ملاحظات هامة

التناظر

① $g(x) = f(-x)$ ⟸ g نظير f بالنسبة لمحور التراتيب yy' ((تابع زوجي))

② $g(x) = -f(-x)$ ⟸ g نظير f بالنسبة لمبدأ الإحداثيات $(0,0)$ ((تابع فردي))

③ $g(x) = -f(x)$ ⟸ g نظير f بالنسبة لمحور الفواصل xx'

معادلة المماس

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y_0 = f(x_0)$

$m = f'(x_0)$

ميل المماس m لمستقيم معلوم منه نقطتين

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

✓ المماس الأفقي ميله معدوم

$m = 0$ ⟸ $f'(x) = 0$

✓ عند القيم الحدية ينعدم المشتق $f'(x) = 0$

مركز تناظر له شرطان

① أيا كانت $x \in D$ فإن $(2x_0 - x) \in D$

②

$$f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$$

المماس الشاقولي

معادلته $x = a$

ميله $m = \mp\infty$

✓ نقاط التقاطع مع محور الفواصل xx'

$y = 0$ ⟸

✓ نقاط التقاطع مع محور التراتيب

$x = 0$

مستقيمات ميلاهما m_d و m_Δ

$m_d = m_\Delta$ ⟸ Δ يوازي d

$m_d \times m_\Delta = -1$ ⟸ Δ يعامد d

أ. محمد إدريس

الإثبات بالتدريج مثاليات

- نبرهن صحة القيمة الإبتدائية $E(0)$
- نفرض صحة $E(n)$
- نبرهن صحة $E(n+1)$

المتتالية الهندسية v_n

① $v_{n+1} = v_n \times q$ ← أساس المتتالية

② $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

③ كل حد ينتج عن سابقه بضرب بعدد q (وهو الأساس)

④ $S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

- S: مجموع متتالية هندسية
- a: الحد الأول

عدد الحدود n = دليل الأول − دليل الأخير + 1

⑤ $v_n = v_0 \cdot q^n$

⑥ ثلاث حدود a, b, c من متتالية هندسية

$b^2 = a \cdot c$ ⇐

⑦ $\frac{v_n}{v_m} = q^{n-m}$

المتتالية الحسابية u_n

① $u_{n+1} = u_n + r$ ← أساس المتتالية

② $r = u_{n+1} - u_n$

③ كل حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد r (وهو الأساس)

④ $S = \frac{n}{2}(a+l)$

- n: عدد الحدود
- a: الحد الأول
- l: الحد الأخير
- S: مجموع متتالية حسابية

عدد الحدود n = دليل الأول − دليل الأخير + 1

⑤ $u_n = u_0 + nr$

⑥ ثلاث حدود a, b, c من متتالية حسابية

$b = \frac{a+c}{2}$ ⇐

⑦ $u_m - u_n = (m-n) \cdot r$

أ. محمد إدريس

إطراد المتتالية

① معيار الفرق

$u_{n+1} - u_n > 0$	متزايدة
$u_{n+1} - u_n < 0$	متناقصة
$u_{n+1} - u_n = 0$	ثابتة

② معيار النسبة

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$	متزايدة
$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$	متناقصة
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$	ثابتة

③ معيار المشتق

$f'(x) > 0$	متزايدة
$f'(x) < 0$	متناقصة

✓ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ عدد

u_n متقاربة ←

✓ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

u_n متباعدة ←

✓ متتالية تدريجية وبرك النزايت

$f(x) = x$ بحل المعادلة $\rightarrow u_{n+1}$, u_0

u_n متزايدة

حد راجح

✓ $u_n \leq S$

u_n متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد S

← فهي متقاربة

u_n متناقصة

✓ $u_n \geq S$

حد قاصر

u_n متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد S

← فهي متقاربة

متتاليات متجاورتان (لهما شرطان)

① إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة

② نهايتهما فرقهما معدومة (صفر)

$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - t_n) = 0$

أ. محمد إدريس

نهاية متتالية هندسية

① $-1 < q < 1$

$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$

② $q > 1$

$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$

③ $q < -1$

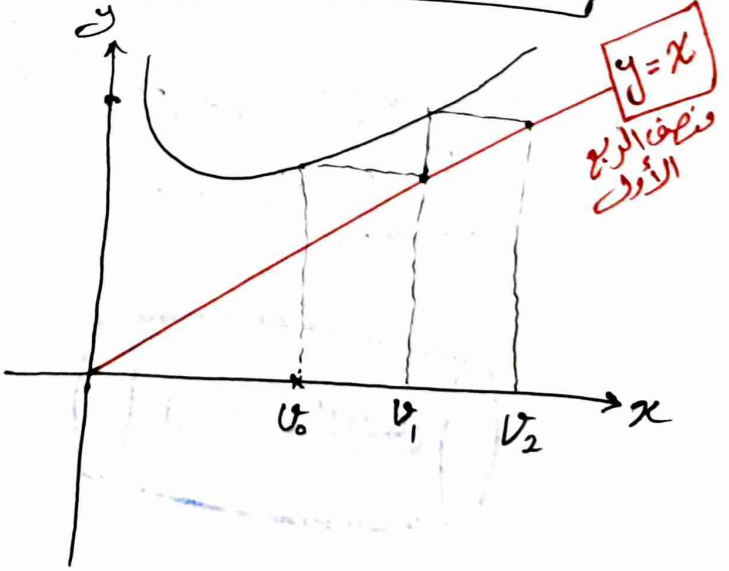
ليس لها نهاية

④ $q = 1$

$\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$

متتالية ثابتة

التمثيل الهندسي



حالات عدم التعيين

① $\frac{0}{0}$

② $\frac{\infty}{\infty}$

③ $+\infty - \infty$

④ $0 \times \infty$

⑤ 1^∞

⑥ ∞^0

⑦ 0^0

أ. محمد إدريس

إزالة عدم التعيين

- ضرب مرافق
- عامل مشترك
- تغيير المتغير
- توحيد مقامات

تابع الجزء الصحيح E(x)

$$x - 1 \leqslant E(x) < x$$

أ. محمد إدريس

ملاحظات لوغارتمي ln

$\ln(+\infty) = +\infty$ ①

$\ln(0) = -\infty$ ②

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ③

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ ④

$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = 0^-$ ⑤

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ ⑥

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1$ ⑦

$\ln(1) = 0$ ⑧

$\ln(e) = 1$ ⑨

$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln(e) = -1$ ⑩

$\ln\sqrt{e} = \ln(e)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(e) = \frac{1}{2}$ ⑪

$\ln e^2 = \ln(e.e) = \ln e + \ln e = 1 + 1 = 2$ ⑫

⑬ للرسم $\ln 2 \simeq 0,7$
$\ln 3 \simeq 1,1$
$\ln 4 \simeq 1,4$

⑭ جداء يحول لمجموع

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

⑮ القسمة تحول للطرح

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

⑯ $\ln a^n = n \cdot \ln a$

⑰ لوغارتم مقلوب عدد ناقص لوغارتم العدد

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

⑱ $\ln e^x = x \cdot \ln e = x$

⑲ $e^{\ln x} = x$

أ. محمد إدريس

ملاحظات التابع الأسي

$e^{+\infty} = +\infty$ (1)

$e^{-\infty} = 0$ (2)

$e^{0} = 1$ (3)

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (4)

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (5)

$\lim_{x \to +\infty} x \cdot e^{-x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^{x} = 0$ (6)

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (7)

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^x}{x} = -1$ (8)

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$ (9)

$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

$\frac{\text{عدد}}{+\infty} = 0$

$\frac{\text{عدد}}{-\infty} = 0$

أ. وجيه الدريس

العدد المشتق

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$\sin\infty$ ، $\cos\infty$ ← غير معرفة

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$0 \leq \sin^2 x \leq 1$

$0 \leq \cos^2 x \leq 1$

$x - 1 < E(x) \leq x$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

$\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$

$\frac{\text{عدد}}{0^-} = -\infty$

$\frac{\text{عدد}}{0^+} = +\infty$

✓ عندما نخرج x من تحت الجذر فإنه يخرج على شكل قيمة مطلقة $|x|$ ونقسم على أس الجذر على x^2

$|x|$ عندما $x \to +\infty$ فإن $|x| = +x$

$|x|$ عندما $x \to -\infty$ فإن $|x| = -x$

ملاحظات هامة لو فرنم

✓ $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ (الأس، الأساس)

