السؤال الأوّل : جد نهاية كل من التوابع التالية عند a المُعطاة :

1) $f(x)=\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-5x^2+3x+9}$; $a=3$

2) $f(x)=\frac{\pi-\pi\cos(x)}{\sqrt{\pi^2+x^2}-\pi}$; $a=0\,,+\infty$

السؤال الثاني :

i) ليكن التابع f المُعرَّف على $R\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$. **المطلوب :**

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

2) أوجد مجالاً I يحقّق الشرط إذا انتمى x إلى المجال I ، انتمى $f(x)$ إلى المجال $]2.8\,,3.2[$.

ii) في حالة $x>0$ أثبت أنَّ $\frac{2-x^3}{3x}\geq\frac{2-x^2E(x)}{3x}>\frac{2-x^3+x^2}{3x}$ ، واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-x^2E(x)}{3x}$.

X-Math πac

السؤال الثالث : ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرَّف على R وفق : $f(x)=\sqrt{9x^2-12x+5}$. **المطلوب :**

1) اكتب $9x^2-12x+5$ بالشكل القانوني .

2) ادرس نهاية التابع h المُعرَّف وفق $h(x)=f(x)-\sqrt{(3x-2)^2}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

3) استنتج أنَّ الخط C يقبل مقاربين مائلين Δ_1 وَ Δ_2 يُطلب إيجاد معادلتيهما .

4) أثبت أنَّ الخط C يقع فوق كلّ من هذين المقاربين .

السؤال الرابع : f التابع المُعرَّف على R وفق : $f(x)=\begin{cases}\frac{-2x^2+2x+2\sin^2(2x)}{x} & ; x\neq 0\\ 2 & ; x=0\end{cases}$. **المطلوب :**

1) هل f مستمرّاً على R ؟ علّل .

2) تَحقّق أنَّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=-2x+2$ مقارب مائل للتابع في جوار $-\infty$ ، وادرس الوضع النسبي بينهما .

السؤال الخامس : ليكن التابع f المُعرَّف على R وفق : $f(x)=-x-\cos(x)$. **المطلوب :**

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنَّ f متناقص .

3) أثبت أنَّ للمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد هو الصفر .

السؤال السادس : ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرَّف على $R\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x)=\frac{x^3-3x+2}{(x+1)^2}$. **المطلوب :**

1) احسب نهاية التابع عند أطراف مجموعة تعريفه ، واكتب معادلة المقارب الشاقولي للخط C .

2) a . اكتب التابع بالشكل $f(x)=x+\alpha+\frac{\beta}{(x+1)^2}$ حيث α و β أعداد حقيقية يُطلب تعيينها .

b . استنتج Δ معادلة المقارب المائل للخط C ، وادرس الوضع النسبي بينهما .

3) تَحقَّق أنَّ : $f'(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+4x+7)}{(x+1)^4}$ ، واستنتج جدولاً بتغيّرات التابع f .

4) في معلم متجانس ارسم C مع مقارباته ، واستنتج رسم الخط C_g حيث : $g(x)=\frac{x^3-3x-2}{(x-1)^2}$.

5) ناقش بيانياً بحسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $x^3-mx^2-x(2m+3)-m+2=0$.

------- انتهت الأسئلة -------

السؤال الأول:

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-5x^2+3x+9}$; $a=3$

تحليل المقام: نقسم المقام على $x-3$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-2x-3 \\ \hline x-3 & x^3-5x^2+3x+9 \\ & \mp x^3 \pm 3x^2 \\ \hline & -2x^2+3x+9 \\ & \pm 2x^2 \mp 6x \\ \hline & -3x+9 \\ & \pm 3x \mp 9 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

$$x^3-5x^2+3x+9=(x-3)(x^2-2x-3)$$
$$=(x-3)(x-3)(x+1)$$
$$=(x-3)^2(x+1)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{x+6}-3}{(x-3)^2(x+1)}\times\frac{(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$=\frac{x+6-9}{(x-3)^2(x+1)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$=\frac{x-3}{(x-3)^2(x+1)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$=\frac{1}{(x-3)(x+1)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

2) $f(x)=\dfrac{\pi-\pi\cos x}{\sqrt{\pi^2+x^2}-\pi}$; $a=0,+\infty$

$$f(x)=\frac{\pi(1-\cos x)}{(\sqrt{\pi^2+x^2}-\pi)}\times\frac{(\sqrt{\pi^2+x^2}+\pi)}{(\sqrt{\pi^2+x^2}+\pi)}$$

$$=\frac{\pi\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{\pi^2+x^2}+\pi\right)}{\pi^2+x^2-\pi^2}$$

$$=2\pi\left(\sqrt{\pi^2+x^2}+\pi\right)\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\,\frac{x^2}{4}}$$

$$=\frac{2\pi}{4}\left(\sqrt{\pi^2+x^2}+\pi\right)\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\pi^2+x^2}+\pi\right)\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{\pi}{2}(2\pi)(1)^2=\pi^2$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$: حيث

$$-1\leq\cos x\leq 1$$

$$\pi\geq-\pi\cos x\geq-\pi$$

$2\pi \ge \pi-\pi\cos x \ge 0$

نقسم على $\sqrt{\pi^2+x^2}-\pi>0$ ⇐

$\frac{2\pi}{\sqrt{\pi^2+x^2}-\pi} \ge \frac{\pi-\pi\cos x}{\sqrt{\pi^2+x^2}-\pi} \ge 0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{\pi^2+x^2}-\pi}=0$ ⇒

