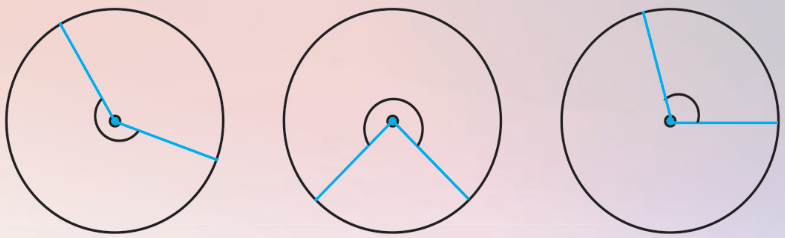
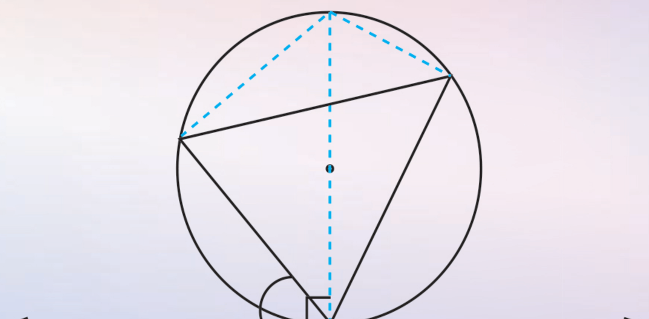
الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف التاسع من مرحلة التعليم الأساسي

(الجزء الثاني)





١٤٣٥هـ/ ٢٠١٤م

إيماناً منا بأهمية المعرفة ومواكبة لعصر التكنولوجيا تتشرف الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني بخدمة أبنائنا الطلاب والطالبات في ربوع الوطن الحبيب بهذا العمل آملين أن ينال رضا الجميع

فكرة وإعداد

أ. عادل علي عبدالله البقع

مساعد

أ. زينب محمود السمان

مراجعة وتدقيق

أ. محمد شرف الدين

أ. خديجة عبدالهادي

أ. رقية الأهدل

متابعة

أمين الإدريسي

إشراف مدير عام

الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني

أ. محمد عبده الصرمي

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف التاسع من مرحلة التعليم الأساسي

(الجزء الثاني)

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش (رئيساً).

د. أمة الإله علي حُمد الحوري.	د. محمد عبدالرب محمد بشر.
د. ردمان محمد سعيد.	د. علي شاهر نعمان القرشي.
د. منصور علي صالح عطاء.	د. محمد رشاد الكوري.
أ. مريم عبدالجبار سلمان.	د. عبدالله سلطان عبدالغني الصلاحي.
د. محمد علي مرشد.	أ. سالمين محمد باسلوم.
أ. يحيى بكار مصفر.	أ. ذا النون سعيد طه.
أ. عبدالباري طه حيدر.	أ. مصطفى عبد الواحد العبسي.
أ. عبده أحمد سيف.	أ. جميلة إبراهيم أحمد.
د. علي عبدالواحد.	أ. أحمد سالم باحويرث.

فريق المراجعة:

أ. جميلة إبراهيم الرازحي.	أ/ شرف عثمان الخامري.
أ/ تهاني سعيد الحكيمي.	أ/ مختار حيدر هزاع.

تنسيق: أ / سعيد محمد ناجي الشرعبي.

تدقيق: د/ أمة الإله علي حُمد الحوري.

إشراف: د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

الإخراج الفني

الصف والتصميم : جلال سلطان علي إبراهيم.
إدخال التصويبات : علي عبدالله علي السلفي.

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني.

١٤٣٦هـ / ٢٠١٥م

النشيد الوطني

رددي أيتها الدنيا نشيدي ... رددیه وأعيدي وأعيدي
واذكري في فرحتي كل شهيدِ ... وامنحيه حُللاً مِنْ ضوءِ عيدي

رددي أيتها الدنيا نشيدي
رددي أيتها الدنيا نشيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي ... أنت عهدٌ عالقٌ في كل ذمَّة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس ... اُخْلُدِي خَافِقَةً في كل قِمَّة
أمتي .. أمتي .. اِمنحيني البأس يا مصدر بأسي ... واذْخُرِيني لَكِ يا أكرمَ أمة

عشتُ إيماني وحبِّي أُمميًا
ومسيري فوق دربي عربيا
وسيبقى نبضُ قلبي يمنيا
لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د. عبدالله عبده الحامدي.
د/ صالح ناصر الصوفي.
أ. د/ محمد عبدالله الصوفي.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.
د/ عبدالله علي أبو حورية.
د/ عبدالله لملس.
أ/ منصور علي مقبل.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.
أ. د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.
أ. د/ محمد حاتم المخلافي.

أ/ علي حسين الحيمي.
د/ أحمد علي المعمري.
أ. د/ صالح عوض عرم.
د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ شكيب محمد باجرش.
أ. د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ/ محمد هادي طواف.
أ. د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ/ محمد عبدالله زبارة.
أ/ عبدالله علي إسماعيل.

د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

بسم الله الرحمن الرحيم

تقـــديـــم :

في إطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية.

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات.

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي.

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها.

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية.

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول
وزير التربية والتعليم
رئيس اللجنة العليا للمناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمـة:

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خاتم النبيين ، وآله وصحبه أجمعين .

لقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المناهج التعليمية لمرحلة التعليم الأساسي وفق أسس علمية وتربوية . وبعد كتاب الصف الثامن يأتي كتاب الصف التاسع لمواكبة هذا التطوير .

وفي هذا الكتاب يجد أبناؤنا الطلبة مادة الرياضيات معروضة لهم بأساليب وقوالب جديدة تساعدهم على سرعة الفهم والاستيعاب ، وتسهل لهم التعامل مع المادة وتحفزهم على حبها ، كما تنمي فيهم القدرات التفكيرية وتوسع ثقافتهم العلمية .

إن الكتاب غني بالشرح والأمثلة إلى جانب الأنشطة والتدريبات لكل درس، والتمارين العامة لكل وحدة دراسية ، ولذا على أبنائنا الطلبة بذل أقصى جهودهم والاستفادة من توجيهات المدرسين ، والدراسة المتمعنة للمادة المقدمة وتتبعها بدقة وحل أكبر قدر من التمارين والمسائل ، وهذا من شأنه ترسيخ المعرفة الرياضية في أذهانهم وإكسابهم المهارات الكافية للاستمرار في التعليم .

وفي هذا الكتاب نقدم لأبنائنا الطلبة مادة الرياضيات بأسلوب واضح سهل يتناسب ومستويات الطلبة وقدراتهم وبدقة علمية مع مراعاة جوانبها التربوية، ولذا تضمنت وحدات الكتاب تعاريف رياضية دقيقة ولكنها مبسطة ، واحتوت على برهنة رياضية ولكنها متدرجة . وترابطت المواضيع في بناء منطقي متسلسل يساعد أبنائنا على التقدم الراسخ في تعلم المادة كما تم تقديم المادة بلغة مبسطة شيقة ومدعومة بالأشكال والتوضيحات الكافية ترغيباً لهم في المادة ، وعلى طريق تحقيق الطموح العلمي المنشود .

والله وراء القصد وهو ولي التوفيق ،،،

المؤلفــون

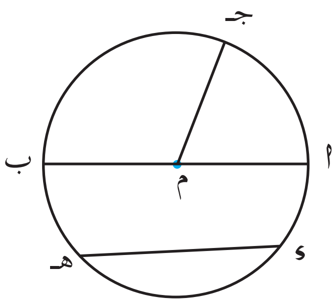
المحتويات

تابع المحتويات

الوحدة الخامسة

الهندسة

٥ : ١ الدائرة



شكل (٥ – ١)

تأمل الشكل (٥ – ١) :

تعرفت سابقاً على الدائرة وعلى مسميات بعض عناصرها .

نسمي النقطة « م » مركز الدائرة ،

أ ب قطر الدائرة ، ء هـ وتر الدائرة ،

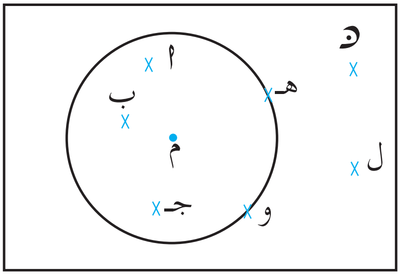
أ م ، م ب ، م جـ أنصاف أقطار الدائرة ،

تلاحظ أن | م أ | = | م ب | = | م جـ | .

تعاريف :

الدائرة : هي مجموعة نقاط في مستوى واحد تبعد عن نقطة ثابتة مسافات متساوية، وتسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ، وتسمى الدائرة باسم مركزها .

نصف قطر الدائرة : هو القطعة المستقيمة الواصلة من مركز الدائرة إلى أي نقطة تقع على الدائرة ، ونرمز لطول نصف القطر بالرمز « نق » .



شكل (٥ – ٢)

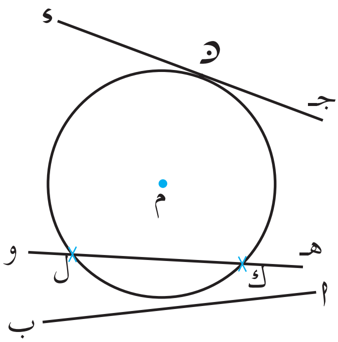
تأمل الشكل (٥ – ٢) .. تلاحظ أن الدائرة تقسم المستوى إلى ثلاثة أجزاء هي :

الجزء الأول : داخل الدائرة ، النقاط مثل أ، ب، جـ تقع داخل الدائرة،

الجزء الثاني : على الدائرة، النقاط مثل هـ ، و تقع على الدائرة ،

الجزء الثالث : خارج الدائرة ، النقاط مثل ن ، ل تقع خارج الدائرة .

الأوضاع النسبية لدائرة ومستقيم :



شكل (٥ – ٣)

تأمل الشكل (٥ – ٣):

ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن :

(١) المستقيم أ ب ، والدائرة م لايتقاطعان،

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \text{م} = \phi$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يقع خارج الدائرة .

(٢) $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ يمس الدائرة م في نقطة واحدة هي النقطة ن .

$\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \cap \text{م} = \{ \text{ن} \}$

نسمي $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مماسا للدائرة ، ونسمي ن نقطة التماس .

(٣) $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ يقطع الدائرة في نقطتين هما ك ، ل ،

$\overleftrightarrow{\text{هـ و}} \cap \text{م} = \{ \text{ك ، ل} \}$.

نسمي $\overline{\text{ك ل}}$ وتراً ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ قاطعاً للدائرة .

تذكر أن :

وتر الدائرة : هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين من الدائرة .

القوس : هو جزء من الدائرة محصور بين نقطتين عليها .

في الشكل (٥ – ٤) لدينا قوسان

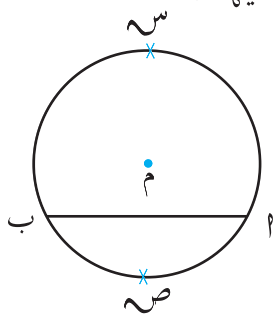
هما القوس الأكبر ونرمز له بالرمز أ س ب .

القوس الأصغر ونرمز له بالرمز أ ص ب .

كما نلاحظ أن الوتر أ ب يقسم الدائرة

إلى قطعتين : القطعة الكبرى (أ س ب)

والقطعة الصغرى (أ ص ب) .



شكل (٥ – ٤)

تمارين ومسائل

[١] أوجد قطر الدائرة إذا كان نصف قطرها :

أ) ٥سم ب) ٢٠ سم جـ) $\frac{١}{٢}$ ٣سم .

[٢] أوجد نصف قطر الدائرة إذا كان قطرها :

أ) ١٣سم ب) ١٠,٥ سم جـ) ٢,٦ سم .

[٣] أوجد نصف قطر الدائرة إذا كان طول أكبر وتر فيها ١٦سم .

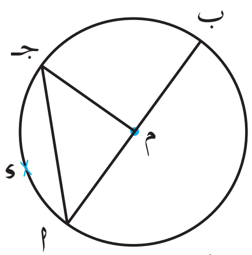
[٤] في الشكل (٥ – ٥) :

دائرة مركزها م ، سمِّ ما يلي :

أ) قطراً للدائرة ، ب) وترين للدائرة ،

جـ) ثلاثة أنصاف أقطار للدائرة ،

ء) أربعة أقواس ، هـ) قطعتان .



شكل (٥ – ٥)

[٥] ارسم دائرتين مركزهما نقطة ا ، وطول نصف قطر إحداهما ٣سم وطول نصف قطر الأخرى ٤,٥سم ، ثم ارسم القطر $\overline{\text{ب جـ}}$ في الدائرة الكبرى، عيِّن س ، ص نقطتي تقاطع $\overline{\text{ب جـ}}$ مع الدائرة الصغرى ، أوجد | ب جـ | ، | ب ص | ، | ب س | .

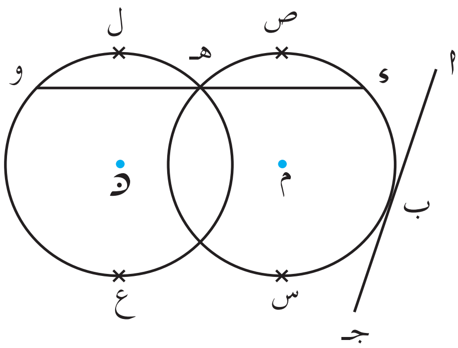
[٦] في الشكل (٥ – ٦) : دائرتان مركزاهما (م ، د)، لاحظ أن $\overleftrightarrow{\text{ا جـ}}$ خارج د ، سمِّ ما يلي :

ا) مماساً للدائرة م ،

ب) نقطة التماس ،

جـ) وترين للدائرتين ،

ء) أربعة أقواس للدائرتين .



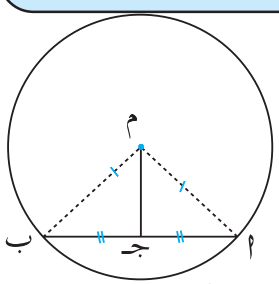
شكل (٥ – ٦)

٥ : ٢ العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر

مبرهنة (٥ – ١) :

المستقيم الواصل من مركز الدائرة إلى منتصف أي وترٍ فيها يكون عمودياً على الوتر .

المعطيات : دائرة مركزها م ، $\overline{\text{ا ب}}$ وتر في الدائرة ، |اجـ| = |جـ ب| ، [انظر شكل (٥ – ٧)] .



شكل (٥ – ٧)

المطلوب : إثبات أن : $\overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{ا ب}}$.

العمل : نرسم $\overline{\text{م ا}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$.

البرهان :

$\Delta\Delta$ م ا جـ ، م ب جـ ، فيهما :

$\overline{\text{م جـ}}$ (ضلع مشترك)

$|\text{م ا}| = |\text{م ب}| =$ نق

$|\text{ا جـ}| = |\text{ب جـ}|$ (معطى)

$\therefore \Delta$ م ا جـ $\cong$ Δ م ب جـ

ومن التطابق ينتج أن :

ق ($\measuredangle$ م جـ ا) = ق ($\measuredangle$ م جـ ب)

لكن ق ($\measuredangle$ م جـ ا) + ق ($\measuredangle$ م جـ ب) = ١٨٠° (زاوية مستقيمة)

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ م جـ ا) = ق ($\measuredangle$ م جـ ب) = ٩٠°

$\therefore$ $\overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{ا ب}}$ وهو المطلوب

عكس المبرهنة (٥ – ١) :

العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصِّفه .

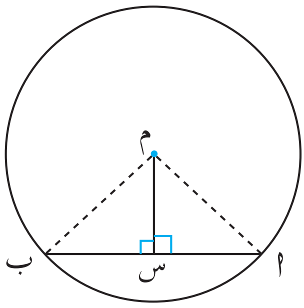
المعطيات : $\overline{\text{ا ب}}$ وتر في الدائرة م ،

$\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ا ب}}$

[انظر شكل (٥ – ٨)]

المطلوب : إثبات أن :

$|\text{ا س}| = |\text{س ب}|$.



شكل (٥ – ٨)

العمـل : نرسم $\overline{\text{م ا}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$

البرهان :

$\Delta\Delta$ م س ا ، م س ب ، فيهما :

$\left.\begin{array}{l} |\text{م ا}| = |\text{م ب}| = \text{نق} \\ \overline{\text{م س}} \quad (\text{ضلع مشترك}) \\ \text{ق}(\measuredangle \text{م س ا}) = \text{ق}(\measuredangle \text{م س ب}) = 90^\circ \quad (\text{معطى}) \end{array}\right\}$

$\therefore \Delta$ م س ا $\cong \Delta$ م س ب

$\therefore$ |ا س| = |س ب| وهو المطلوب .

تدريبــــات

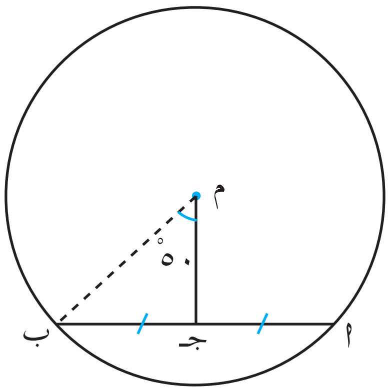
[١] فـي الشــكل (٥ – ٩) :

$\overline{\text{ا ب}}$ وتر في الدائــرة م ،

جـ منتـصــف $\overline{\text{ا ب}}$ ،

ق($\measuredangle$ جـ م ب) = ٥٠°

أوجد ق($\measuredangle$ م ب جـ) .



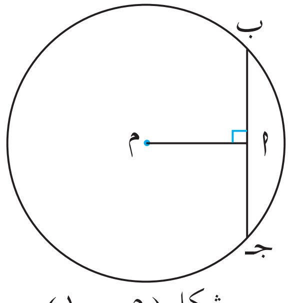
شكل (٥ – ٩)

[٢] في الشكل (٥ – ١٠) :

$\overline{\text{ب جـ}}$ وتر في الدائــرة م ،

$\overline{\text{م ا}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، |ا ب| = ٣سم

أوجد |ب جـ| .



شكل (٥ – ١٠)

مثال (١)

في الشكل (٥ – ١١) : أ ب ، جـ ء وتران متوازيان في الدائرة م ، هـ منتصف أ ب ، هـ م يقطع جـ ء في و ، اثبت أن و منتصف جـ ء .

المعطيات : أ ب ، جـ ء وتران متوازيان في الدائرة م .

| أ هـ | = | هـ ب |

المطلوب : إثبات أن : | جـ و | = | و ء | .

البرهان :

| أ هـ | = | هـ ب | (معطى)

∴ م هـ ⊥ أ ب (مبرهنة)

، ∵ أ ب // جـ ء (معطى)

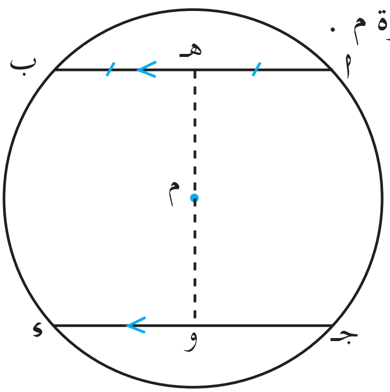
∴ ق (∢ و هـ أ) + ق (∢ هـ و جـ) = ١٨٠° (حقيقة)

∴ ق (∢ هـ و جـ) = ٩٠°

∴ م و ⊥ جـ ء

∴ | جـ و | = | و ء |

وهو المطلوب .

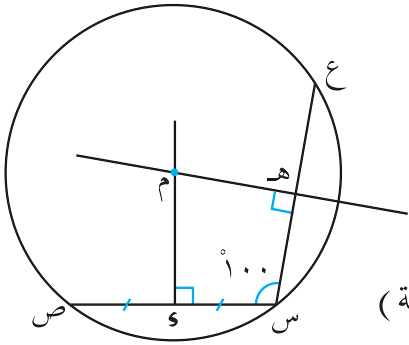


شكل (٥ – ١١)

مثال (٢)

س ص ، س ع وتران في الدائرة م ، ق (∢ ع س ص) = ١٠٠° ، ء ، هـ منتصف س ص ، س ع على الترتيب . أوجد ق (∢ ء م هـ) .

الحــل :



شكل (٥ – ١٢)

[انظر الشكل (٥ – ١٢)] :

∵ ء منتصف $\overline{\text{س ص}}$ (معطى)،

∴ ق (∢ م ء س) = ٩٠° (مبرهنة)

وبالمثل ق (∢ م هـ س) = ٩٠° (مبرهنة)

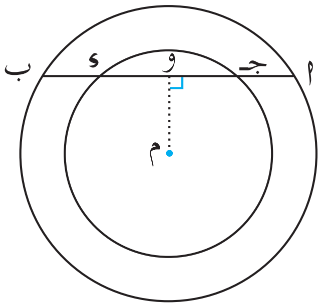
ق (∢ هـ م ء) + ق (∢ م ء س) + ق (∢ ء س هـ) + ق (∢ س هـ م) = ٣٦٠°

(مجموع زوايا الشكل الرباعي هـ م ء س)

∴ ق (∢ ء م هـ) = ٣٦٠° – (٩٠° + ١٠٠° + ٩٠°)

= ٣٦٠° – ٢٨٠° = ٨٠°

∴ ق (∢ ء م هـ) = ٨٠° .



شكل (٥ – ١٣)

مثال (٣) في الشكل (٥ – ١٣) : $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في الدائرة الكبرى (م) ، يقطع الدائرة الصغرى (م) ، في النقطتين جـ ، ء ،

أثبت أن | أ جـ | = | ب ء | .

المعطيات : $\overline{\text{أ ب}}$ يقطع الدائرة الصغرى في النقطتين جـ ، ء ،

المطلوب : إثبات أن : | أ جـ | = | ب ء | .

العمــل : نرسم $\overline{\text{م و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

البرهان :

في الدائرة الكبرى (م) :

$\because$ $\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ (عملا)

$\therefore$ |أ و| = |و ب| ..... (١) (عكس المبرهنة)

في الدائرة الصغرى (م) :

$\because$ $\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$

$\therefore$ |جـ و| = |و ء| ..... (٢) (عكس المبرهنة)

بطرح (٢) من (١) ينتج أن :

|أ جـ| = |ب ء| وهو المطلوب .

تمارين ومسائل

[١] $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في دائرة مركزها م ، $\overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، |م جـ| = ٦سم ، نق = ١٠سم ، احسب |أ ب| .

[٢] $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في دائرة مركزها م ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، فإذا عُلم أن |أ س| = ٣سم ، |س م| = ٤ سم ، احسب طول نصف القطر .

[٣] $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران في الدائرة م ، ق($\measuredangle$ ب أ جـ) = ٧٥° ، ء ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$ على الترتيب ، أوجد ق($\measuredangle$ ء م هـ) .

[٤] في الشكل (٥ – ١٤) :

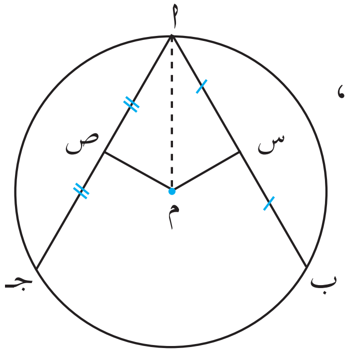
$\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران متطابقان في الدائرة م ،

س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$، ص منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$،

فإذا كان ق($\measuredangle$ ب أ جـ) = ٦٠°

احسب ق ($\measuredangle$ س م أ) ،

ق ($\measuredangle$ س م ص) المنعكسة .



شكل (٥ – ١٤)

[٥] $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متوازيان في الدائرة م ، هـ منتصف $\overline{أ ب}$، رسم $\overline{هـ م}$ فقطع $\overline{جـ ء}$ في و ، أثبت أن : | و جـ | = | و ء | .

[٦] م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، نصف خط المركزين م ن في جـ ثم وصِّل $\overline{جـ أ}$ ، رسم المستقيم أ ء عموداً على $\overline{أ جـ}$ ، يقطع محيط الدائرة م في ء ، ومحيط الدائرة ن في هـ . أثبت أن | ء أ | = | أ هـ |.

[٧] $\overline{أ ب}$ وتر في دائرة مركزها م فيه ق (∡ م أ ب) = ٤٨° ، نُصِّفت زاوية م أ ب بالمستقيم أ ء فلاقى محيط الدائرة في نقطة ء ثم نُصِّف الوتر $\overline{أ ب}$ في جـ ، وصل $\overline{م جـ}$.