مثال: $4^x = e^{x \cdot \ln 4}$

✓ $a \leqslant b \Rightarrow \ln a \leqslant \ln b$

✓ $a \leqslant b \Rightarrow e^a \leqslant e^b$

✓ $\ln a = \ln b \Rightarrow e^{\ln a} = e^{\ln b} \Rightarrow a = b$

✓ $e^a = e^b \Rightarrow \ln e^a = \ln e^b \Rightarrow a = b$

المعادلة التفاضلية

① $y' = ay + b$

حلها من الشكل: $y = k \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}$ (ثابت)

② $y' = ay$

حلها من الشكل: $y = k \cdot e^{ax}$ (ثابت)

متطابقات

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3$

$(a-b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$

أ. محمد إدريس

دراسة إشارة

① كثير حدود درجة أولى

< ما قبل الجذر يخالف إشارة x
وما بعد يوافق >

② كثير حدود درجة ثانية

< ما بين الجذرين يخالف
إشارة x^2 وبرا يوافق

③ كثير حدود درجة ثالثة

نكتب كجداء (كثير حدود درجة ①) × (كثير حدود درجة ②)

وندرس إشارة كل منهما ثم نضرب بينهما

④ تابع كسري

ندرس إشارة البسط لحالها
ثم ندرس إشارة المقام لحالها
ثم نقسم الإشارات

⑤ تابع دوري

ندرس الإشارة على دورة واحدة

⑥ تابع جذري (جذر لحاله)

موجب

⑦ تابع أسي لحاله

موجب

⑧ تابع لوغاريتمي لحاله

موجب تماماً إذا كان ما داخله بين $]1, +\infty[$

سالب تماماً إذا كان ما داخله بين $]0, 1[$

ملاحظة

$x - \sqrt{x^2+1}$

$\sqrt{x^2+1} > x$ ← نربع ⇒

$x^2+1 > x^2$

$0 > x - \sqrt{x^2+1}$

سالب

أ. محمد إدريس

المقارب المائل

الإثبات

$$\lim_{x \to \mp\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

الاستنتاج

مثلا: $\lim_{x \to +\infty} f(x) - 4x = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 4x - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (4x+1) = 0$$

y_Δ

$$\Rightarrow y_\Delta = 4x + 1$$

الإيجاد

تابع كسري: قسمة إقليدية

تابع جذري: إتمام إلى مربع كامل

نضيف ونطرح ربع نصف أمثال x

$y_\Delta = ax + b$

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$$

إتمام إلى مربع كامل

$x^2 - 2x$

$x^2 - 2x + 1 - 1$

مطابقة: $(x-1)^2 - 1$

$x^2 - 3x$

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

مطابقة: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

$x^2 - 5x$

$x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}$

مطابقة: $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

نهايات مميزة

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

أ. محمد إبليس

ملاحظة / الدساتين

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$\sin 3x = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x$

$\cos(3x) = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cos x$

$2 \cdot \cos^2 x = 1 + \cos 2x$

$\cos x = 1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$1 - \cos 2x = 2 \cdot \sin^2 x$

دراسة قابلية الإشتقاق

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

الجواب
عدد حقيقي
$\in \mathbb{R}$
↓
قابل للإشتقاق

الجواب
∞
↓
غير قابل للإشتقاق

دراسة وضع نسبي للمنحنى والمماس

$f(x) - y_\Delta > 0$
C يقع فوق Δ

$f(x) - y_\Delta < 0$
C يقع تحت Δ

$f(x) - y_\Delta = 0$
نقطة تقاطع

أ. محمد إدريس

التكامل

① نقول عن $F(x)$ أنّه تابع أصلي لـ $f(x)$ على المجال I

عندما $F(x)$ ① إشتقاقي على المجال I

$F'(x) = f(x)$ ②

② $\int a = ax + C$

③ $\int 1 = x + C$

④ $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

⑤ $\int \sin x = -\cos x + C$

⑥ $\int \cos x = +\sin x + C$

⑦ $\int e^x = e^x$

⑧ $\int \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x}$

⑨ $\int \frac{1}{x} = \ln|x|$

$F(x) = \ln|x|$ ← $\ln x$ $x>0$; $\ln(-x)$ $x<0$

أ. محمد إدريس

⑩ $\int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

⑪ $\int (1+\tan^2 x) = \tan x$

⑫ $\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x$

⑬ $\int (1+\cot^2 x) = -\cot x$

⑭ $\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x$

⑮ $f(x) = u' \cdot u^n$ ← $F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

⑯ $\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$

⑰ $\int \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u}$

⑱ $\int u' \cdot \cos u = \sin u$

⑲ $\int u' \cdot \sin u = -\cos u$

⑳ $\int u'(1+\tan^2 u) = \tan u$

㉑ $\int \frac{u'}{\cos^2 u} = \tan u$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a F(x)\,dx$$

✓ خلاصة مثال

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

✓ التكامل بالتجزئة

u ← u' (+)
u' → v
(−) ∫

$$\int_a^b u\cdot v' = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b u'\cdot v$$

ملاحظة

	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
	0	30	60	45	90	180
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1

✓ تكامل توابع كسرية

① درجة البسط > درجة المقام

② نفرق الكسر

③ نوحد المقامات ونحذفها ونطابق الطرفين

$$\int \frac{u'}{\sin^2 u} = -\cot u \quad (22)$$

$$\int \cos = \sin \qquad \int \sin = -\cos$$

$$(\cos)' = -\sin \qquad (\sin) = \cos$$

$$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$

$$\sin x\cdot\sin y = \frac{-1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$$

$$\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$

$$\cos x\cdot\sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

التكامل المحدود

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

نقت فوق

أ. محمد إدريس

تكامل بالتجزئة

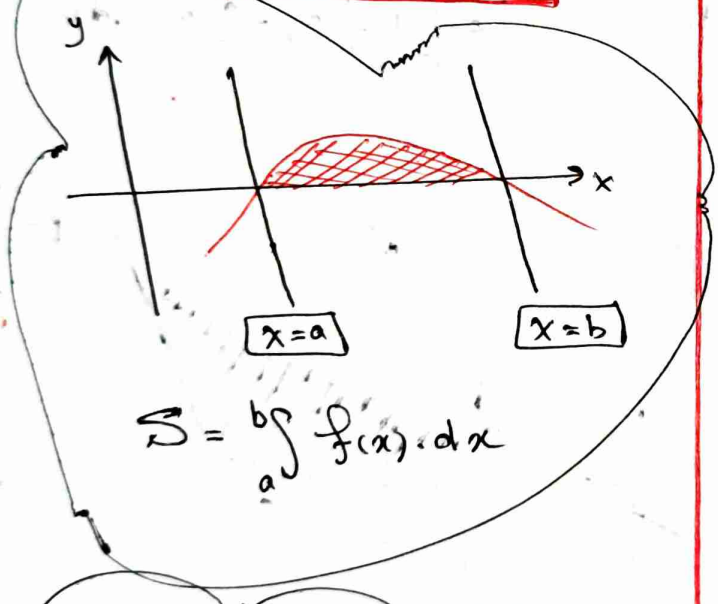
$\int x^n \cdot e^{ax}$

$\int x^n \cdot \sin ax$

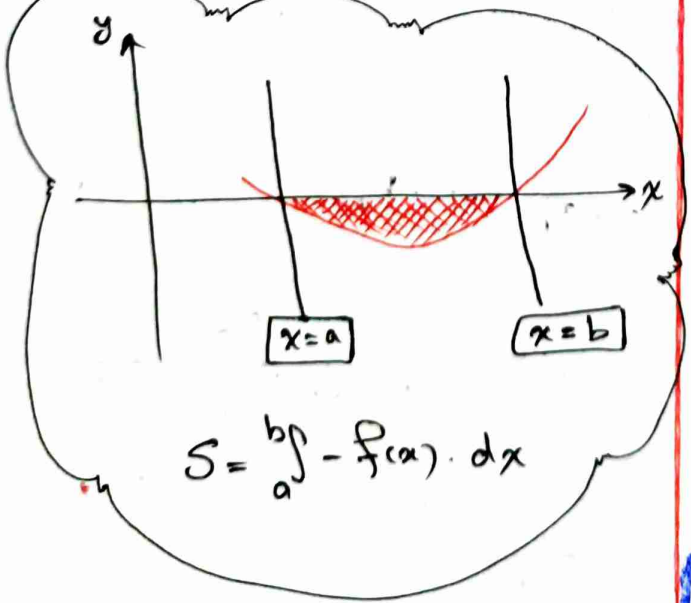
$\int x^n \cdot \cos ax$

$\int x^n \cdot \ln ax$

المساحة S



$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx$$



$$S = \int_a^b -f(x) \cdot dx$$

$$\int e^{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b}$$

$$\int \frac{g'}{g} = \ln|g|$$

g موجبة $|g| = g$

g سالبة $|g| = -g$

$$\int g^n \cdot g' = \frac{g^{n+1}}{(n+1)}$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$$

$$\int u' \cdot e^u = e^u$$

$$\int \sin u = \frac{-1}{u'} \cdot \cos u$$

$$\int \cos u = \frac{1}{u'} \cdot \sin u$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 u} = \frac{1}{u'} \cdot \tan u$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 u} = \frac{-1}{u'} \cdot \cot u$$

