}=\ -\frac{y}{5}+\frac{1}{3}$$

$$x=\ \frac{-3y+5}{15}=\frac{5-3y}{15}$$

3) نستبدل x التي في جهة لوحدها برمز المعكوس ونستبدل كل y في الجهة الأخرى بالمتغير x

$J^{-1}\ (x) = \frac{5-3x}{15}$

28. $K(x) = |5x-4|$

$K(0) = |-4| = 4\ \ , K\left(\frac{8}{5}\right) = \left|5\left(\frac{8}{5}\right) - 4\right| = |8-4| = |4| = 4$

$K(0) = K\left(\frac{8}{5}\right) = 4\ \ , but\ 0 \neq \frac{8}{5}\ \ so\ \ not\ \ one-to-one$

ليست واحد لواحد لذلك لا يوجد معكوس

29. $f(x) = -\frac{11}{x+3}\ \ , x \neq -3$

لنثبت أنها واحد لواحد one-to-one نفرض أن $f(a) = f(b)$ ونثبت أن $a = b$ أي

$f(a) = -\frac{11}{a+3}\ \ , a \neq -3\ ,\qquad f(b) = -\frac{11}{b+3}\ \ , b \neq -3$

$\frac{11}{a+3} = \frac{11}{b+3}\ \ ,\qquad 11(b+3) =\ 11(a+3)\ , b+3 = a+3, a = b$

إذاً الدالة واحد لواحد function is one-to-one

لإيجاد المعكوس نتبع الخطوات الآتية

1) نستبدل اسم الدالة بالمتغير y

هنا اسم الدالة هو $f(x)$ لذلك نكتب

$y = -\frac{11}{x+3}$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي تكون x في جهة واحدة لوحدها

$y(x+3) = -11\ \ , xy + 3y = -11\ \ , xy = -11 - 3y\ , x = \frac{-11-3y}{y}$

3) نستبدل x التي في جهة لوحدها برمز المعكوس ونستبدل كل y في الجهة الأخرى بالمتغير x

$$x = \frac{-11 - 3y}{y}$$

إذاً معكوس الدالة هو

$$f^{-1}(x) = \frac{-11 - 3x}{x} = \frac{-11}{x} - \frac{3x}{x} = \frac{-11}{x} - 3$$

30. $f(x) = \sqrt{x+5} \quad , x \geq -5$

لنثبت أنها واحد لواحد one-to-one نفرض أن $f(a) = f(b)$ ونثبت أن $a = b$ أي

$\sqrt{a+5} = \sqrt{b+5}\ ,\ a+5 = b+5\ , a = b$

إذاً الدالة واحد لواحد function is one-to-one

لإيجاد المعكوس نتبع الخطوات الآتية

1) نستبدل اسم الدالة بالمتغير y

هنا اسم الدالة هو $f(x)$ لذلك نكتب

$y = \sqrt{x+5}$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي تكون x في جهة واحدة لوحدها

$y^2 = x + 5\ , \qquad x = y^2 - 5$

3) نستبدل x التي في جهة لوحدها برمز المعكوس ونستبدل كل y في الجهة الأخرى بالمتغير x

$x = y^2 - 5$

إذاً معكوس الدالة هو

$\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 - 5$

31. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2} \quad , \qquad x \in [-3,3]$

$x \in [-3,3] = x\ in[-3,3] = -3 \leq x \leq 3$

الرمز $\in$ يعني تنتمي إلى أو عنصر في

$f(-3) = -3\sqrt{9-(-3)^2} = -3\sqrt{9-9} = -3\sqrt{0} = -3(0) = 0$

$f(3) = 3\sqrt{9-(3)^2} = 3\sqrt{9-9} = 3\sqrt{0} = 3(0) = 0$

$f(-3) = f(3)\,, -3 \neq 3 \quad not\;\; one - to - one\;\; no\; inverse$

32. $g(x) = \sqrt[3]{x} + 4$

لنثبت أنها واحد لواحد one-to-one نفرض أن $g(a) = g(b)$ ونثبت أن $a = b$ أي

$\sqrt[3]{a} + 4 = \sqrt[3]{b} + 4\,, \qquad \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}\;\;, a = b$

إذاً الدالة واحد لواحد function is one-to-one

لإيجاد المعكوس نتبع الخطوات الآتية

1) نستبدل اسم الدالة بالمتغير y

هنا اسم الدالة هو $g(x)$ لذلك نكتب

$y = \sqrt[3]{x} + 4$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي تكون x في جهة واحدة لوحدها

$y - 4 = \sqrt[3]{x}\,, \quad x = (y-4)^3$

3) نستبدل x التي في جهة لوحدها برمز المعكوس ونستبدل كل y في الجهة الأخرى بالمتغير x

$x = (y-4)^3$

إذاً معكوس الدالة هو

$\mathrm{g}^{-1}(\mathrm{x}) = (x-4)^3$

33. $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = 2 - (3-x)^{\frac{1}{5}}$

لنثبت أنها واحد لواحد one-to-one نفرض أن $g(a) = g(b)$ ونثبت أن $a = b$ أي

$2 - (3-a)^{\frac{1}{5}} = 2 - (3-b)^{\frac{1}{5}}\,, \qquad (3-a)^{\frac{1}{5}} = (3-b)^{\frac{1}{5}}$

$, \qquad (3-a) = (3-b), -a = -b\;\;, a = b$

إذاً الدالة واحد لواحد function is one-to-one

لإيجاد المعكوس نتبع الخطوات الآتية

1) نستبدل اسم الدالة بالمتغير y

هنا اسم الدالة هو $g(x)$ لذلك نكتب

$$y = 2 - (3 - x)^{\frac{1}{5}}$$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي تكون x في جهة واحدة لوحدها

$$y = 2 - (3 - x)^{\frac{1}{5}}, \quad y - 2 = -(3 - x)^{\frac{1}{5}}, \qquad (3 - x)^{\frac{1}{5}} = -(y - 2)$$

$$, (3 - x)^{\frac{1}{5}} = 2 - y, \qquad 3 - x = (2 - y)^5, \qquad -x = -3 + (2 - y)^5$$

$$, \qquad x = 3 - (2 - y)^5$$

3) نستبدل x التي في جهة لوحدها برمز المعكوس ونستبدل كل y في الجهة الأخرى بالمتغير x

$$g^{-1}(x) = 3 - (2 - x)^5$$

وهذا هو المعكوس

In Exercises 34 – 39 .Determine whether each pair of the following functions are inverse of each other.

في التمارين 34 – 39 حدد فيما إذا كان كل زوج معطى من الدوال الآتية يكون كل منهما معكوس للآخر.