أولاً : أوجد قياس الزاوية م ء أ بالدرجات

ثانياً : أثبت أن $\overline{م ء}$ // $\overline{أ ب}$

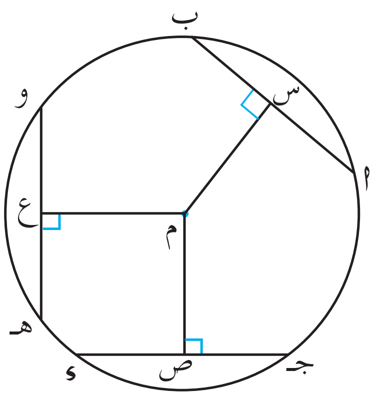
ثالثاً : أثبت أن ق (∡ م ء جـ) = ٩٠° .

٥ : ٣ أوتـار الدائـرة

تأمل الشكل (٥–١٥) : ماذا تلاحظ؟

تلاحظ أن :

$\overline{أ ب}$، $\overline{جـ ء}$ ،$\overline{هـ و}$ ثلاثة أوتار متطابقة في الدائرة م ، $\overline{أ ب}$ يبعد عن مركز الدائرة مسافة قدرها | م س | ، $\overline{جـ ء}$ يبعد عن مركز الدائرة مسافة قدرها | م ص | ، $\overline{هـ و}$ يبعد عن مركز الدائرة مسافة قدرها | م ع |،



شكل (٥ – ١٥)

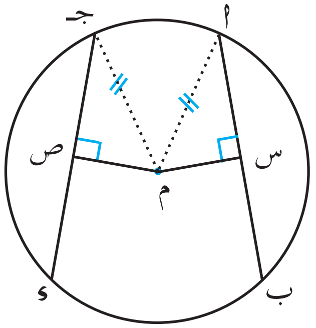
هل هناك علاقة بين طول الوتر وبعده عن مركز الدائرة ؟

أوجد أطوال الأوتار الثلاثة وأبعادها عن مركز الدائرة ، ثم قارن ؟ ماذا تستنتج ؟ تلاحظ أن :

هناك علاقة بين طول الوتر وبعده عن مركز الدائرة ، وعليه يمكن استنتاج المبرهنة التالية :

مبرهنة (٥ – ٢) :

الأوتار المتطابقة في الدائرة على أبعاد متساوية عن مركزها .



شكل (٥ – ١٦)

المعطيات : أ ب ، جـ ء وتران في الدائرة م ،

|أ ب| = |جـ ء| ، م ص ⊥ جـ ء ،

م س ⊥ أ ب [انظر شكل (٥–١٦)] .

المطلوب : إثبات أن : |م س| = |م ص| .

العمل : نرسم م أ ، م جـ .

البرهان :

∵ م س ⊥ أ ب ∴ |أ س| = $\frac{١}{٢}$ |أ ب| (عكس مبرهنة) .

∵ م ص ⊥ جـ ء ∴ |جـ ص| = $\frac{١}{٢}$ |جـ ء| (عكس مبرهنة) .

∵ |أ ب| = |جـ ء| ∴ |أ س| = |جـ ص| .

∴ ∆∆ أ س م ، جـ ص م فيهما :

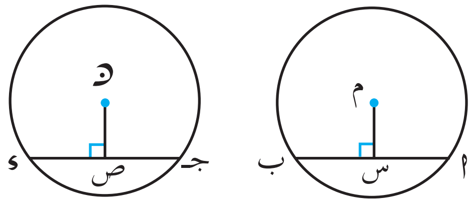
|أ م| = |جـ م| = نق

|أ س| = |جـ ص| (برهاناً)

ق(∡ أ س م) = ق(∡ جـ ص م) (معطى)

∴ ∆ أ س م ≅ ∆ جـ ص م ،

منه ينتج أن : |م س| = |م ص| وهو المطلوب .



شكل (٥ – ١٧)

نتيجة :

في الشكل (٥– ١٧) :

الدائرتان م ، د متطابقتـان

(أي أن | م أ | = | د جـ |) ،

| أ ب | = | جـ ء |، م س ⊥ أ ب ، د ص ⊥ جـ ء،

∴ | م س | = | د ص | .

عكس المبرهنة (٥ – ٢) :

الأوتار التي على أبعاد متساوية عن مركز الدائرة تكون متطابقة.

مثال (١)

دائرتان متحدتان في المركز م ، رسم أ ب وتراً في الدائرة الكبرى فقطع الدائرة الصغرى في جـ ، ء ، ورسم س ص وتراً في الدائرة الكبرى فقطع الدائرة الصغرى في ع ، ل إذا كان | أ ب | = | س ص | ، فأثبت أن : | جـ ء | = | ع ل | .

المعطيات : أ ب يقطع الدائرة الصغرى في جـ ، ء ،

س ص يقطع الدائرة الصغرى في ع ، ل ، | أ ب | = | س ص | .

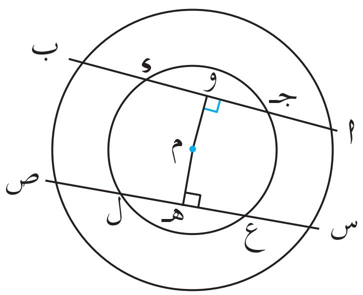
المطلوب : إثبات أن : | جـ ء | = | ع ل | .

العمـل : نرسم م و ⊥ أ ب ،

م هـ ⊥ س ص

[انظر الشكل (٥ – ١٨)] ،

البرهـان : في الدائرة الكبرى :



شكل (٥ – ١٨)

∵ | أ ب | = | س ص | (معطى)

، ∵ $\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{س ص}}$ (عملاً)

∴ | م و | = | م هـ | (مبرهنة)

في الدائرة الصغرى

∵ | م و | = | م هـ | (برهاناً)

، ∵ $\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{جـ ى}}$ ، $\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{ل ع}}$ (عملاً)

∴ | جـ ى | = | ع ل | (عكس المبرهنة) وهو المطلوب .

مثال (٢)

في الشكل (٥ – ١٩) : $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة م ، والنقطتان س ، ص منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ى}}$ على الترتيب ، رسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ فقطع الدائرة في هـ ، و ، برهن أن | س هـ | = | ص و | .

المعطيات : | أ ب | = | جـ ى | ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{جـ ى}}$.

المطلوب : إثبات أن : | س هـ | = | ص و | .

العمل : نسقط $\overline{\text{م ل}} \perp \overleftrightarrow{\text{س ص}}$، ونرسم $\overline{\text{م س}}$، $\overline{\text{م ص}}$.

البرهان :

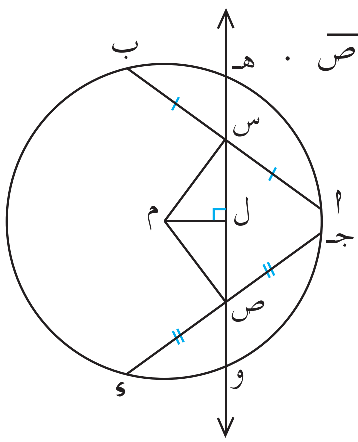
∵ $\overline{\text{م ل}} \perp \overline{\text{هـ و}}$

∴ | ل هـ | = | ل و |....(١) ،

∵ س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ،

∵ ص منتصف $\overline{\text{جـ ى}}$ (معطى).



شكل (٥ – ١٩)

∴ $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ،

∵ $|\text{أ ب}| = |\text{جـ ء}|$

∴ $|\text{م س}| = |\text{م ص}|$

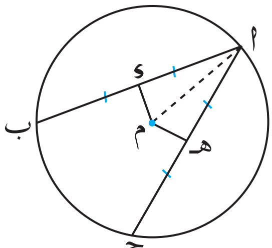
∴ Δ م س ص فيه $|\text{م س}| = |\text{م ص}|$ ، $\overline{\text{م ل}} \perp \overline{\text{س ص}}$ ،

∴ $|\text{ل س}| = |\text{ل ص}|$ .... (٢)

بطرح (٢) من (١) ينتج أن :

$|\text{س هـ}| = |\text{ص و}|$ وهو المطلوب .

تمارين ومسائل



شكل (٥ – ٢٠)

[١] في الشكل (٥ – ٢٠) : $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$

وتران متطابقان في دائرة م ،

أثبت أن $\overline{\text{م أ}}$ ينصف ∢ ب أ جـ .

[٢] إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وترين في الدائرة م ، النقطتين س ، ص منتصفي $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ على الترتيب، وكان $|\text{م س}| = |\text{م ص}|$، $|\text{أ ب}| = ٦$ سم، فإن $|\text{جـ ص}| = \ldots$ سم .

[٣] في الشكل (٥ – ٢١) :

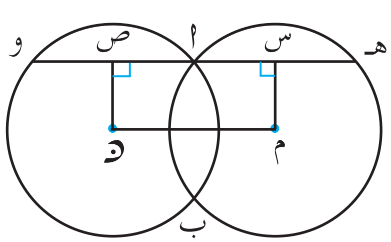
الدائرتان م ، ن تتقاطعان في أ ، ب

رسم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ يمر بالنقطة أ ، ويقطع

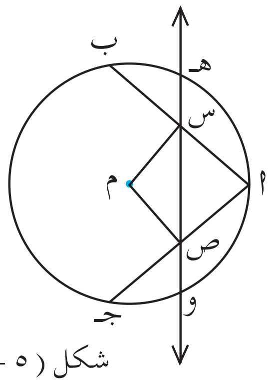
الدائرتين في هـ ، و على الترتيب ،

أُنزل العمودان $\overline{\text{م س}}$، $\overline{\text{ن ص}}$ على $\overline{\text{هـ و}}$ ،

برهن أن : $|\text{س ص}| = \frac{١}{٢}|\text{هـ و}|$.



شكل (٥ – ٢١)

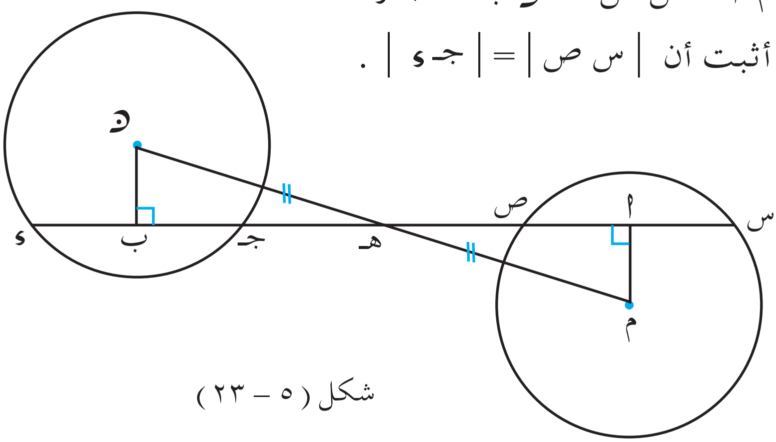


شكل (٥ – ٢٢)

[٤] في الشكل (٥ – ٢٢):
$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ وتران متطابقان في الدائرة م ، س ، ص منتصفا $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ على الترتيب ، رسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ فقطع الدائرة في هـ ، و ، أثبت أن | س هـ | = | ص و | .

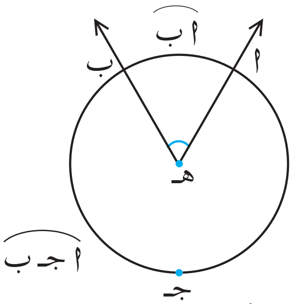
[٥] أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ؛ فيه | أ ب | = | أ جـ | ، رسم $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ يقطعه في س ، ورسم $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أجـ}}$ يقطعه في ص فإذا كان | م س | = ٥ سم ، | ص جـ | = ١٢ سم ، أوجد طول نصف قطر الدائرة م .

[٦] في الشكل (٥ – ٢٣): م ، ن مركزا دائرتين متطابقتين وغير متقاطعتين نصف $\overline{\text{م ن}}$ في هـ ورسم المستقيم س ص جـ ء يمر بالنقطة هـ ويقطع الدائرة م في س ، ص وقطع الدائرة ن في جـ ، ء ، حيث $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ن ب}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$.
أثبت أن | س ص | = | جـ ء | .



شكل (٥ – ٢٣)

٥ : ٤ الزاوية المركزية والأقواس

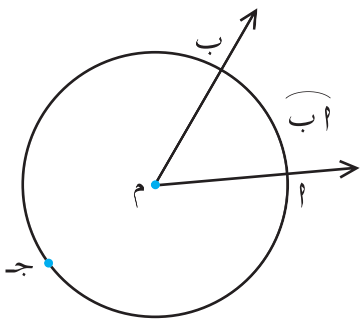


شكل (٥ – ٢٤)

في الشكل (٥– ٢٤) : الشعاعان $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ ب}}$ الخارجان من مركز الدائرة هـ ، يشكلان زاوية تُسمى زاوية مركزية ، وعليه فإن :

الزاوية المركزية : هي زاوية رأسها مركز الدائرة .

إذا تأملنا في الشكل أعلاه نلاحظ أن الزاوية المركزية أ هـ ب تقسم الدائرة إلى قوسين القوس أ ب ويسمى القوس الصغير أو القوس المقطوع ويرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$. القوس أ جـ ب ويسمى بالقوس الكبير ويقرأ بثلاثة أحرف تمييزاً له عن القوس الصغير ، ويرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{أ جـ ب}}$.



شكل (٥ – ٢٥)

في الشكل (٥ – ٢٥) : نلاحظ أن النقطتين أ ، ب قد قسمت الدائرة إلى قوسين صغيراً وكبيراً ، وعند رسم الشعاعين $\overleftarrow{\text{م أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{م ب}}$ نحصل على زاويتين مركزيتين هما ∡ أ م ب وقوسها $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ ، ∡ أ م ب المنعكسة وقوسها $\overset{\frown}{\text{أ جـ ب}}$.

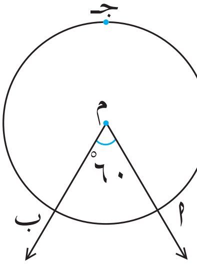
درجة قياس القوس :

درجة قياس القوس الصغير تساوي قياس زاويته المركزية المقابلة له .

في الشكل (٥ – ٢٦) : إذا كانت

∡ أ م ب زاوية مركزية قياسها = ٦٠ْ

فإننا نقول أن درجة قياس قوسها ٦٠ْ ،



شكل (٥ – ٢٦)

∴ درجة قياس القوس الكبير = ٣٦٠ْ – درجة قياس القوس الصغير

فمثلاً درجة قياس ⌒ أ جـ ب في الشكل (٥ – ٢٦) = ٣٦٠ْ – ٦٠ْ =٣٠٠ْ

تدريــب (١) ما درجة قياس قوس نصف الدائرة ؟

مبرهنة (٥ – ٣) :

إذا تطابقت زاويتان مركزيتان تساوى قياسا قوسيهما الصغيرين .

المعطيات : ∡ أ م ب ≅ ∡ جـ م ء

[انظر الشكل (٥ – ٢٧)] .

المطلوب : إثبات أن :

قياس ⌒ أ ب = قياس ⌒ جـ ء

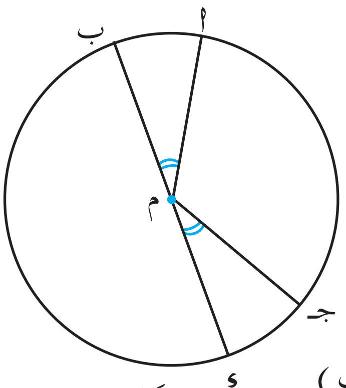
البرهان :

قياس ⌒ أ ب = ق (∡ أ م ب) (تعريف)

قياس ⌒ جـ ء = ق (∡ جـ م ء) (تعريف)

ولكن ∡ أ م ب ≅ ∡ جـ م ء (معطى)

∴ قياس ⌒ أ ب = قياس ⌒ جـ ء وهو المطلوب

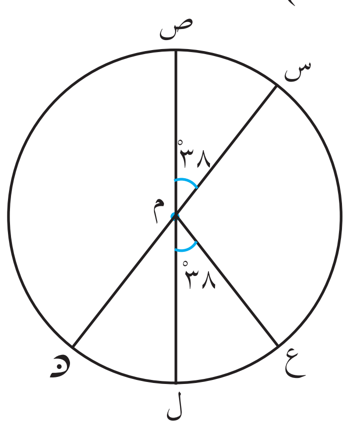


شكل (٥ – ٢٧)

عكس مبرهنة (٥ – ٣) :

إذا تساوى قياسا قوسين في دائرة تطابقت زاويتاهما المركزيتان .

تدريب (٢) برهن عكس المبرهنة (٥ – ٣) .



شكل (٥ – ٢٨)

مثال (١)

في الشكل (٥ – ٢٨) : م مركز الدائـرة،

أوجد ما يلي :

أ) قياس ل د ب) قياس ل ن ل ص

جـ) قياس س ع ء) قياس س د ع

الحـــل :

أ) قياس ل د = ٣٨° لأن ق(∡ س م ص)= ق(∡ ل م د) (بالتقابل بالرأس)

ب) قياس ل د ص = ١٨٠° (نصف دائرة)

جـ) قياس س ع = ١٨٠° – ٧٦° = ١٠٤°

ء) قياس س د ع = ١٨٠° + ٧٦° = ٢٥٦°

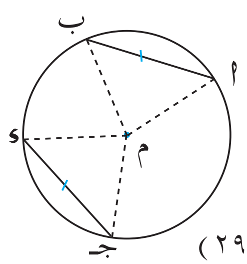
مبرهنة (٥– ٤) :

إذا تطابقت الأوتار في دائرة تساوت قياسات أقواسها المتناظرة

المعطيات :

م دائرة فيها : أب ≅ جـ ء

[انظر الشكل (٥– ٢٩)]



شكل (٥ – ٢٩)

المطلوب : إثبات أن :

قياس $\frown$أ ب = قياس $\frown$جـ ء

العمل : نرسم $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$

البرهان :

∵ |م ب| = |م جـ| ، |م أ| = |م ء| ، |أ ب| = |جـ ء| (لماذا؟)

∴ Δ أ م ب ≅ Δ جـ م ء (لماذا ؟)

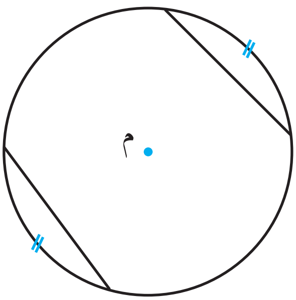
∴ ق (∡ أ م ب) = ق (∡ جـ م ء)

∴ قياس $\frown$أ ب = قياس $\frown$جـ ء وهو المطلوب .

عكس المبرهنة (٥ – ٤) :

إذا تساوت قياسات الأقواس في دائرة تطابقت أوتارها المتناظرة

[انظر الشكل (٥ – ٣٠)] .

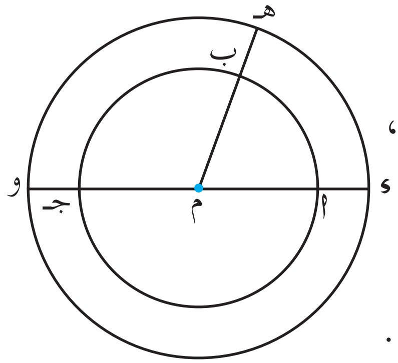


شكل (٥ – ٣٠)

تدريب (٣)

برهن عكس المبرهنة

تمارين ومسائل



شكل (٥ – ٣١)

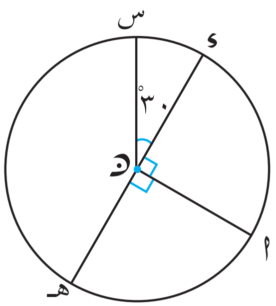
[١] في الشكل (٥ – ٣١) دائرتان متحدتا المركز ، $\overline{\text{ءو}}$ قطر الدائرة الكبرى، $\measuredangle$ ء م هـ حادة .

أ) سمِّ القوس الصغير للدائرة الكبرى .

ب) سمِّ قوسين كبيرين للدائرة الصغرى .

جـ) أيهما أكبر في القياس $\overset{\frown}{\text{ءهـ}}$ أم $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$ ؟

[٢] في الشكل (٥ – ٣٢) : ن دائرة ، فيها $\overline{\text{أن}} \perp \overline{\text{ءهـ}}$ ، وقياس $\overset{\frown}{\text{ءس}}$ = ٣٠° ، أوجد :



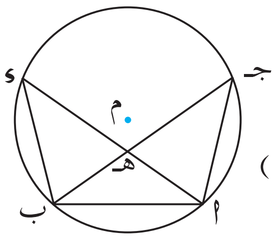
شكل (٥ – ٣٢)

أ) قياس $\overset{\frown}{\text{ءأ}}$

ب) قياس $\overset{\frown}{\text{س أ}}$.

جـ) قياس $\overset{\frown}{\text{س هـ أ}}$

ء) قياس $\overset{\frown}{\text{س هـ ء}}$.



شكل (٥ – ٣٣)

[٣] في الشكل (٥ – ٣٣) :

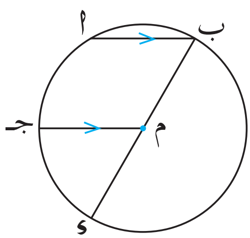
م مركز الدائرة ، |ب ء| = |أ جـ|

برهن أن : |أ ء| = |ب جـ| .

[٤] في الشكل (٥ – ٣٤) :

$\overline{\text{ءب}}$ قطر الدائرة م ، $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{جـم}}$

أثبت أن : جـ منتصف $\overset{\frown}{\text{أء}}$.

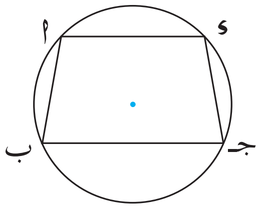


شكل (٥ – ٣٤)

[٥] في الشكل (٥ – ٣٥):

$\overset{\frown}{\text{ب ا ء}} \cong \overset{\frown}{\text{جـ ء ا}}$.

أثبت أن : $\overline{\text{ا ب}} \cong \overline{\text{جـ ء}}$.

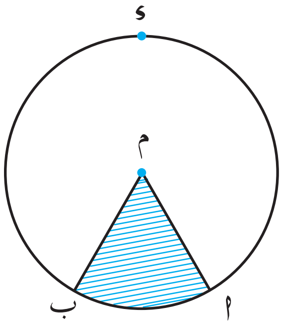


شكل (٥ – ٣٥)

٥ : ٥ القطاع الدائري

في الشكل (٥ – ٣٦) :

المنطقة المظللة المحددة بالقوس $\overset{\frown}{\text{ا ب}}$ ، ونصفي القطرين $\overline{\text{م ا}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ تسمى بالقطاع الدائري الصغير . المنطقة غير المظللة المحددة بالقوس $\overset{\frown}{\text{ا ء ب}}$ ونصفي القطرين $\overline{\text{م ا}}$، $\overline{\text{م ب}}$ تسمى بالقطاع الدائري الكبير .



شكل (٥ – ٣٦)

طول القوس ، ومساحة القطاع :

تأمل القطاع الدائري م ا ب في الشكل (٥ – ٣٧) تلاحظ أن :

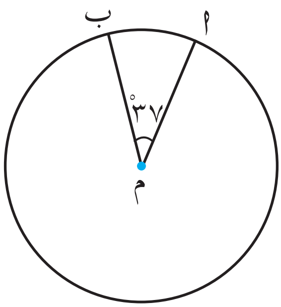
طول القوس $\overset{\frown}{\text{ا ب}} = \frac{٣٧}{٣٦٠}$ من محيط الدائرة

أي أن طول القوس ا ب $= \frac{٣٧}{٣٦٠} \times$ محيط الدائرة

$\therefore \frac{\text{طول } \overset{\frown}{\text{ا ب}}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{٣٧}{٣٦٠}$

مساحة القطاع الدائري م ا ب $= \frac{٣٧}{٣٦٠} \times$ مساحة الدائرة .