أ. محمد إدريس

حساب الحجم V

$$V = \int_a^b \pi \cdot f^2 \cdot dx$$

تعيين مستقيم في الفراغ

نقطة $B(x_0, y_0, z_0)$

شعاع توجيه $\vec{u}(a,b,c)$

$$d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

مستقيم $t \in \mathbb{R}$

نصف مستقيم $t \in [0, +\infty[$

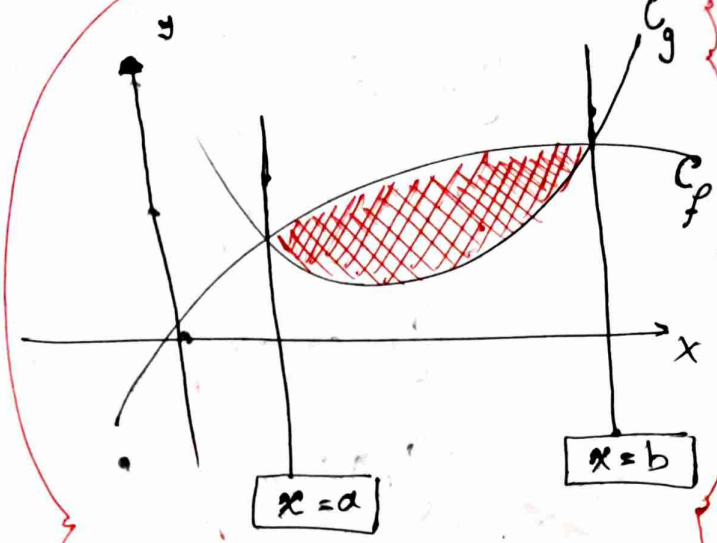
قطعة مستقيمة $t \in [0,1]$

تعيين مستقيم بالمستوي

نقطة $B(x_0, y_0)$

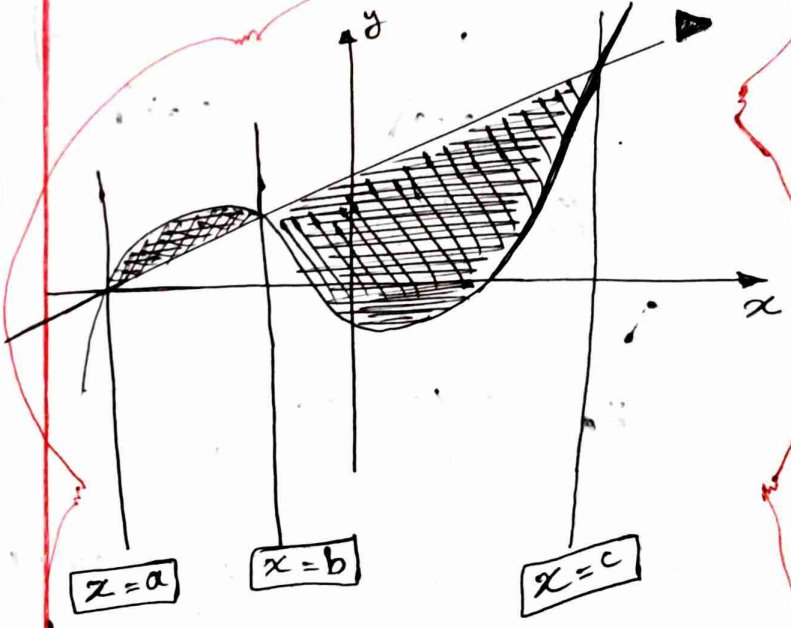
شعاع توجيه $\vec{u}(-b,a)$

$$d: ax + by + c = 0$$



C_g فوق C_f

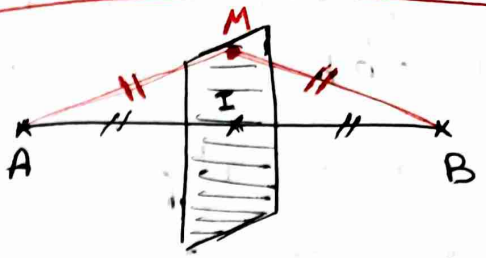
$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) \cdot dx$$



$$S = \int_a^b (f(x) - y_\Delta) + \int_b^c (y_\Delta - f(x))$$

أ. محمد إدريس

معادلة مستوي محوري للقطعة [AB]



$$\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$$

طريقة ثانية للمستوي المحوري

(*) نوجد I منتصف AB

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

(*) I(x_0, y_0, z_0) من المستوي

نأخذ $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ ناظم المستوي

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad (*)$$

معادلة مستوي

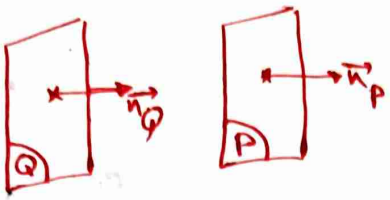
ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ — نقطة (x_0,y_0,z_0)

$$a(x-x_0)^2+b(y-y_0)^2+c(z-z_0)^2=0$$

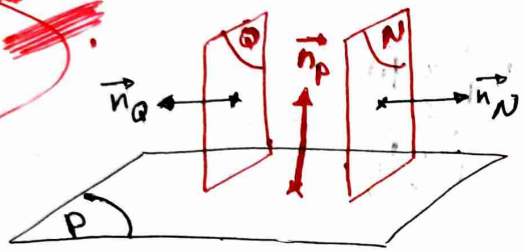
أ. محمد إدريس

مستويين متوازيين

$\vec{n}_P = \vec{n}_Q$



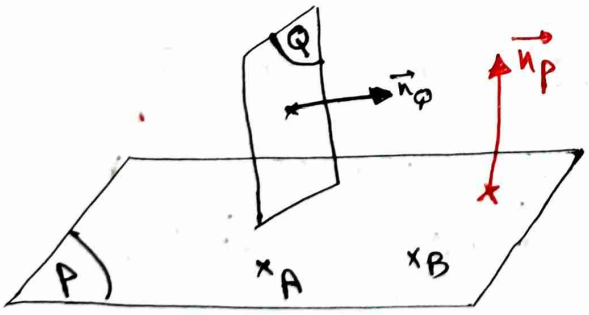
مستوي يعامد مستويين



$\vec{n}_P \times \vec{n}_N = 0$

$\vec{n}_P \times \vec{n}_Q = 0$

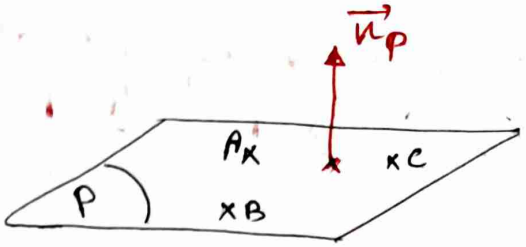
نقطتين ويعامد مستوي



$\vec{n}_P \times \overrightarrow{AB} = 0$

$\vec{n}_P \times \vec{n}_Q = 0$

ثلاثة نقاط



(*) نشكل مقادين ونثبت أنهما غير مرتبطين خطيا

(*) $\vec{n_p} \times \vec{AB} = 0$

$\vec{n_p} \times \vec{AC} \neq 0$

معادلة كرة

مركز $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ — نصف قطر R

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

أسطوانة محورها $(O,\vec{i})$

r نصف قطرها

مركزي قاعدتيها $(a,0,0)$ $(b,0,0)$

$$y^2 + z^2 = r^2$$

$$a \leq x \leq b$$

أسطوانة محورها $(O,\vec{j})$

r نصف قطرها

مركزي قاعدتيها $(0,a,0)$ $(0,b,0)$

$$x^2 + z^2 = r^2$$

$$a \leq y \leq b$$

أسطوانة محورها $(O,\vec{k})$

r نصف قطرها

مركزي قاعدتيها $(0,0,a)$ $(0,0,b)$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$a \leq z \leq b$$