حسب مبرهنة الإحاطة تكون:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

السؤال الثاني:

i) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}\ ;\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$

2) $f(x)=\frac{x+1-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$

$2,8<f(x)<3,2$

⇐ $2,8<1-\frac{2}{x+1}<3,2$

⇐ $1,8<-\frac{2}{x+1}<2,2$

⇒ $\frac{10}{18}>\frac{x+1}{-2}>\frac{10}{22}$

⇒ $-\frac{10}{9}<x+1<-\frac{10}{11}$

⇒ $-\frac{19}{9}<x<-\frac{21}{11}$

⇒ $I=\left]-\frac{19}{9},-\frac{21}{11}\right[$

ii) $x-1<E(x)\le x$

نضرب بـ $-x^2<0$:

$-x^3+x^2>-x^2E(x)\ge -x^3$

⇒ $2-x^3+x^2>2-x^2E(x)\ge 2-x^3$

نقسم على $3x>0$:

$\frac{2-x^3+x^2}{3x}>\frac{2-x^2E(x)}{3x}\ge\frac{2-x^3}{3x}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x^3+x^2}{3x}=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x^3}{3x}=-\infty$

⇐ حسب مبرهنة المقارنة تكون:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x^2E(x)}{3x}=-\infty$

السؤال الثالث :

$f(x)=\sqrt{9x^2-12x+5}$; $D_f=\mathbb{R}$

1) $9x^2-12x+5=9(x^2-\frac{4}{3}x)+5$

$=9(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9})+5$

$=9(x-\frac{2}{3})^2-4+5$

$=(3x-2)^2+1 \Rightarrow$

$9x^2-12x+5=(3x-2)^2+1$

2) $h(x)=f(x)-\sqrt{(3x-2)^2}$

$=\sqrt{(3x-2)^2+1}-\sqrt{(3x-2)^2}$

$=\dfrac{(3x-2)^2+1-(3x-2)^2}{\sqrt{(3x-2)^2+1}+\sqrt{(3x-2)^2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{(3x-2)^2+1}+\sqrt{(3x-2)^2}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$

3) بما أنّ : $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)-\sqrt{(3x-2)^2}=0$

$\sqrt{(3x-2)^2}=|3x-2|=\begin{cases}3x-2 \; ; x\geq\frac{2}{3} \\ -3x+2 \; ; x<\frac{2}{3}\end{cases}$ ⇐

⇐ $\Delta_1: y=3x-2$: مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

$\Delta_2: y=-3x+2$: مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

4) لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق:

$f(x)-y_{\Delta_1}=\sqrt{(3x-2)^2+1}-(3x-2)$

نضع: $\sqrt{(3x-2)^2+1}=3x-2 \; ; x\geq\frac{2}{3}$

$\Rightarrow (3x-2)^2+1=(3x-2)^2 \Rightarrow$

مستحيلة الحل $1=0$

⇐ الفرق من إشارة وحيدة

نأخذ قيمة تجريبية:

$x=1 \Rightarrow f(x)-y_{\Delta_1}=\sqrt{2}-1>0$

⇐ C فوق Δ_1

$f(x)-y_{\Delta_2}=\sqrt{(3x-2)^2+1}-(-3x+2)$

نضع: $\sqrt{(3x-2)^2+1}=(-3x+2) \; ; x<\frac{2}{3}$

$(3x-2)^2+1=(-3x+2)^2 \Rightarrow 1=0$

مستحيلة الحل ⇐ الفرق من إشارة وحيدة ، نأخذ قيمة تجريبية:

$x=0 \Rightarrow f(x)-y_{\Delta_2}=\sqrt{5}-2>0$

⇐ C فوق Δ_2

⇐ C فوق Δ_1 و Δ_2

السؤال الرابع:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x^2+2x+2\sin^2(2x)}{x} & ; x\neq 0\\[2mm] 2 & ; x=0\end{cases}$$

1) حتى يكون f مستمراً على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمراً عند $x=0$ أي:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

$$f(x)=-2x+2+2\cdot\frac{\sin^2(2x)}{4x\cdot x}\times 4x$$

$$f(x)=-2x+2+8x\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0+2+0(1)^2\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=2$$

ولدينا: $f(0)=2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=2\Rightarrow$$

نعم f مستمر على $\mathbb{R}$.

