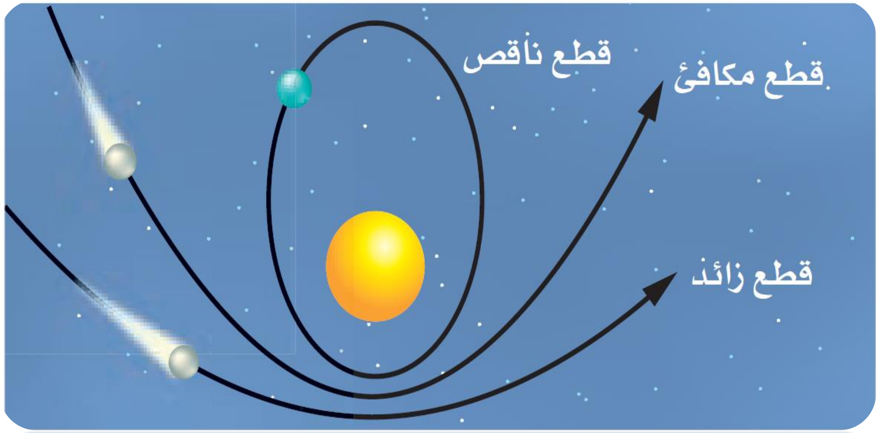

الدرس
4
4
4
4
4
4

تحديد أنواع القطوع المخروطية و دورانها

IDENTIFYING CONIC SECTIONS AND ROTATIONS


Welcome

لماذا ؟



تدور كواكب مجموعتنا الشمسية حول الشمس في مدارات على شكل قطع ناقص، في حين تنطلق المذنبات في مسارات قد تكون على شكل قطع مكافئ أو قطع ناقص أو قطع زائد، بحيث تمثّل مركز الشمس بؤرة القطع.

الصورة القياسية لمعادلات القطوع المخروطية :

يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي علي الصورة :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

علي أن لا تساوي A , B , C جميعها أصفاراً ، و يمكن تحويل هذه الصورة إلي الصور القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع .

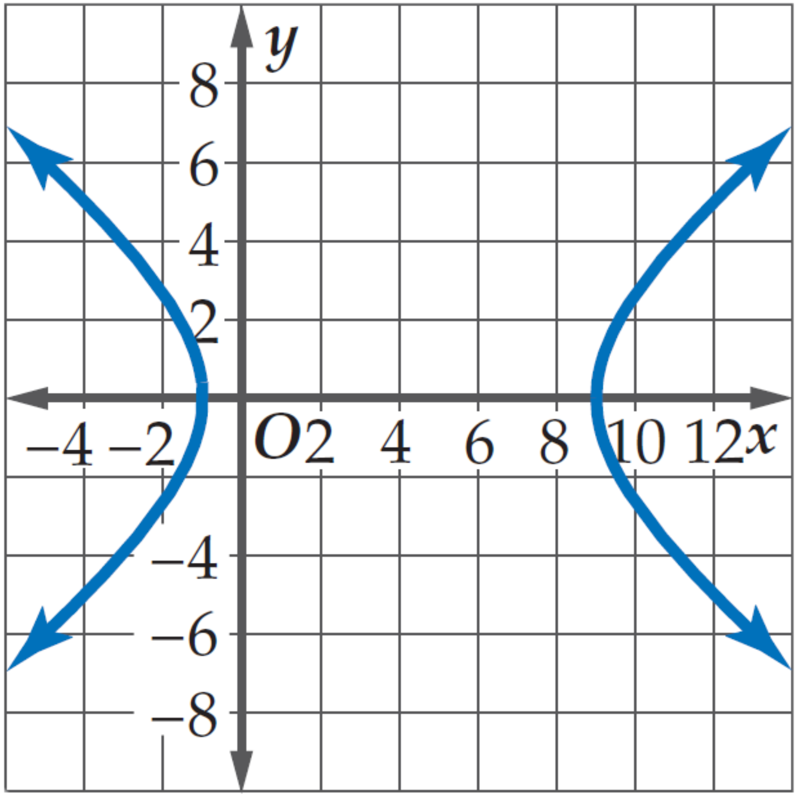
مثال 1

اكتب كلاًّ من المعادلتين الآتيتين على الصور القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله، ومثّل منحناه بيانيًّا:

a) $16x^2-25y^2-128x-144=0$

$16x^2-25y^2-128x-144=0$	المعادلة الأصلية
$16\left(x^2-8x+\square\right)-25y^2=144+16\left(\square\right)$	بفصل الحدود
$16\left(x^2-8x+16\right)-25y^2=144+16\left(16\right)$	بإكمال المربع
$16\left(x+4\right)^2\pm\mp25y^2=400$	مربع كامل
$16\left(x+4\right)^2\pm\mp25y^2=400$	بقسمة كل حد علي 400