مخروط رأسه O ومحوره $(O,\vec{i})$

r نصف قطر القاعدة

مركز قاعدته $(h,0,0)$

$$y^2 + z^2 - \frac{r^2}{h^2} x^2 = 0$$

$$0 \leq x \leq h$$

مخروط رأسه O ومحوره $(O,\vec{j})$

r نصف قطر القاعدة

مركز قاعدته $(0,h,0)$

$$x^2 + z^2 - \frac{r^2}{h^2} y^2 = 0$$

$$0 \leq y \leq h$$

أ. محمد إدريس

مخروط رأسه O ومحوره $(O,\vec{k})$

نصف قطر القاعدة r

مركز القاعدة $(0,0,h)$

$$x^2+y^2-\frac{r^2}{h^2}\cdot z^2=0$$

$$0\leqslant z\leqslant h$$

قواعد الإشتقاق

① $a\longrightarrow 0$ مشتق الثابت صفر

② $x^n\longrightarrow n.x^{n-1}$

③ $\ln(x)\longrightarrow\frac{1}{x}$

④ $\sqrt{x}\longrightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}$

⑤ $e^x\longrightarrow e^x$

⑥ $\cos x\longrightarrow -\sin x$

⑦ $\sin x\longrightarrow \cos x$

⑧ $\tan x\longrightarrow 1+\tan^2 x$

⑨ $u^n_{(x)}\longrightarrow n.u^{n-1}_{(x)}.u'_{(x)}$

⑩ $\sqrt{u_{(x)}}\longrightarrow\frac{u'_{(x)}}{2\sqrt{u_{(x)}}}$

⑪ $\ln(u_{(x)})\longrightarrow\frac{u'_{(x)}}{u_{(x)}}$

⑫ $e^{u_{(x)}}\longrightarrow u'_{(x)}.e^{u_{(x)}}$

⑬ $\cos(u_{(x)})\longrightarrow u'_{(x)}.(-\sin(u_{(x)}))$

⑭ $\sin(u_{(x)})\longrightarrow u'_{(x)}.(\cos(u_{(x)}))$

⑮ $\tan(u_{(x)})\longrightarrow u'_{(x)}.(1+\tan^2(u_{(x)}))$

⑯ مشتق جداء $(u.v)'=u'.v+v'.u$

⑰ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$

أ. محمد إدريس

وضع مستقيمين

$\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ مرتبطين خطيا

- متوازيين: d_1 // d_2 — مثال: $2=6$ ، $4=0$
- منطبقين: $d_1 = d_2$ — مثال: $0=0$ ، $5=5$

$\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطين خطيا

- متقاطعين: d_1 و d_2 — $t =$ عدد
- متخالفان (فراغيين) — مثال: $2=6$ ، $4=1$

متعامدين

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$

$d_1 \perp d_2$

طبيعة مجموعة بعد الإنعام

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=k$$

- $k<0$: مجموعة خالية ϕ
- $k=0$: نقطة
- $k>0$: كرة

بعد نقطة A عن مستوى P

$$dist(A,P)=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$A(x,y,z)$

$\vec{n}(a,b,c)$

وضع مستوى P وكرة مركزها A

نحسب بعد مركز الكرة عن المستوى

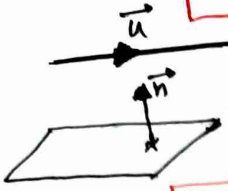
1. $dist(A,P)=R$ ← المستوى يمس الكرة
2. $dist(A,P)>R$ ← المستوى يقع خارج الكرة
3. $dist(A,P)<R$ ← المستوى يقطع الكرة وفق دائرة

نصف قطرها: $r^2=R^2-dist^2(A,P)$

- r: نصف قطر الدائرة
- R: نصف قطر الكرة
- $dist(A,P)$: بعد A عن P

أ. محمد إدريس

وضع مستقيم ومستوى

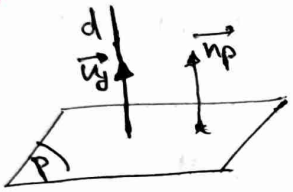


$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

المستقيم يوازي المستوى

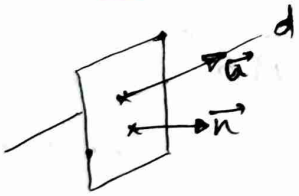
$\vec{u_d}$ ، $\vec{n_P}$ مرتبطين خطيا

المستقيم يعامد المستوى



$\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$

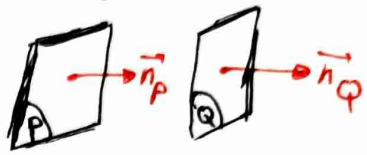
المستقيم يقطع المستوى



وضع مستويين

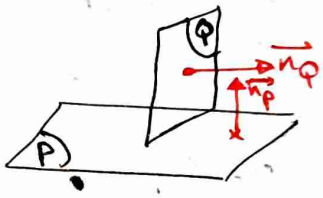
$\vec{n_P}$ ، $\vec{n_Q}$ مرتبطين خطيا

متوازيين



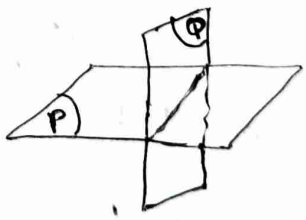
$\vec{n_P} \cdot \vec{n_Q} = 0$

متعامدين



$\vec{n_P}$ ، $\vec{n_Q}$ غير مرتبطين خطيا

متقاطعين



ملاحظة هامة جدا

✓ إذا عوضنا المستقيم d بالمستوي P وكان $t = \text{عدد}$

المستقيم يقطع المستوى

✓ إذا عوضنا المستقيم d بالمستوي P وكانت علاقة محققة

$5 = 5$

$0 = 0$

المستقيم محتوى بالمستوى

إذا عوضنا المستقيم d بالمستوي P وكانت العلاقة غير محققة

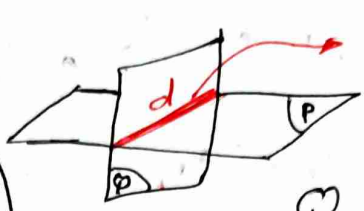
$8 = 2$

$4 = -6$

المستقيم يوازي المستوى

أ. محمد إدريس

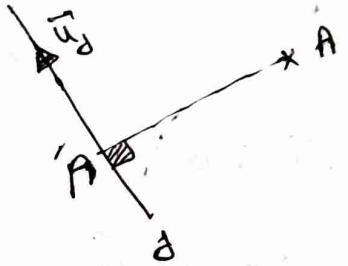
فصل مشترك لمستويين



✓ نحل معادلة P , Q حل مشترك

✓ نعوض مثلا $z=t$ أو $x=t$

بعد نقطة A عن مستقيم d بالفراغ



✓ A' نقطة من d

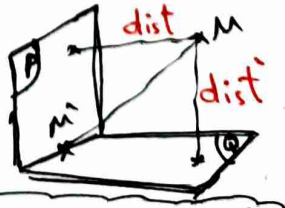
✓ نوجد $\overrightarrow{AA'}$

✓ نطبق $\overrightarrow{AA'}.\vec{u}_d = 0$

✓ نحصل على t ثم نحسب طول AA'

$$AA' = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

حالة تعامد P , Q نطبق فيثاغورس



$$MM'^2 = dist^2 + dist'^2$$

وضع ثلاث مستويات

عدد t =

مستويات تشترك بنقطة وحيدة

محققة $2=2$, $4=4$

المستويات تشترك بفصل مشترك (عدد غير منته من الحلول)

غير محققة $2=6$, $-3=1$

المستويات لا تشترك بأية نقطة

مساحة مثلث

$$S = \frac{\text{الارتفاع} \times \text{القاعدة}}{2}$$

حجم رباعي الوجوه أو الهرم

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$$

S: مساحة القاعدة

h: ارتفاع

أ. محمد إدريس

دراسة ثلاث مستويات

نوجد الفصل المشترك لمستويين

نعوض بالمستوى الثالث ونميز ثلاث حالات

- t = عدد → المستويات تشترك بنقطة وحيدة
- $2=2$، $3=3$ محققة → المستويات تشترك بفصل مشترك
- $-3=1$، $2=4$ غير محققة → المستويات لا تشترك بأي نقطة

الجداء السلمي

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta \quad (1)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2 \quad (2)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right] \quad (3)$$