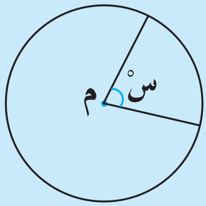
$\therefore \frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{٣٧}{٣٦٠}$



شكل (٥ – ٣٧)

$$\frac{\text{طول القوس}}{٢\,\pi\,\text{نق}} = \frac{\text{سْ}}{٣٦٠}$$

$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\pi\,\text{نق}^{٢}} = \frac{\text{سْ}}{٣٦٠}$$



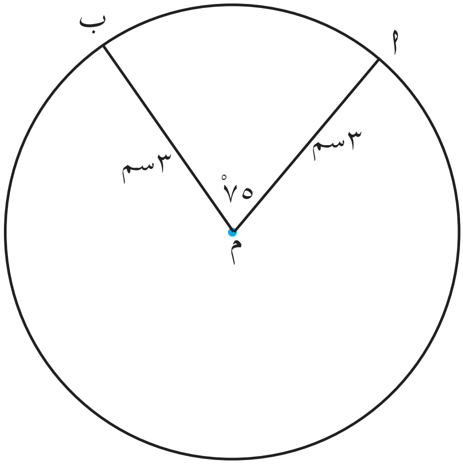
شكل (٥ - ٣٨)

مثال (١)

مستعيناً بالشكل(٥–٣٩) أوجد :

أ) محيط القطاع الدائري الصغير .

ب) مساحة القطاع الدائري الصغير .



شكل (٥ – ٣٩)

الحـل :

أ) نفرض أن طول $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ = س سم

$\therefore \quad \dfrac{\text{س}}{٢\,\pi \times ٣} = \dfrac{٧٥}{٣٦٠}$

$\therefore \quad \text{س} = ٢ \times ٣\,\pi \times \dfrac{٧٥}{٣٦٠} = \dfrac{٥}{٤}\,\pi = \dfrac{٥}{\cancel{٤}_{\,٢}} \times \dfrac{\cancel{٢٢}^{\,١١}}{٧} = \dfrac{٥٥}{١٤} = ٣\dfrac{١٣}{١٤}$ سم

$\because$ محيط القطاع = طول القوس + طول القطر .

$\therefore$ محيط القطاع الصغير $= ٣\dfrac{١٣}{١٤} + ٣ + ٣ = ٩\dfrac{١٣}{١٤}$ سم .

ب) نفرض أن مساحة القطاع الصغير = ص سم^{٢} .

$\therefore \quad \dfrac{\text{ص}}{\pi \times ٣^{٢}} = \dfrac{٧٥}{٣٦٠}$

$\therefore \quad \text{ص} = \pi \times ٣^{٢} \times \dfrac{٧٥}{٣٦٠} = \dfrac{١٥}{٨}\,\pi$ سم^{٢} .

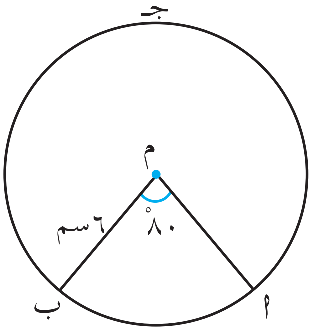
$= \dfrac{١٥}{٨} \times \dfrac{٢٢}{٧} = \dfrac{١٦٥}{٢٨} = ٥\dfrac{٢٥}{٢٨}$ سم^{٢} .

مثال (٢)

مستعيناً بالشكل (٥ – ٤٠) أوجد :

أ) طول القوس الكبير أ جـ ب .

ب) مساحة القطاع الدائري الكبير .



شكل (٥ – ٤٠)

الحل :

أ) نفرض أن طول القوس الكبير = س سم

$$\therefore \frac{\text{س}}{٢\pi \times ٦} = \frac{٣٦٠ - ٨٠}{٣٦٠}$$

$$\therefore \text{س} = ٢\pi \times ٦ \times \frac{٢٨٠}{٣٦٠} = ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٦ \times \frac{٢٨٠}{٣٦٠} = \frac{٨٨}{٣} \text{ سم}$$

ب) نفرض أن مساحة القطاع الدائري الكبير = م سم^{٢}

$$\therefore \frac{\text{م}}{\pi \times ٦^{٢}} = \frac{٣٦٠ - ٨٠}{٣٦٠}$$

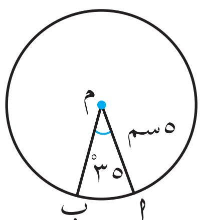
$$\therefore \text{م} = \pi \times ٦^{٢} \times \frac{٢٨٠}{٣٦٠} = \frac{\overset{١}{\cancel{٢٢}}}{\underset{١}{\cancel{٧}}} \times \cancel{٣٦} \times \frac{\overset{٤}{\cancel{٢٨٠}}}{\underset{١}{\cancel{٣٦٠}}} = ٨٨ \text{سم}^{٢} .$$

تماريـن ومسائـل

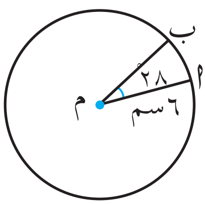
[١] أوجد كلاً من : أ) محيط القطاع الدائري الصغير .

ب) مساحة القطاع الدائري الصغير .

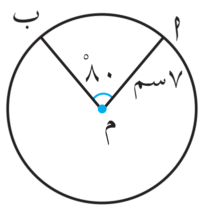
في كل من الأشكال (٥ – ٤١ أ، ب ،جـ ، ء) ، (ط = ٣,١٤)



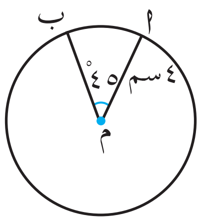
شكل (٥ – ٤١أ)



شكل (٥ – ٤١ب)

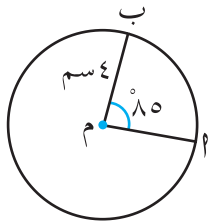


شكل (٥ – ٤١جـ)

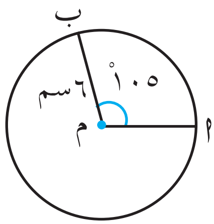


شكل (٥ – ٤١ء)

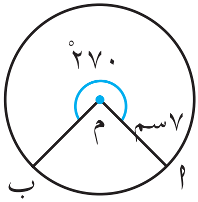
[٢] أوجد محيط ومساحة القطاع الدائري الكبير في كل من الأشكال (٥ – ٤٢أ ، ب ، جـ ، ء) ، (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) .



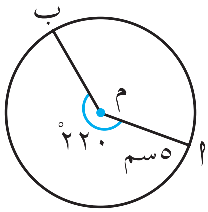
شكل (٥ – ٤٢أ)



شكل (٥ – ٤٢ب)



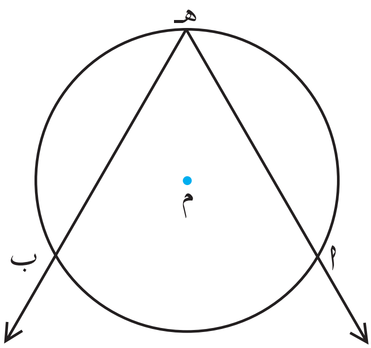
شكل (٥ – ٤٢جـ)



شكل (٥ – ٤٢ء)

٥ : ٦ الزاويــــة المحيطيــة

تأمل الشكل (٥ – ٤٣) ، هـ نقطة على محيط الدائرة (م)، هـأ ، هـب شعاعان يقطعان محيط الدائرة في أ ، ب ، وبذلك تكونت لدينا زاوية هي ∢ أهـب ، مثل هذه الزاوية تسمى زاوية محيطية .



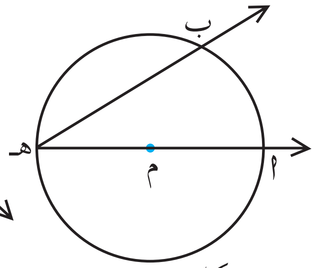
شكل (٥ – ٤٣)

تعريف :

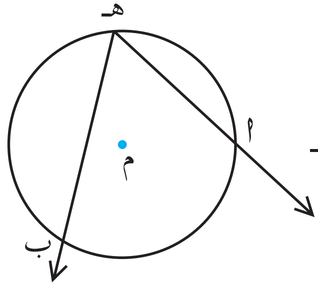
الزاوية المحيطية : هي زاوية يقطع ضلعاها قوساً من الدائرة ، ورأسها نقطة على محيط الدائرة .

من الشكل يلاحظ أن الزاوية المحيطية تقسم الدائرة إلى قوسين أحدهما القوس المقابل للزاوية ويسمى قوس الزاوية المحيطية ، والآخر القوس المعكوس للزاوية ويسمى القوس المنعكس للزاوية المحيطية .

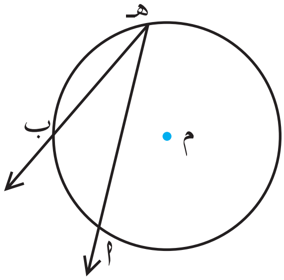
الأشكال (٥–٤٤أ ،ب،جـ) تبين حالات مركز الدائرة بالنسبة للزاوية المحيطية .



شكل (٥ –٤٤أ)



شكل (٥ –٤٤ب)



شكل (٥ –٤٤جـ)

نشاط (١)

ادرس الشكل (٥–٤٥)، ثم أجب عن الأسئلة التالية :

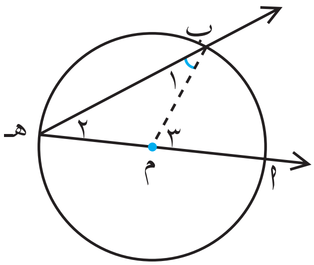
أ – هل م هـ ب مثلث متساوي الساقين ؟

ب– هل العبارات الآتية صحيحة ؟

١) ق (∡ ٣) = ق (∡١) + ق (∡ ٢)

٢) ق (∡ ١) = ق (∡ ٢)

٣) ق (∡ ٣) = ٢ق (∡ ٢)



شكل (٥ – ٤٥)

جـ– إذا كانت الإجابة في (٣) صحيحة ، هل أنت مقتنع أن

قياس ∡ أ هـ ب = $\frac{١}{٢}$ قياس $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ ؟

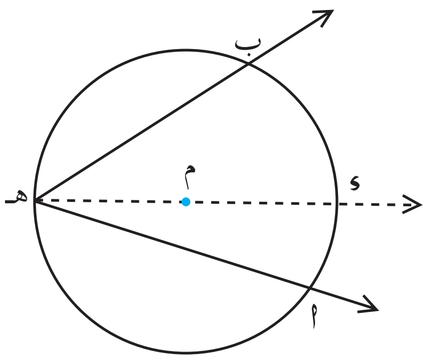
نشاط (٢)

ادرس الشكل (٥–٤٦)، ثم أجب

عن الأسئلة التالية :

أ – هل ق (∡أ هـ ب)

= ق (∡أ هـ ء) + ق (∡ ء هـ ب) .



شكل (٥ – ٤٦)

ب – هل العبارات الآتية صحيحة ؟

١ ■ ق (∡ أ هـ ء) = $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{أء}}$.

٢ ■ ق (∡ ء هـ ب) = $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{ءب}}$.

٣ ■ ق (∡ أ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{أء}}$ + $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{ءب}}$.

٤ ■ ق (∡ أ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ (قياس $\overset{\frown}{\text{أء}}$ + قياس $\overset{\frown}{\text{ءب}}$) .

٥ ■ ق (∡ أ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{أب}}$.

نشاط (٣)

ادرس الشكل (٥ – ٤٧)، ثم أجب عن الأسئلة التالية :

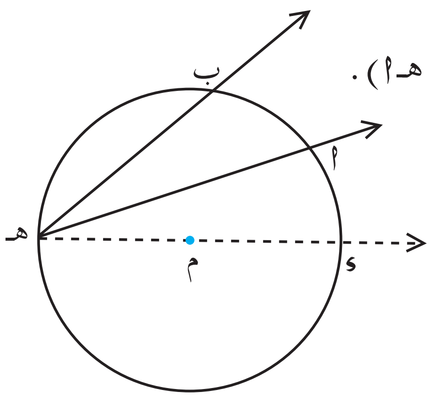
أ – هل العبارات الآتية صحيحة ؟

١ ■ ق (∡ أ هـ ب) = ق (∡ ء هـ ب) – ق (∡ ء هـ أ) .

٢ ■ ق (∡ أ هـ ب)

= $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{ءب}}$ – $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{ءأ}}$.

٣ ■ ق (∡ أ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{أب}}$.



شكل (٥ – ٤٧)

ب – من خلال إِجاباتك على الأنشطة الثلاثة، هل أنت مقتنع أن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها؟

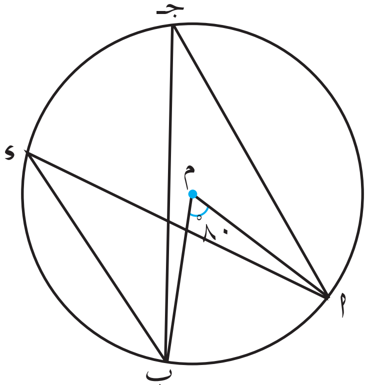
مبرهنة (٥ – ٥) :

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها .

وبصياغة أخرى :

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس .

مثـــال



شكل (٥ – ٤٨)

في الشكل(٥–٤٨) : أ ، ب ، جـ ، ء نقاط على الدائرة (م) . أوجد الآتي :

أ – ق (∡ أ جـ ب) .

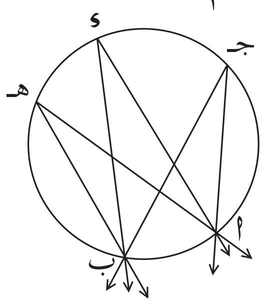
ب – ق (∡أ ء ب) .

الحــل :

أ – ق (∡ أ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (∡ أ م ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٨٠° = ٤٠°

ب – ق (∡ أ ء ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (∡ أ م ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٨٠° = ٤٠°

نشاط (٤)



شكل (٥ – ٤٩)

في الشكل (٥–٤٩) قس الزوايا

∡ أ جـ ب ، ∡ أ ء ب ، ∡ أ هـ ب

قارن القياسات، ماذا تلاحظ على الزوايا الثلاث؟

تلاحظ أن : الزوايا الثلاث ا جـ ب ، ا ء ب ، ا هـ ب زوايا محيطية مشتركة في قوس واحد ، كما تلاحظ أن قياسات الزوايا الثلاث متساوية .

نشــاط (٥)

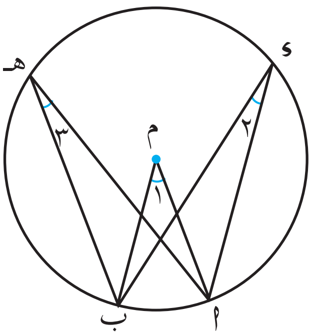
ادرس الشكل (٥ – ٥٠) ثم أجب عن الأسئلة التالية :

ا – هل العبارات الآتية صحيحة ؟

▪ ١ ق (∡ ٢) = $\frac{١}{٢}$ ق (∡ ١) .

▪ ٢ ق (∡ ٣) = $\frac{١}{٢}$ ق (∡ ١) .

▪ ٣ هل الزاويتان ٢ ، ٣ في قطعة دائرية واحدة ؟ ماذا تلاحظ ؟ ماذا تستنتج؟

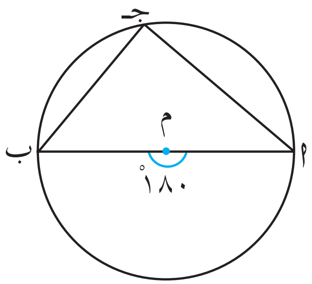


شكل (٥ – ٥٠)

مبرهنة (٥ – ٦) :

الزوايا المحيطية المشتركة في قوس واحد من الدائرة الواحدة متطابقة .

نشــاط (٦)



شكل (٥ – ٥١)

في الشكل (٥ – ٥١) ، ا ، ب ، جـ نقاط تقع على الدائرة م ، ق (∡ ا م ب) = ١٨٠°

١ – هل الزاوية ا جـ ب قائمة ؟

٢ – الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تقابل قوساً قياسه . . . .°

٣ – هل الزاوية المحيطية القائمة تقابل زاوية مركزية قياسها ١٨٠° ؟

من ذلك نستنتج المبرهنة التالية :

مبرهنة (٥ – ٧) :

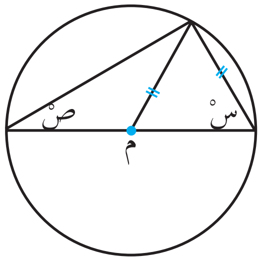
إذا كانت الزاوية المحيطية مرسومة في نصف دائرة فإنها زاوية قائمة ، وعكس المبرهنة صحيح أي أنه :

إذا كانت الزاوية المحيطية في الدائرة قائمة فإنها مرسومة في نصف دائرة .

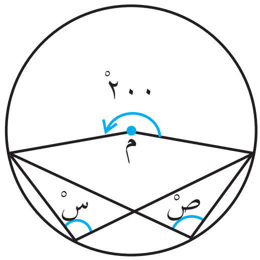
برهن المبرهنة (٥ – ٧) وعكسها .

تماريـن ومسائـل

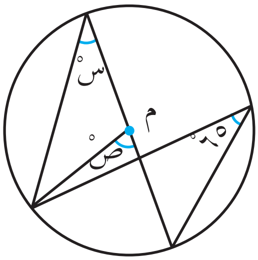
[١] في الأشكال (٥ – ٥٢ أ ، ب ، جـ ، ء) ، م مركز الدائرة، أوجد قيمتي س ، ص في كل شكل .



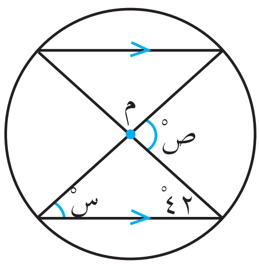
شكل (٥ –٥٢أ)



شكل (٥ –٥٢ب)



شكل (٥ –٥٢جـ)

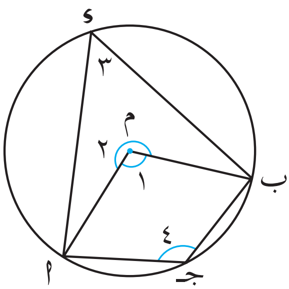


شكل (٥ –٥٢ ء)

[٢] مستعيناً بالشكل (٥–٥٣)

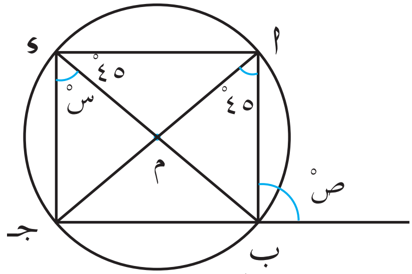
أثبت أن :

ق (∡ ٣) + ق (∡ ٤) = ١٨٠°

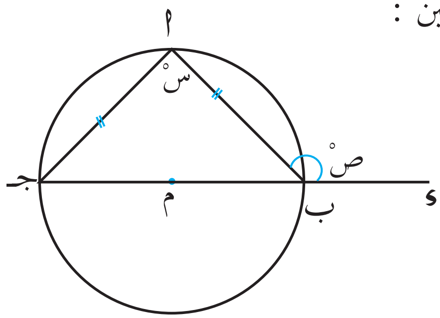


شكل (٥ – ٥٣)

[٣] في الشكلين (٥ – ٥٤ أ ، ب)، م مركز الدائرة ، أوجد قيمتي س ، ص في كل شكل من الشكلين التاليين :



شكل (٥ –٥٤ أ)



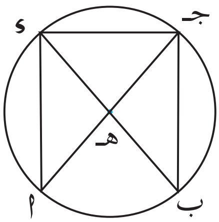
شكل (٥ –٥٤ب)

[٤] أب قطر في الدائرة م ، جـ نقطة على الدائرة نفسها، احسب ق (∡ أ جـ ب) .

[٥] في الشكل (٥ – ٥٥) :

أثبت أن : $\overset{\frown}{\text{أ ء}} \cong \overset{\frown}{\text{ب جـ}}$.

Δ هـ ء جـ مثلثاً متساوي الساقين .



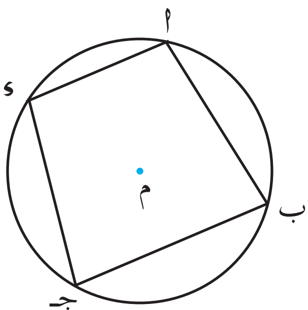
شكل (٥ –٥٥)

٥ : ٧ الشكل الرباعي الدائري

تعلم أن أي مضلع تنتمي رؤوسه لدائرة واحدة يسمى مضلعاً دائرياً ، وعلى ذلك فالرباعي الذي تنتمي رؤوسه لدائرة واحدة يسمى رباعياً دائرياً .

تأمل الشكل (٥– ٥٦) تلاحظ أن :

أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة بحيث تقع رؤوسه الأربعة على الدائرة (م) ، يسمى هذا الشكل رباعياً دائرياً .



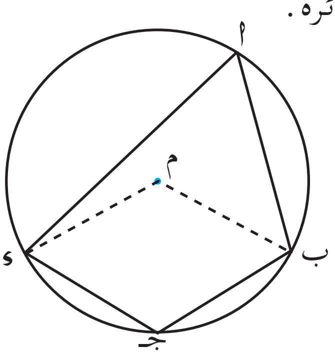
شكل (٥ – ٥٦)

تسمى ∡ ب ا ء ، ∡ ب جـ ء زاويتان متقابلتان في الشكل الرباعي الدائري ، وكذلك ∡ ا ب جـ ، ∡ ا ء جـ زاويتان متقابلتان .

مبرهنة (٥ – ٨) :

مجموع قياسي الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي ١٨٠° .

المعطيات : ا ب جـ ء شكل رباعي دائري، م مركز الدائرة .



شكل (٥ – ٥٧)

المطلوب : إثبات أن :

أولاً : ق (∡ ب ا ء) + ق (∡ ب جـ ء) = ١٨٠°

ثانياً : ق (∡ ا ب جـ) + ق (∡ ا ء جـ) = ١٨٠°

العمل : نرسم $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$ [انظر شكل(٥–٥٧)]

البرهان :

ق (∡ ب ا ء) = $\frac{١}{٢}$ ق (∡ ب م ء) (مبرهنة) .... (١)

ق (∡ ب جـ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق (∡ ب م ء) المنعكسة (مبرهنة) .... (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج :

ق (∡ ب ا ء) + ق (∡ ب جـ ء) = $\frac{١}{٢}$ [ق (∡ ب م ء) + ق (∡ ب م ء المنعكسة]

لكن ق (∡ ب م ء) + ق (∡ ب م ء المنعكسة) = ٣٦٠° (مجموع الزوايا حول نقطة) ،

∴ ق (∡ ب ا ء) + ق (∡ ب جـ ء) = $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠° = ١٨٠°

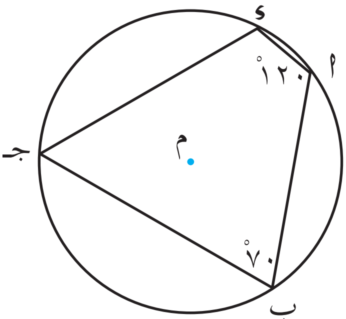
وهو المطلوب أولاً

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق (∡ ا ب جـ) + ق (∡ ا ء جـ) = ١٨٠°

وهو المطلوب ثانياً .

مثال (١)



شكل (٥ – ٥٨)

في الشكل (٥ – ٥٨) إذا كانت :

ق (∡ ا = ١٢٠°) ، ق (∡ ب = ٧٠°)

فأوجد قياس كل من ∡ جـ ، ∡ ء .

الحـــل :

∵ رؤوس الشكل الرباعي ا ب جـ ء تقع على الدائرة .

∴ ا ب جـ ء شكل رباعي دائري .

∴ ق (∡ ا) + ق (∡ جـ) = ١٨٠° (مبرهنة) .

∴ ق (∡ جـ) = ١٨٠° − ق (∡ ا) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

وبالمثل ق (∡ ء) = ١٨٠° − ق (∡ ب) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠° .

نشـــاط ارسم مربعاً ، معيناً، مستطيلاً، ومتوازي أضلاع، ثم ارسم دائرة تمر برؤوس كل شكل من هذه الأشكال . . . ماذا تلاحظ ؟ ماذا تستنتج ؟

متى يكون الشكل رباعياً دائرياً ؟

عكس المبرهنة (٥ – ٨) :

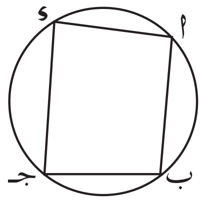
يكون الشكل رباعياً دائرياً إذا كان مجموع قياسي زاويتين متقابلتين فيه ١٨٠° .