المنحني قطع زائد مركزه $(4,0)$



(b $x^2+4y^2-6x-7=0$

المعادلة الأصلية

$$x^2+4y^2-6x-7=0$$

بتجميع الحدود المتشابهة

$$\left(x^2-6x\right)+4y^2=7$$

بإكمال المربع

$$\left(x^2-6x+9\right)+4y^2=7+9$$

بالتحليل و التبسيط

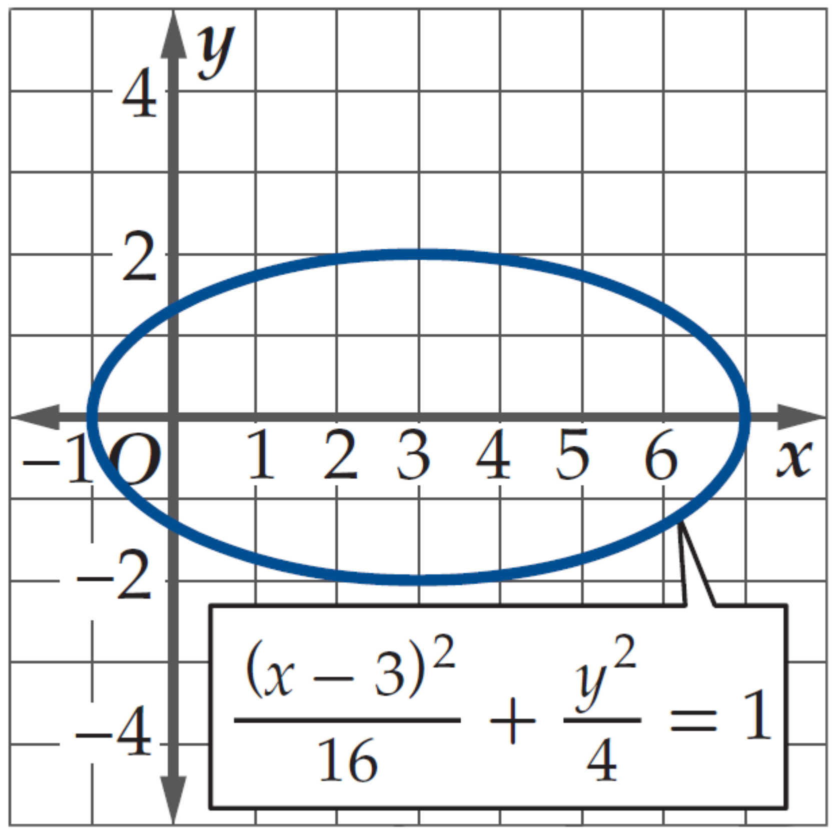
$$(x-3)^2+4y^2=16$$

بقسمة كل حد علي 16

$$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

بما إن المعادلة علي الصورة $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

فإنها معادلة قطع ناقص مركزه $(3,0)$



<u>تحديد أنواع القطوع المخروطية :</u> يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة:

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ علي الصورة القياسية ، فعندما يكون الحد الذي يتضمن xy موجوداً أي أن $B\neq 0$ يمكنك استعمال المميز B^2-4AC لتحديد نوع القطع و هو مميز للمعادلة $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

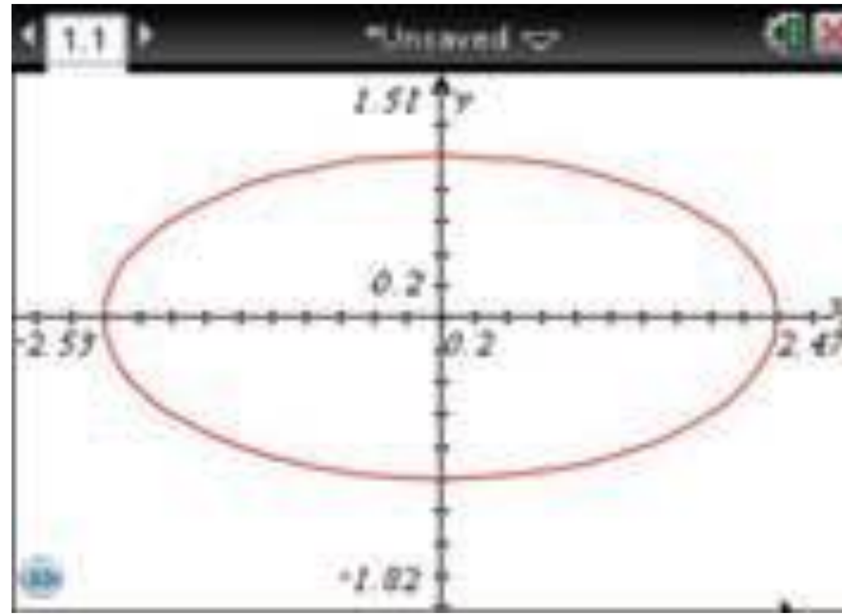
مفهوم أساسي

تصنيف القطع المخروطية باستعمال المميز

القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0, A \neq C$ أو $B \neq 0$
دائرة	$B^2 - 4AC < 0, B = 0, A = C$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

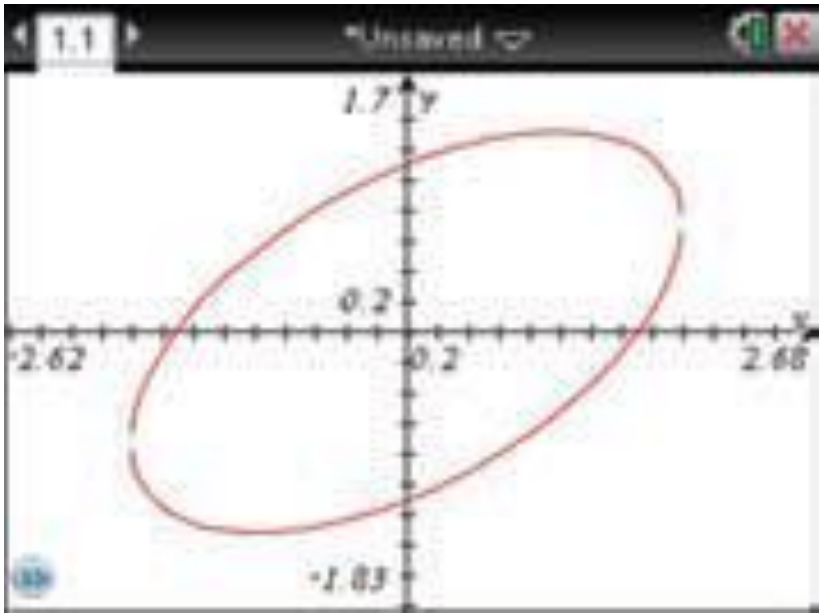
يكون القطع أفقياً و رأسياً عندما $B = 0$ أما إذا كانت $B \neq 0$ فلا يكون القطع أفقياً و لا رأسياً