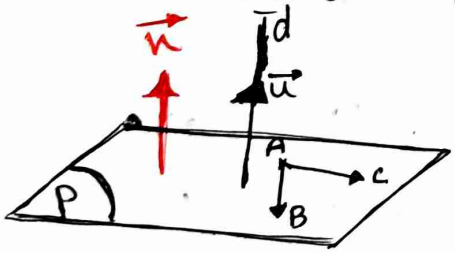
أ. محمد إدريس

④ ارتباط خطي

- $\theta = 0$ → الحالة واحدة
  - $\cos 0 = 1$
  - $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$
- الحالتين معاكستين
  - $\theta = \pi$
  - $\cos\pi = -1$
  - $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

إثبات أن مستقيم لعامد مستوي

نثبت أنه عمودي على مستقيمين غير مرتبطين خطيا بالمستوى

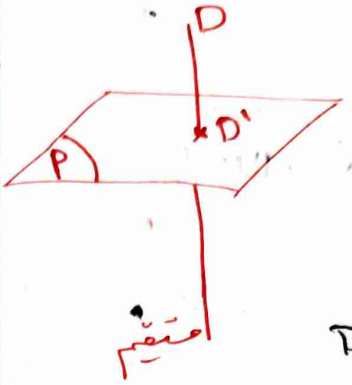


$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

نثبت أن $\vec{u}$ شعاع توجيه المستقيم مرتبط خطيا مع الناظم $\vec{n}$

إيجاد D' مسقط قائم لـ D على مستوى



تعويض المستقيم بالمستوي ← نحصل على نقطة التقاطع D'

إيجاد مسقط قائم لنقطة على مستوى P

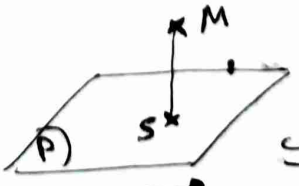
نوجد معادلة المستوي P

نوجد معادلات المستقيم

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

نعوض المستقيم بالمستوي ونوجد نقطة التقاطع

إثبات أن S مسقط M على المستوي P



$S \in P$ ← نعوض S بالمستوي

$\overrightarrow{SM}$ ← نثبت أن الشعاع عمودي على المستوي

مركز الأبعاد المتناسبة

① $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$

M م.أ.م : $(A, 1-t)$ (B, t)

② $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

M م.أ.م : $(A, 1-\alpha-\beta)$ ، (C, β) ، (B, α)

③ I منتصف AB

$(I, 2)$ م.أ.م لـ $(A, 1)$ ، $(B, 1)$

④ G مركز ثقل المثلث ABC

$(G, 3)$ م.أ.م لـ $(A, 1)$ ، $(B, 1)$ ، $(C, 1)$

⑤

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

أ. محمد إدريس

ملاحظة هامة

① $MG = MH$ تمثل مستوي محوري للقطعة GH.

② $MG = k$ ثابت — تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها k

③ $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ تمثل مستوي ما بالنقطة G ويقبل $\overrightarrow{AB}$ ناظماً عليه

④ $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$ تمثل كرة قطرها GH

ملاحظة

$|f(x) - \varepsilon| < r$ ⟺ $]a, b[$

$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ مركز المجال

$r = b - a$ نصف قطر المجال

عقدية

① الشكل الجبري $z = x + iy$

x حقيقي — y تخيلي

المرافق $\bar{z} = x - iy$

② الشكل المثلثي

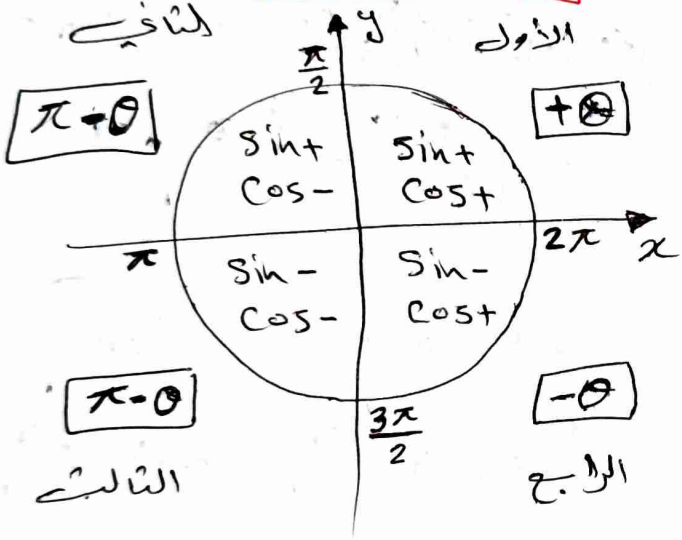
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

"طويلة وهي موجبة دوما"

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$



③ الشكل الأسي

$z = r \cdot e^{i\theta}$

المرافق $\bar{z} = r \cdot e^{-i\theta}$

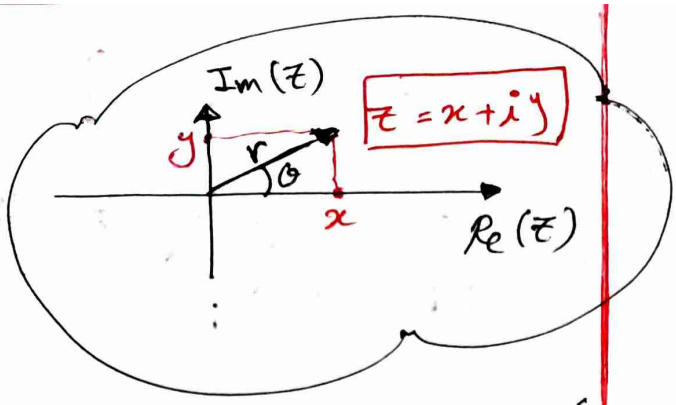
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = +i$ — $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

$e^{2\pi i} = 1$ — $e^{i\pi} = -1$

$e^{i0} = 1$

أ. محمد إدريس



علاقة أويلر

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

دستور دوموافر

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

جذور وقسمة عددين عقديين

$$z_1 = r_1 \cdot e^{i\theta_1} \qquad z_2 = r_2 \cdot e^{i\theta_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$ قسمة

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$ جذاء

$$i^2 = -1 \qquad \sqrt{-1} = i$$

$$|z| = 1 \Rightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$$

العدد مرفق مرفقه يساوي مربع الطويلة

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z|^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

يكون z حقيقي

إذا كان القسم التخيلي معدوم

$Im = 0$

أي $z = \overline{z}$ مرفقه يساويه

يكون z تخيلي بحت

إذا انعدم الجزء الحقيقي $Re = 0$

أي $z = -\overline{z}$ مرفقه عكسه

يتساوى عددان عقديان عندما

يتساوى القسم الحقيقي مع الحقيقي

والتخيلي مع التخيلي

$\frac{z_1}{z_2}$ ضرب الكسر بمرافق المقام

أ. محمد إدريس

التقريب التآلفي

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h$$

مثال: أوجد $f(2,3)$

$$f(2+0,3) = f(2) + f'(2) \cdot (0,3)$$

a h

أوجد $f(-1,4)$

$a = -1$ $\quad$ $h = -0,4$

$$f(-1-0,4) = f(-1) + f'(-1) \cdot (-0,4)$$

دساتير أويلر

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cdot \cos\theta$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \cdot \sin\theta$$

خاصية 1: إيجاد الجذر التربيعي

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$x^2 - y^2 = a \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = r \quad (2)$$

$$2x \cdot y = b \quad (3)$$

نجمع الأولى والثانية ونعوض بالثالثة.