لكي تكون الدالة f(x) معكوس inverse للدالة g(x) يجب أن تكون

(f o g)(x)=(g o f)(x)=x

أي يجب أن يتحقق الشرطين :

$(f \circ g)(x)=x$ (1

$(g \circ f)(x)=x$ (2

34. $g(x) = -x^3 - 3 , f(x) = \sqrt[3]{-x^3-3}$

1) $(g \; o \; f)(x) = g(\, f(x)\,) = g(\, \sqrt[3]{-x^3-3}\ \,) = \ -(\, \sqrt[3]{-x^3-3}\ \,)^3 - 3$

$$= \ -(-x^3-3) - 3 = x^3 + 3 - 3 = x^3$$

$(g \; o \; f)(x) = x^3 \neq x$

لا تنسى $\left(\sqrt[a]{f(x)}\,\right)^a = f(x)$ حيث a عدد صحيح موجب أكبر من العدد 1

لا تنسى جرت العادة على أن $\sqrt[2]{f(x)} = \sqrt{f(x)}$ أي العدد 2 لا يكتب

أحد الشرطين لم يتحقق إذاً ليس كل منهما معكوس للآخر أي يكون الجواب no

35. $h(x) = \dfrac{x-1}{2} \, , r(x) = 2x + 1$

1) $(h \; o \; r)(x) = h(\, r(x)\,) = h(2x+1) = \dfrac{(2x+1)-1}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$

2) $(r \; o \; h)(x) = r(\, h(x)\,) = r\left(\dfrac{x-1}{2}\,\right) = \ 2\left(\dfrac{x-1}{2}\right) + 1 \ = \ x - 1 + 1 \ = x$

الشرطان محققان إذاً كل منهما معكوس للآخر أي يكون الجواب yes

36. $d(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \ , \qquad I(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

$$(d \; o \; I)(x) = d(\, I(x)\,) = d\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\frac{x-1}{x+1} + 1}{\frac{x-1}{x+1} - 1} = \frac{\frac{x-1+x+1}{x+1}}{\frac{x-1-(x+1)}{x+1}}$$

$$= \frac{\frac{2x}{x+1}}{\frac{-2}{x+1}} = \left(\frac{2x}{x+1}\right)\left(\frac{x+1}{-2}\right) = \frac{2x}{-2} = -x \quad \neq x$$

أحد الشرطين لم يتحقق إذاً ليس كل منهما معكوس للآخر أي يكون الجواب no

37. $a(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, $b(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

$$1)\ (a\ o\ b)(x) = a(\ b(x)\ ) = a\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)+1}{\frac{2x+1}{x-1}-2}$$

$$= \frac{\frac{4x+2+x-1}{x-1}}{\frac{2x+1-2x+2}{x-1}} = \frac{\frac{5x+1}{x-1}}{\frac{3}{x-1}} = \frac{5x+1}{x-1}.\frac{x-1}{3} = \frac{5x+1}{3} \ \neq x$$

أحد الشرطين لم يتحقق إذاً ليس كل منهما معكوس للآخر أي يكون الجواب no

38. $a(x) = x$, $b(x) = x$

1) $(a\ o\ b)(x) = a(\ b(x)\ ) = a(x) = x$

2) $(b\ o\ a)(x) = b(\ a(x)\ ) = b(x) = x$

الشرطان محققان إذاً كل منهما معكوس للآخر أي يكون الجواب yes

39. $a(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, $b(x) = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$

$$(a\ o\ b)(x) = a(\ b(x)\ ) = a\left(\ \left(\frac{x+1}{x}\right)^2\ \right) = \sqrt{\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + 1}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + 1}} \neq x$$

أحد الشرطين لم يتحقق إذاً ليس كل منهما معكوس للآخر أي يكون الجواب no

In Exercises 40 – 50 . Find the inverse of each of the following functions.(Assume they are 1-1).

في التمارين 40 – 50 أوجد معكوس كل من الدوال الآتية (إفرض أنهم 1 – 1)

40. $g(x) = -(x-2)^3$

1) نستبدل اسم الدالة $g(x)$ بالمتغير y أي

$y = -(x-2)^3$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي

$y = -(x-2)^3$, $(x-2)^3 = -y$, $x - 2 = \sqrt[3]{-y}$, $x = \sqrt[3]{-y} + 2$

$x = \sqrt[3]{-y} + 2$ إذاً

3) نستبدل x برمز المعكوس ونستبدل كل y بالمتغير x أي

$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x} + 2$

وهذا هو معكوس inverse الدالة

41. $f(x) = -7x + 11$

1) نستبدل اسم الدالة $f(x)$ بالمتغير y أي

$y = -7x + 11$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي

$y = -7x + 11 \;, \qquad 7x = 11 - y\,,\;\; x = \dfrac{11 - y}{7}$

$x = \dfrac{11 - y}{7}$ إذاً

3) نستبدل x برمز المعكوس ونستبدل كل y بالمتغير x أي

$f^{-1}(x) = \dfrac{11 - x}{7}$

وهذا هو معكوس inverse الدالة

42. $f(x) = x^2 - 2\,, x \geq 0$

$y = x^2 - 2\,,\;\; x^2 = y + 2\,, \qquad x = \sqrt{y + 2}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2}$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

43. $f(x) = -x^2 + 2 \;\;, x \geq 0$

$y = -x^2 + 2 \;, x^2 = -y + 2 \;, \qquad x = \sqrt{-y + 2}$

$f^{-1} = \sqrt{-x + 2}$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

44. $f(x) = \dfrac{2}{x} \;\;, x \neq 0$

$y = \dfrac{2}{x} \;\;,\;\; x = \dfrac{2}{y}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x} \;\;\;, x \neq 0$

45. $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad , x \neq 1$

$y = \frac{x+1}{x-1}$, $y(x-1) = x+1$, $yx - y - x = 1$, $x(y-1) = y+1$

$x = \frac{y+1}{y-1}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad , x \neq 1$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

46. $f(x) = \sqrt{x+7}$, $x \geq -7$

$y = \sqrt{x+7}$, $y^2 = x+7$, $x = y^2 - 7$

$f^{-1}(x) = x^2 - 7$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

47. $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$

$y = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $y^3 = x+1$, $x = y^3 - 1$

$f^{-1}(x) = x^3 - 1$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

48. $f(x) = 3x - 9$

$y = 3x - 9$, $3x = y + 9$, $x = \frac{y+9}{3}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+9}{3}$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

49. $f(x) = \dfrac{2x-3}{5}$

$y = \dfrac{2x-3}{5}$, $5y = 2x - 3$, $2x = 5y + 3$, $x = \dfrac{5y+3}{2}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{5x+3}{2}$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

50. $f(x) = (x-3)^5$

$y = (x-3)^5$, $y^5 = x - 3$, $x = y^5 + 3$

$f^{-1}(x) = x^5 + 3$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

In Exercises 51 – 57 .Determine the intervals on which each of the following functions are increasing and the intervals on which they are decreasing.

في التمارين 51 – 57 حدد الفترات intervals التي عليها تكون الدوال الآتية متزايدة increasing والفترات التي تكون عليها هذه الدوال متناقصة decreasing

إذا كانت $x_1 > x_2$ على فترة معينة ينتج عنها أن $f(x_1) > f(x_2)$ لكل x_1 و x_2 في الفترة المعينة فإن الدالة $f(x)$ تكون متزايدة increasing على هذه الفترة

إذا كانت $x_1 > x_2$ على فترة معينة ينتج عنها أن $f(x_1) < f(x_2)$ لكل x_1 و x_2 في الفترة المعينة فإن الدالة $f(x)$ تكون متناقصة decreasing على هذه الفترة

على الرسم : إذا كانت y تتحرك إلى الأعلى عندما تتحرك x إلى اليمين على فترة معينة فإن الدالة تكون متزايدة increasing على هذه الفترة

على الرسم : إذا كانت y تتحرك إلى الأسفل عندما تتحرك x إلى اليمين على فترة معينة فإن الدالة تكون متناقصة decreasing على هذه الفترة