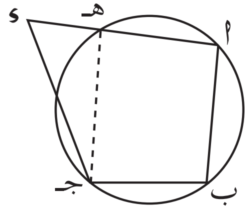
المعطيات : ا ب جـ ء شكل رباعي فيه : ق (∡ ب) + ق (∡ ء) = ١٨٠°

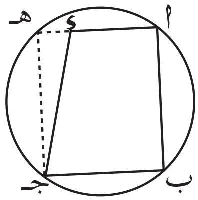
المطلوب : إِثبات أن الشكل ا ب جـ ء رباعي دائري .

البرهان :

نرسم الدائرة التي تمر بالنقاط الثلاث ا ، ب ، جـ (أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة) .


شكل (٥ – ٥٩ ا)


شكل (٥ – ٥٩ ب)


شكل (٥ – ٥٩ جـ)

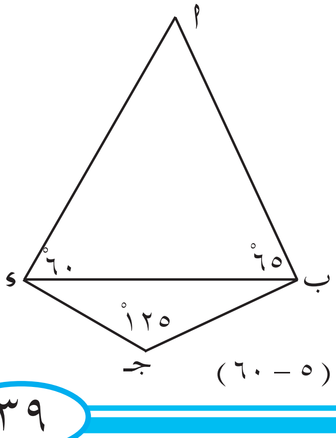
فإن مرت بالنقطة ء [شكل (٥ – ٥٩ ا)] تم المطلوب ، وإن لم تمر نفرض أنّ الدائرة تقطع $\overline{\text{ا ء}}$ في النقطة هـ كما في الشكل (٥ – ٥٩ ب) أو امتداده كما في الشكل (٥ – ٥٩ جـ) ثم نصل $\overline{\text{جـ هـ}}$.

∵ الشكل ا ب جـ هـ رباعي دائري . ∴ ∡ ب + ∡ هـ = ١٨٠° ،

لكن ق(∡ ب) + ق(∡ ء) = ١٨٠° .

∴ ق (∡ هـ) = ق (∡ ء) وهذا غير ممكن إِلاّ إِذا انطبقت نقطة ء على نقطة هـ أي أن ا ب جـ ء شكل رباعي دائري وهو المطلوب.

مثال (٢)


شكل (٥ – ٦٠)

في الشكل(٥ – ٦٠) ا ب جـ ء رباعي، $\overline{\text{ب ء}}$ قطر فيه . ق (∡ ا ب ء) = ٦٥° ، ق(∡ ا ء ب) = ٦٠° ، ق(∡ جـ) = ١٢٥° ، أثبت أن ا ب جـ ء رباعي دائري .

المعطيات : $\overline{ب ء}$ قطر في الشكل الرباعي ا ب جـ ء ، حيث :

ق (∢ ا ب ء) = ٦٥ْ ، ق (∢ ء ا ب) = ٦٠ْ ، ق (∢ ب جـ ء) = ١٢٥ْ

المطلوب : إثبات أن : ا ب جـ ء رباعي دائري .

البرهان : في المثلث ا ب ء .

ق (∢ ب ا ء) = ١٨٠ْ − [ق (∢ ا ب ء) + ق (∢ ا ء ب)] .

= ١٨٠ْ − (٦٥ْ + ٦٠ْ) = ١٨٠ْ − ١٢٥ْ = ٥٥ْ

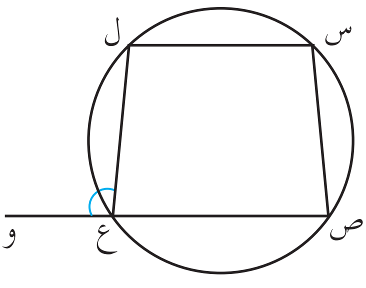
∵ ق (∢ ب ا ء) + ق (∢ ب جـ ء) = ٥٥ْ + ١٢٥ْ = ١٨٠ْ

∴ ا ب جـ ء شكل رباعي دائري (لأن فيه ∢ ا ، ∢ جـ زاويتان متقابلتان متكاملتان) .

الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري :

إذا مُدّ أحد أضلاع الشكل الرباعي الدائري على استقامته ، فإن الزاوية المحصورة بين امتداد هذا الضلع والضلع المجاور له تسمى زاوية خارجة عن الشكل الرباعي الدائري انظر الشكل (٥ − ٦١) :

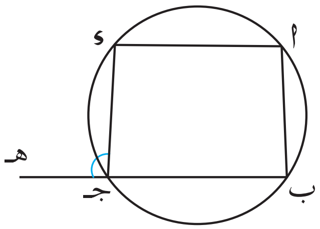
س ص ع ل شكل رباعي دائري ، مدّ $\overline{ص ع}$ على استقامته إلى و ، ∢ ل ع و هي زاوية خارجة عن الشكل الرباعي الدائري س ص ع ل .



شكل (٥ − ٦١)

مبرهنة (٥ − ٩) :

الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري تساوي الزاوية المقابلة للزاوية المجاورة لها .



شكل (٥ – ٦٢)

المعطيات : ا ب جـ ء شكل رباعي دائري

مدّ $\overline{\text{ب جـ}}$ إلى هـ [انظر الشكل (٥–٦٢)] .

المطلوب : إثبات أن ق (∡ ء جـ هـ)= ق (∡ ب ا ء) .

البرهان : ق (∡ ء جـ هـ) + ق (∡ ب جـ ء) = ١٨٠° (١)

(لأن ∡ ب جـ هـ مستقيمة)

ق (∡ ب جـ ء) + ق (∡ ب ا ء) = ١٨٠° (مبرهنة) (٢)

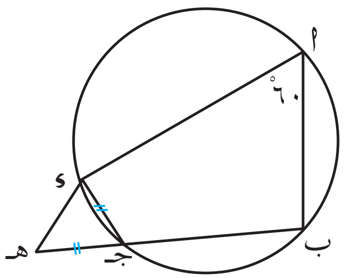
بمقارنة (١) ، (٢) ينتج أن :

ق (∡ ء جـ هـ) = ق (∡ ب ا ء) وهو المطلوب .

مثال (٣)

فـي الشكل (٥ – ٦٣) : ا ب جـ ء شـكل رباعـي دائـري فيـه ق (∡ ب ا ء) = ٦٠° . مدّ $\overline{\text{ب جـ}}$ إلى هـ ، بحيث |جـ هـ| = |جـ ء| ،

أثبت أن المثلث جـ ء هـ متساوي أضلاع .



شكل (٥ – ٦٣)

المعطيات : ا ب جـ ء شكل رباعي دائري،

ق (∡ ب ا ء) = ٦٠° ،

|جـ هـ| = |جـ ء|

المطلوب : إثبات أن :

المثلث جـ ء هـ متساوي أضلاع .

البرهان :

∵ ∡ ء جـ هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري ا ب جـ ء .

∴ ق (∡ ء جـ هـ) = ق (∡ ب ا ء) = ٦٠ْ مبرهنة (١)

في Δ جـ ء هـ : ق (∡ جـ ء هـ) + ق (∡ ء هـ جـ) = ١٨٠ْ – ٦٠ْ = ١٢٠ْ .

∵ | جـ هـ | = | جـ ء | (معطى)

∴ ق (∡ جـ هـ ء) = ق (∡ جـ ء هـ) = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠ْ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

ق (∡ ء جـ هـ) = ق (∡ جـ هـ ء) = ق (∡ جـ ء هـ) = ٦٠ْ

∴ Δ جـ ء هـ متساوي أضلاع .

تماريـن ومسائـل

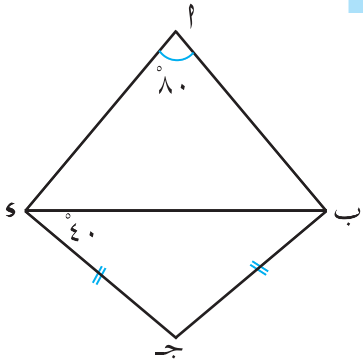
[١] فـي الشـكل (٥ – ٦٤) :

ا ب جـ ء رباعي ، $\overline{\text{ب ء}}$ قطـر فيـه

| ب جـ | = | جـ ء | ، ق (∡ ب ا ء) = ٨٠ْ ،

ق (∡ ب ء جـ) = ٤٠ْ .

أثبت أن : ا ب جـ ء رباعي دائري .



شكل (٥ – ٦٤)

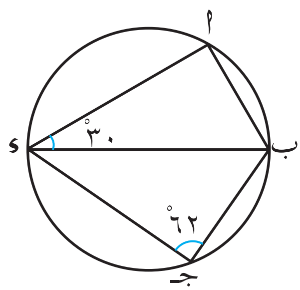
[٢] فـي الشـكل (٥ – ٦٥) :

ا ب جـ ء رباعي دائري .

إذا كان ق (∡ ب جـ ء) = ٦٢ْ ،

ق (∡ ب ء ا) = ٣٠ْ .

فاحسب قياس ∡ ا ب ء .

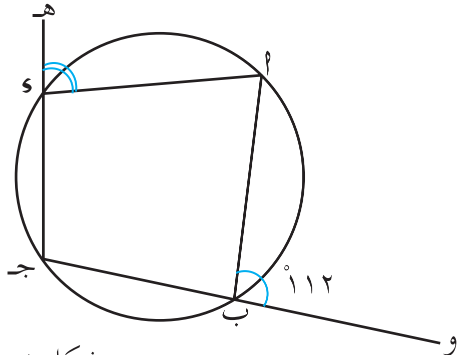


شكل (٥ – ٦٥)

[٤] في الشكل (٥ – ٦٦) :

ق (∡ ا ب و) = ١١٢° ،

أوجد قياس ∡ ا ء هـ .



شكل (٥ –٦٦)

[٥] ا ب جـ مثلث متساوي الساقين، فيه | ا ب | = | ا جـ | ، س نقطة على $\overline{\text{ا ب}}$،
ص نقطة على $\overline{\text{ا جـ}}$ ، بحيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.

أثبت أن : ب جـ ص س رباعي دائري .

[٦] دائرتان متقاطعتان في ا ، ب ، رسم المستقيم جـ ا ء يقطع الأولى
في جـ والثانية في ء . ورسم المستقيم هـ ب و يقطع الأولى في هـ
والثانية في و . برهن على أن $\overline{\text{جـ هـ}}$ يوازي $\overline{\text{ء و}}$.

٥ : ٨ المماس

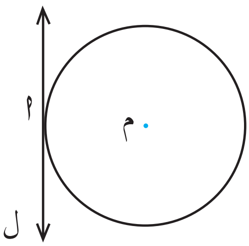
سبق أن تعرفت على الحالات الثلاث للأوضاع النسبية بين مستقيم ودائرة وهي :

(١) أن يقطع المستقيم الدائرة في نقطتين.

(٢) لاتوجد أية نقطة مشتركة بين المستقيم والدائرة .

(٣) توجد فقط نقطة واحدة مشتركة بين المستقيم والدائرة

وفي الحالة الثالثة يسمى المستقيم مماساً للدائرة وتسمى النقطة المشتركة نقطة التماس .

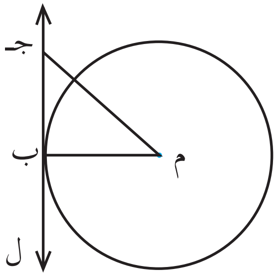


شكل (٥ –٦٧)

انظر الشكل (٥ – ٦٧) :

المستقيم ل مماس للدائرة (م) ، ا هي نقطة التماس .

نشــــــاط



شكل (٥ – ٦٨)

(١) ارسم دائرة مركزها (م) .

(٢) حدد نقطة مثل (ب) على محيط الدائرة فيكون $\overline{\text{م ب}}$ نصف قطر في الدائرة .

(٣) ارسم المستقيم ل عمودياً على $\overline{\text{م ب}}$ عند النقطة ب .

هل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ مماس للدائرة في نقطة (ب) ؟

للإجابة عن ذلك خذ نقطة أخرى مثل جـ $\in \overleftrightarrow{\text{ل}}$ ثم صل النقطة جـ بمركز الدائرة (م) . ماذا تلاحظ ؟

ستلاحظ أن : $|$م جـ$|$ > $|$م ب$|$.

لكن $|$م ب$|$ = نق .

$\therefore$ $|$م جـ$|$ > نق .

إذن نقطة جـ لاتنتمي للدائرة (م) ، وهكذا كل نقطة تنتمي للمستقيم ل غير النقطة ب يكون البعد بينها وبين مركز الدائرة دائماً أكبر من نصف قطر الدائرة أي أن : ب هي النقطة الوحيدة التي تنتمي إلى كل من المستقيم ل والدائرة . مما سبق يمكن القول أن :

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة من نقطة نهايته على الدائرة يكون مماساً للدائرة عند هذه النقطة .

مبرهنة (٥ – ١٠)

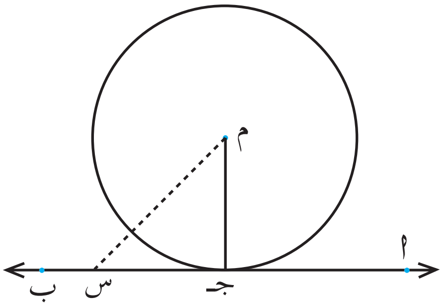
مماس الدائرة يكون عمودي على نصف القطر المار بنقطة التماس

المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يمس الدائرة (م) في نقطة جـ ، $\overline{\text{م جـ}}$ نصف قطر .

[انظر الشكل (٥ – ٦٩)] .

المطلوب : إثبات أن : $\overline{\text{م جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

العمل : نأخذ نقطة مثل س على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ونصل $\overline{\text{م س}}$.



شكل (٥ – ٦٩)

البرهان :

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يمس الدائرة في جـ .

$\therefore$ كل نقطة على المماس غير نقطة جـ تقع خارج الدائرة ، لذلك نقطة س تقع خارج الدائرة .

$\therefore$ $|\text{م س}| > |\text{م جـ}|$.

لكن $\overline{\text{م جـ}}$ نصف قطر في الدائرة .

وبالمثل يمكن إثبات أن $\overline{\text{م جـ}}$ أصغر من أي مستقيم واصل من المركز (م) إلى أي نقطة على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ غير جـ .

$\therefore$ $\overline{\text{م جـ}}$ أقصر القطع المستقيمة الواصلة من م إلى $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

$\therefore$ $\overline{\text{م جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ وهو المطلوب .

نتيجة (١)

لا يمكن رسم أكثر من مماس واحد لدائرة من نقطة عليها .

نتيجـة (٢)

العمود المقام على مماس دائرة من نقطة التماس يمر بمركزها .

مثـــال

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة (م) ، $\overleftrightarrow{بجـ}$ مماس للدائرة م ، رسم $\overline{جـ أ}$ فقطع المحيط في (ء) ، أثبت أن : ق ($\measuredangle$ ء م أ) = ٢ ق ($\measuredangle$ أ جـ ب) .

المعطيات : $\overline{أب}$ قطر في الدائرة (م) ،

$\overleftrightarrow{بجـ}$ مماس لها ، $\overline{جـ أ}$ يقطع

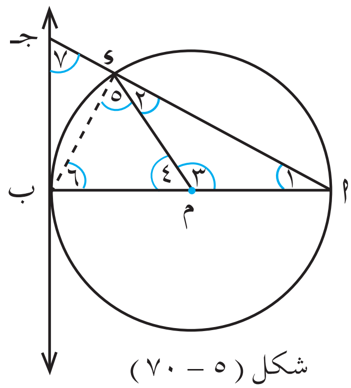
الدائرة في (ء)

المطلوب : إِثبات أن :

ق($\measuredangle$ ء م أ)=٢ق($\measuredangle$ أ جـ ب)

العمل : نرسم $\overline{ب ء}$.

البرهان :



شكل (٥ – ٧٠)

انظر الشكل (٥ – ٧٠)

في Δ م أ ء : ق ($\measuredangle$١) = ق ($\measuredangle$ ٢)(لأن |م أ| = |م ء|) ـــ (١)

في Δ م ء ب : ق ($\measuredangle$ ٥) = ق ($\measuredangle$ ٦)(لأن |م ء| = |م ب|) ـــ (٢)

في Δ أ ب جـ القائم في ب : ق ($\measuredangle$ ١) + ق ($\measuredangle$٧) = ٩٠° ـــ (٣)

بالمثل ق ($\measuredangle$ ١) + ق ($\measuredangle$ ٦) = ٩٠° ـــ (٤)

من (٣) ، (٤) ينتج أن :

ق ($\cancel{\measuredangle ١}$) + ق ($\measuredangle$٧) = ق ($\cancel{\measuredangle ١}$) + ق ($\measuredangle$ ٦)

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ ٧) = ق ($\measuredangle$ ٦)

ولكن ∠٤ تكمل ∠٣

، ∵ ق (∠٣) = ق (∠٥) + ق (∠٦)

∴ ∠٤ تكمل ٢ ق (∠٦) ،

∵ ق (∠٦) = ق (∠٧)

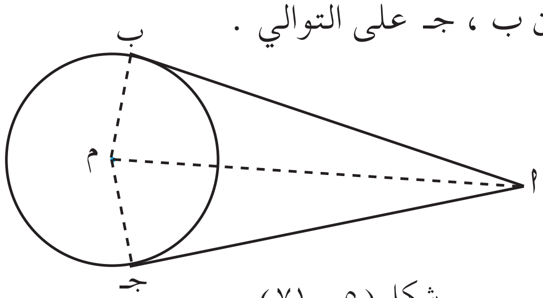
∴ ق (∠٣) = ٢ ق (∠٧)

∴ ق (∠أ م ء) = ٢ ق (∠أ جـ ب) وهو المطلوب .

مبرهنة (٥ – ١١)

المماسان المرسومان لدائرة من نقطة خارجها متطابقان .

المعطيات : في الشكل (٥–٧١) : أ نقطة خارج الدائرة (م) . $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ مماسان لها عند النقطتين ب ، جـ على التوالي .



شكل (٥ – ٧١)

المطلوب : إثبات أن :

|أ ب| = |أ جـ| .

العمل :

نرسم $\overline{\text{أ م}}$ ، $\overline{\text{جـ م}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$.

البرهان :

في ∆∆ أ ب م ، أ جـ م
- ق (∠أ ب م) = ق (∠أ جـ م) = ٩٠° (مبرهنة)
- |ب م| = |جـ م| = نق
- $\overline{\text{أ م}}$ ضلع مشترك .

∴ ∆ أ ب م ≅ ∆ أ جـ م

ومن ذلك ينتج أن |أ ب| = |أ جـ| وهو المطلوب .

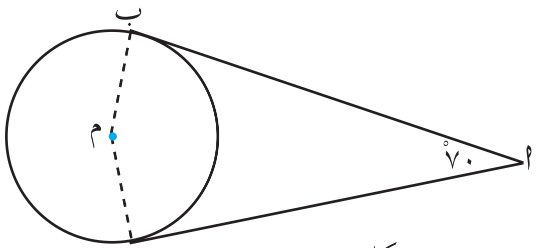
نتيجـة (١)

المماسان المرسومان من نقطة خارج دائرة يقابلان زاويتين مركزيتين متطابقتين.

نتيجـة (٢)

القطعة المستقيمة الواصلة بين مركز دائرة ونقطة خارجها تنصف الزاوية التي ضلعاها مماسا الدائرة من تلك النقطة.

مثال (٢)



شكل (٥ – ٧٢)

النقطة أ خارج الدائرة م ، رسم المماسان $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ يمسان الدائرة في ب ، جـ .

فإذا كان ق (∢ ب أ جـ) = ٧٠ْ ، فأوجد ق (∢ ب م جـ) انظر الشكل (٥ – ٧٢) .

الحـل :

المعطيات : أ نقطة خارج الدائرة م ، $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ مماسان لدائرة ، ق(∢ ب أ جـ) = ٧٠ْ .

المطلوب : إيجاد ق (∢ ب م جـ)

أ ب م جـ شكل رباعي .

∴ ق(∢ جـ أ ب) + ق (∢ أ ب م) + ق (∢ ب م جـ) + ق (∢ م جـ أ) = ٣٦٠ْ

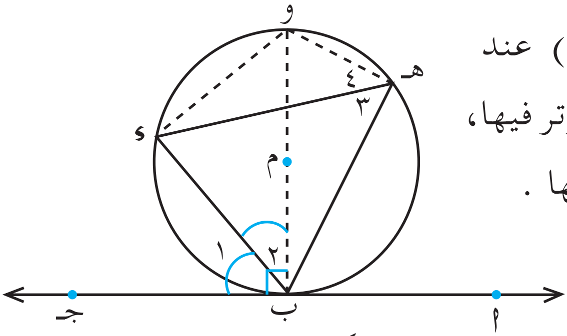
∴ ٧٠ْ + ٩٠ْ + ق (∢ ب م جـ) + ٩٠ْ = ٣٦٠ْ

∴ ق (∢ ب م جـ) = ٣٦٠ْ – (٧٠ْ + ٩٠ْ + ٩٠ْ)

= ٣٦٠ْ – ٢٥٠ْ = ١١٠ْ .

مبرهنة (٥ – ١٢)

« قياس الزاوية المحصورة بين المماس والوتر المار بنقطة التماس يساوي قياس الزاوية المحيطية المقابلة لوتر التماس من الجهة الأخرى » .



شكل (٥ – ٧٣)

المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ مماس للدائرة (م) عند النقطة (ب)، $\overline{\text{ب ء}}$ وتر فيها، ∡ ب هـ ء محيطية فيها .

المطلوب : إثبات أن :

ق (∡ جـ ب ء) = ق (∡ ب هـ ء) .

العمل : نرسم القطر $\overline{\text{ب و}}$، ثم نرسم $\overline{\text{و هـ}}$، $\overline{\text{و ء}}$ [انظر الشكل (٥ –٧٣)] .

البرهان :

∵ $\overline{\text{ب و}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ (مبرهنة)

∴ ق (∡ ١) + ق (∡ ٢) = ٩٠°

ق (∡ ٣) + ق (∡ ٤) = ٩٠° (مبرهنة)

∴ ق (∡ ١) + ق (∡ ٢) = ق (∡ ٣) + ق (∡ ٤) .... (١)

ولكن ق (∡ ٤) = ق (∡ ٢) (محيطيتان تقابلان نفس القوس) . . . . ..(٢)

بمقارنة (١) ، (٢) ينتج أن :

ق (∡ ٣) = ق (∡ ١)

أي أن : ق (∡ ب هـ ء) = ق (∡ جـ ب ء) وهو المطلوب .

نتيجة (٣) :

«إذا رسم مستقيم من إحدى نهايتي وتر في دائرة يصنع معه زاوية تساوي بالقياس الزاوية المحيطية المقابلة للوتر من الجهة الأخرى كان ذلك المستقيم مماساً للدائرة » .

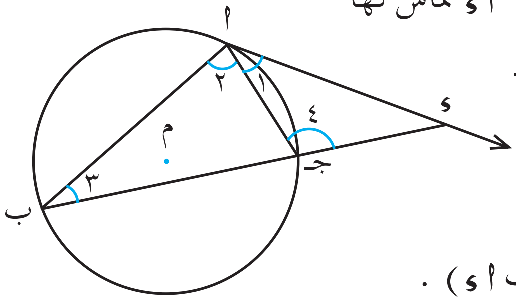
مثال (٣)

$\overline{\text{ا ب}}$ وتر في الدائرة (م) ، $\overleftrightarrow{\text{ا ء}}$ مماس لها في ا ، رسم $\overline{\text{ب ء}}$ فقطع محيط الدائرة في جـ . أثبت أن : ق (∡ ا جـ ء) = ق (∡ ب ا ء) .

المعطيات : $\overline{\text{ا ب}}$ وتر في الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{ا ء}}$ مماس لها

$\overline{\text{ب ء}}$ يقطع الدائرة في جـ

[انظر الشكل (٥–٧٤)]



شكل (٥ – ٧٤)

المطلوب : إثبات أن :

ق (∡ ا جـ ء) = ق (∡ ب ا ء) .