---

	0 (2π)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sin	1	0	-1
cos	0	-1	0

✓ الدوران

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

الصورة — المركز — الأصل — المركز

✓ التحاكي

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

الصورة — المركز — نسبة التحاكي — الأصل — المركز

✓ الإنسحاب

$$z' = z + \omega$$

الصورة — الأصل — شعاع الإنسحاب

✓ التناظر المركزي

$$z' - \omega = -(z - \omega)$$

الصورة — المركز — الأصل — المركز

أ. محمد إدريس

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

✓ النقطة A تمثل بعدد عقدي

$$z_A = x_A + i\,y_A$$

✓ النقطة B تمثل بعدد عقدي

$$z_B = x_B + i\,y_B$$

✓ العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)i$$

✓ I منتصف القطعة [AB]

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

✓ S مركز ثقل المثلث ABC

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

✓ G مركز أبعاد متناسبة للنقاط (A,α) (B,β) (C,γ)

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

✓ الزاوية بين شعاعين

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$$

✓ إذا كان ناتج $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

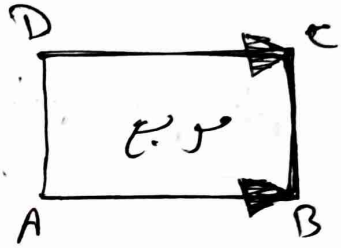
- حقيقي
  - لا يوجد فيه i
  - ⇐ الشعاعان مرتبطان خطيا
  - ⇐ والنقاط تقع على استقامة واحدة
- تخيلي بحت
  - فيه i
  - ⇐ متعامدان الشعاعان

أ. محمد إدريس

معرفة طبيعة مجموعة

$z = x + iy$

- درجة أولى ← مستقيم
- درجة ثانية : إتمام إلى مربع كامل ← دائرة
- $y = \frac{c}{x}$ ← قطع زائد



$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$c - d = b - a$

✓ العدد زائد مرافقه ضعف الجزء الحقيقي

$z + \overline{z} = 2x$

✓ العدد ناقص مرافقه ضعف الجزء التخيلي

$z - \overline{z} = 2yi$

✓ المسافة بين A و B

$AB = |z_B - z_A|$

$i^0 = 1$ ، $i^1 = i$ ، $i^2 = -1$ ، $i^3 = -i$

$i^4 = 1$ ، $i^5 = i$ ، $i^6 = -1$ ، $i^7 = -i$ ، $i^8 = 1$

لإثبات أن z حقيقي

- $\arg z = 0$
- $\arg z = \pi$
- $Im(z) = 0$ أو قسم تخيلي
- $\overline{z} = z$

لإثبات أن z تخيلي بحت

- $\arg z = \frac{-\pi}{2}$
- $\arg z = \frac{\pi}{2}$
- $\overline{z} = -z$
- $Re(z) = 0$ أو قسم الجزء الحقيقي

✓ مجموع الجذرين $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$

✓ جداء الجذرين $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$

أ. محمد إدريس

$$\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_M}{z_A - z_M}\right)$$

✓ معادلة دائرة مركزها ω ونصف قطرها r

$$|z-\omega| = r$$

- z: عدد عقدي
- ω: المركز (عدد عقدي)
- r: نصف القطر

✓ مجموعة نقط M تحقق $MA = MB$ هي

$$|z-a| = |z-b|$$

✓ إثبات ارتباط خطي لثلاث نقط (وقوع ثلاث نقط في استقامة واحدة)

$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = Z$ عدد حقيقي ←

$$\arg(z) = 0$$

$$\arg(z) = \pi$$

✓ إثبات تعامد مستقيمين

(إثبات أن المثلث قائم)

$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = Z$ عدد تخيلي ←

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg(z) = \frac{3\pi}{2}$$

✓ التناظر المحوري

- محور ox: $z' = \overline{z}$
- محور oy: $z' = -\overline{z}$

$$-\overline{z} = -Re(z) + i\,Im(z)$$

أ. محمد إدريس

وضع نسبي لمستقيم وكرة

نعوض المستقيم لمعادلة الكرة

نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالدالة Δ

وعلى 3 حالات ت

- $\Delta < 0$ ← مستحيلة الحل ← المستقيم خارج الكرة ولا يقطع
- $\Delta = 0$ ← حل وحيد ← المستقيم مماس للكرة بنقطة ← نحصل على النقطة بتعويض الحل بالمستقيم
- $\Delta > 0$ ← يوجد حلين ← ومنه المستقيم يقطع الكرة بنقطتين مختلفتين ← نحصل على النقطتين بتعويض الحلين بالمستقيم

استخدام مركز الأبعاد المتناسبة

- إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة
  - يجب أن نثبت أن نقطة هي مركز أبعاد للنقطتين الأخريتين
- إثبات وقوع أربعة نقاط بمستو واحد
  - يجب أن نثبت أن نقطة مركز أبعاد للنقاط الثلاث الأخرى
- إثبات تقاطع مستقيمات بنقطة
  - نثبت وجود مركز أبعاد مشترك بين نقطتين من كل مستقيم

مجموعة نقاط

- $\|\vec{MA}\| = k$ ← k ثابت const ← تمثل كرة مركزها A وطول نصف قطرها $R = k$
- $\|\vec{MA}\| = \|\vec{AB}\|$ ← كرة مركزها A وطول نصف قطرها $R = AB$
- $\|\vec{MA}\| = \|\vec{MB}\|$ ← تمثل مستوي محوري للقطعة AB

مستويان P, Q

- متعامدان ← $\vec{n}_P \perp \vec{n}_Q$ ⇔ $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$
- متقاطعان ← $\vec{n}_P, \vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطيا
- متوازيان ← $\vec{n}_R, \vec{n}_P$ مرتبطين خطيا

أ. محمد إدريس

خواص هامة

① $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

② $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

③ $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \times \overline{w}$

④ $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

⑤ $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

⑥ $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

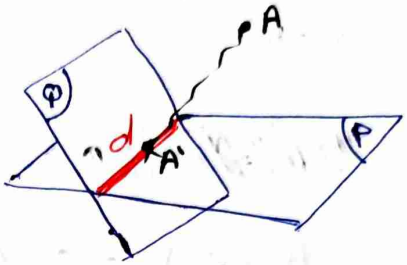
⑦ $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$

⑧ $z - \overline{z} = 2i\,Im(z)$

أ. محمد إدريس

بعد نقطة A عن مستقيم d بالفراغ

بعد نقطة A عن فصل مشترك d لمستويين P، Q



① نوجد معادلة المستقيم d (الفصل المشترك)

② نوجد معادلة مستوي S مار من A وعمودي على d

$\vec{u_d} = \vec{n_S}$

② نقوض المستقيم بالمستوي S فنحصل على t ثم نقوض t بالمستقيم d فنحصل على A' نقطة تقاطع d مع S

③ نوجد المسافة AA' وهو البعد

إيجاد نقطة تقاطع ثلاث مستويات

- نوجد فصل مشترك لمستويين منهما
- نوجد نقطة تقاطع الفصل المشترك مع المستوي الثالث

أو نستخدم طريقة غاوس

احتمالات وتحليل توافقي

السحب معاً

قارة

لا يوجد أهمية للترتيب

- نستخدم التوافيق $\frac{(\ )}{(\ )}$
- المقام يكون توافيق
- لا يوجد عكس

يعني (2,1) نفسك (1,2)

السحب على التتالي دون إعادة

يوجد أهمية للترتيب

- نستخدم مبدأ الأساسي بالعد

$\frac{}{4} \times \frac{}{3} \times \frac{}{2}$

- المقام يتناقص
- يوجد عكس

(2,1) مختلفة عن (1,2)

السحب على التتالي مع إعادة

يوجد أهمية للترتيب

- مبدأ أساسي بالعد

$\frac{}{4} \times \frac{}{4} \times \frac{}{4}$

- المقام لا يتناقص
- يوجد عكس

(2,1) مختلفة عن (1,2)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

بإمكانك النشر أفقياً

مكون الحد العام

$$T_r = \binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot b^r$$

الاحتمال الشرطي

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

أ. محمد إدريس

قانون برنولي

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

نستخدم تجربة برنولي عندما نقوم باختبار معين

- عدد مرات تكرار التجربة n
- p احتمال وقوع حدث محدد
- q احتمال عدم وقوعه

$$q = 1 - p$$

توقع: $E(x) = n \cdot p$

تباين: $V = n \cdot p \cdot q$

انحراف: $\sigma = \sqrt{V}$

الترتيب

$$P_n^r$$

عند اختيار جزء من مجموعة مرتبة ترتيبها على أماكن عددها يساوي عدد هذا الجزء

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

مثال $P_5^2 = 5 \times 4 = 20$

العاملي

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$6! = 6 \times 5!$$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