51. $f(x) = 2x - 7$

هذه معادلة الدرجة الأولى ومعادلة الدرجة الأولى هي مستقيم والمستقيم إما يكون متزايداً increasing لكل الأعداد الحقيقية R عندما يكون معامل x موجب أو يكون متناقصاً decreasing لكل الأعداد الحقيقية R عندما يكون معامل x سالب أو يكون ثابت (مستقيم أفقي يوازي محور x)

إذاً $f(x) = 2x - 7$ دالة متزايدة increasing على الفترة $R = (-\infty, \infty)$

52. $f(x) = 1 - 3x$

دالة متناقصة decreasing على الفترة $R = (-\infty, \infty)$

أنظر الملاحظات في التمرين السابق

53. $f(x) = 4$

دالة ثابتة أي ليست متزيدة وليست متناقصة على الفترة $R = (-\infty, \infty)$

54. $f(x) = x^2 - 8$

المعادلة تحوي x^2 فقط لذلك فرسمها متماثل حول محور y ويقطع محور y عندما x=0 أي عندما $y = f(x) = -8$

أولاً : x<0

لنفرض أن $x_1 > x_2$ بتربيع الطرفين ينتج أن $x^2{}_1 < x^2{}_2$ (لأن كل من x_1 و x_2 أقل من الصفر , مثال -10>-5 وبتربيع الطرفين ينتج أن 100>25 لاحظ عكس إتجاه المتباينة)

بإضافة -8 إلى طرفي المتراجحة ينتج أن $x^2{}_1 - 8 < x^2{}_2 - 8$ أي أن

$f(x_1) < f(x_2)$

إذاً الدالة متناقصة decreasing عندما x<0 أي على الفترة $(-\infty, 0)$

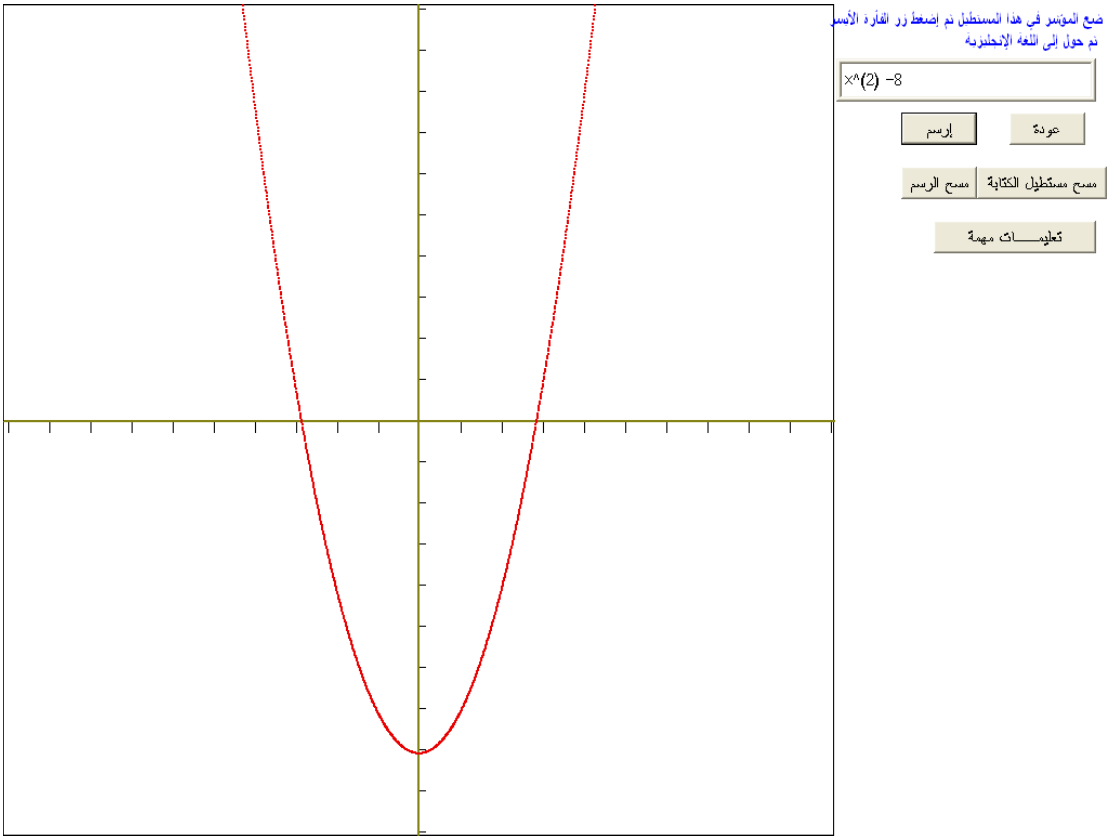
ثانياً: x>0

لنفرض أن $x_1 > x_2$ بتربيع الطرفين ينتج أن $x^2{}_1 > x^2{}_2$

بإضافة 8- إلى طرفي المتراجحة ينتج أن $x^2{}_1 - 8 > x^2{}_2 - 8$ أي أن

$f(x_1) > f(x_2)$

إذاً الدالة متزايدة عندما x>0 أي متزايدة increasing على الفترة $(0, \infty)$



رسم الدالة $y = f(x) = x^2 - 8$

55. $f(x) = 2 - x^2$

المعادلة تحوي x^2 فقط لذلك فرسمها متماثل حول محور y ويقطع محور y عندما x=0 أي عندما $y = f(x) = 2$

أولاً : x<0

لنفرض أن $x_1 > x_2$ بتربيع الطرفين ينتج أن ${x^2}_1 < {x^2}_2$ (لأن كل من x_1 و x_2 أقل من الصفر , مثال -10>-5 وبتربيع الطرفين ينتج أن 100>25 لاحظ عكس إتجاه المتباينة)

بضرب طرفي المتباينة بالعدد -1 ينتج أن $-{x^2}_1 > -{x^2}_2$ (لا تنسى عند ضرب طرفي المتباينة بعدد سالب نعكس اتجاه المتباينة) وبإضافة العدد 2 إلى طرفي المتباينة ينتج أن $2 - {x^2}_1 > 2 - {x^2}_2$ أي أن