قطع ناقص أفقي $B = 0$



$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

قطع ناقص ليس رأسياً و لا أفقياً $B \neq 0$



$$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$$

مثال 2

تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

a) $y^2 + 4x^2 - 3xy + 4x - 5y - 8 = 0$

$$A = 4, B = -3, C = 1$$

المميز يساوي $(-3)^2 - 4(4)(1) = -7$

و لأن المميز أصغر من الصفر ، $B \neq 0$ فإن المعادلة تمثل قطع ناقص .

b) $3x^2 - 6x + 4y - 5y^2 + 2xy - 4 = 0$

$$A = 3, B = 2, C = -5$$

المميز يساوي $2^2 - 4(3)(-5) = 64$

و لأن المميز أكبر من الصفر ، فإن القطع زائد .

(c $4y^2 - 8x + 6y - 14 = 0$

$A = 0, B = 0, C = 4$

المميز يساوي $0^2 - 4(0)(4) = 0$

و لأن المميز يساوي صفراً ، فإن المعادلة تمثل قطع مكافئ .

تحقق من نفسك

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

2A) $8y^2-6x^2+4xy-6x+2y-4=0$

قطع زائد

2B) $3xy+4x^2-2y+9x-3=0$

قطع زائد

2C) $3x^2+16x-12y+2y^2-6=0$

قطع ناقص

دوران القطوع المخروطية :

تعلم أنه عندما يكون القطع المخروطي رأسيًّا أو أفقيًّا، فإن محوريه يوازيان المحورين الإحداثيين، وذلك عندما لا تحتوي معادلات هذه القطوع على الحد xy.

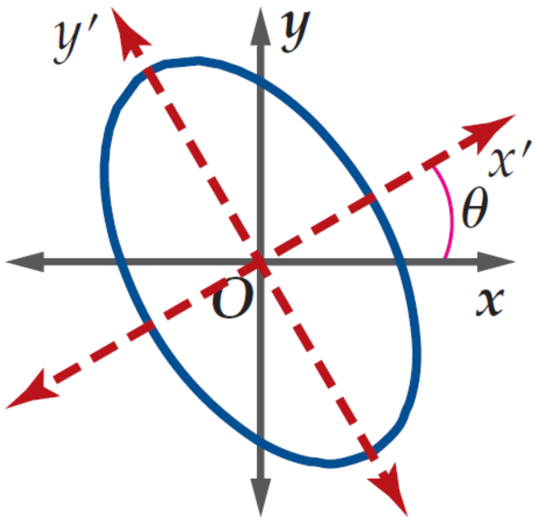
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$ محور القطع المخروطي موازيان للمحورين الإحداثيين

ستتعامل في هذا الدرس مع قطوع مخروطية دوّرت محاورها بحيث لا تكون موازية للمحوريين الإحداثيين

وتكون $B \neq 0$ في الصورة العامة لهذه القطوع الدورانية، لذا يظهر الحد xy في المعادلة .

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$ دور محوراً القطع المخروطي علي المحورين الإحداثيين

إذا حذف الحد xy، فيمكن كتابة معادلة القطع المخروطي على الصورة القياسية بإكمال المربع، ولحذف هذا الحد تقوم بتدوير المحورين الإحداثيين حتى يصبحا موازيين لمحوري القطع المخروطي.



عندما يدوّر المحوران الإحداثيان بزاوية قياسها θ

كما هو موضح تبقى نقطة الأصل ثابتة، ويتشكّل محوران جديدان

هما x , y وفيما يأتي الصورة العامة لمعادلة القطع المخروطي

في المستوى الإحداثي xy.

$$A\left(x'\right)^2 + Bxy + C\left(y'\right)^2 + Dx' + Ey' + F = 0$$

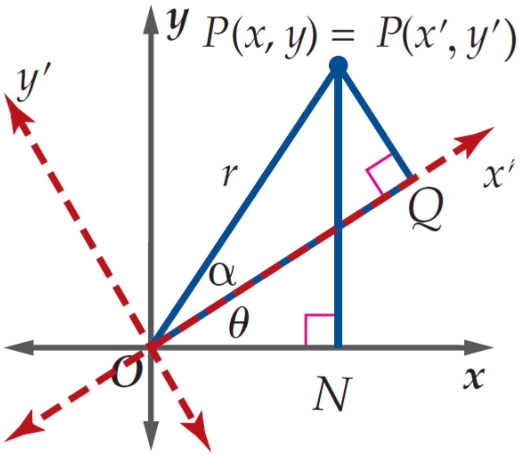
معادلة القطع المخروطي في المستوي x y

يمكن استعمال حساب المثلثات لاشتقاق علاقات تربط بين النقطة P(x , y) في مستوى xy.