مثال

$$\frac{7!}{6!} = \frac{7 \times 6!}{6!} = 7$$

متى نستخدم العاملي؟

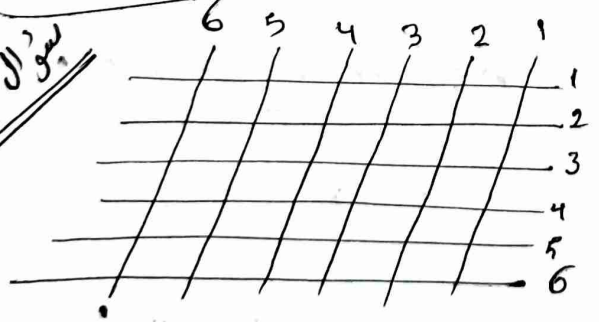
عند تبديل عدد من مجموعة بين بعضها البعض

الاستقلال الإحصائي

لمتحولين عشوائيين X, Y

$$P = P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

سؤال مهم



عدد حالات التوازيات الممكنة

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2}$$

الحل

$$= 15 \cdot 15 = 225$$

أ. محمد إدريس

سؤال هام

① ماعدد المثلثات ؟

$\binom{6}{3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$ مثلث

② ماعدد المثلثات القائمة ؟

$3 \times \binom{4}{1} = 3\times4 = 12$

3 ← عدد الأوتار

$\binom{4}{1}$ ← اختيار رأس من 4 رؤوس لأن في رأسين للوتر

(يكون المثلث قائم إذا كان أحد أضلاعه وتر للدائرة المارة برؤوسه)

---

③ ماعدد المثلثات المنفرجة ؟

6

يكون منفرج إذا كان أحد رؤوسه رأس في المستطيل

أ. محمد إدريس

Ω فضاء العينة ← (مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية)

الحدث ← (مجموعة جزئية من فضاء العينة Ω)

الحدث الأكيد Ω

الحدث المستحيل ∅

الحدث البسيط ← (مجموعة جزئية مكونة من عنصر واحد من فضاء العينة)

الحدث المعاكس (المتمم) B'

$P(B) = \frac{2}{5} \Rightarrow P(B') = \frac{3}{5}$

B' يقع عندما لا يقع B

$B \cap B' = \emptyset$

$B \cup B' = \Omega$

الحدث $B \cap C$ ← C و B يقع الحدثان معاً

الحدث $A \cup B$ ← A أو B يقع أحد الحدثين على الأقل

الاحتمال الشرطي

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

احتمال الحدث A علما أن B متحقق

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

حدثان مستقلان

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

حدثان متنافيان

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

التوقع: $E(x) = \sum x \cdot p$

التباين: $V(x) = \sum x^2 \cdot p - E^2(x)$

الانحراف: $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

الوضع النسبي

تابعة أسية

$f(x) - y_\Delta = e^x > 0$ ✓

Δ فوق C

$f(x) - y_\Delta = e^{-x} > 0$ ✓

Δ فوق C

$f(x) - y_\Delta = x \cdot e^x$ ✓

$-\infty$		0		$+\infty$
	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
	Δ تحت C		Δ فوق C	

$f(x) - y_\Delta = \frac{x+1}{e^x}$ ✓

$-\infty$		-1		$+\infty$
	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
	Δ تحت C		Δ فوق C	

أ. محمد إدريس

التابع اللوغاريتمي

$L(1)=0$

✓ $f(x)-y_\Delta = \dfrac{-\ln x}{x+1}$

x	0		1		$+\infty$
	$+$	$+$	0	$-$	$-$
	فوق C		تحت C		

لوغاريتم العدد بين 0 و 1 هي سالبة

⊕ = سالب × سالب

✓ $f(x)-y_\Delta = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

$]0,+\infty[$

$\dfrac{x}{x+1} < 1$

$\Rightarrow \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) < 0$

C تحت Δ

تابع كسري

✓

$f(x)-y_\Delta = \dfrac{x}{x^2+1}$: $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
	$-$	$-$	0	$+$	$+$
	تحت C			فوق C	

تابع جذري

$f(x)-y_\Delta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} > 0$

C فوق Δ

$\sqrt{x^2+1} > x$

تحليل توافقي

منشور $T_r = \binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot b^r$

إثبات صحة علاقة نستخدم:

$\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

$A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

ملاحظة هامة

$\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$

إما $p=q$

أو $p+q=n$

أ. محمد إدريس

الإحتمالات

- سحب مع إعادة
  - المبدأ الأساسي بالعد
  - عدد الحالات المطلوبة / العدد الكلي
- سحب دون إعادة
  - ترتيب P_n^r — $P_6^2 = 6 \times 5 = 30$
  - توافيق — سحب معاً — $\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 5$

الإحتمالات

- بـ نولي

$$p(x=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

p نجاح — q فشل

$$q = 1 - p$$

n عدد مرات التجربة

k العدد المطلوب

$$E(x) = n \cdot p \quad \text{توقع}$$

$$V(x) = n \cdot p \cdot q \quad \text{تباين}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \quad \text{انحراف}$$

$$E(x) = \sum x \cdot p \quad \text{توقع}$$

$$V(x) = \sum x^2 \cdot p - E^2(x) \quad \text{تباين}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \quad \text{انحراف}$$

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

"ما احتمال A علما أن B قد وقع"

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

الحدث المتمم $p(A') = 1 - p(A)$

الاستقلال الإحتمالي

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

أ. محمد إدريس

الأعداد العقدية

شكل جبري: $z = x + iy$

شكل مثلثي: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

شكل أسي: $z = r \cdot e^{i\theta}$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$z^n = r^n \cdot e^{in\theta}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

أ. محمد إدريس

صيغ أويلر

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

إيجاد الجذر التربيعي

$$z = \sqrt{a + ib}$$

$$x^2 - y^2 = a$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$2x \cdot y = b$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = +i \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

$$e^{i0} = 1 \qquad e^{i\pi} = -1$$

$$e^{2\pi i} = +1$$

التناظر المركزي

$$z' - \omega = -(z - \omega)$$

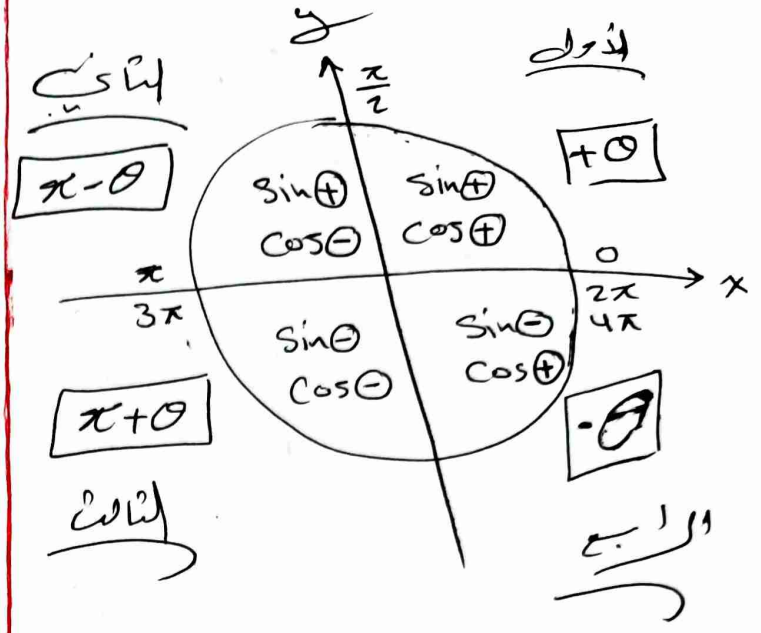
الصورة — المركز — الأصل — المركز

طبيعة مجموعة

$z = x + iy$

- درجة أولى: مستقيم
- درجة ثانية: إتمام إلى مربع كامل ← دائرة
- $y = \frac{c}{x}$ ← قطع زائد

أ. محمد إدريس



الدوران

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

الصورة — المركز — الزاوية — الأصل — المركز

التحاكي

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

الصورة — المركز — نسبة التحاكي — الأصل — المركز

الانسحاب

$$z' = z + \omega$$

الصورة — الأصل — متجه الانسحاب

الأشعة

AB قطعة مستقيمة ✓

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

G مركز ثقل مثلث ABC ✓

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}, \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

$\overrightarrow{AB}$ مركبات ✓

$$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$$

AB طول ✓

$$AB=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(B,β) (A,α) ، ρ ، i ، ρ G ✓
(C,γ)

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

معلومة هامة

$\frac{a-b}{c-b}$ تخيلي صرف ← تعامد

$\frac{a-b}{c-b}$ حقيقي ← ارتباط خطي (وقوع نقاط على استقامة واحدة)

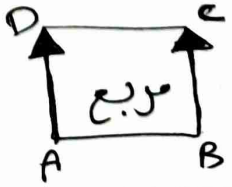
$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