$$f(x_1) > f(x_2)$$

إذاً الدالة متزايدة increasing عندما x<0 أي على الفترة $(-\infty, 0)$

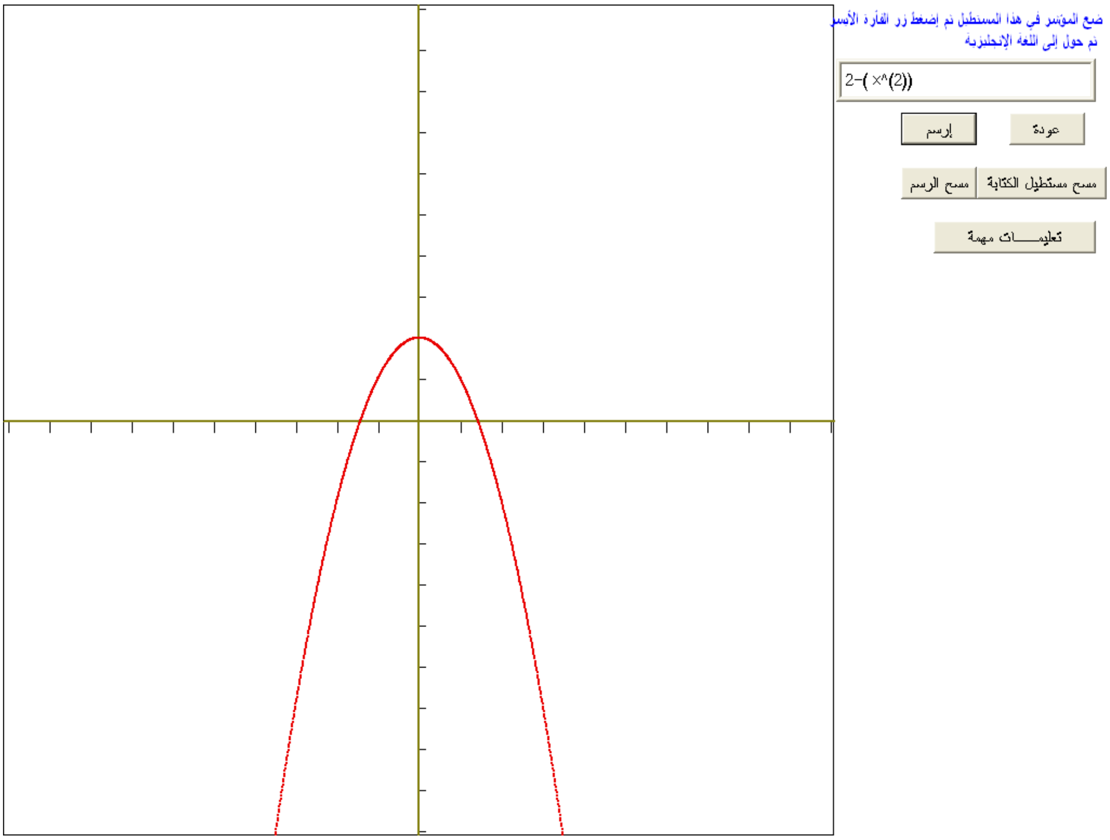
ثانياً: x>0

لنفرض أن $x_1 > x_2$ بتربيع الطرفين ينتج أن ${x^2}_1 > {x^2}_2$

بضرب طرفي المتباينة بالعدد -1 ينتج أن $-{x^2}_1 < -{x^2}_2$ (لا تنسى عند ضرب طرفي المتباينة بعدد سالب نعكس اتجاه المتباينة) وبإضافة العدد 2 إلى طرفي المتباينة ينتج أن $2 - {x^2}_1 < 2 - {x^2}_2$ أي أن

$$f(x_1) < f(x_2)$$

إذاً الدالة متناقصة عندما x>0 أي متناقصة decreasing على الفترة $(0, \infty)$



رسم الدالة $y = f(x) = 2 - x^2$

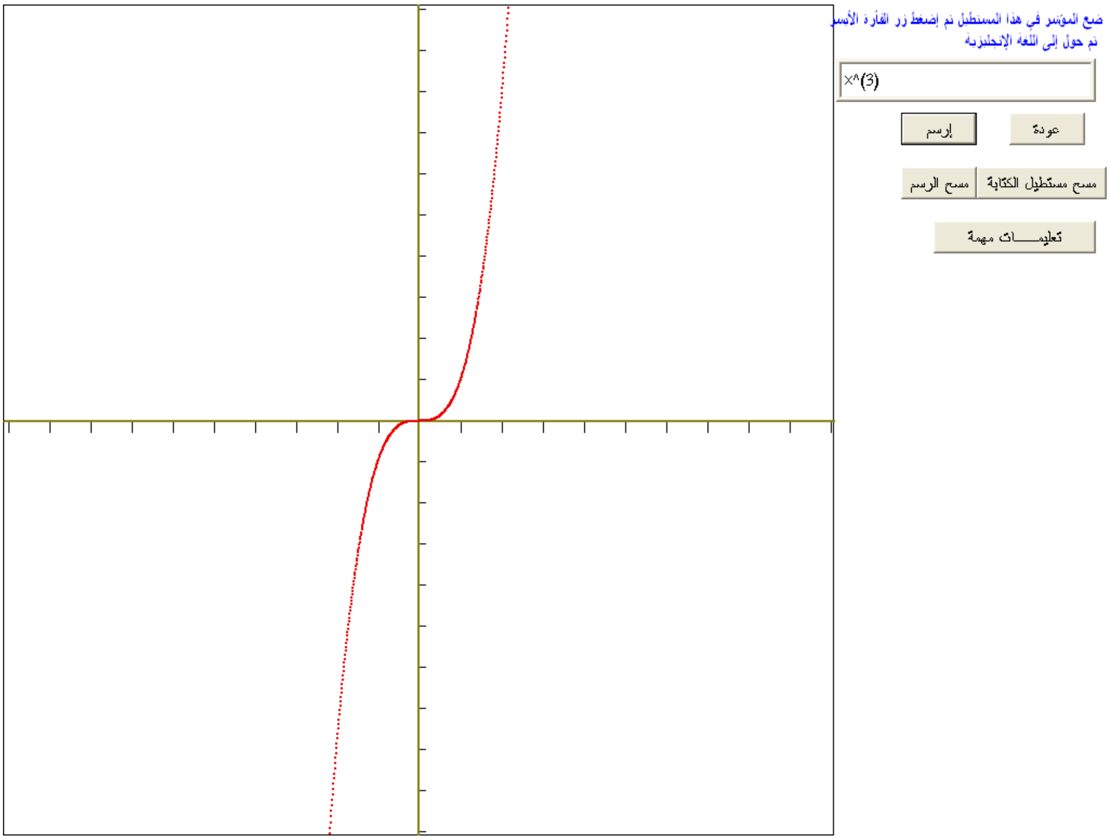
56. $f(x) = x^3$

لنفرض أن $x_1 > x_2$ بتكعيب الطرفين ينتج أن ${x^3}_2 < {x^3}_1$ لكل x أي أن

$f(x_1) > f(x_2)$

إذا الدالة متزايدة increasing لكل عدد حقيقي x أي أنها متزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$