البرهان :

$\overleftrightarrow{\text{ا ء}}$ مماساً ، $\overline{\text{ا جـ}}$ وتر التماس (معطى)

∴ ق (∡ ١) = ق (∡ ٣) ـــ (١) (مبرهنة ٥ – ١٢)

∡ ٤ خارجة عن المثلث ا ب جـ

∴ ق (∡ ٤) = ق (∡ ٢) + ق (∡ ٣) ـــ (٢) (مبرهنة)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

ق (∡ ٤) = ق (∡ ٢) + ق (∡ ١)

أي أن : ق (∡ ا جـ ء) = ق (∡ ب ا ء) وهو المطلوب .

تمارين ومسائل

[١] م دائرة ، $\overline{أب}$ قطر فيها ، جـ نقطة على محيطها ، مد $\overline{ب أ}$ إلى النقطة « ء » ، ثم وصل $\overline{ء جـ}$. فإذا كان ق (∡ أ جـ م) = ٦٠° وكان $\overline{ء جـ}$ مماساً للدائرة . فأثبت أن المثلث أ جـ ء متساوي الساقين .

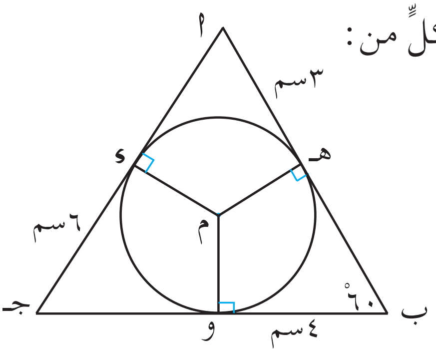
[٢] م دائرة قطرها $\overline{أ ب}$ فرضت نقطة جـ على محيطها بحيث كان |جـ أ| = |جـ ب| ، ثم رسم لها مماساً من النقطة (أ) لاقى امتداد $\overline{ب جـ}$ في النقطة « هـ » ، أثبت أن : |أ جـ| = |هـ جـ| .

[٣] $\overline{أ ب}$ قطر في دائرة $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{أ ء}$ وتران في جهة واحدة من $\overline{أ ب}$ ، مدّا كل من $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{أ ء}$ حتى لاقيا المماس المرسوم من النقطة ب في النقطتين س ، ص على الترتيب ، أثبت أن الشكل س جـ ء ص رباعي دائري .

[٤] استعن بالشكل (٥-٧٥) : لإيجاد كلٍّ من :

|أ ب| ، |ب جـ| ، |أ جـ| ،

ق (∡ هـ م و) .



شكل (٥ - ٧٥)

[٥] رسم القطر $\overline{أ ب}$ في الدائرة (م) وفرضت النقطة جـ على الدائرة ، ثم رسم منها مماساً للدائرة ، فإذا رسمت $\overline{أ ء}$ عمودية على المماس ، برهن أن :

$\overline{أ جـ}$ ينصف ∡ ب أ ء .

[٦] $\overline{أ ب}$ وتر في دائرة مركزها (م) ، $\overline{ب س}$ مماساً لها ، جـ نقطة على $\overline{ب س}$ بحيث |أ ب| = |ب جـ| ، رُسم $\overline{جـ أ}$ فقطع محيط الدائرة في ء ، أثبت أن Δ ب ء جـ متساوي الساقين .

[٧] $\overline{اب}$ قطـر في الدائرة (م)، $\overline{ب جـ}$ وتر فيها ، رسم من النقطة جـ مماس للدائرة ، ثم رسم $\overline{م ء}$ ينصف ∡ جـ م ب ، ويلاقي المماس في النقطة (ء) . فإذا كان ق (∡ م جـ ب) = ٣٠ْ ، فأثبت أن :

أولاً : ق (∡ ء جـ ب) = ق (∡ ء م ب) = ٦٠ْ .

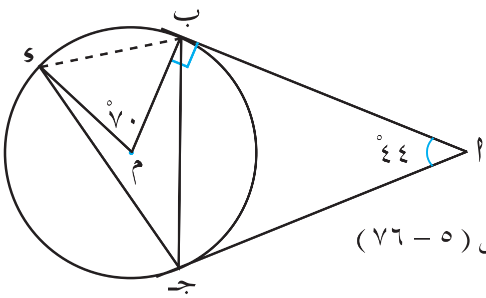
ثانياً : الشكل ء ب م جـ رباعي دائري . ثالثاً : $\overline{ء ب}$ مماس للدائرة في ب .

[٨] $\overline{اب}$، $\overline{اجـ}$ وتران متطابقان في دائرة، $\overleftrightarrow{اهـ}$ مماس لها. برهن أن: $\overleftrightarrow{اهـ}$ // $\overline{ب جـ}$.

[٩] في الشكل (٥ –٧٦)

أوجـد مـع البرهـان :

ق (∡ جـ ب ء) .



شكل (٥ – ٧٦)

[١٠] اب جـ ء رباعي دائري،رسم من النقطتين ا ، ب المماسان $\overleftrightarrow{اهـ}$، $\overleftrightarrow{ب هـ}$ فتقاطعا في النقطة (هـ)،فإذا كان : ق(∡ اهـ ب)=٧٠ْ، ق(∡ ء اجـ)=٤٠ْ، ق (∡ اب ء) =٣٩ْ ، فأوجد قياس زوايا المثلث اب جـ

٥ : ٩ الأوضاع المختلفة لعلاقة دائرتين

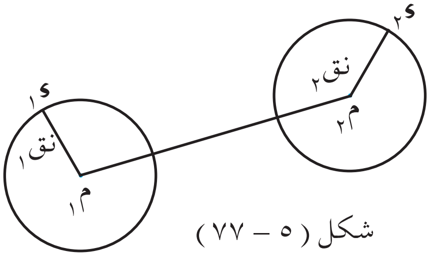
هناك ثلاث حالات للأوضاع النسبية لدائرتين وهي :

أولاً : دائرتان منفصلتان :

في هـذه الحالـة لاتوجـد أي نقطـة مشتـركـة بين الدائرتين أي أن :

$م_١ \cap م_٢ = \Phi$ ويقال عنهما دائرتان منفصلتان وفيهما حالتان هما :

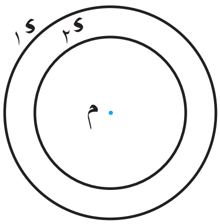
الحالة الأولى : الدائرتـان متباعدتـان وأن خط المركزين (البعد بين المركزين) $م_١ م_٢$ يكون : أكبر من مجموع طولي نصفي القطرين للدائرتين . أي أن $| م_١ م_٢ | > نق_١ + نق_٢$ [انظر الشكل (٥ – ٧٧)] .



شكل (٥ – ٧٧)

الحالة الثانية : إحداهما تحوى الأخرى وبالتالي .

إما أن تشتركا في المركز، وفي هذه الحالة نجد أن خط المركزين يكون: $| م_١ م_٢ |$ = صفراً [انظر الشكل (٥ – ٧٨)] .

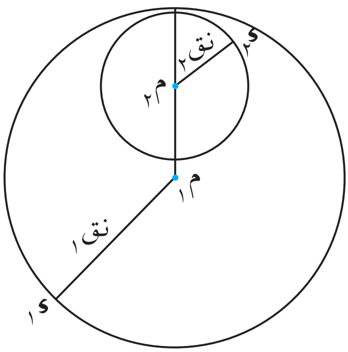


شكل (٥ – ٧٨)

وإما أنهما مختلفتا المركزين، وفي هذه الحالة خط المركزين يكون أصغر من مجموع نصفي قطريهما أي أن :

$| م_١ م_٢ | < نق_١ + نق_٢$

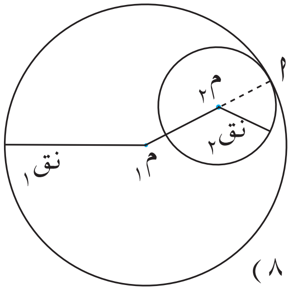
[انظر الشكل (٥ – ٧٩)].



شكل (٥ – ٧٩)

ثانياً : دائرتان متماستان :

في هذه الحالة توجد نقطة واحدة مشتركة (نقطة تماس) بين الدائرتين $م_١$ ، $م_٢$ أي أن : $م_١ \cap م_٢ = \{ أ \}$ حيث أ نقطة التماس ، وفي هذه الحالة يقال أن الدائرتين متماستان وهناك حالتان هما :

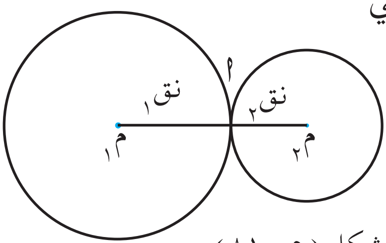


شكل (٥ – ٨٠)

الحالة الأولى : الدائرتان متماستان من الداخل

في نقطة أ [انظر الشكل(٥–٨٠)]

فيكون |م$_1$م$_2$| = نق$_1$ − نق$_2$



شكل (٥ –٨١)

الحالة الثانية : الدائرتان متماستان من الخارج في

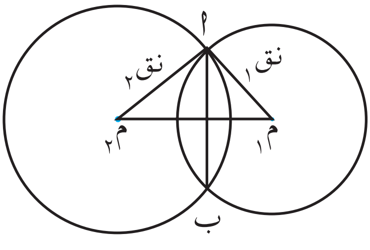
نقطة أ [انظر الشكل(٥–٨١)]

فيكون |م$_1$م$_2$| = نق$_1$ + نق$_2$

ثالثاً : دائرتان متقاطعتان :

في هذه الحالة توجد نقطتان مشتركتان أو أكثر بين الدائرتين ، وفيها حالتان :

الحالة الأولى :الدائرتان المتقاطعتان بنقطتين فقط هما أ ، ب



شكل (٥ – ٨٢)

[انظر الشكل(٥–٨٢)] ،

م$_1$ $\cap$ م$_2$ = { أ ، ب } حيث

أ ، ب نقطتا التقاطع ويكون :

|م$_1$م$_2$| < نق$_1$ + نق$_2$

ويسمى $\overline{\text{أب}}$ وتر مشترك للدائرتين.

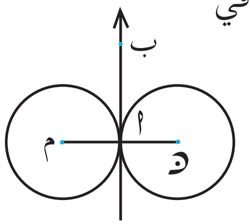
الحالة الثانية :الدائرتان متقاطعتان بأكثر من نقطتين ، فهما متطابقتان ، أي أن :

م$_1$ $\cap$ م$_2$ = م$_1$ $\cup$ م$_2$ ، ويكون |م$_1$م$_2$| = صفراً

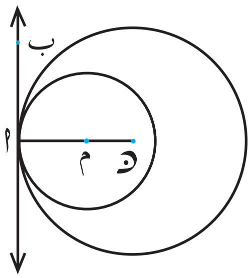
مبرهنة (٥ – ١٣) :

نقطـــة التمـاس لدائرتين تقـع على خـــط المـركزيـن .

المعطيات : م ، ن دائرتان متماستان في النقطـة ا [انظر الشكلين (٥–٨٣ا، ب)].



شكل (٥ – ٨٣ا)



شكل (٥ – ٨٣ب)

المطلوب : إثبات أن :

م، ا ، ن على استقامة واحدة

البرهان :

∵ $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ مماس مشترك للدائرتين عند ا

∴ ق (∡ ب ا ن) = ٩٠°

ق (∡ ب ا م) = ٩٠°

∴ ق (∡ ب ا ن) + ق (∡ ب ا م) = ١٨٠° [انظر الشكل (٥–٨٣ا)]

∴ ∡ ب ا ن منطبقة على ∡ ب ا م [انظر الشكل (٥ – ٨٣ ب)]

∴ م ، ا ، ن على استقامة واحدة ،

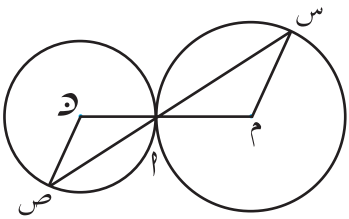
وحيث أن $\overline{\text{م ن}}$ هو خط المركزين ،

∴ النقطة ا (نقطة التماس) تقع على خط المركزين . وهو المطلوب .

مثال (١)

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج في نقطة ا . رسم $\overline{\text{س ص}}$ يمر بالنقطة ا بحيث يقطع الدائرة م في س ، الدائرة ن في ص ، أثبت أن : $\overline{\text{س م}}$ // $\overline{\text{ص ن}}$.

المعطيات : م ، ه دائرتان متماستان من الخارج في نقطة ٫ ، $\overline{\text{س ص}}$ يمر بالنقطة ٫، يقطع م في س، ه في ص .



شكل (٥ – ٨٤)

المطلوب : إثبات أن : $\overline{\text{س م}}$ // $\overline{\text{ص ه}}$.

العمل : نرسم خط المركزين $\overline{\text{م ه}}$ [انظر الشكل (٥ – ٨٤)] .

البرهان : | ٫ م | = | م س | = نق

∴ ق (∡ م س ٫) = ق (∡ م ٫ س) . . . (١) [Δ م س ٫ متساوي الساقين]

بالمثل ق (∡ ه ص ٫)= ق (∡ ه ٫ ص) . . . (٢) [Δ ه ص ٫ متساوي الساقين]

ولكن ق (∡ م ٫ س) = ق (∡ ه ٫ ص) . . . (٣) (بالتقابل بالرأس)

بمقارنة (١) ، (٢) ، (٣) نحصل على أن :

ق (∡ م س ٫) = ق (∡ ه ص ٫) وهما متبادلتان .

∴ $\overline{\text{س م}}$ // $\overline{\text{ص ه}}$ وهو المطلوب .

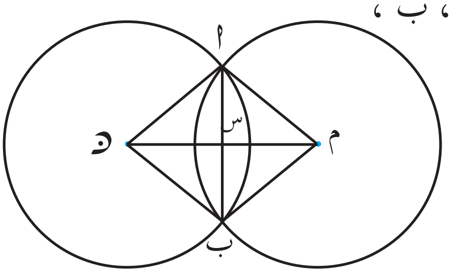
مبرهنة (٥ – ١٤) :

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه .

المعطيات : م، ه دائرتان متقاطعتان في ٫ ، ب ، $\overline{\text{م ه}}$ يقطع الوتر المشترك $\overline{\text{٫ ب}}$ في س .

المطلوب : إثبات أن :

$\overline{\text{م ه}}$ ⊥ $\overline{\text{٫ ب}}$ وينصفه .



شكل (٥ – ٨٥)

العمـــل : نرسم $\overline{أم}$ ، $\overline{بم}$ ، $\overline{أ ن}$ ، $\overline{ب ن}$ [انظر الشكل (٥ – ٨٥)].

البرهـان : $\Delta\Delta$ أ م ن ، ب م ن فيهما
$|أم| = |ب م| =$ نق$_١$
$|أ ن| = |ب ن| =$ نق$_٢$
$\overline{م ن}$ ضلع مشترك

$\therefore$ Δ أ م ن $\cong$ Δ ب م ن .

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ أ م ن) = ق ($\measuredangle$ ب م ن)

$\because$ Δ أ م ب متساوي الساقين فيه ($|أم| = |ب م|$) ، $\overline{م س}$ منصف زاوية الرأس م .

$\therefore$ $\overline{م س} \perp \overline{أب}$ وينصِّفه (مبرهنة)

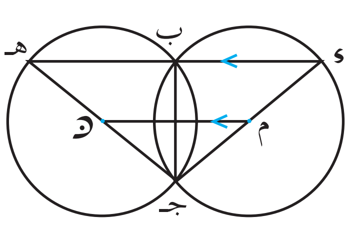
$\therefore$ $\overline{م ن} \perp \overline{أب}$ وينصِّفه وهو المطلوب .

مثال (٢)

الدائرتان م ، ن متقاطعتان في ب ، جـ ، رسم $\overleftrightarrow{ءهـ}$ يمر بالنقطة ب ، ويوازي $\overline{م ن}$ فقطع الدائرتين م ، ن في ء ، هـ على التوالي .

أثبت أن : ١) $\overline{ب جـ} \perp \overline{ءهـ}$ ٢) $|ءهـ| = ٢ |م ن|$.

المعطيات : م، ن دائرتان متقاطعتان في ب ، جـ ، $\overline{ءهـ}$ يمر بالنقطة ب ويقطع م في ء ، ن في هـ ، $\overline{ءهـ} \parallel \overline{م ن}$ [انظر الشكل (٥–٨٦)].



شكل (٥ – ٨٦)

المطلوب : إثبات أن : أولاً : $\overline{ب جـ} \perp \overline{ءهـ}$ ثانياً : $|ءهـ| = ٢ |م ن|$.

البرهان : ∵ $\overline{\text{ب جـ}}$ وتر مشترك (معطى)

∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ وينصّفه (مبرهنة)

∵ $\overline{\text{م ن}} \parallel \overline{\text{ء هـ}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{ء هـ}}$ (وهو المطلوب أولاً) .

في Δ جـ ء هـ : $\overline{\text{م ن}} \parallel \overline{\text{ء هـ}}$ ، $\overline{\text{م ن}}$ ينصف $\overline{\text{ء جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$

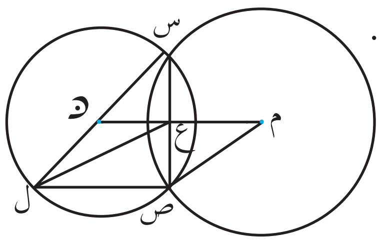
∴ | م ن | = $\frac{1}{2}$ | ء هـ | .

∴ | ء هـ | = ٢ | م ن | وهو المطلوب ثانياً .

مثال (٣)

م ، ن دائرتان متقاطعتان في س ، ص ، رسم $\overline{\text{م ن}}$ فقطع $\overline{\text{س ص}}$ في ع بحيث كان | م ع | = ٢ | ع ن | ، ثم رسم $\overleftrightarrow{\text{س ن}}$ ومد حتى لاقى محيط الدائرة ن في ل .

أثبت أن : الشكل م ص ل ع متوازي أضلاع .



شكل (٥ –٨٧)

المعطيات : م ، ن دائرتان متقاطعتان في س ، ص

$\overline{\text{م ن}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ يتقاطعان في ع

| م ع | = ٢ | ع ن |

رسم $\overline{\text{س ن}}$ ومد حتى لاقى محيط الدائرة ن في ل [انظر الشكل (٥–٨٧)] .

المطلوب : إثبات أن : الشكل م ص ل ع متوازي أضلاع .

البرهان :

$\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{س ص}}$ وينصّفه (مبرهنة)

| س ع | = | ع ص |

في Δ س ص ل : $\overline{\text{ع د}}$ ينصف $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ل}}$

$\therefore$ $\overline{\text{ع د}}$ // $\overline{\text{ص ل}}$ ، $|$ع د$| = \frac{1}{2}$ $|$ص ل$|$

$\therefore$ $\overline{\text{م د}}$ // $\overline{\text{ص ل}}$ ..... (١)

، $\because$ $|$م ع$|$ = ٢ $|$ع د$|$ (معطى)

$\therefore$ $|$م ع$|$ = $|$ص ل$|$ ..... (٢)

في الشكل م ص ل ع :

من (١) : $\overline{\text{م ع}}$ // $\overline{\text{ص ل}}$

ومن (٢) $|$م ع$|$ = $|$ص ل$|$.

$\therefore$ الشكل م ص ل ع متوازي أضلاع وهو المطلوب .

تمارين ومسائل

[١] دائرتان متماستان ، نصف قطريهما ٣سم ، ٢سم ، ما المسافة بين مركزيهما

أ) إذا كانتا متماستين من الداخل . ب) إذا كانتا متماستين من الخارج .

[٢] م ، د دائرتان متماستان من الخارج في ب ، س نقطة خارجهما رسم منها المماس المشترك $\overline{\text{س ب}}$ والمماس $\overline{\text{س أ}}$ للدائرة م ، والمماس $\overline{\text{س جـ}}$ للدائرة د . أثبت أن : $|$س أ$|$ = $|$س ب$|$ = $|$س جـ$|$.

[٣] م ، د دائرتان متماستان من الخارج في أ ، رسم $\overline{\text{ب جـ}}$ المماس المشترك لهما مس د في ب ، ومس م في جـ . أثبت أن :

أ) المماس المشترك للدائرتين عند أ ينصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

ب) ق ($\measuredangle$ ب أ جـ) = 90°

[٤] في الشكل (٥ – ٨٨) : م ، ن

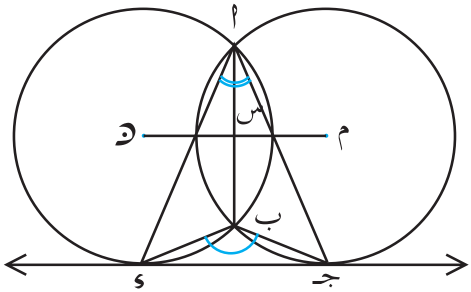
دائرتان متقاطعتان في ا ، ب،

جـ ء مماس مشترك لهما ،

وخط المركزين م ن يقطع الوتر

المشترك ا ب في النقطة س .

أثبت أن :



شكل (٥ – ٨٨)

ق (∠ جـ ا ء) + ق (∠ جـ ب ء) = ١٨٠ْ .

[٥] في الشكل (٥ – ٨٩) : م ، ن

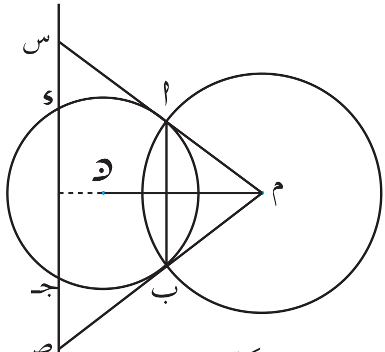
دائرتان متقاطعتان في ا ، ب ،

رسم الوتر ء جـ في الدائرة

الصغرى ن موازٍ ا ب حيث

ا ب ، ء جـ في جهتين

مختلفتين من ن مركز الدائرة



شكل (٥ –٨٩)

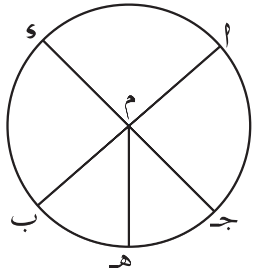
الصغرى . رسم م ا ومد حتى لاقى امتداد جـ ء في س ، ورسم م ب ومد حتى لاقى امتداد ء جـ في ص ، أثبت أن :

أولاً : امتداد م ن ينصف جـ ء .   ثانياً : ء س = جـ ص .

[٦] م ، ن دائرتان متقاطعتان في ا ، ب ، فإذا كان : نق$_{م}$ = ٣سم ، نق$_{ن}$ = ٤سم ، والبعد المركزى لهما = ٥سم . برهن أن :

ا) م ا مماس للدائرة ن .   ب) ن ا مماس للدائرة م .

٥ : ١٠ تمارين ومسائل عامة



شكل (٥ – ٩٠)

[١] حدد في الشكل (٥ – ٩٠)

ا) ثلاثة أنصاف أقطار .

ب) قطرين .

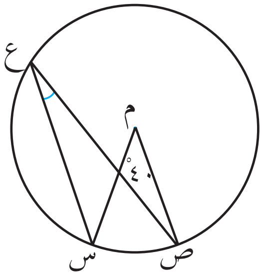
جـ) نصفي دائرة .

ء) أربعة أقواس .

[٢] $\overline{اب}$ وتر في دائرة طوله ٢٤سم ، وبعده عن المركز ٥سم ، $\overline{جـء}$ وتر آخر في الدائرة بعده عن المركز ١٢سم ، احسب طول $\overline{جـء}$.

[٣] $\overline{اب}$ ، $\overline{اجـ}$ وتران في الدائرة م ، ق(∢ ب ا جـ)= ٤٥° ، ء ، هـ منتصفا $\overline{اب}$ ، $\overline{اجـ}$ على الترتيب . رسم $\overline{ءم}$ فقطع $\overline{اجـ}$ في و ، أثبت أن :

| م هـ | = | هـ و | .