مثلث متساوي الأضلاع

لإثبات حقيقي ← $\overline{z}=z$ مرافق نفسه ← نعدم القسم التخيلي

لإثبات تخيلي ← $\overline{z}=-z$ مرافق عكسه ← نعدم الحقيقي

ABCD مربع



$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$$
$$d-a=c-b$$

✓ معادلة مستقيم d

$$d \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

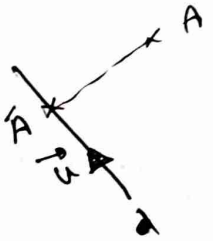
✓ معادلة مستوي

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

✓ بعد نقطة عن مستوي

$$dist(A,P) = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

✓ بعد نقطة عن مستقيم



$$\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0$$

✓ معادلة كرة

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

✓ كرة مركزها A ومرّ من B

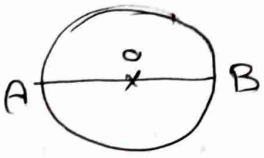
$$R = AB$$

أ. محمد إدريس

✓ كرة مركزها A ومماس لمستوي P

$$\Rightarrow R = dis(A,P)$$

✓ كرة قطرها AB



O مركز الكرة

AB منتصف

$$O\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

$$r = OA$$

وضع مستوي وكرة مركزها A

$$dis(A,P) = R$$

⇐ مستوي يمس الكرة

$$dist(A,P) > R$$

⇐ المستوي يقع خارج الكرة

$$dist(A,P) < R$$

⇐ المستوي يقطع الكرة بدائرة

نصف قطرها

$$r^2 = R^2 - dist^2$$

نصف قطر الدائرة — نصف قطر الكرة

وضع مستويين

$\vec{n_P}$ و $\vec{n_Q}$ مرتبطين خطيا

P يوازي Q

$\vec{n_P}$ و $\vec{n_Q}$ غير مرتبطين خطيا

P يقطع Q

$\vec{n_P} \cdot \vec{n_Q} = 0$

$P \perp Q$ متعامدين

وضع مستقيمين

$\vec{u_\Delta}$ و $\vec{u_d}$ مرتبطين خطيا

d يوازي Δ

d ينطبق على Δ

$\vec{u_\Delta} \cdot \vec{u_d} = 0$

d يعامد Δ

$\vec{u_\Delta}$ و $\vec{u_d}$ غير مرتبطين خطيا

d يقطع Δ

فراغيين

وضع مستقيم d ومستوى P

$\vec{n_P} \cdot \vec{u_d} = 0$

المستقيم يوازي المستوى

$d \parallel P$

$\vec{n_P} \cdot \vec{n_d} \neq 0$

المستقيم d يقطع المستوى P

$\vec{n_P}$ و $\vec{u_d}$ مرتبطين خطيا

المستقيم يعامد المستوى $d \perp P$

لإيجاد نقطة تقاطع مستقيم ومستوى قائم

نعوض المستقيم بالمستوى

الارتباط الخطي لثلاث أشعة

وقوع أربعة نقاط في مستوى

توازي مستقيم مع مستوى

$\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$

إثبات مستقيم يعامد مستوى P

نثبت أنه محمود على متقاطعين غير مرتبطين خطيا

أو نثبت أن $\vec{u_d}$ و $\vec{n_P}$ مرتبطين خطيا

دراسة تلاثة مستويات

نوجد فاصل مشترك لمستويين ثم نعوض هذا الفاصل بالمستوى الثالث

$t = \text{عدد}$

المستويات تشترك بنقطة

محققة $0 = 0$ $a = 2$

المستويات تشترك بفاصل مشترك

غير محققة $5 \neq 6$ $a \neq 0$

المستويات لا تشترك في أي نقطة

أ. محمد إدريس

معرفة طبيعة مجموعة نقاط

نتمم إلى مربع كامل

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=K$$

- $K>0$ ⇐ كرة
- $K=0$ ⇐ نقطة
- $K<0$ ⇐ مجموعة خالية

الجداء السلمي

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

مراكز الأبعاد المتناسبة

$\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AB}$ ✓

$(A,1-t)$, (B,t) م.أ.م M

$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ ✓

(B,α) و (C,β) م.أ.م M.

$(A,1-\alpha-\beta)$

أ. محمد إدريس

I منتصف AB ✓

I م.أ.م لـ $(A,1)$, $(B,1)$

G مركز ثقل مثلث ABC ✓

G م.أ.م لـ $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$

خاصية

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

سؤال ما هو آحاد وعشرات 11^{11}

$$11^{11}=(1+10)^{11}=\binom{11}{0}\cdot(1)^{11}\cdot(10)^0+\binom{11}{1}\cdot(1)^{10}\cdot(10)^1+\binom{11}{2}\cdot(1)^9\cdot(10)^2+\binom{11}{3}\cdot(1)^8\cdot(10)^3+\dots$$

(الحل: 1 , 11 , 55 , 165 , ... ; 1 , 10 , 100 , 1000 , ...)

$$=1+110+5500+165000+\dots$$

$$\begin{array}{r}1\\110\\5500\\165000\\+\\\hline 170611\end{array}$$

آحاد 1

عشرات 1

مئات 6

حل آخر

$12^{11}=(2+10)^{11}$

$2^7=(1+2)^7$

أنواع السحب

- على التتالي مع إعادة
  - مبدأ أساسي بالعد
- على التتالي دون إعادة
  - مبدأ أساسي أو ترتيب P_n^r
- السحب معاً
  - نستخدم توافيق $\binom{n}{r}$

ملاحظة هامة

متى نضرب بعدد التباديل ؟

عند السحب
- مع إعادة
- أو
- دون إعادة

⊕⊖ ×2 ⟵ ⊖⊕ ، ⊕⊖

⊕⊕⊖ ×3 ⟵ ⊕⊕⊖ ، ⊕⊖⊕ ، ⊖⊕⊕

⊕⊖○ ×3! ⟵ ⊕○⊖ ، ⊕⊖○ ، ○⊕⊖ ، ○⊖⊕ ، ⊖⊕○ ، ⊖○⊕

قانون دومرغان

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

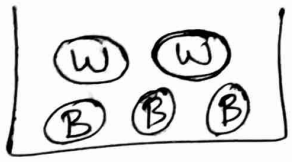
$$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$$

ملاحظة هامة

- عدد المثلثات $\binom{n}{3}$
- عدد المضلعات الرباعية $\binom{n}{4}$
- عدد القطع المتقيمة $\binom{n}{2}$
- عدد نقاط تقاطع الأقطار $\binom{n}{4} + n$
- عدد الأقطار $\binom{n}{2} - n$
- عدد الأضلاع P_n^2

أ. محمد إدريس

سؤال هام



صندوق يحوي ثلاث كرات سوداء B
وكريتين بيضاء W.

X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة

نسحب كريتين على التتالي مع إعادة

عيّن قيم المتحول X واكتب قانون الإحتمالي.

الحل

$X = \{0, 1, 2\}$

$p(X=0) = \left(\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{9}{25}$

$p(X=1) = \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}\right) \times 2 = \frac{12}{25}$

$p(X=2) = \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{25}$

x	0	1	2
p	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

أ. محمد إدريس

سؤال هام

صندوق يحوي ثلاث كرات سوداء B
وكريتين بيضاء W

X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة

نسحب كريتين على التتالي دون إعادة

عيّن قيم X واكتب قانون الإحتمالي

الحل

$X = \{0, 1, 2\}$

$p(X=0) = \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}\right) = \frac{6}{20}$

$p(X=1) = \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}\right) \times 2 = \frac{12}{20}$

$p(X=2) = \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{20}$

x	0	1	2
p	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{2}{20}$

أ. محمد إدريس

ملاحظة هامة

سحب مع إعادة

نضع الجدول كاملاً

سحب معاً

نحذف القطع الرئيس وما تحت

سحب دون إعادة

نحذف القطع الرئيس فقط

سؤال هام

٦ بطاقات مرقمة

1, 2, 3, 4, 5, 6

نسحب بطاقتين دون إعادة

X متحول عشوائي يدل على أصغر

رقمي البطاقتين المسحوبتين

حيث قيم X ، أكتب قانون

الاحتمال

أصغر العددين	1	2	3	4	5	6
1		1	1	1	1	1
2	1		2	2	2	2
3	1	2		3	3	3
4	1	2	3		4	4
5	1	2	3	4		5
6	1	2	3	4	5	

x	1	2	3	4	5
P	$\frac{10}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

نفس السؤال بس السحب معاً

سحب بطاقتين معاً

	1	2	3	4	5	6
1		1	1	1	1	1
2			2	2	2	2
3				3	3	3
4					4	4
5						5
6						

x	1	2	3	4	5
P	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

أ. محمد إدريس

أ. محمد إدريس