إنتبه : $-5 > -10$ و $(-5)^3 = -125 > (-10)^3 = -1000$



رسم الدالة $y = f(x) = x^3$

57. $f(x) = -x^3$

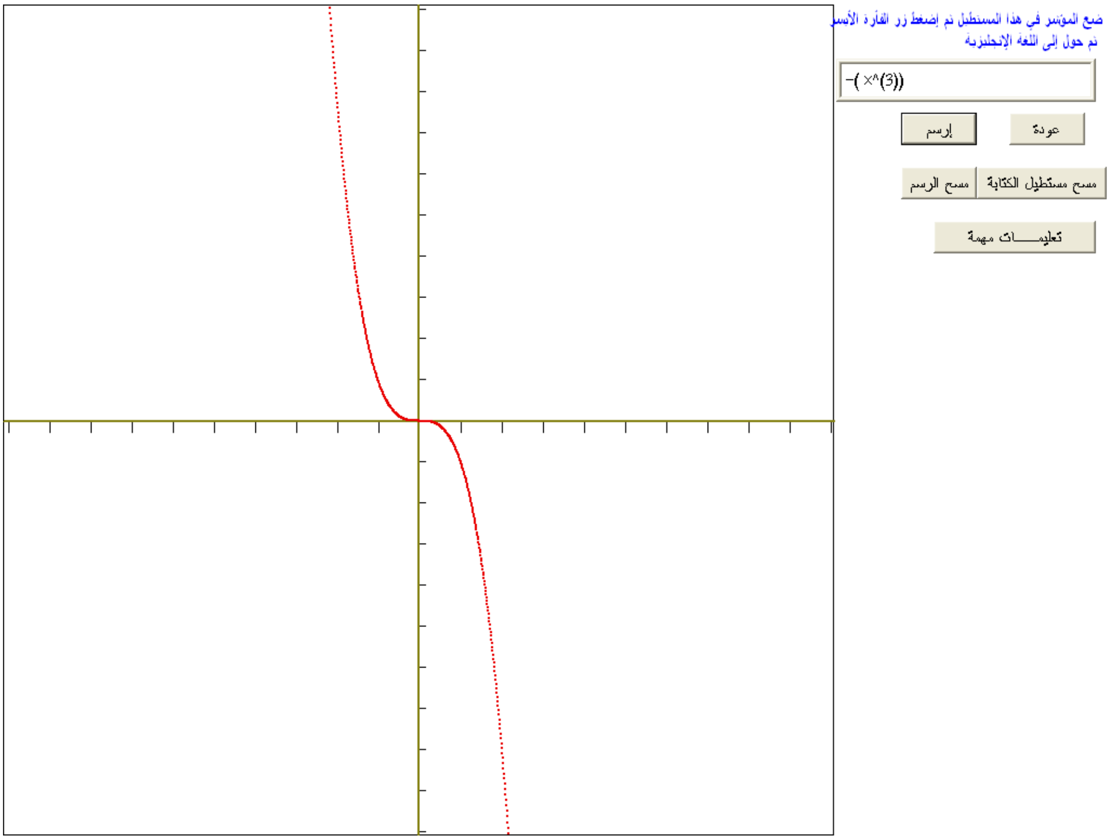
لنفرض أن $x_1 > x_2$ بتكعيب الطرفين ينتج أن $x^3{}_1 > x^3{}_2$ لكل x وبضرب طرفي المتباينة بالعدد 1- (لا تنسى عند ضرب طرفي المتباينة بعدد سالب نعكس اتجاه المتباينة) ينتج أن

$$-x^3{}_1 < -x^3{}_2$$

أي أن

$$f(x_1) < f(x_2)$$

إذا الدالة متناقصة decreasing لكل x أي أنها متناقصة decreasing على الفترة $(-\infty, \infty)$



$f(x) = -x^3$ رسم الدالة

Section 0.5

تمارين (0,5) exercises صفحة 59 و 60 في الكتاب

In Exercises 1 – 2 convert the degree measures to radian

في التمارين 1 – 2 حول القياسات بالدرجة إلى قياسات بالرا ديان

للتحويل من درجة إلى راديان نضرب العدد المعطى بالقيمة $\frac{\pi}{180}$ ثم نختصر

1.

a. 150^o , $150^o = 150\frac{\pi}{180} = \frac{150}{180}\pi = \frac{15}{18}\pi = \frac{5}{6}\pi = \frac{5\pi}{6}$

b. 120^o , $120^o = 120\frac{\pi}{180} = \frac{120}{180}\pi = \frac{12}{18}\pi = \frac{2}{3}\pi = \frac{2\pi}{3}$

c. 150^o , $450^o = 450\frac{\pi}{180} = \frac{450}{180}\pi = \frac{45}{18}\pi = \frac{5}{2}\pi = \frac{5\pi}{2}$

d. -135^o , $-135^o = -135\frac{\pi}{180} = \frac{-135}{180}\pi = \frac{-45}{60}\pi = \frac{-3\pi}{4}$

e. 630^o , $630^o = 630\frac{\pi}{180} = \frac{630}{180}\pi = \frac{7\pi}{2}$

2.

a. 210^o , $210^o = \frac{210}{180}\pi = \frac{7\pi}{6}$

b. 315^o , $315^o = \frac{315}{180}\pi = \frac{7\pi}{4}$

c. -405^o , $-405^o = \frac{-405}{180}\pi = \frac{-9\pi}{4}$

d. 1080^o , $1080^o = \frac{1080}{180}\pi = 6\pi$

e. 1^o , $1^o = \frac{1}{180}\pi = \frac{\pi}{180}$

In Exercises 3 – 4 convert the radian measures to degrees

في التمارين 3 – 4 حول القياسات بالراديان إلى قياسات بالدرجة

للتحويل من راديان إلى درجة نضرب العدد المعطى بالقيمة $\frac{180}{\pi}$ ثم نختصر

إنتبه هنا نختصر π مع π ويبقى أرقام فقط حيث نختصر ثم نضع رمز الدرجة أي o

3.

$a.\frac{2\pi}{3}\ ,\ \ \frac{2\pi}{3}\ \frac{180}{\pi} = \frac{2}{3}(180) =\ 120^0$

$b.\frac{5\pi}{6}\ ,\ \ \frac{5\pi}{6}\ \frac{180}{\pi} = \frac{5}{6}(180) =\ 150^0$

$c. - \frac{3\pi}{4}\ ,\qquad - \frac{3\pi}{4}\ \frac{180}{\pi} = \ - \frac{3}{4}(180) = \ -135^o$

$d.\frac{7\pi}{2}\ ,\ \ \frac{7\pi}{2}\ \frac{180}{\pi} = \frac{7}{2}(180) = 630 = 630 - 360 =\ 270^o$

$e.\frac{7\pi}{2}\ ,\ \ \frac{7\pi}{3}\ \frac{180}{\pi} = \frac{7}{3}(180) = 420 = 420 - 360 =\ 60^o$

4.

$a.\frac{\pi}{8}\ ,\ \ \frac{\pi}{8}\ \frac{180}{\pi} = \frac{180}{8}\ = 420 = 22.5^o$

$b. - \frac{3\pi}{10}\ ,\qquad - \frac{3\pi}{10}\ \frac{180}{\pi} = \ - \frac{3}{10}(180) = \ -\ 54^o$

$c.\frac{13\pi}{6}\ ,\ \ \frac{13\pi}{6}\ \frac{180}{\pi} = \frac{13}{6}(180) = 390 = 390 - 360 =\ 30^o$

$d. - \frac{2\pi}{5}\ ,\qquad - \frac{2\pi}{5}\ \frac{180}{\pi} = \ - \frac{2}{5}(180) = \ -72^o$

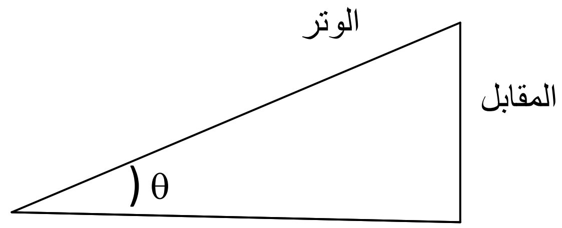
$e. -\ 8\pi\ , -8\pi\left(\frac{180}{\pi}\right) = -8(180) =\ 4(-\ 360) =\ 4(0) =\ 0^0$

$or\ \ -8\pi = -4(2\pi) = -4(0) = 0^o$

In Exercises 5 – 9 determine the exact function value

في التمارين 5 – 9 حدد بالضبط قيمة الدالة

قبل الحل سنتذكر بعض المفاهيم اللازمة للحل



المجاور

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad , \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

عندما تكون θ تساوي الصفر يؤول المقابل إلى الصفر وينطبق الوتر على المجاور ويكون

$$\sin 0 = 0 \;, \cos 0 = 1 \;, \tan 0 = 0$$

في المثلث القائم الذي زاويتيه 30 و 60 يكون الضلع a المقابل للزاوية 30 يساوي نصف الوتر c فإذا كان الوتر يساوي 2 فإن الضلع المقابل للزاوية 30 يساوي 1 ويكون الضلع bالمقابل للزاوية 60 يساوي $\sqrt{3}$ لأنه حسب نظرية فيثاغورث يكون

$$a^2 + b^2 = c^2 \;, \quad b^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \;, \qquad b = \sqrt{3}$$