و النقطة $P\left(x', y'\right)$ في المستوي $x'y'$

في المثلث PNO المجاور لاحظ أن

$$OP = r, ON = x, PN = y, \angle NOP = \alpha + \theta$$



يمكنك استعمال ΔPNO التواصل إلي العلاقات الآتية :

$$x = r\cos(\alpha+\theta)$$ نسبة جيب التمام

$$= r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$$ متطابقة جيب التمام لمجموع زاويتين

$$y = r\sin\theta(\alpha+\theta)$$ نسبة الجيب

$$= r\sin\alpha\cos\theta - r\cos\alpha\sin\theta$$ متطابقة الجيب لمجموع زاويتين

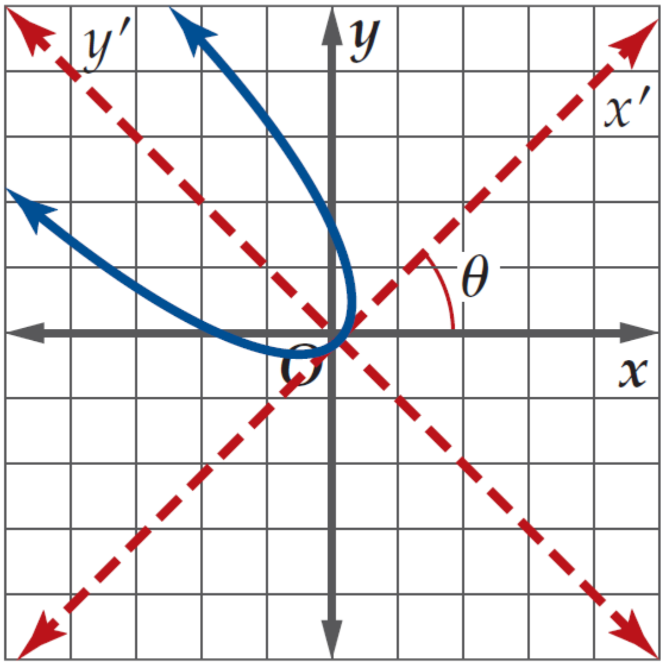
و باستعمال المثلث القائم الزاوية POQ حيث $OP = r, OQ = x', \mathrm{PQ} = \mathrm{y}', \mathrm{m}\angle \mathrm{QOP} = \alpha$

يمكنك التوصل إلي العلاقتين $x' = r\cos\alpha, y' = r\sin\alpha\cos\theta$ و بالتعويض في العلاقات السابقة ينتج أن

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \quad \text{و} \quad y = y'\cos\theta - x'\sin\theta$$

دوران محاور القطوع المخروطية

يمكن إعادة المعادلة $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ في المستوي **xy** علي الصورة



$$A(x')^2+Bxy+C(y')^2+Dx'+Ey'+F=0$$

في المستوي $x'y'$ ، بزاوية دوران قياسها θ

، و ذلك باستعمال صيغتي الدوران اللآتيين :

$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta, x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$$

مثال 3

كتابة معادلة في مستوي x''y''

استعمل $\theta = \frac{\pi}{4}$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $4x^2 + 6xy + 4y^2 - 35 = 0$

في المستوي $x'y'$ ثم حدد القطع المخروطي الذي تمثله .

أوجد معادلتي $x'y'$

صيغتا دوران x, y

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \qquad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \qquad = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

عوض في المعادلة الأصلية

$$4x^2 \quad + \quad 6xy \quad + \quad 4y^2 \quad - 35 = 0$$

$$4\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right) + 4\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 - 35 = 0$$

$$4\frac{\left[2(x')^2-4x'y'+2(y')^2\right]}{4}+\frac{6\left[2(x')^2-4x'y'+2(y')^2\right]}{4}+\frac{4\left[2(x')^2-4x'y'+2(y')^2\right]}{4}-35=0$$

$$2(x')^2-4x'y'+2(y')^2+3(x')^2-3(y')^2+2(x')^2+4x'y'+2(y')^2-35=0$$

$$7(x')^2+(y')^2=35$$

$$\frac{(x')^2}{5}+\frac{(y')^2}{35}=1$$

فيكون القطع المخروطي قطعاً ناقصاً ، و الصورة القياسية له في مستوي $x'y'$

هي $\frac{(x')^2}{5}+\frac{(y')^2}{35}=1$ **كما في الشكل المجاور .**

تحقق من نفسك

3) استعمل $\theta = \frac{\pi}{6}$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 - 60 = 0$ في المستوي $x'y'$ ثم حدد القطع المخروطي الذي تمثله .

$9(x')^2 + (y')^2 - 60 = 0$ قطع ناقص

يمكن استعمال علاقتين اخرتيين تربطان $x'y'$ بـ xy

لإيجاد معادلة في مستوي xy لقطع مخروطي بعد دورانه .