2) $f(x)-y_\Delta=2\cdot\dfrac{\sin^2 2x}{x}$

$$0\leq \sin^2(2x)\leq 1$$

نقسم على $x<0$ (لأن $x\to-\infty$)

$$\Rightarrow 0\geq \frac{\sin^2(2x)}{x}\geq\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow 0\geq 2\cdot\frac{\sin^2(2x)}{x}\geq\frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow 0\geq f(x)-y_\Delta\geq\frac{2}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0\Rightarrow$$

حسب مبرهنة الإحاطة، نكون:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$\Leftarrow \Delta: y=-2x+2$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$.

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق:

$$f(x)-y_\Delta=2\cdot\frac{\sin^2(2x)}{x}$$

$\sin^2(2x)\geq 0$

عندما $x>0 \Leftarrow C$ فوق المقارب Δ

عندما $x<0 \Leftarrow C$ تحت المقارب Δ

و C يقطع المقارب Δ في النقاط:

$\left(\frac{\pi}{2}k\,,\,-\pi k+2\right); k\in\mathbb{Z}$ و $(0,2)$

السؤال الخامس:

$f(x) = -x - \cos(x)$

1) $-1 \leq \cos x \leq 1$

$\Leftarrow 1 \geq -\cos x \geq -1$

$\Leftarrow -x+1 \geq -x-\cos x \geq -1-x$

$\Leftarrow -x+1 \geq f(x) \geq -1-x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (-1-x) = +\infty \Rightarrow$

حسب مبرهنة المقارنة تكون:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (-x+1) = -\infty \Rightarrow$

حسب مبرهنة المقارنة تكون:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) $f'(x) = -1 + \sin x$

لدينا: $\sin x \in [-1,1] \Leftarrow$

$-1+\sin x \in [-2,0] \leq 0$

$\Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow$

f متناقص

3) بما أن f مستمر ومتناقص على $\mathbb{R}$

$-1 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \Rightarrow$

للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 - \cos(0)$

$f(0) = -1$

$\Leftarrow$ هنا الحل الوحيد هو الصفر.

السؤال السادس:

$f(x) = \dfrac{x^3-3x+2}{(x+1)^2} \; ; \; D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2+2x+1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$

$x = -1$ مقارب شاقولي

2) a.

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline x^2+2x+1 & x^3-3x+2 \\ & \mp x^3 \mp 2x^2 \mp x \\ \hline & -2x^2-4x+2 \\ & \pm 2x^2 \pm 4x \pm 2 \\ \hline & 4 \end{array}$$

$f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{(x+1)^2}$

$$f(x) = x - 2 + \frac{4}{(x+1)^2}$$

$\Rightarrow \alpha = -2$ و $\beta = 4$

b. نلاحظ: $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{4}{(x+1)^2} = 0$

$\Leftarrow \Delta : y = x - 2$ مقارب مائل لـ C في الجوار $-\infty$ و $+\infty$

لأن: $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) - y_\Delta = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{4}{(x+1)^2} = 0$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق:

$f(x) - y_\Delta = \frac{4}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow$

C فوق Δ دوماً

3) $$f'(x) = \frac{(3x^2-3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3-3x+2)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1)\left[(3x^2-3)(x+1) - 2x^3+6x-4\right]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1)\left[3x^3+3x^2-3x-3-2x^3+6x-4\right]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1)(x^3+3x^2+3x-7)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)(x^2+4x+7)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x^2+4x+7)}{(x+1)^4}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ مرفوض

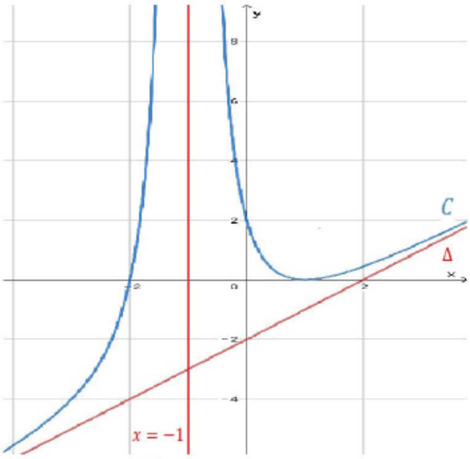
$x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$

$x^2+4x+7 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 28 = -12 < 0$

مستحيلة الحل: $x^2+4x+7 > 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

(4



$$g(x) = \frac{x^3-3x-2}{(x-1)^2}$$

$$g(-x) = \frac{-x^3+3x-2}{(-x-1)^2} = -\frac{x^3-3x+2}{(x+1)^2}$$

$= -f(x)$

كل (x,y) تصبح $(-x,-y)$ ⇐

C_g نظير C_f بالنسبة للمبدأ

(5 $x^3 - mx^2 - 2mx - 3x - m + 2 = 0$

$x^3 - 3x + 2 = mx^2 + 2mx + m$

$x^3 - 3x + 2 = m(x+1)^2 \Rightarrow \frac{x^3-3x+2}{(x+1)^2} = m$

$\Rightarrow f(x) = m \Rightarrow$

عندما $m \in]-\infty, 0[$ ⇐ للمعادلة حل وحيد

عندما $m = 0$ ⇐ للمعادلة حلين

عندما $m \in]0, +\infty[$ ⇐ للمعادلة 3 حلول

تدقيق : إيناس دللي