ومنه يكون

$$\sin 30 = sin\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad cos\ 30 = cos\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60 = sin\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;, \quad \cos 60 = cos\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

وفي المثلث القائم المتساوي الضلعين تكون كل من الزوايا تساوي 45 فإذا فرضنا أن طول كل من الضلعين المتساويين يساوي 1 فإن طول الوتر سيكون يساوي $\sqrt{2}$ لأنه حسب نظرية فيثاغورث يكون

$$a^2 + b^2 = c^2 \;, \quad 1^2 + 1^2 = c^2 \;, \quad c^2 = 2 \;, \qquad c = \sqrt{2}$$

ومنه يكون

$$\sin 45 = \sin\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \;, \qquad \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مما سبق نجد أن (يستحسن الحفظ)

$\theta\ (radian)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

$\theta\ (degrees)$	0	30^0	45^o	60^o
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\,\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

بقية القيم يمكن حسابها من المتطابقات الآتية

متطابقات مهمة (يستحسن حفظها)

1. $sin^2 x + cos^2 x = 1$
2. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x\ \sin y$
3. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x\ \sin y$
4. $\cos(x+y) = cos\,x \cos y - \sin x \sin y$
5. $\cos(x-y) = cos\,x \cos y + \sin x \sin y$
6. $\sin(-x) = -\sin x$
7. $\cos(-x) = \cos x$

إنتبه لعكس الإشارات في cos

أمثلة

1)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\quad\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\quad\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90 = 1$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad - \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad = 0$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos\ 90 = 0$

2)

$$\sin(\ \pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \quad 1 \quad 0 \quad + \quad 0 \quad 1 = 0$$

$\sin(\ \pi) = \sin 180 = 0$

$$cos(\ \pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \quad 0 \quad 0 \quad - \quad 1 \quad 1 = -1$$

$\cos(\ \pi) = cos\ 180 = \ -1$

3)

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(-\ \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \ = \ -1$$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \ -1$

$$cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = cos\left(-\ \frac{\pi}{2}\right) = \ cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \ = 0$$

لا تنسى الدوران مع عكس عقارب الساعة (الدوران الموجب) بمقدار $\frac{3\pi}{2}$ يساوي الدوران مع عقارب الساعة (الدوران السالب) بمقدار $\frac{-\pi}{2}$

4)

$0^o = 360^o = 2\pi$

$\sin 0 = \sin(360) = \sin(2\pi) = 0$

$\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$

$cos\, 0 = cos(360) = \cos(2\pi) = 1$

$cos(0) = cos(2\pi) = 1$

والآن نعود لحل التمارين

5.

$a.\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $b. \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$c. \sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -(-1) = 1$

$d. \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

6.

$a. \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $b. \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c. \sin(-2\pi) = -\sin(2\pi) = 0$

$d. \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

7.

$a. \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b. \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$

$c. \sin(-5\pi) = -\sin(5\pi) = -\sin(\pi + 4\pi) = -\sin(\pi + 2(2\pi))$

$= -\sin(\pi) = -0 = 0$

$c.\ \sin(-5\pi) = \sin(-\pi - 4\pi) = \sin(-\pi + 2(-2\pi))$

$= \sin(-\pi) = -\sin(\pi) = -0 = 0$

لا تنسى

$\sin(x+2n\pi)=\sin x \quad , \ \cos(x+2n\pi)=\cos x$

حيث n عدد صحيح

$d. \cos(-3\pi)=\cos(-\pi-2\pi)=\cos(-\pi)=\cos(\pi)=-1$

8.

لا تنسى cos ينتهي بحرف s و sec يبدا بحرف s إذاً sec مقلوب cos أي

$\sec\ \theta=\dfrac{1}{\cos\theta} \qquad \cos \quad sec$

tan يحوي حرف t و cot يحوي حرف t إذاً cot مقلوب tan أي

$\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \tan \quad cot$

بقي sin و csc أي أن

$\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$

$a. \sec\pi=\dfrac{1}{\cos\pi}=\dfrac{1}{-1}=-1$

$b.\ \cot\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\cos(\frac{\pi}{6})}{\sin(\frac{\pi}{6})}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\div\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{2}{1}\right)=\sqrt{3}$

لا تنسى في قسمة الكسور إقلب واضرب

$c.\ \csc\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\sin(-\frac{2\pi}{3})}=-\dfrac{1}{\sin(\frac{2\pi}{3})}=-\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$d. \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sin(-\frac{\pi}{4})}{\cos(-\frac{\pi}{4})}=\dfrac{-\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})}=-\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \dfrac{2}{\sqrt{2}}=-1$

9.

$$a.\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$b.\csc\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$c.\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$d.\cot\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{-\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

In Exercises 10 – 12 , use the periodicity of sine , cosine , secant , tangent , cotangent ,and cosecant as well as their values when $0 \le x \le 2\pi$ to find the exact value of each of the following .

في التمارين 10 – 12 استخدم دورية كل من

sine , cosine , secant , tangent , cotangent ,and cosecant

وأيضاً قيمهم عندما $0 \le x \le 2\pi$ لتجد بالضبط قيمة كل مما يلي

لا تنسى إذا كانت n عدد صحيح فإن

$\sin(x + 2n\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2n\pi) = \cos x$

$sec(x+2n\pi) = sec\, x$, $\csc(x+2n\pi) = csc\, x$

$\tan(x+n\pi) = \tan x$, $\cot(x+n\pi) = \cot x$

لاحظ أنه عندما n= 1 فهذا هو مقدار الدورة

10.

$a. \sin(8\pi) = \sin\,(0+2(4\pi)) = \sin 0 = 0$

$b. \cos(10\pi) = \cos\big(0+2(5\pi)\big) = \cos 0 = 1$

$c. \sin\left(\frac{17\pi}{2}\right) = \sin\,(\frac{\pi+16\pi}{2}) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{16}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+8\pi\right))$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2}+2(4\pi)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$d. \csc(9\pi) = \csc(\pi+8\pi) = \csc\big(\pi+2(4\pi)\big) = \csc\pi = \frac{1}{sin\pi} = \frac{1}{0}$

$\csc(9\pi)\, not\ defined$ الدالة غير معرفة لأن القسمة على الصفر لا تجوز

11.

$a. \sin\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi+12\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{12\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}+\ 2\pi\right)$

$= \ \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$b. \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi+12\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{12\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}+\ 2\pi\right)$

$= \ \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$c. \sec\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \sec\left(\frac{5\pi+12\pi}{6}\right) = \sec\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{12\pi}{6}\right) = \sec\left(\frac{5\pi}{6}+\ 2\pi\right)$

$= \ \sec\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ \frac{1}{\cos\,(\frac{5\pi}{6})} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$d. \csc\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \csc\left(\frac{5\pi + 12\pi}{6}\right) = \csc\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{12\pi}{6}\right) = \csc\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\right)$$

$$= \csc\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

12.

$$a. \sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{7\pi}{2} + 2(2\pi)\right) = \sin\left(-\frac{7\pi}{2} + 4\pi)\right)$$

$$= \sin\left(\frac{-7\pi + 8\pi)}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$b. \cot\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cot\left(-\frac{5\pi}{6} + \pi\right) = \cot\left(\frac{-5\pi + 6\pi}{6}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$c. \tan(8\pi) = \tan(0 + 8\pi) = \tan(0) = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$d. \cot\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{3\pi + 4\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{3\pi}{4} + \pi\right)$$

$$= \cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

In Exercises 13 – 19 , find the values of the remaining trigonometric functions . Under the given condition.