مفهوم أساسي

دوران محاور القطوع المخروطية

إذا علمت معادلة قطع مخروطي في المستوي $x'y'$ بزاوية دوران قياسها θ فإنه يمكن إيجاد المعادلة في المستوي xy باستعمال صيغتي الدوران الآتيين :

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta , y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

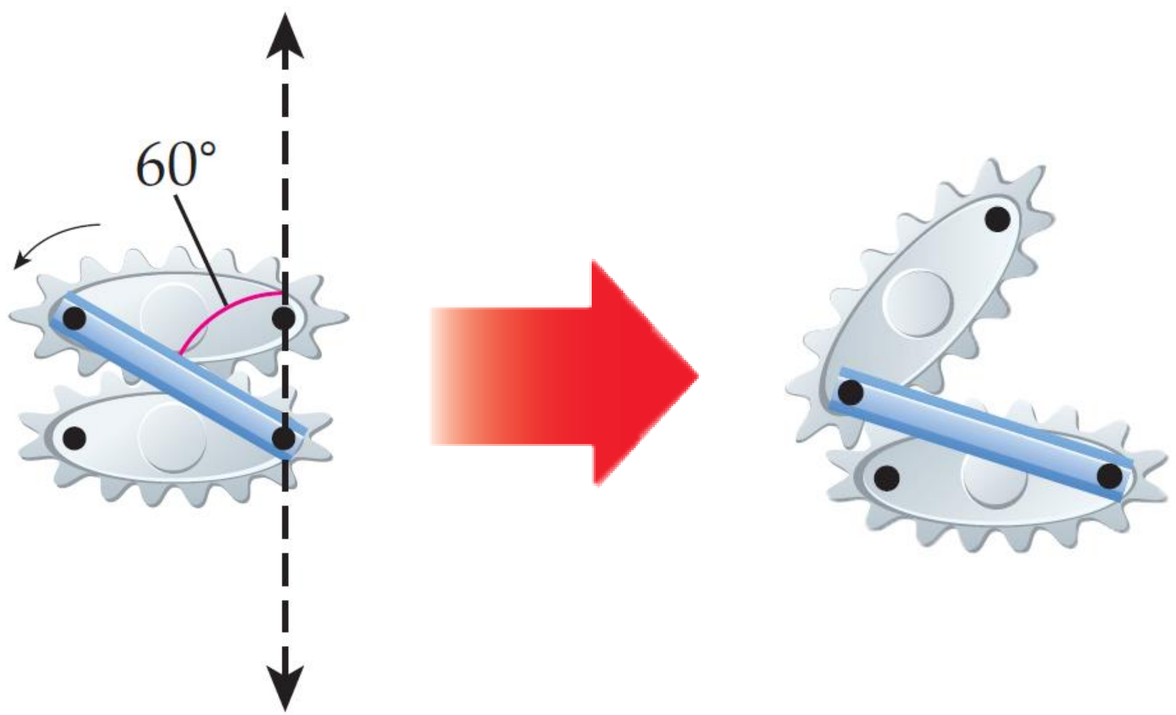
مثال 4 من واقع الحياة

تطبيقات علي القطع الزائد

فيزياء : يمكن استعمال تُروس السرعة والتي تأخذ شكل قطع ناقص للحصول على سرعات متغيرة،

معادلة ترس بعد دورانه 60° في المستوي $x'y'$ هي $\frac{(x')^2}{5}+\frac{(y')^2}{35}=1$

فاكتب معادلة هذا القطع الناقص في المستوي xy



استعمل صيغتي الدوران لـ x', y' لإيجاد معادلة دوران القطع المخروطي في مستوي xy

$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta \qquad x', y' \text{ صيغتا دوران} \qquad x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = y\cos 60^\circ - x\sin 60^\circ \qquad \theta = 60^\circ \qquad x' = x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}x \qquad \sin 60^\circ = \frac{1}{2}, \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

عوض هذه القيم في المعادلة الأصلية.

المعادلة الأصلية

$$\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1$$

بضرب كلا الطرفين في 36

$$(x')^2 + 2(y')^2 = 36$$

بالتعويض

$$\left(\frac{x + \sqrt{3}y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y - \sqrt{3}x}{2}\right)^2 = 36$$

بالتبسيط

$$\frac{x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2}{4}+\frac{2y^2+4\sqrt{3}xy+6x^2}{4}=36$$

بتجميع الحدود المتشابهة

$$\frac{7x^2-2\sqrt{3}xy+5y^2}{4}=36$$

بضرب كلا الطرفين في 4

$$7x^2-2\sqrt{3}xy+5y^2=144$$

بطرح 144 من كلا الطرفين

$$7x^2-2\sqrt{3}xy+5y^2-144=0$$

معادلة القطع الناقص في المستوي xy هي : $7x^2-2\sqrt{3}xy+5y^2-144=0$

تحقق من نفسك

4) إذا كانت معادلة الترس بعد دوران $30°$ في المستوي $x'y'$ هي $(x')^2+4(y')^2-40=0$

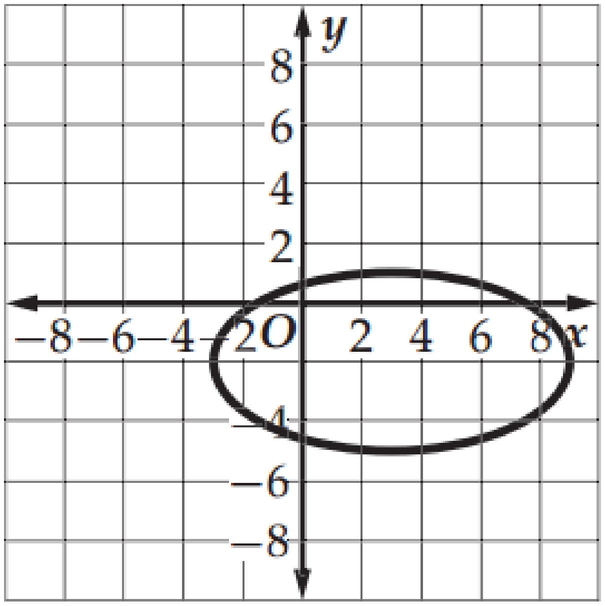
فأكتب معادلة الترس في المستوي xy

$$\frac{7}{4}x^2-\frac{3\sqrt{3}}{3}xy+\frac{13}{4}y^2-40=0$$

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله، ومثِّل منحناه بيانيًّا : (مثال 1)