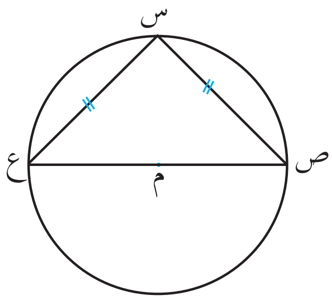


شكل (٥ – ٩١)

[٤] في الشكل (٥ – ٩١) : م مركز الدائرة ، ق (∢ ص م س)= ٤٠°

$\overline{مص}$ // $\overline{عس}$ ، أوجـــد

ق (∢ ص ع س)، ق (∢ س ص ع)



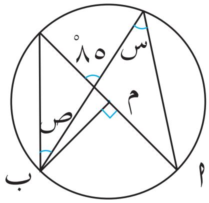
شكل (٥ – ٩٢)

[٥] في الشكل (٥ – ٩٢) : س ص ع مثلث فيه | س ص | = | س ع | .

$\overline{صع}$ قطر الدائرة (م). أوجد

ق(∢ س ص ع)،ق(∢ س ع ص).

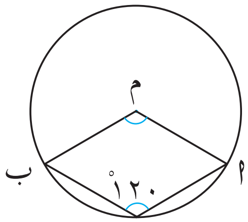
[٦] في الشكل (٥–٩٣): م مركز الدائرة، ق (∢ ا م ب) = ٩٠° . أوجد قيم س ، ص بالدرجات .



شكل (٥ – ٩٣)

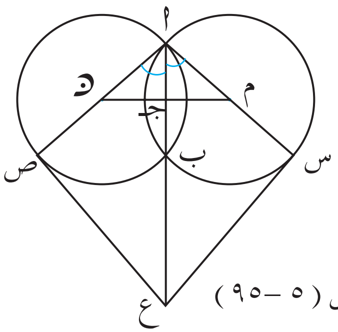
[٧] اثبت أن الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري متكاملتان .

[٨] في الشكل (٥ –٩٤): م مركز الدائرة ، أوجد ق (∢ ا م ب) .



شكل (٥ –٩٤)

[٩] في الشكل (٥–٩٥): م ، ن دائرتان متقاطعتان في ا ، ب . ا س قطر في الدائرة م ، ا ص قطر في الدائرة ن ، مد ا ب على استقامته إلى النقطة ع . فإذا كان: ع س مماساً للدائرة م ، ع ص مماساً للدائرة ن . وإذا كان م ن يقطع ا ب في جـ ، ق (∢ س ا ب) = ق (∢ ص ا ب) ، أثبت أن :



شكل (٥ –٩٥)

ا) الشكل ع س ا ص رباعي دائري. ب) النقاط س ، ب ، ص على استقامة واحدة.

[١٠] ا ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ، فإذا كان ا جـ ينصف كلاً من الزاويتين ا ، جـ ، فأثبت أن ا جـ قطر في الدائرة .

[١١] ا ب جـ مثلث مرسوم في دائرة فيه: ق (∢ ا) = ٤٠°، ق (∢ جـ) = ٨٠°، رسم س ء مماساً للدائرة وماراً بالنقطة ا بحيث ا س ، ا ء في جهتين مختلفتين من ا جـ ، عينت النقطة ن على ا س بحيث | ا ن | = | ا جـ |

المطلوب : أ) أوجد ق (∡ جـ أ د) . ب) برهن أن $\overline{\text{جـ د}}$ مماساً للدائرة .

[١٢] م ، د دائرتان متماستان من الداخل في النقطة أ ، فإذا كان نصف قطر الدائرة م يساوى قطر الدائرة د ، كان $\overline{\text{ب جـ}}$ قطراً في الدائرة (م) ويمس الدائرة د عند م وكان $\overline{\text{أ جـ}}$ يقطع الدائرة د في ء ، أثبت أن :

أ) ق (∡ ب أ جـ) = ٩٠° . ب) $\overline{\text{م أ}}$ ينصف ∡ ب أ جـ .

جـ) ق (∡ أ م ء) = ٤٥° .

[١٣] م ، د دائرتان متماستان من الخارج في أ . رسم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ماراً بالنقطة أ ويقطع م في ب ، ويقطع د في جـ ،

أثبت أن : القطر $\overline{\text{ب ص}}$ // القطر $\overline{\text{جـ س}}$.

٥ : ١١ اختبار الوحدة

[١] ضع دائرة حول رقم الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

أ) تستخدم العلاقة $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{س}^\circ}{٣٦٠}$ عند حساب :

١) مساحة القطاع الدائري. ٢) طول قوس القطاع الدائري الصغير.

٣) طول قوس القطاع الدائري الكبير .

ب) قياس الزاوية المحيطية يساوي :

١) ضعف قياس قوسها المقطوع . ٢) قياس قوسها المقطوع .

٣) نصف قياس قوسها المقطوع .

جـ) قياس الزاوية المركزية يساوي :

١) ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس .

٢) نصف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس .

٣) قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس .

ى) الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون :

١) زاوية منفرجة . ٢) زاوية حادة . ٣) زاوية قائمة .

هـ) الزاوية المركزية المقابلة لقوس = ١٨٠° :

١) زاوية قائمة . ٢) زاوية مستقيمة . ٣) زاوية حادة.

و) الزاويتان المحيطيتان المرسومتان في قوس واحد من الدائرة تكونان :

١) متطابقتان . ٢) متكاملتان . ٣) متتامتان .

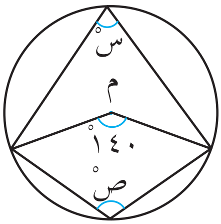
[٢] ‾ا ب وتر في الدائرة م ، نقطة ى منتصف ‾ا ب . ق(∠ م ا ى) = ٢٥° .

أوجد ق(∠ ا م ى) .

[٣] في الشكل (٥ – ٩٦) :

م مركز الدائرة ، أوجد

قيم س ، ص .



شكل (٥ – ٩٦)

[٤] ا ب جـ ى شكل رباعي دائري، ‾ا ب قطر في الدائرة . ق(∠ ب ا جـ) = ٣٥°

أوجد ق(∠ ا ى جـ) .

[٥] م ، ن دائرتان متقاطعتان في ا ، ب ، فإذا كانت س نقطة على محيط (م) ، ورسم منها مماس يقطع امتداد ‾ب ا في النقطة ع وكان ‾م ن يقطع ‾ا ب في ى . المطلوب :

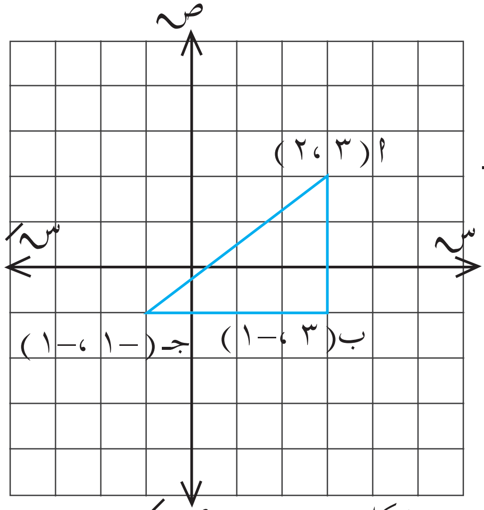
ا) أثبت أن الشكل س م ى ع رباعي دائري .

ب) إذا كان ق(∠ ا ب س) = ٣٠° ، فأثبت أن Δ ا م س متساوى الأضلاع .

الوحدة السادسة
الهندسة الإِحداثية والتحويلات

٦ : ١ البعد بين نقطتين

نشاط (١)



شكل (٦ – ١)

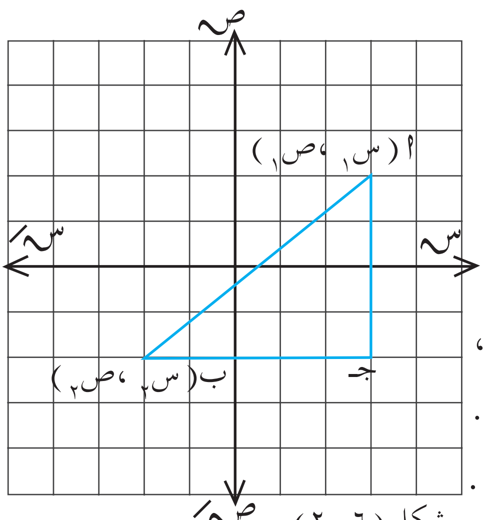
في مستوى إِحداثي،ارسم Δ أ ب جـ حيث أ (٣ ، ٢)، ب (٣ ، –١)، جـ (–١ ، –١) [انظر الشكل (٦–١)].

– ما نوع المثلث أ ب جـ ؟

– ما طول $\overline{\text{أ ب}}$ ؟ ما طول $\overline{\text{ب جـ}}$ ؟

– استخدم مبرهنة فيثاغورس لحساب طول $\overline{\text{أ جـ}}$.

نشاط (٢)



شكل (٦ – ٢)

لتكن أ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ب (س$_{٢}$، ص$_{٢}$)،[انظر الشكل (٦–٢)]

–ارسم من أ مستقيماً يوازي محور الصادات، ومن ب مستقيماً يوازي محور السينات.

لتكن جـ نقطة تقاطع المستقيمين .

– ما إِحداثي النقطة جـ بدلالة إِحداثيات ٲ ، ب ؟

– ما نوع المثلث ٲ ب جـ ؟

– ما طول $\overline{\text{ب جـ}}$ ؟ وما طول $\overline{\text{ٲ جـ}}$ ؟

– استخدم مبرهنة فيثاغورس لحساب طول $\overline{\text{ٲ ب}}$ ،

مما سبق نستنتج أنه :

إِذا كان ٲ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) فإِن :

$$|\text{ٲ ب}| = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2} \ .$$

مثال (١)

أوجد البعد بين النقطتين ٲ ، ب في الحالات الآتية :

١) ٲ (٥ ، ٢) ، ب(–٢ ، –٢)   ٢) ٲ (–٣ ، ١)، ب (–٥ ، –٢) .

الحــل : [١] البعد بين نقطتين ٲ، ب =

$$|\text{ٲ ب}| = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-٢ - ٥)^2 + (-٢ - ٢)^2}$$

$$= \sqrt{(-٧)^2 + (-٤)^2} = \sqrt{٤٩ + ١٦} = \sqrt{٦٥}$$ وحدة طولية

٢) $|\text{ٲ ب}| = \sqrt{[-٥ - (-٣)]^2 + (-٢ - ١)^2}$

$$= \sqrt{(-5+3)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + 9} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$ وحدة طولية

مثال (٢)

لتكن أ (٢ ، ٢) ، ب (٥ ، −١) ، جـ (١ ، −٥) . برهن أن Δ أ ب جـ قائم الزاوية .

الحل :

$|\text{أب}| = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$ وحدة طولية،

$|\text{ب جـ}| = \sqrt{(1-5)^2 + [-5-(-1)]^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$ وحدة طولية،

$|\text{أجـ}| = \sqrt{(1-2)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$ وحدة طولية،

$\because\ |\text{أب}|^2 + |\text{ب جـ}|^2 = |\sqrt{18}|^2 + |\sqrt{32}|^2 = 18 + 32 = 50$

، $|\text{أجـ}|^2 = 50$

، $|\text{أب}|^2 + |\text{ب جـ}|^2 = |\text{أجـ}|^2$

$\therefore\ \Delta$ أ ب جـ قائم الزاوية في ب .

مثال (٣)

إذا كانت أ (٥ ، ٣) ، ب (٤ ، −١) ، جـ (−٢ ، −٢) ، ء (−١ ، ٢)، فبرهن أن الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، ثم أوجد طول كلٍ من قطريه .

الحل :

$$|\text{أ ب}| = \sqrt{(٤ - ٥)^{٢} + (-١ - ٣)^{٢}} = \sqrt{١ + ١٦} = \sqrt{١٧}$$

$$|\text{ب جـ}| = \sqrt{(-٢ - ٤)^{٢} + (-٢ + ١)^{٢}} = \sqrt{٣٦ + ١} = \sqrt{٣٧}$$

$$|\text{جـ ء}| = \sqrt{(-١ + ٢)^{٢} + (٢ + ٢)^{٢}} = \sqrt{١ + ١٦} = \sqrt{١٧}$$

$$|\text{ء أ}| = \sqrt{(-١ - ٥)^{٢} + (٢ - ٣)^{٢}} = \sqrt{٣٦ + ١} = \sqrt{٣٧}$$

لاحظ أن :

$|\text{أ ب}| = |\text{جـ ء}|$ ، $|\text{ب جـ}| = |\text{ء أ}|$.

$\therefore$ الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع لأن فيه كل ضلعين متقابلين متساويان .

$$|\text{أ جـ}| = \sqrt{(-٢ - ٥)^{٢} + (-٢ - ٣)^{٢}} = \sqrt{٤٩ + ٢٥} = \sqrt{٧٤}$$

$$|\text{ب ء}| = \sqrt{(-١ - ٤)^{٢} + (٢ + ١)^{٢}} = \sqrt{٢٥ + ٩} = \sqrt{٣٤}$$

تمارين ومسائل

[١] أوجد البعد بين النقطتين في كل زوج مما يلي :

أ) س (٣ ، ٠) ، ص (٤ ، ٤)   ب) س (٢ ، −٤) ، ص (٣ ، ٥)

جـ) س(−٢ ، ٠) ، ص(١ ، ٤)   ء) س(٣ ، −٤) ، ص(٣ ، −٥)

هـ) س(−١ ، −٥) ، ص(٤ ، ٢)   و) س(٤ ، ٧) ، ص(−١ ، −٦)

[٢] إذا كانت أ (–٥ ، ٣) ، ب (٣ ، ٣) ، جـ (٣ ، –٣) فبين أن Δ أ ب جـ قائم الزاوية ، وحدد رأس الزاوية القائمة .

[٣] إذا كانت ء (–١ ، –١) ، هـ (٣ ، –١) ، و (١ ، ٤) ، فبرهن أن Δ ء هـ و متساوي الساقين .

[٤] إذا كانت س (١ ، ٥) ، ﻫ (٦ ، –٢) ، ل (٤ ، –٥) ، ط (–١ ، ٢)، فبرهن أن الشكل س ﻫ ل ط متوازي أضلاع .

[٥] أثبت أن النقاط أ (٤ ، ٧) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٤ ، –١) ، ء (٦ ، ٣) هي رؤوس معين ، احسب مساحته .

[٦] أثبت أن النقاط هـ (١ ، ٣)، و (٤ ، –١) ، ل (–٤ ، –٧)، ط (–٧ ، –٣) هي رؤوس مستطيل ، أوجد محيطه ومساحته .

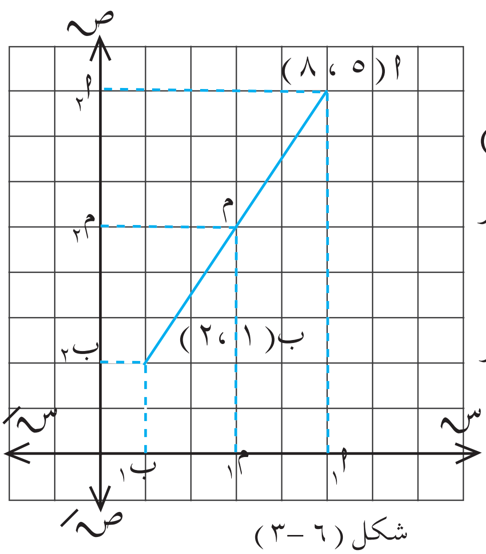
٦ : ٢ إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة

نشاط (١)

لتكن أ (٥ ، ٨)، ب (١ ، ٢) نقطتين في مستوى إحداثي [انظر الشكل (٦–٣)] ،

– اسقط من أ، ب عمودين على محور السينات يقطعانه في $أ_١$ ، $ب_١$.

– لتكن $م_١$ هي منتصف $\overline{أ_١ ب_١}$ ما إحداثي النقطة $م_١$ ؟



شكل (٦ – ٣)

– أقم من $م_1$ عموداً على محور السينات، يلاقي $\overline{أ ب}$ في م . ما الإِحداثي السيني للنقطة م ؟

– أسقط من أ ، ب عمودين على محور الصادات تقطعه في النقطتين $أ_2$ ، $ب_2$ على التوالي .

– لتكن $م_2$ نقطة منتصف $\overline{أ_2 ب_2}$ ، ما إِحداثي النقطة $م_2$.

– أقم من $م_2$ عمودياً على محور الصادرات يلاقي $\overline{أ ب}$ في نقطة د .

ما الإِحداثي الصادي لنقطة د .

– هل تنطبق نقطة م على نقطة د ؟ تلاحظ أنهما نقطة واحدة .

– ما إِحداثي النقطة م تلاحظ أن نقطة م منتصف $\overline{أ ب}$.

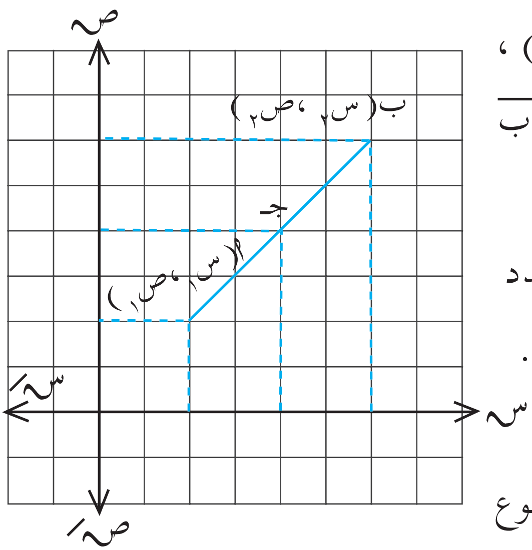
نشاط (٢)

– اختر نقطتين مثل أ ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$)، ثم ارسم $\overline{أ ب}$ [انظر الشكل (٦ – ٤)] ،

– باستخدام المسطرة أو الفرجال حدد منتصف $\overline{أ ب}$ ولتكن النقطة جـ .

– أوجد إِحداثي النقطة جـ .

– قارن إِحداثي النقطة جـ بمجموع الإِحداثيين السينيين والصاديين للنقطتين أ ، ب .



شكل (٦ – ٤)

مما سبق نستنتج أن :

إذا كانت ا ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، فإن إحداثي منتصف $\overline{ا ب}$

ولتكن م هي ($\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$) .

مثال (١)

أوجد منتصف $\overline{ا ب}$ في كلٍ من الحالتين التاليتين :

١) ا(١ ، ٢) ، ب (٦ ، ١٤)   ٢) ا(–٨ ، ٥) ، ب (٤ ، –٣).

الحل :

١) م ($\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$) = م ($\frac{١ + ٦}{٢}$ ، $\frac{٢ + ١٤}{٢}$) = م ($\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{١٦}{٢}$)

٢) م ($\frac{–٨ + ٤}{٢}$ ، $\frac{٥ – ٣}{٢}$) = م ($\frac{–٤}{٢}$ ، $\frac{٢}{٢}$) = م (–٢ ، ١) .

مثال (٢)

إذا كان ا ب جـ ء متوازي أضلاع ، حيث ا(٥ ، ٥) ، ب (٣ ، ١) ،
جـ(–٣ ، –١) ، فأوجد إحداثي النقطة ء .

الحل :

لتكن م نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع ،

∴ م منتصف كلٍ من $\overline{ا جـ}$ ، $\overline{ب ء}$.

، ∵ أ (٥ ، ٥) ، جـ (−٣ ، −١)

∴ م ($\frac{٥ - ٣}{٢}$ ، $\frac{٥ - ١}{٢}$) = م ($\frac{٢}{٢}$ ، $\frac{٤}{٢}$) = م (١ ، ٢)

∵ ب (٣ ، ١) ، لتكن ء (س ، ص)

∴ م ($\frac{س + ٣}{٢}$ ، $\frac{ص + ١}{٢}$) = م (١ ، ٢)

∴ $\frac{س + ٣}{٢}$ = ١ ومنها س + ٣ = ٢ ، س = −١

، $\frac{ص + ١}{٢}$ = ٢ ومنها ص + ١ = ٤ ، ص = ٣

فتكون ء (−١ ، ٣) .

تمارين ومسائل

[١] أوجد إِحداثي نقطة منتصف $\overline{\text{س ص}}$ في كلٍ من الحالات الآتية :

أ) س (٤ ، ٥) ، ص (−٢ ، ١)

ب) س (−٥ ، −٣) ، ص (٠ ، −١)

جـ) س (١,٥ ، ٢) ، ص (− ٣,٥ ، −٣)

ء) س (٢,٥ ، ٠,٥) ، ص (−٢ ، −٢,٣) .

[٢] لتكن س (−٢ ، −٤) ، ص (٤ ، ٢) ، ع (٦ ، ٠) ، ولتكن م نقطة منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، د نقطة منتصف $\overline{\text{ص ع}}$، برهن أن |م د| = $\frac{١}{٢}$ |س ع| .

[٣] أ ب جـ ء مستطيل فيه : أ (٣ ، ٢) ، ب (٣ ، −١) ، جـ(−٢ ، −١)، ء (−٢ ، ٢) ، برهن أن القطرين $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كلٌ منهما الآخر.

[٤] أ ب جـ ء معين فيه : أ (٤ ، ٥) ، ب (١ ، ١) ، جـ (−٣ ، −٢) ، ء (٠ ، ٢) ، فإذا كانت هـ ، و ، م ، ن منتصفات $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء أ}}$ على الترتيب ، فما نوع الشكل هـ و م ن ؟

٦ : ٣ الانعكاس

درست في الصف السابع الانعكاس في أحد المحورين الإحداثيين ، تذكر أن :

– صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس في محور السينات هي النقطة (س ، − ص)

– صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس في محور الصادات هي النقطة (− س ، ص) .

تدريب (١)

أوجد صورة كلٍ من النقاط : أ (٢ ، ١) ، ب (−١ ، ١) ، جـ (٠ ، −٤) ، ء (٣ ، ٠) بالانعكاس في محور السينات مرة وفي محور الصادات مرة أخرى .

في هذا البند ستتعرف على الانعكاس في مستقيم (ليس بالضرورة أن يكون هذا المستقيم أحد محوري الإحداثيات) .

نشـــاط (١)

– على ورقة شفافة ، ارسم مستقيم ل ،

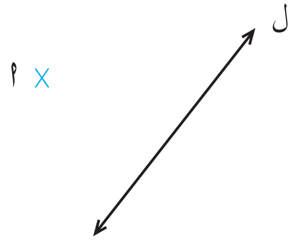
– اختـر نقطة أ خارجة عن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ [انظر الشكل (٦ – ٥)] .

– اطـوِ الورقـة حـول $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ وعين عليهـا النقطة المقابلة للنقطة أ ، سمِّها أ_1 .

– افتح الورقة ، وارسم $\overline{\text{أ}\,\text{أ}_1}$.

– حدد نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ مع $\overline{\text{أ}\,\text{أ}_1}$ ، سمِّها د .

– تحقق من أن $\overline{\text{أ}\,\text{أ}_1} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، وأن $|\text{أ د}| = |\text{أ}_1\,\text{د}|$.

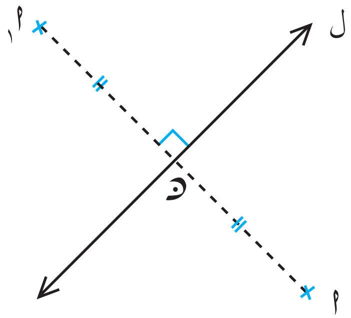


شكل (٦ –٥)

بالنشاط السابق نكون قد حددنا النقطة أ_1 صورة النقطة أ بالانعكاس في المستقيم ل ، يسمى $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ محور الانعكاس .

وبصورة عامة :

لإيجاد صورة النقطة أ بالانعكاس في المستقيـم ل ، نرسـم من أ قطعة مستقيمــة عموديــة علـى المستقيـم ل ونمدُّها على استقامتها بقـدر طولها إلى أ_1 ، فتكون أ_1 صـورة أ بالانعكاس فـي ل ، كما في الشكل (٦ – ٦) :



شكل (٦ – ٦)

مما سبق يمكن استنتاج أن :

إذا كان $أ_1$ صورة أ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$، فإن $\overline{أأ_1} \perp \overleftrightarrow{ل}$، $|أ د| = |د أ_1|$ حيث د هي نقطة تقاطع $\overline{أأ_1}$ مع $\overleftrightarrow{ل}$ والعكس صحيح .

تأمل الشكل (٦ – ٧) ، تلاحظ أن :

– صورة أ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ هي ب .

– صورة أ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{أ ب}$ هي أ نفسها .