في التمارين 13 – 19 أوجد قيم الدوال المثلثية الباقية تحت الحالة المعطاة .

$$13. \cos x = \frac{1}{3} \quad , \quad \tan x = 2\sqrt{2}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \sin x = \cos x . \tan x = \frac{1}{3} . 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sec x = \frac{3}{1} = 3 \quad , \csc x = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad .$$

$$cot\, x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

14. $\sin x = \frac{4}{5} \quad , \cos x = -\frac{3}{5}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{-3}{5}} = -\frac{4}{5}\frac{5}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\csc x = \frac{5}{4} \quad , \quad \sec x = -\frac{5}{3} \quad , \cot x = -\frac{3}{4}$$

15. $\csc x = -\frac{1}{4}\sqrt{65} \quad , \quad \cot x = \frac{7}{4}$

$$\csc x = -\frac{1}{4}\sqrt{65} = -\frac{\sqrt{65}}{4} \quad , \quad \sin x = -\frac{4}{\sqrt{65}} = -\frac{4\sqrt{65}}{65}$$

$$\tan x = \frac{4}{7} \quad , \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \cos x = \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{-\frac{4\sqrt{65}}{65}}{\frac{4}{7}}$$

$$= -\frac{4\sqrt{65}}{65} . \frac{7}{4} = -\frac{7\sqrt{65}}{65} \quad , \sec x = -\frac{65}{7\sqrt{65}} = -\frac{65\sqrt{65}}{7\sqrt{65}\sqrt{65}}$$

$$= -\frac{65\sqrt{65}}{7(65)} = -\frac{\sqrt{65}}{7}$$

16. $\tan x = -2 \quad , \quad \sec x = \sqrt{5}$

$$\cot x = -\frac{1}{2} \quad , \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin x = \tan x . \cos x = (-2)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

التمارين 17 و 18 و 19 المطلوب منها غير واضح واسأ لو المدرس ؟؟؟؟

20. Decide whether each of the following functions is even , odd or neither .

قرر فيما إذا كان كل من الدوال الآتية دالة زوجية أو فردية أو لاذا ولا ذاك .

من المتطابقات السابقة وجدنا أن $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$

أي أن cos x زوجية even و sin x فردية odd

$a. \sin x \quad , \quad \sin(-x) = -\sin x \quad odd$

$b. \cos x \quad , \quad \cos(-x) = \cos x \quad even$

$c. \tan x \quad , \quad \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan x \quad odd$

$d. cot\, x \quad , \quad cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -cot\, x \quad odd$

$e. \sec x \quad , \quad \sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x \quad even$

$f. \csc x \quad , \csc(-x) = \frac{1}{\sin(-x)} = \frac{1}{-sinx} = -\frac{1}{\sin x} = -\csc x \quad odd$

21. if θ is in standard position and $Q\left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ is on the terminal side of θ . use definition 0.5.4 to find the values of sin θ and cos θ.

إذ كانت θ في الوضع القياسي والنقطة $Q\left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ تقع على الضلع النهائي للزاوية θ . استخدم التعريف 0.5.4 لتجد قيمة كل من sin θ و cos θ .

في مثل هذا النوع من التمارين أوجد نصف قطر الدائرة r التي تقع عليها هذه النقطة أي

$$r = \sqrt{\left(\left[\frac{3}{5}\right)\right]^2 + \left(\left[\frac{4}{5}\right)\right]^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

ويكون

$$\sin\theta = \frac{\frac{4}{5}}{r} = \frac{\frac{4}{5}}{1} = \frac{4}{5} \quad , \quad cos\,\theta = \frac{\frac{3}{5}}{r} = \frac{\frac{3}{5}}{1} = \frac{3}{5}$$

أنتبه العدد الأول أي الأيسر) هنا $\frac{3}{5}$) يكون مع cos θ والثاني مع sin θ

In Exercises 22 – 27 verify the identity.

في التمارين 22 - 27 تحقق من المتطابقة (أي أثبت المتطابقة)

22. $\dfrac{1+\csc\alpha}{\sec\alpha}-\cot\alpha=\cos\alpha$

$$\frac{1+\csc\alpha}{\sec\alpha}-\cot\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}+\frac{\csc\alpha}{\sec\alpha}-\cot\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}+\frac{\frac{1}{\sin\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}}-\cot\alpha$$

$$=\frac{1}{\sec\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}.\frac{\cos\alpha}{1}-\cot\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\cot\alpha$$

$$=\frac{1}{\sec\alpha}+\cot\alpha-\cot\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}+0=\frac{1}{\sec\alpha}=\cos\alpha$$

23. $2sin^2(2t)+\cos(4t)=1$

$$\cos(4t)=\cos(2t+2t)=\cos(2t)\cos(2t\,)-\sin(2t)\sin\,(2t)$$

$$=cos^2(2t)-sin^2(2t)$$

$$2sin^2(2t)+\cos(4t)=\ 2sin^2(2t)+cos^2(2t)-sin^2(2t)$$

$$=\ 2sin^2(2t)-sin^2(2t)+cos^2(2t)=\ sin^2(2t)+cos^2(2t)=1$$

24. $\dfrac{csc^2\alpha}{1+tan^2\alpha}=cot^2\alpha$

$$\frac{csc^2\alpha}{1+tan^2\alpha}=\frac{csc^2\alpha}{1+\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}}=\frac{csc^2\alpha}{\frac{cos^2\alpha+sin^2\alpha}{cos^2\alpha}}=\frac{csc^2\alpha}{\frac{1}{cos^2\alpha}}$$

$$=\ csc^2\alpha\,\frac{cos^2\alpha}{1}=\frac{1}{sin^2\alpha}\,cos^2\alpha=\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}=cot^2\alpha$$

$$25 \quad \frac{1}{\csc y - \cot y} = \csc y + \cot y$$

$$1 = (\csc y + \cot y \ \ )(\csc y - \cot y \ \ )$$

$$(\csc y + \cot y \ \ )(\csc y - \cot y \ \ ) = csc^2 y - cot^2 y$$

$$= \frac{1}{sin^2 y} - \frac{cos^2 y}{sin^2 y} = \frac{1 - cos^2 y}{sin^2 y} = \frac{sin^2 y}{sin^2 y} = 1$$

لا تنسى $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ و $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ومنه

$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$26. \ cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{8}\cos(2\theta)$$

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \left(1 - cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$= cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 + cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$$

إذاً

$$\cos\theta = 2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$$

$$cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad (1)$$

من (1) يكون

$$cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)$$

$$cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 + 2\cos\theta + cos^2\theta)$$

$$cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

$$cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(1+2\cos\theta+\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\right)$$

$$cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\theta+\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{8}\right)$$

$$cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos(2\theta)$$

$$cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{8}\cos(2\theta)$$

لاحظ أن المسألة في الكتاب غيرصحيحة أي أن

$$cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{8}\cos(2\theta)$$

ليست متطابقة not identity

فمثلاً لو عوضنا عن θ بالعدد 0 أي $\theta = 0$ لما تساوى الطرفان

27. $sin^4(2x) = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos(4x)+\frac{1}{8}\cos(8x)$