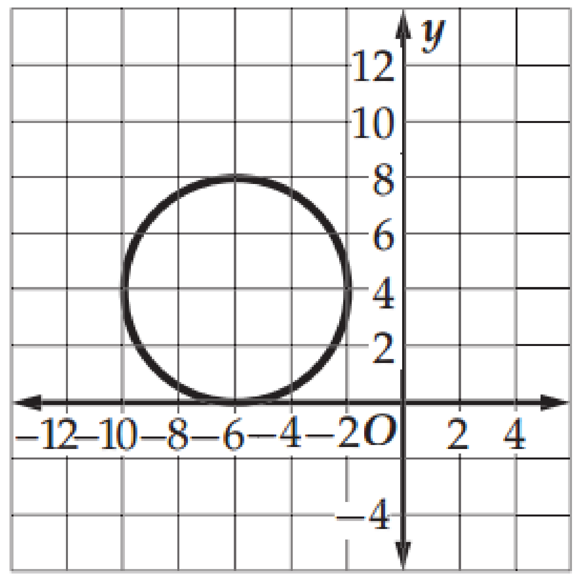
1) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

$$\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$ قطع ناقص



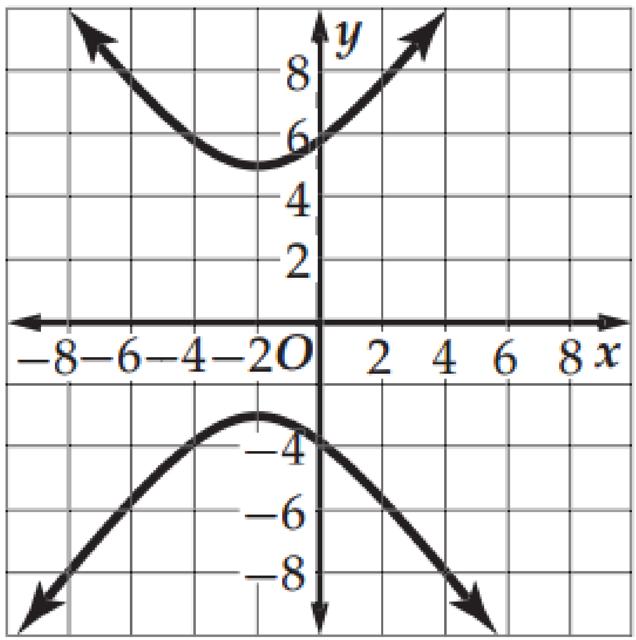
(2 $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$

دائرة $(x+6)^2 + (y-4)^2 = 16$



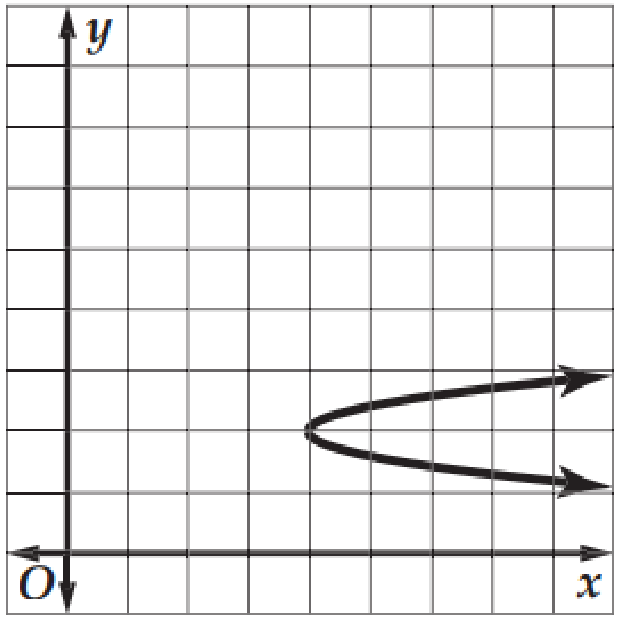
$$9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0 \quad (3$$

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$$ قطع زائد



(4 $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

$x = 6(y-2)^2 + 4$ ، قطع مكافئ



حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية. (مثال 2)

5) $4x^2 - 5y = 9x - 12$ قطع مكافئ

6) $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$ قطع زائد

7) $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$ دائرة

8) $4x^2 - 6y = 8x + 2$ قطع مكافئ

9) $4x^2 - 3y^2 + 8xy - 12 = 2x + 4y$ قطع زائد

10) $5xy - 3x^2 + 6y^2 + 12y = 18$ قطع زائد

11) $16xy + 8x^2 + 8y^2 - 18x + 8y = 13$ قطع ناقص

12) **طيران:** في أحد عروض الطيران يمكن تمثيل مسار طائرة نفاثة خلال جولة واحدة، بقطع مخروطي وفق المعادلة $24x^2 + 1000y - 31680x - 45600 = 0$، وقد حدّدت الأبعاد بالأقدام. (مثال 2)

a) حدّد شكل منحنى القطع الذي يمثّل مسار الطائرة، ثم اكتب معادلته على الصورة القياسية.