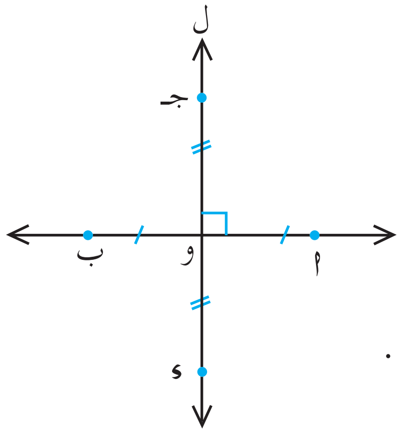
– صورة ب بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ هي أ .

– صورة جـ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{أ ب}$ هي ء .

– صورة جـ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ هي جـ نفسها .

– صورة و بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ هي و نفسها .

– صورة و بالانعكاس في $\overleftrightarrow{أ ب}$ هي و نفسها .

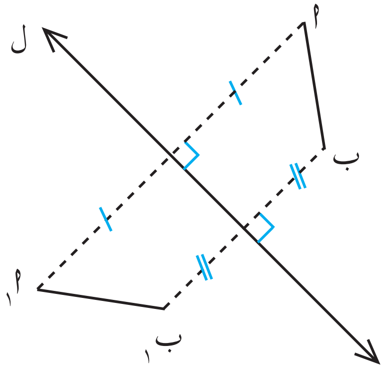


شكل (٦ – ٧)

مما سبق نجد أنه :

إذا كانت النقطة س واقعة على محور الانعكاس ، فإن صورتها هي س نفسها .

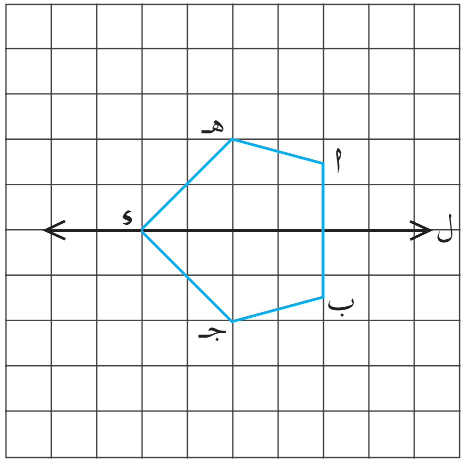
– لإيجاد صورة $\overline{أ ب}$ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ ، نوجد صورة كلٍ من أ ، ب بهذا الانعكاس ثم نصل بين الصورتين فنحصل على $\overline{أ_1 ب_1}$ ، هي صورة $\overline{أ ب}$، كما في الشكل(٦–٨) :



شكل (٦ – ٨)

تدريب (٢)

من الشكل (٦ – ٩) ، أكمل الجدول التالي ، حيث $\overleftrightarrow{ل}$ هو محور الانعكاس .



شكل (٦ –٩)

الشكل	أ	هـ	$\overline{أ هـ}$	ء	$\overline{ء هـ}$	جـ	$\overline{جـ ب}$
الصورة					$\overline{ء جـ}$		$\overline{هـ أ}$

خواص الانعكاس :

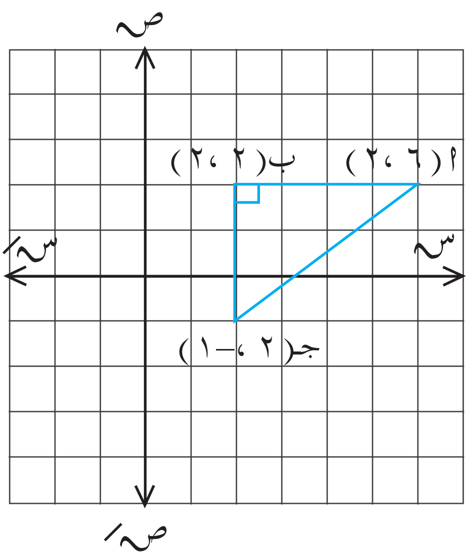
نشاط (٢)

على الشكل (٦ – ١٠) :

أ ب جـ مثلث ، إِحداثيات رؤوسه ، هي : (٦ ، ٢)، (٢ ، ٢)، (٢ ، –١) على الترتيب .

– انقل الشكل على ورقة رسم بياني ، ثم ارسم صورته بالانعكاس في محور الصادات ، سمِّها $أ_١ ب_١ جـ_١$.

– باستخدام قانون البعد بين نقطتين



شكل (٦ – ١٠)

أوجد : | أ ب | ، | ب جـ | ، | أ جـ | ، | $أ_١$ $ب_١$ | ، | $ب_١$ $جـ_١$ | ، | $أ_١$ $جـ_١$ | .

– قارن بين طول كل ضلع في Δ أ ب جـ وطول صورته في Δ $أ_١$ $ب_١$ $جـ_١$.
ماذا تستنتج بالنسبة لطول كل ضلع وطول صورته بالانعكاس ؟

– باستخدام المنقلة ، قس زوايا كلٍ من المثلثين أ ب جـ ، $أ_١$ $ب_١$ $جـ_١$.
ماذا تلاحظ بالنسبة لقياس كل زاوية وقياس صورتها بالانعكاس ؟

من النشاط السابق نستنتج أن :

١ – الانعكاس في محور يحفظ الأطوال .
٢ – الانعكاس في محور يحفظ قياس الزوايا .

مثال (١)

في الشكل (٦ – ١١) :

Δ $س_١$ $ص_١$ $ع_١$ صورة Δ س ص ع بالانعكاس في المحور $\overleftrightarrow{أ ب}$.

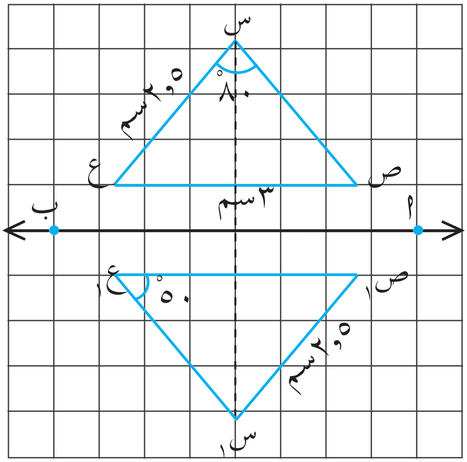
– بالاستعانة بالبيانات الموضحة على الشكل ، وباستخدام خواص الانعكاس ،

أوجد :

١) قياس كلٍ من :

∡ $س_١$ ، ∡ $ص_١$ ، ∡ ع ، ∡ ص

٢) | س ص | ، | $ص_١$ $ع_١$ | ، | $س_١$ $ع_١$ | .



شكل (٦ – ١١)

الحـل :

١) ∵ Δ س$_1$ ص$_1$ ع$_1$ صورة Δ س ص ع

∴ ق (∡ س$_1$) = ق (∡ س) = ٨٠°

، ق (∡ ص$_1$) = ١٨٠° − (٥٠° + ٨٠°) = ٥٠° (لماذا؟)

ق (∡ ع) = ق (∡ ع$_1$) = ٥٠°

، ق (∡ ص) = ق (∡ ص$_1$) = ٥٠°

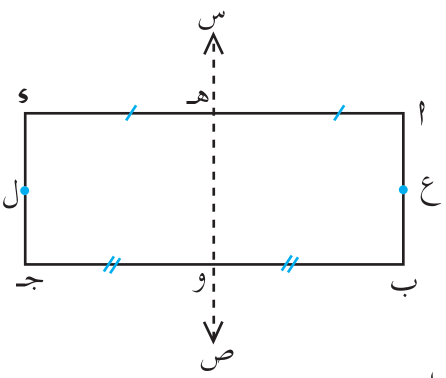
٢) | س ص | = | س$_1$ ص$_1$ | = ٢,٥ سم

| ص$_1$ ع$_1$ | = | ص ع | = ٣ سم .

| س$_1$ ع$_1$ | = ٢,٥ سم (لماذا؟)

التناظر – محور التناظر :

نشـاط (٣)



شكل (٦ – ١٢)

علـى الشـكل (٦ – ١٢):

ا ب جـ ء مستطيل .

– حدد صور النقاط ا، ع، و ، جـ، ل ، هـ بالانعكاس في المحور $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$.

– أين تقع صورة كل نقطة بالنسبة للمستطيل (داخله ، خارجه ، عليه) ؟

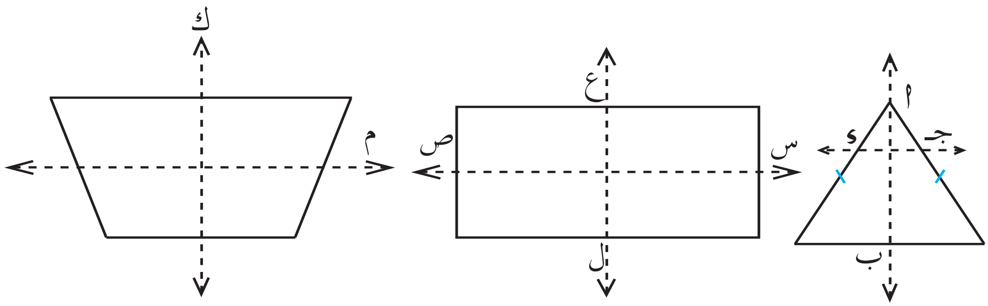
– اختر نقاطاً أخرى من المستطيـل ، تحقق من أن صورها هي نقاط على المستطيل نفسه .

تلاحظ أن صورة كل نقطة من المستطيل بالانعكاس في $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ هي نقطة على المستطيل نفسه .

من ذلك نستنتج :

إذا كانت صورة كل نقطة من شكل في المحور $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ هي نقطة على الشكل نفسه ، فإن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يسمى محور تناظر ، ونقول أن الشكل متناظر حول هذا المحور.

مثال (١) في كل شكل من الأشكال (٦ – ١٣ أ ، ب ، جـ) يوجد محورا انعكاس حدد أيهما محور تناظر للشكل .



شكل (٦ –١٣جـ) شكل (٦ –١٣ب) شكل (٦ –١٣أ)

الحل :

في الشكل (٦ – ١٣ أ) : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ محور تناظر له ، بينما $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ لا يمثل محور تناظر للشكل لأن صورة النقطة أ مثلاً بالانعكاس في $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ تقع داخل الشكل وليس عليه (تحقق من ذلك) .

– في الشكل (٦ – ١٣ ب) : كل من $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ يمثل محور تناظر للشكل .

– في الشكل (٦ – ١٣ جـ) : $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ محور تناظر له ، بينما $\overleftrightarrow{\text{م}}$ ليس كذلك . لماذا ؟

مثال (٣)

أ ب ب$_1$ أ$_1$ شكل رباعي متناظر حول محور الصادات ، إذا كانت أ (٣ ، ٧) ، ب (٧ ، ٣) . عين إحداثي أ$_1$ ، ب$_1$ ثم ارسم الشكل .

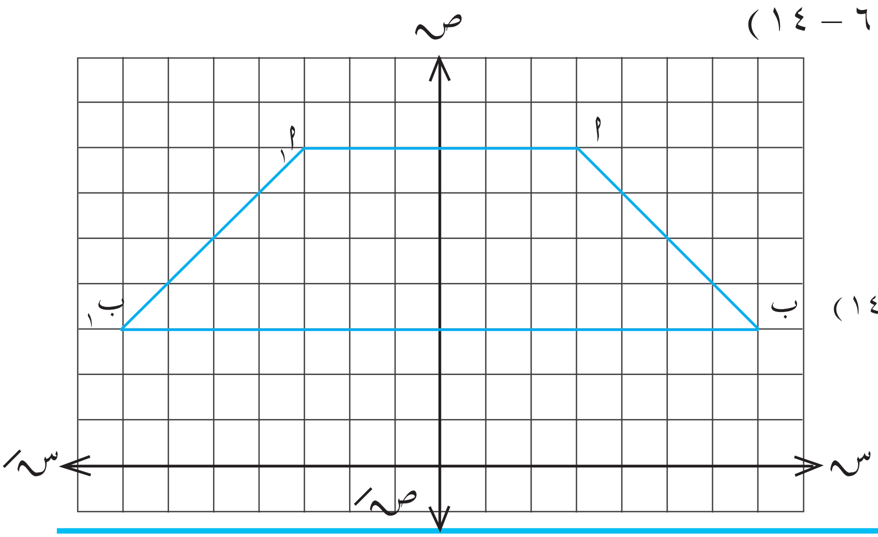
الحل :

حيث أن الشكل أ ب ب$_1$ أ$_1$ متناظر حول محور الصادات ، فإن أ$_1$ ، ب$_1$ هما صورتا أ ، ب بالانعكاس في محور الصادات .

، ∵ أ (٣ ، ٧) ∴ أ$_1$ (–٣ ، ٧)

، ∵ ب (٧ ، ٣) ∴ ب$_1$ (–٧ ، ٣)

انظر شكل (٦ – ١٤)



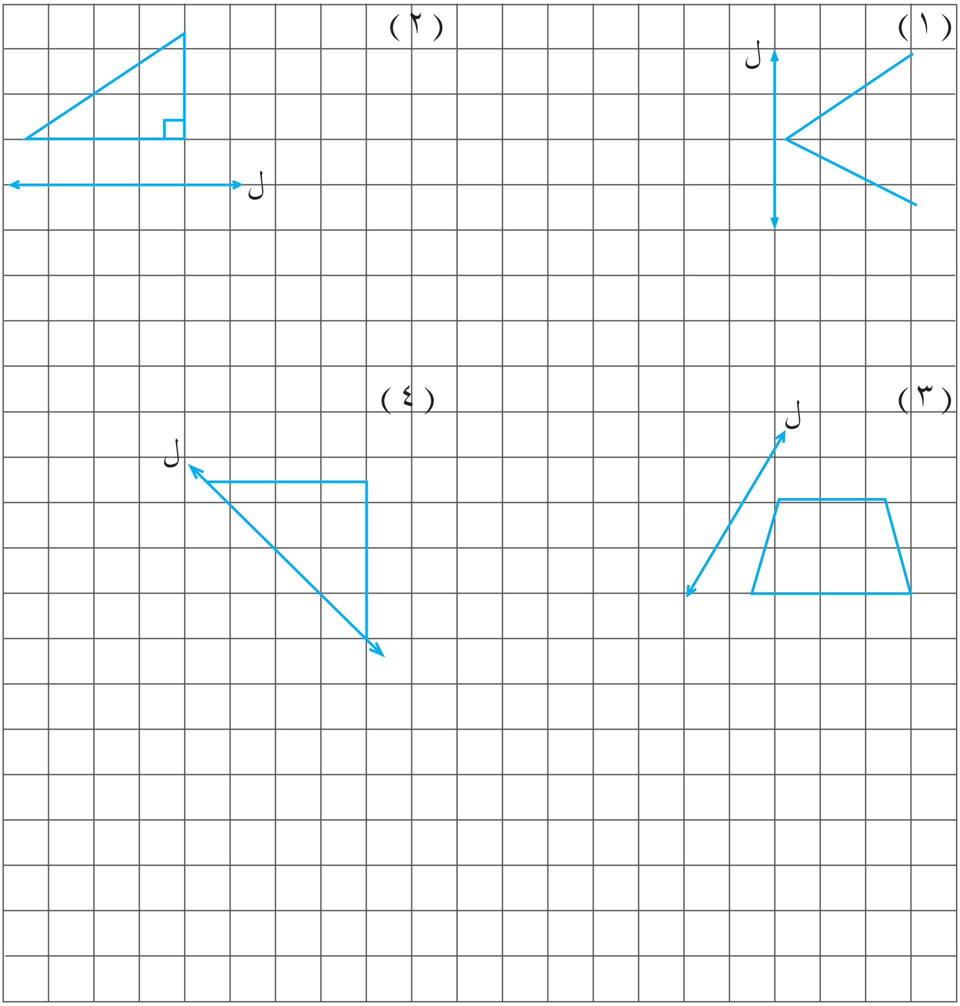
شكل (٦ – ١٤)

تمارين ومسائل

[١] أوجد صورة كلٍ من النقاط التالية : س (١ ، ٣) ، ص (٢ ، −٣) ، ع (−٣ ، −٢) ، ل (٠ ، ٤) ،

أ) بالانعكاس في محور السينات، ب) بالانعكاس في محور الصادات .

[٢] ارسم صورة كلٍ مما يأتي بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$:



[٣] ارسم صورة المثلث أ ب جـ [شكل (٦–١٥)]

بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ ، ثم أكمل ما يلي :

١■ صورة أ هي أ نفسها ، صورة ب هي . . .

٢■ صورة جـ هي جـ$_1$، صورة جـ$_1$ هي . . .

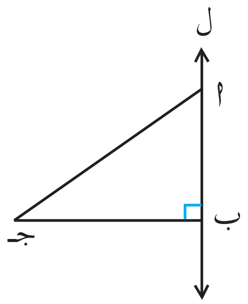
٣■ صورة $\overline{جـب}$ هي $\overline{جـ_1ب}$ ، صورة $\overline{جـ_1ب}$ هي . . .

٤■ المثلث أ جـ جـ$_1$ متساوي الساقين لأن . . .

٥■ $\overleftrightarrow{ل}$ محور تناظر المثلث . . .

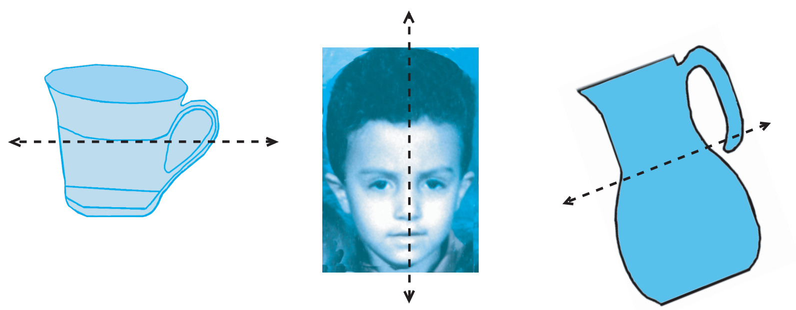
٦■ يسمى الشكل أ جـ جـ$_1$ . . . حول $\overleftrightarrow{ل}$.

٧■ ق (∢ أ ب جـ$_1$) = . . .



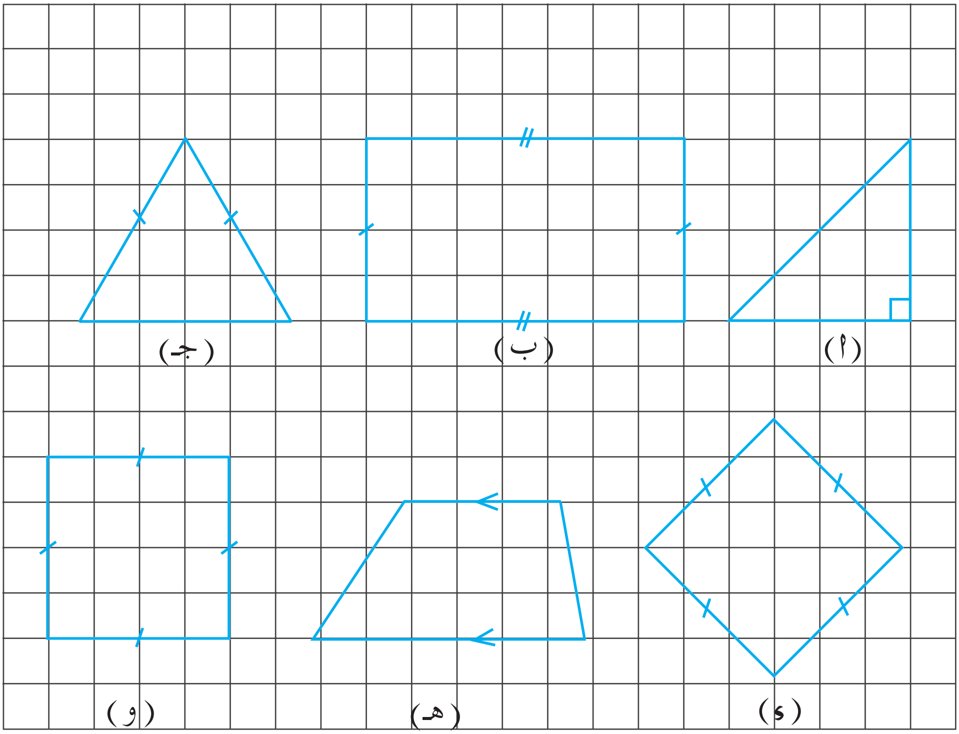
شكل (٦ –١٥)

[٤] فيما يلي :ضع علامة (√) أسفل الشكل المتناظر بالنسبة للمحور المعطى :



شكل (٦ – ١٧)

[٥] تأمل الأشكال التالية ، وعين المتناظر منها ، وارسم محور تناظر له .



[٦] كم محور تناظر لكلٍ من :

أ) المربع   ب) المستطيل   جـ) المثلث المتساوي الساقين   ء) الدائرة .

[٧] ارسم المربع الذي رؤوسه أ (٢ ، ٢) ، ب (٨ ، ٢) ، جـ (٨ ، ٨) ،

ء (٢ ، ٨) ثم ارسم صورته بالانعكاس في :

أ) المحور الصادي ص ص⁄ .

ب) المحور $\overleftrightarrow{مد}$ حيث م (٥ ، ٢) ، د (٥ ، ٨)

هل المربع أ ب جـ ء متناظر بالنسبة للمحور $\overleftrightarrow{مد}$ ؟ علل إجابتك ؟

٦ : ٤ الانســـــحــــاب

سبق وأن تعرفت على مفهوم الانسحاب .

تذكر أن :

- صورة النقطة (س ، ص) تحت تأثير انسحاب باتجاه محور السينات وبمقدار د من الوحدات هي النقطة (س + د ، ص) .
- صورة النقطة (س ، ص) تحت تأثير انسحاب باتجاه محور الصادات وبمقدار د من الوحدات هي النقطة (س ، ص + د)

ويكون الاتجاه موجباً أو سالباً بالنسبة لأي من المحورين بحسب إشارة د .

تدريـــب أوجد صورة كلٍ من النقاط التالية : (٣ ، ١) ، (–١ ، ١) ، (٤ ، –٢) ، (–٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢) ، تحت تأثير انسحاب :

أ) بالاتجاه الموجب لمحور السينات بمقدار وحدتين .

ب) بالاتجاه السالب لمحور الصادات بمقدار ٣ وحدات .

في هذا البند ستتعرف على الانسحاب بشكل عام وفي أي اتجاه كان .

نشاط (١)

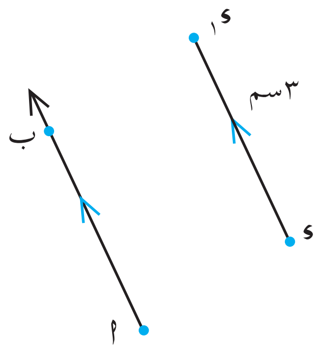
في الشكل (٦ –١٨): ء $\notin$ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

– ارسم $\overline{\text{ء ء}_1}$ بحيث : $\overline{\text{ء ء}_1}$ // $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ،

$|\text{ء ء}_1|$ = ٣سم .

بهذا الإجراء تكون قد عينت ء$_1$ صورة ء ،

بانسحاب مقداره ٣سم وباتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$.



شكل (٦ – ١٨)

– لتكن هـ نقطة مختلفة عن ء بحيث هـ $\not\in$ $\overleftarrow{أ ب}$ ، عين هـ$_1$ صورة هـ بالانسحاب السابق نفسه .

– تحقق من أن $\overline{هـ هـ_1}$ // $\overleftarrow{أ ب}$ ، | هـ هـ$_1$ | = ٣سم ،

من النشاط السابق نستنتج أن :

١ – الانسحاب يتحدد بعنصرين هما : المقدار (المسافة) والاتجاه .

٢ – لأي نقطة س من المستوى ، يمكن تعيين الصورة س$_1$ بانسحاب محدد مقداره واتجاهه .

٣ – تكون النقطة ص$_1$ صورة للنقطة ص بانسحاب مقداره ء وحدة طولية واتجاهه $\overleftarrow{أ ب}$.

إذا كان : ١) $\overline{ص ص_1}$ // $\overleftarrow{أ ب}$

٢) | ص ص$_1$ | = ء .