من تمرين 23 وجدنا أن

$$2sin^2(2x)+\cos(4x) = 1$$

$$sin^2(2x) = \frac{1-\cos(4x)}{2}$$

$$sin^4(2x) = \left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cos(4x)+cos^2(4x)}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-2\cos(4x)+cos^2(4x)\right)$$

من المتطابقة 13 صفحة 58 في الكتاب أي

$$cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

ومنه

$$cos^2(4x) = \frac{1+\cos(8x)}{2}$$

$$sin^4(2x) = \frac{1}{4}\left(1-2\cos(4x)+\frac{1+\cos(8x)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-2\cos(4x)+\frac{1}{2}+\frac{\cos(8x)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{2}{4}\cos(4x)+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos(8x)$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cos(4x)+\frac{1}{8}\cos(8x)$$

$$= \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos(4x)+\frac{1}{8}\cos(8x)$$

Section 0. 6

تمارين Exercises(0.6) صفحة 68 في الكتاب

In Exercises 1 – 4 determine the exact function value.

في التمارين 1 – 4 حدد بالضبط قيمة الدالة

إنتبه

$$domain\ sin^{-1} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$domain\ cos^{-1} = [\,0\ ,\ \pi]$$

$$domain\ tan^{-1} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$domain\ cot^{-1} = (0\,,\pi)$$

1. $a.\ sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\quad because\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$b. sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}\quad because\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$c.\ cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}\quad because\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$d.\ cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}\quad because\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

2. $a.\ sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}\qquad b. sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

$c. cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}\qquad d.\ cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$

3. $a.\ tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}\qquad b. tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{-\pi}{3}$

$c. sec^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}\qquad d.\ sec^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{7\pi}{6}$

4. $a.\ cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}\qquad b. cot^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$

$c. csc^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}\qquad d.\ csc^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\pi}{3}$

In Exercises 5-10 find the exact value of the quantity.

في التمارين 5 – 10 أوجد بالضبط قيمة الكمية.

5.

$a.\ sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$

ماهي الزاوية التي جيبها هو جيب الزاوية $\frac{\pi}{6}$ ؟ الجواب هي $\frac{\pi}{6}$

ماهو اسم الولد الذي اسمه محمد ؟ الجواب اسمه محمد

ملاحظة إذا لم تكن الزاوية في المجال المعين domain فأوجد الزاوية المكافئة والتي تكون في المجال المعين

$$b. sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$c. sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin \pi \cos\frac{\pi}{6} - \cos\pi \sin\frac{\pi}{6} = (0)\cos\frac{\pi}{6} - (-1)\ \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 0 + \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$d. sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin -\pi \cos\frac{\pi}{6} + \cos -\pi \sin\frac{\pi}{6} = -\sin \pi \cos\frac{\pi}{6} + (-1)\ \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 0 - \sin\frac{\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

6.

$$a.\ cos^{-1}(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$b. cos^{-1}(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)) = cos^{-1}(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)) = \frac{\pi}{3}$$

$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ لا تنسى

$$c.\ cos^{-1}(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)) = \frac{2\pi}{3}$$

$$d.\ cos^{-1}(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)) = cos^{-1}(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{6\pi-2\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\ 2\pi\ cos\frac{2\pi}{3} + \sin\pi\sin\frac{\pi}{3} = (1)cos\frac{2\pi}{3} + (0)\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= cos\frac{2\pi}{3}$$

7.

$$a.\ tan^{-1}(tan\left(\frac{\pi}{6}\right)) = \frac{\pi}{6}$$

$$b.\ tan^{-1}\left(tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$c.\ tan^{-1}\left(tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = tan^{-1}\left(tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{6\pi+\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = tan\frac{\pi}{6}$$

$$d.\ tan^{-1}\left(tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right) = tan^{-1}\left(tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = tan\left(-\frac{3\pi+\pi}{3}\right) = \tan\left(-\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

8.

$$a.\ cot^{-1}\left(cot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{6}$$

$$b.\ sec^{-1}\left(sec\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{3}$$

$$c.\ cot^{-1}\left(cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=cot^{-1}\left(cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\frac{2\pi}{3}$$

$$d. sec^{-1}\left(sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=sec^{-1}\left(sec\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{3}$$

$$sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{\cos\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+0}=\frac{1}{(-1)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=-sec\frac{\pi}{3}=sec\frac{\pi}{3}$$

9.

$$a.\tan\left(sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

$$b.\ \sin\left(tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$$

الزاوية التي ظلها tan هو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ يكون جيبها sin هو $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$$\tan\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

المقابل =$\sqrt{3}$ و المجاور = 2 إذن الوتر يساوي

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$c.\cos\left(sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{6} - \sin\pi\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{6} - 0 = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$d.\ \sin\left(cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

10.

$$a.\tan\left(sec^{-1}(-3)\right) = \tan\left(cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{-1}{3} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad , \text{المقابل} = \sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan\vartheta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{2\sqrt{2}}{-1} == -2\sqrt{2}$$

إنتبه الوتر دائماً موجب

$$b.\cos\left[sin^{-1}\frac{2}{3} + 2sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$\text{let } sin^{-1}\frac{2}{3} = \mathrm{x} \quad , \quad sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = y$$

ومنه يكون

$$\sin x = \frac{2}{3} \quad , \quad \cos x = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad , \sin y = -\frac{1}{3} \ , \cos y = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\cos(x + 2y) = \cos x \, cos \, 2y - \sin x \sin(2y)$$

$$= \cos x \ [\cos(y + y)] - \sin x[\sin(y + y))]$$

$$= \cos x[\cos y \cos y \ - \sin y \ sin \ y] - \sin x[\sin y \cos y + \cos y \sin y \ ]$$

$$= [\cos x \cos y \cos y \ - \cos x \sin y \ sin \ y]$$

$$- \sin x \ sin \ y \cos y - \sin x \cos y \sin y$$

$$= [\cos x \cos y \cos y \ - \cos x \sin y \ sin \ y] \ - 2 \sin x \cos y \sin y$$

الآن نعوض عن كل sin و cos

$$= \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{8}{9} - \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{1}{9} - 2 \frac{2}{3} \frac{\sqrt{8}}{3} \ (-\frac{1}{3})$$

$$= \frac{8\sqrt{5}}{27} - \frac{\sqrt{5}}{27} + \frac{4\sqrt{8}}{27} = \frac{12\sqrt{5}}{27} - \frac{\sqrt{5}}{27} = \sqrt{5}(\frac{12 - 1}{27})$$

$$= \frac{11\sqrt{5}}{27}$$

$$c. \tan\left(sec^{-1}\frac{5}{3} + \ csc^{-1}\left(-\frac{13}{12}\right)\right)$$

$$= \tan[cos^{-1}\frac{3}{5} + sin^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right)]$$

$$let \ \ x = \ cos^{-1}\frac{3}{5} \qquad , \qquad y = sin^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right)$$

ومنه يكون

$$\tan x = \frac{4}{3} \qquad , \qquad \tan y = \frac{12}{5}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - tanx \tan y} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{12}{5}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{12}{5}\right)}$$

$$= \frac{\frac{20+36}{15}}{1-\frac{48}{15}} = \frac{\frac{56}{15}}{\frac{15-48}{15}} = \frac{56}{33}$$

************الحمد لله نهاية الفصل الأول********