قطع مكافئ،

$$(x - 660)^2 = -\frac{125}{3}(y - 10500)$$

b) إذا بدأت الطائرة بالصعود عند $x = 0$، فما المسافة الأفقية التي تقطعها من بداية صعودها إلى نهاية هبوطها؟ $1320ft$

c) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة؟ $10500ft$

استعمل قيمة θ المعطاة لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة مما يأتي في المستوى $x'y'$، ثم حدّد نوع القطع المخروطي التي تمثله: (مثال 3)

13) $x^2 - y^2 = 9; \theta = \frac{\pi}{3}$ $-(x')^2 - 2\sqrt{3}\, x'y' + (y')^2 - 18 = 0$ ، قطع زائد

14) $xy = -8; \theta = 45°$ $(x')^2 - (y')^2 + 16 = 0$ ، قطع زائد

15) $x^2 - 8y = 0; \theta = \frac{\pi}{2}$ $(y')^2 - 8x' = 0$ ، قطع مكافئ

16) $2x^2 + 2y^2 = 8; \theta = \frac{\pi}{6}$ $(x')^2 + (y')^2 - 4 = 0$ ، دائرة

17) $y^2 + 8x = 0; \theta = 30°$

$(x')^2 + 2\sqrt{3}x'y' + 3(y')^2 + 16\sqrt{3}x' - 16y' = 0$ ، قطع مكافئ

18) $4x^2 + 9y^2 = 36; \theta = 30°$

$21(x')^2 + 10\sqrt{3}x'y' + 31(y')^2 - 144 = 0$ ، قطع ناقص

اكتب معادلة القطع المخروطي لكل مما يأتي في المستوى xy بناءً على معادلته المعطاة في المستوى $x'y'$ والزاوية θ : (مثال 4)

19) $(x')^2 + 3(y')^2 = 8;\ \theta = \frac{\pi}{4}$ $\qquad x^2 - xy + y^2 - 4 = 0$

20) $\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{225} = 1;\ \theta = \frac{\pi}{4}$ $\qquad 4x^2 + 10xy + 4y^2 - 225 = 0$

21) $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{36} = 1;\ \theta = \frac{\pi}{3}$ $\qquad x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 - 144 = 0$

22) $(x')^2 = 8y';\ \theta = 45^\circ$ $\qquad x^2 + 2xy + y^2 + 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$

23) $\frac{(x')^2}{7} + \frac{(y')^2}{28} = 1;\ \theta = \frac{\pi}{6}$ $\qquad 13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 112 = 0$

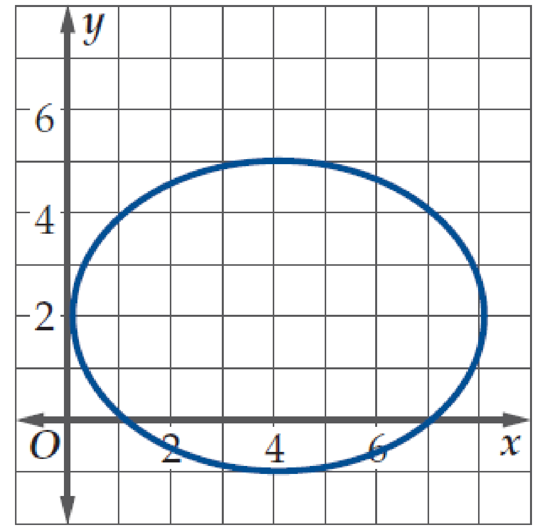
$x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 8\sqrt{3}x - 8y = 0$ $4x' = (y')^2; \theta = 30°$ **(24**

$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 128 = 0$ $\dfrac{(x')^2}{64} - \dfrac{(y')^2}{16} = 1; \theta = 45°$ **(25**

$x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3}xy + 10\sqrt{3}x - 10y = 0$ $(x')^2 = 5y'; \theta = \dfrac{\pi}{3}$ **(26**

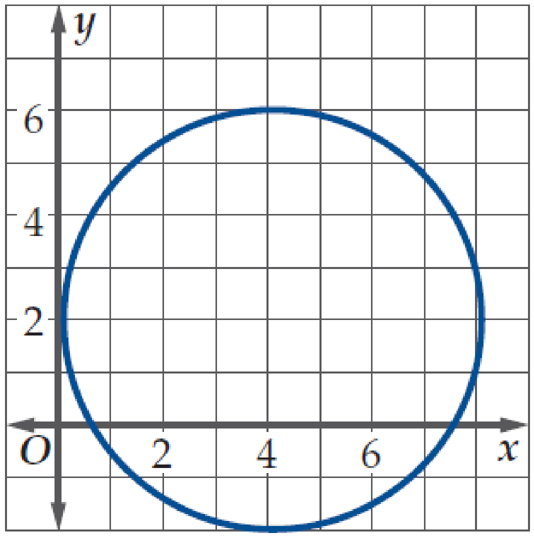
قابل بين المنحنيات أدناه والمعادلة التي تمثل كل منها:

(27



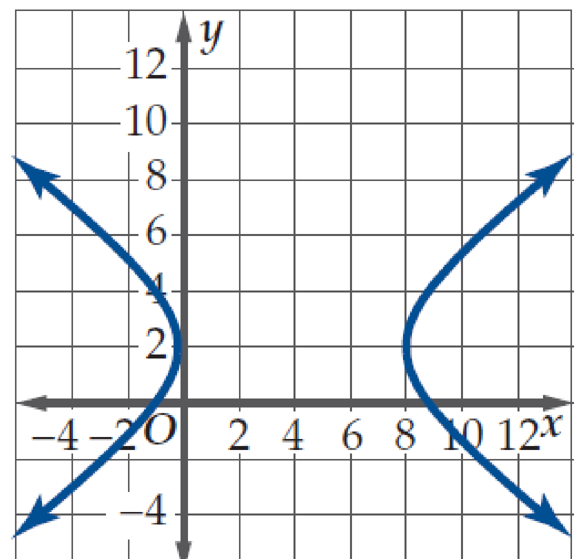
C

(28



a

(29



b

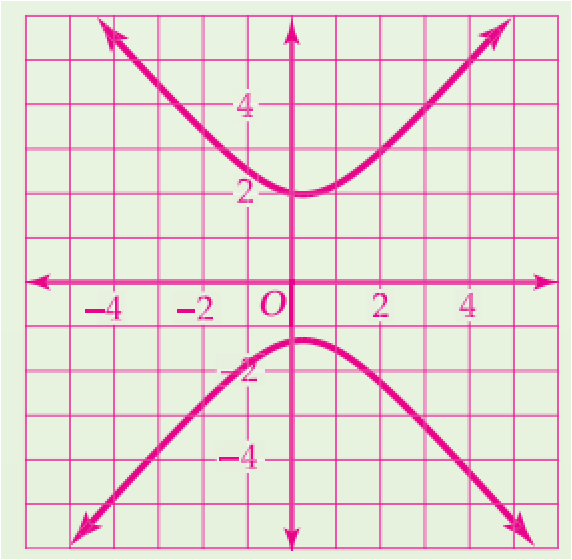
(a $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4$

(b $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y = 64$

(c $9x^2 + 16y^2 = 72x + 64y - 64$

30) **ضوء:** ينعكس ضوء مصباح على حائط مشكِّلًا قطعًا مخروطيًّا.
افترض أن معادلة القطع هي $3y^2 - 2y - 4x^2 + 2x - 8 = 0$.
حدِّد نوع القطع، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

قطع زائد،



قابل بين كل حالة في التمارين 34 - 31 مع المعادلة التي تمثلها من a - d

a) $47.25x^2 - 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$

b) $25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45700 = 0$

c) $16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14094 = 0$

31) **حاسوب:** حدود شبكة لاسلكية مداها 120 ft . *d*

32) **لياقة:** المسار البيضي لقدميك على جهاز التمرين. *b*

33) **اتصالات:** موقع هاتف محمول بين عمودي إرسال. *a*

34) **رياضة:** ارتفاع كرة قدم عن الأرض بعد ركلها. *c*

(35 **تمثيلات متعددة :** افترض أن مركز قطع ناقص $(3, -2)$، وأحد رأسيه $M(-1, -2)$، وأحد الرأسين المرافقين $N(3, -4)$.

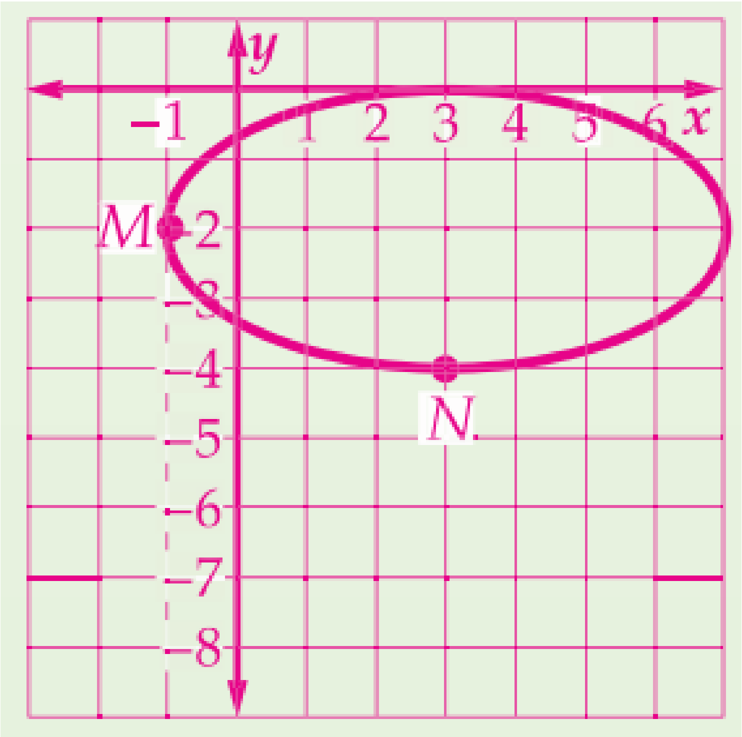
(a **تحليليًّا :** أوجد الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

(b **جبريًّا :** حوّل المعادلة في الفرع **a** إلى الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 9 = 0$$

c) **بيانيًّا :** مثّل معادلة القطع الناقص بيانيًّا.



d) **جبريًّا:** استعمل $\theta = 45°$ لكتابة الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص التي أوجدتها في **(b)** في المستوى $x'y'$.

$$5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 + 10\sqrt{2}\,x' + 22\sqrt{2}\,y' + 18 = 0$$

e) **بيانيًّا:** مثِّل معادلة القطع الناقص الدوراني بيانيًّا.