مثال (١)

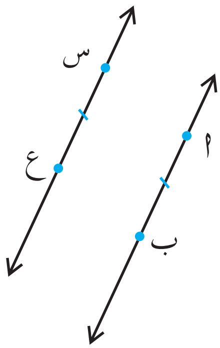
في الشكل (٦ – ١٩) : $\overleftrightarrow{س ع}$ // $\overleftrightarrow{أ ب}$ ،

| أ ب | = | س ع | .

أ) أوجد صورة أ بانسحاب مسافته = | س ع | واتجاهه $\overleftarrow{س ع}$.

ب) هل ع صورة س بالانسحاب السابق ؟

جـ) إذا كان | س أ | = | س ع | فهل أ صورة س بالانسحاب السابق نفسه ؟



شكل (٦ – ١٩)

الحــل :

أ) صورة أ بالانسحاب المعرف سابقاً هي النقطة ب ، لأن $\overleftarrow{أب}$ // $\overleftarrow{سع}$ ،
| أ ب | = | س ع | .

ب) نعم لأن | س ع | هي نفس مسافة الانسحاب واتجاهه نفس اتجاه الانسحاب .

جـ) لا لأن $\overleftarrow{سأ}$ ∦ $\overleftarrow{سع}$

خواص الانسحاب :

نشــــاط (٢)

فـــي الشــكل (٦ – ٢٠) :

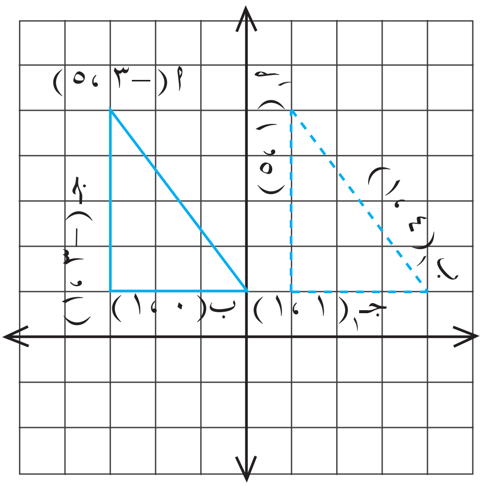
أ ب جـ مثلث ، إحداثيــات رؤوسه (–٣ ، ٥) ، (٠ ، ١) ، (–٣ ، ١) على التوالي .

– انقل الشكل على ورقة رسم بياني، ثم ارسم صورته بانسحاب مسافته ٤ وحدات وباتجاه محور السينات الموجب، تحصل على الصور $أ_١$ ، $ب_١$ ، $جـ_١$.

– ما إحداثيات كلٍ من $أ_١$ ، $ب_١$ ، $جـ_١$ ؟

– باستخدام قانون البعد بين نقطتين

أوجد كلاً من | أ ب | ، | ب جـ | ، | أ جـ | ، | $أ_١$ $ب_١$ | ، | $ب_١$ $جـ_١$ |، | $أ_١$ $جـ_١$ | .



شكل (٦ – ٢٠)

–ماذا تلاحظ بالنسبة لأطوال أضلاع المثلث ا ب جـ وأطوال أضلاع المثلث $ا_1$ $ب_1$ $جـ_1$ ؟

– استخدم المنقلة لقياس زوايا المثلث ا ب جـ ولقياس زاويا المثلث $ا_1$ $ب_1$ $جـ_1$.

– ماذا تلاحظ بالنسبة لقياس كل زاوية في المثلث ا ب جـ وقياس صورتها في المثلث $ا_1$ $ب_1$ $جـ_1$ ؟

ستلاحظ أن : ١) طول القطع المستقيمة يبقى ثابتاً بعد الانسحاب .

٢) قياس الزوايا يبقى هو نفسه بعد الانسحاب .

من النشاط السابق نستنتج أن :

١) الانسحاب يحافظ على الأطوال .

٢) الانسحاب يحافظ على قياس الزوايا .

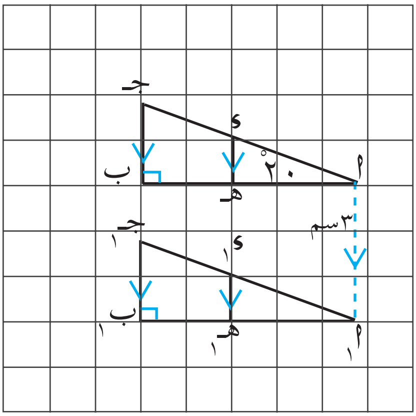
مثال (٢)

في الشكل (٦ – ٢١) :

Δ $ا_1$ $ب_1$ $جـ_1$ صورة المثلث ا ب جـ بانسحاب مقداره ٣ وحدات طولية واتجاهه $\overleftarrow{جـ ب}$.

فإذا كان | ا جـ | = ٢سم ، $\overline{جـ ب} \perp \overline{ا ب}$ ، $\overline{ء هـ} \,//\, \overline{جـ ب}$ ، ق ($\measuredangle$ ا) = 20° ،

فأجب عمّا يلي :



شكل (٦ – ٢١)

١) أوجد | $ا ا_1$ |

٢) بين أن $\overline{جـ_1 ب_1} \perp \overline{ا_1 ب_1}$

٣) بين أن $\overline{ء_1 هـ_1} \,//\, \overline{جـ_1 ب_1}$

٤) أوجد ق ($\measuredangle$ $جـ_1$) .

الحــل :

١) $\because$ $أ_١$ صورة أ بانسحاب مقداره = ٣ وحدات

$\therefore$ $|أ أ_١|$ = ٣ وحدات طولية

٢) $\because$ $ب_١$ صورة ب ، ق ($\measuredangle$ ب) = ٩٠° « لأن $\overline{جـ ب} \perp \overline{أ ب}$ »

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ $ب_١$) = ق ($\measuredangle$ ب) = ٩٠° « خواص الإنسحاب »

٣) $\because$ $هـ_١$ صورة هـ .

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ $هـ_١$) = ق ($\measuredangle$ هـ)

لكن ق ($\measuredangle$ هـ) = ق ($\measuredangle$ ب) « لأن $\overline{ء هـ} \parallel \overline{ب جـ}$ »

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ $هـ_١$) = ق ($\measuredangle$ ب) = ق ($\measuredangle$ $ب_١$)

$\therefore$ $\overline{ء_١ هـ_١} \parallel \overline{ب_١ جـ_١}$.

٤) في Δ أ ب جـ ، $\because$ ق ($\measuredangle$ ب) = ٩٠° ، ق ($\measuredangle$ أ) = ٢٠°

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ جـ) = ٧٠°

لكن ق ($\measuredangle$ $جـ_١$) = ق ($\measuredangle$ جـ) « خواص الانسحاب »

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ $جـ_١$) = ٧٠° .

مثال (٣)

Δ $س_١ ص_١ ع_١$ صورة المثلث س ص ع بالانعكاس في محور السينات، حيث س (–١ ، ٣)، ص (–١ ، ١)، ع (–٣ ، ١)، فإذا كان Δ $س_٢ ص_٢ ع_٢$ صورة Δ $س_١ ص_١ ع_١$ بانسحاب مقداره ٤ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات ، فأوجد إحداثيات رؤوس المثلث $س_٢ ص_٢ ع_٢$.

الحـل : نوجد أولاً إحداثيات رؤوس المثلث س١ ص١ ع١ كما يلي :

س (−١ ، ٣) ← س١ (−١ ، −٣)

ص (−١ ، ١) ← ص١ (−١ ، −١)

ع (−٣ ، ١) ← ع١ (−٣ ، −١)

ثم نوجد صور س١ ، ص١ ، ع١ بانسحاب مقداره ٤ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات كما يلي :

س١ (−١ ، −٣) ← س٢ (−١ + ٤ ، −٣) = س٢ (٣ ، −٣)

ص١ (−١ ، −١) ← ص٢ (−١ + ٤ ، −١) = ص٢ (٣ ، −١)

ع١ (−٣ ، −١) ← ع٢ (−٣ + ٤ ، −١) = ع٢ (١ ، −١)

تماريـن ومسائـل

[١] عين العبـــارات الصحيحـــة وصـوِّب العبـــارات الخطأ فيما يلي :

إذا انسحب شكل هندسي في المستوى فإن :

أ) كل نقطة من نقاط الشكل تتحرك نفس المسافة .

ب) جميع القياسات والمسافات بين أجزاء الشكل تبقى ثابتة .

جـ) هناك دائماً نقطة ثابتة .   ء) يتغير اتجاه الشكل .

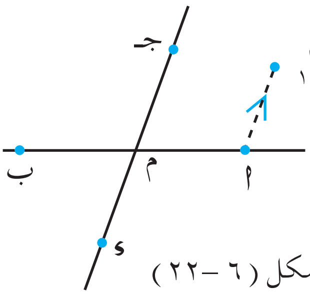
[٢] فـــي الـشـــكل (٦ − ٢٢) :

أ١ صورة أ بانسحاب مسافته = |م جـ|،

باتجاه $\overleftarrow{\text{م جـ}}$. عيّن :

١) أ٢ صورة أ بانسحاب مسافته |م ء|،

باتجاه $\overleftarrow{\text{م ء}}$.



شكل (٦ −٢٢)

٢) $ب_١$ صورة ب بانسحاب مسافته = | م جـ | ، باتجاه $\overleftarrow{م ء}$.

٣) $ب_٢$ صورة ب بانسحاب مسافته = | م جـ | ، باتجاه $\overleftarrow{م جـ}$.

[٣] ا ، ب نقطتان في المستوى الإحداثي حيث ا (٢ ، ٣) ، ب (١ ، ١)، ح انسحاب ينقل ب إلى $ب_١$ (٤ ، ١) ، حدد عناصر ح (مسافته ، اتجاهه) ثم أوجد إحداثي $ا_١$ صورة ا بهذا الانسحاب .

[٤] ا ب جـ مثلث ، إحداثيات رؤوسه على الترتيب هي : (–١ ، ١) ، (٣ ، –١) ، (١ ، ٤) ، أوجد صورة Δ ا ب جـ تحت تأثير :

١) انعكاس في محور الصادات .

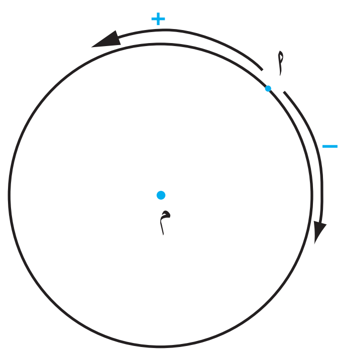
٢) انسحاب مسافته = ٣ وحدات طولية وفي الاتجاه الموجب لمحور السينات .

٦ : ٥ الدوران

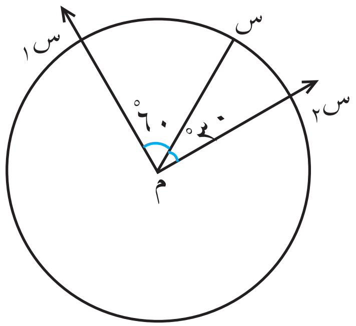
في الشكل (٦ – ٢٣) ، دائرة مركزها م ، ا إحدى نقاطها ، للانتقال على الدائرة انطلاقاً من النقطة ا، يمكنك أن تسلك أحد الاتجاهين :

الأول : اتجاه عقارب الساعة ، ويسمى الاتجاه السالب .

الآخر : عكس اتجاه عقارب الساعة ، يسمى الاتجاه الموجب .



شكل (٦ – ٢٣)

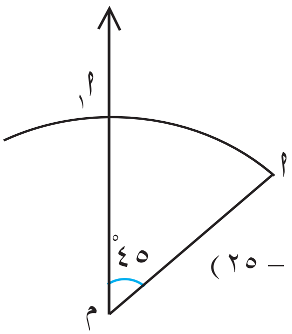


شكل (٦ – ٢٤)

في الشكل (٦ – ٢٤) ، س نقطة على الدائرة (م) .

– حددنا النقطة س١ على الدائرة بحيث يكون الاتجاه من س إِلى س١ هو الاتجاه الموجب ، ق (∢ س م س١) = ٦٠° ، نقول أن : س١ صورة س بدوران مركزه (م) ، قياسه (+ ٦٠°) ونرمز لهذا الدوران بالرمز ء (م ، + ٦٠°) .

– حددنا النقطة س٢ على الدائرة بحيث يكون الاتجاه من س إِلى س٢ هو الاتجاه السالب ، ق (∢ س م س٢) =٣٠° ، لذلك نقول أن : س٢ صورة س بدوران مركزه (م) ، قياسه (–٣٠°) ، ونرمز لهذا الدوران بالرمز ء (م ، – ٣٠°) .



شكل (٦ – ٢٥)

نشاط (١)

– حدد في مستوى النقطتين م ، أ .

– ارسم $\overline{\text{م أ}}$.

– افتح الفرجال فتحة بقدر | م أ | .

واركزه على م ، ثم ارسم قوساً من أ بالاتجاه الموجب .

– باستخدام المنقلة ، ارسم زاوية قياسها ٤٥° بحيث $\overrightarrow{\text{م أ}}$ أحد ضلعيها، ضلعها الأخر $\overrightarrow{\text{م أ}_1}$ (شعاع يبدأ من م ويقطع القوس في نقطة أ١)

[انظر الشكل (٦ – ٢٥)] .

– تحقق من أن | م أ | = | م أ١ |

في النشاط السابق تكون قد عينت النقطة $أ_1$ صورة النقطة أ بالدوران (م ، + ٤٥°) .

– اختر نقاطاً أخرى في المستوى وحدد صورها بالدوران السابق نفسه ، تحقق في كل مرة أن البعد بين كل نقطة ومركز الدوران يساوي البعد بين صورة هذه النقطة والمركز نفسه .

من النشاط السابق نستنتج أنه :

١ – يمكن تعيين صورة أي نقطة في المستوى بدوران محدد المركز والقياس.

٢ – تكون النقطة $س_1$ صورة النقطة س بدوران مركزه (م) وقياسه (هـ°)

إذا كان : |م س| = |م $س_1$| ، ق (∠ س م $س_1$) = هـ

يكون قياس الدوران موجباً إذا كان الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة.

ويكون سالباً إذا كان مع اتجاه عقارب الساعة .

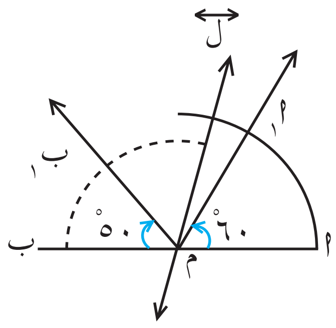
مثال (١)

في الشكل (٦ – ٢٦) : $\overline{أب}$ تقطع $\overleftrightarrow{ل}$ في النقطة م ، أوجد :

١) صورة أ بالدوران (م ، + ٦٠°)

٢) صورة ب بالدوران (م ، – ٥٠°)

٣) صورة م بكلٍ من الدورانين السابقين.



شكل (٦ – ٢٦)

الحـــل :

١) صورة أ بالدوران(م ، +٦٠°) هي $أ_1$ [انظرشكل (٦ – ٢٦)] . لاحظ أن

ى (∡ ا م ا١) = ٦٠° ، |م ا| = |م ا١| ، والاتجاه من ا إلى ا١ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة (اتجاه موجب) .

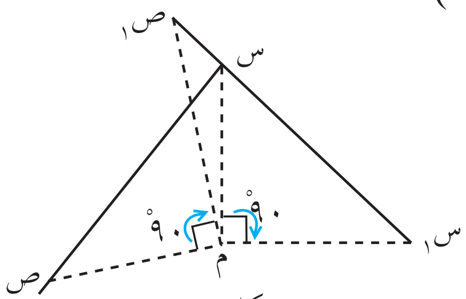
٢) بنفس الطريقة السابقة [انظر الشكل (٦ – ٢٦)] حيث ب١ صورة ب بالدوران (م ، – ٥٠°) والاتجاه من ب إلى ب١ ، مع اتجاه حركة عقارب الساعة (اتجاه سالب) .

٣) صورة م بكلٍ من الدورانين السابقين هي م نفسها ، لأنها مركز الدوران

مثال (٢) ارسم صورة $\overline{\text{س ص}}$ تحت تأثير : (١) ء (م ، – ٩٠°)

(٢) ء (م ، + ٩٠°) .

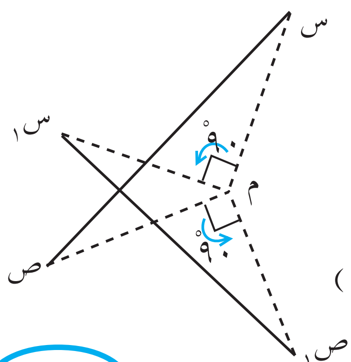
الحـــل :



شكل (٦ – ٢٧)

[انظر الشكل (٦ – ٢٧)] .

الاتجاه هنا سالب (مع اتجاه عقارب الساعة) .



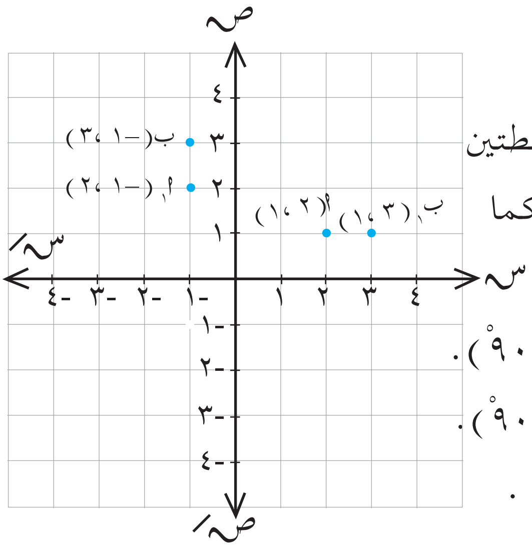
شكل (٦ – ٢٨)

انظر الشكل (٦ – ٢٨) .

الاتجاه هنا موجب

(عكس اتجاه عقارب الساعة)

نشـــاط (٢)



شكل (٦ – ٢٩)

– على مستوى إِحداثي ، حدد النقطتين أ (٢ ، ١) ، ب (−١ ، ٣) كما في الشكل (٦ – ٢٩) .

– عين أ$_١$ صورة أ بالدوران(م ، +٩٠ْ) .

– عين ب$_١$ صورة ب بالدوران(م ، −٩٠ْ) .

– ما إِحداثي أ$_١$ ؟ قارن بإِحداثي أ .

– ما إِحداثي ب$_١$ ؟ قارن بإِحداثي ب .

– تلاحظ أن أ$_١$ (−١ ، ٢) ، ب$_١$ (٣ ، ١) .

– اختر نقاطاً أخرى في المستـــوى ، عين صورها بالدوران (م ، +٩٠ْ) مـــرة وبالدوران (م ، −٩٠ْ) مرة أخرى ، قارن بين إِحداثي كل نقطة وإِحداثي صورتها ، ماذا تلاحظ ؟

من النشاط السابق نستنتج أنه :

لأي نقطة (س ، ص) في المستوى الإِحداثي :

أ) صورة النقطة (س ، ص) تحت تأثير ء (و ، + ٩٠ْ) هي النقطة (− ص ، س) .

ب) صورة النقطة (س ، ص) تحت تأثير ء (و ، −٩٠ْ) هي النقطة (ص ، −س) .

و هي نقطة الأصل (٠ ، ٠) .

مثال (٣) أوجد صورة كل نقطة من النقاط الآتية :

أ(٣ ، ٠)، ب (٣ ، ٢) ، جـ (٠ ، ٢) ، ء (٠ ، ٠)، هـ (–٢ ، –١)

تحت تأثير : ١) ء (و ، +٩٠°) ٢) ء (و ، –٩٠°) حيث و نقطة الأصل .

الحل :

١) أ١ (٠ ، ٣) ، ب١ (–٢ ، ٣) ، جـ١ (–٢ ، ٠) ، ء١ (٠ ، ٠) ،
هـ١ (١ ، –٢) .

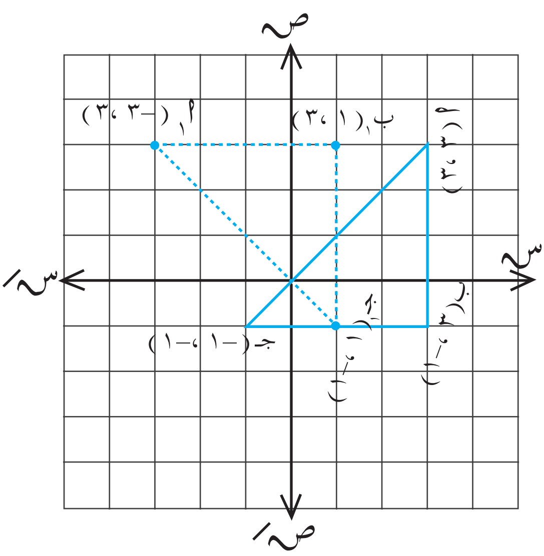
٢) أ١ (٠ ، –٣) ، ب١ (٢ ، –٣) ، جـ١ (٢ ، ٠) ، ء١ (٠ ، ٠) ،
هـ١ (–١ ، ٢) .

خواص الدوران :

نشاط (٣)

١) على مستوى إحداثي، ارسم المثلث أ ب جـ حيث أ (٣ ، ٣) ب (٣ ، –١)، جـ (–١ ، –١) كما في الشكل (٦ – ٣٠).

٢) أوجد صورة Δ أ ب جـ بالدوران (و ، +٩٠°)، سمِّ المثلث الناتج أ١ ب١ جـ١



شكل (٦ – ٣٠)

٣) باستخدام قانون البعد بين نقطتين أوجد كلاً من |ٕا ب|، |ب جـ|، |ٕا جـ|، |ٕا$_١$ ب$_١$|، |ب$_١$ جـ$_١$|، |ٕا$_١$ جـ$_١$| .

٤) قارن بين أطوال أضلاع المثلث ٕا ب جـ ونظائرها في المثلث ٕا$_١$ ب$_١$ جـ$_١$.

٥) باستخدام المنقلة أوجد قياس كلٍ من ∢ ٕا ، ∢ ب ، ∢ جـ ، ∢ ٕا$_١$ ، ∢ ب$_١$ ، ∢ جـ$_١$.

٦) قارن بين قياسات زوايا المثلث ٕا ب جـ ونظائرها في المثلث ٕا$_١$ ب$_١$ جـ$_١$.

من النشاط السابق نستنتج أن :

١) الدوران يحافظ على الأطوال .
٢) الدوران يحافظ على قياس الزوايا .

تمارين ومسائل

[١] فسرِّ معنى كلٍ مما يأتي :

١) ء (م ، + ٣٠°) ٢) ء (و ، + ٩٠°) ٣) ء (و ، – ٩٠°) .

[٢]أوجد صور كلٍ من النقاط الآتية : ٕا (٠ ، –٢)، ب (٥ ، ٠)، جـ(–٣ ، ٢)

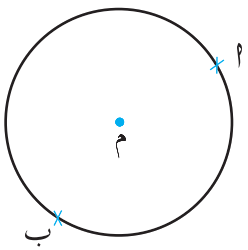
تحت تأثير كل من : ١) ء (و ، + ٩٠°) ٢) ء (و ، – ٩٠°) .

[٣] في الشكل (٦ – ٣١) : دائرة مركزها (م) ، ٕا ، ب نقطتان عليها،

حدد النقطتين ٕا$_١$ ، ب$_١$ بحيث :

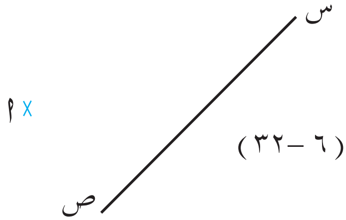
١) ٕا$_١$ صورة ٕا بالدوران (م ، ٧٠°)

٢) ب$_١$ صورة ب بالدوران (م ، –٣٠°) .



شكل (٦ – ٣١)

[٤] انقل الشكل (٦ – ٣٢) :
ثم ارسم صورة $\overline{\text{س ص}}$ بالدوران (أ ، – ٩٠ْ) .



شكل (٦ – ٣٢)

[٥] في مستوى إِحداثي، ارسم Δ أ ب جـ ، حيث أ (٢ ، ٣) ، ب (٣ ، ١)، جـ (١ ، ١) ، ثم ارسم صورته بالدوران (و ، + ٩٠ْ) .

[٦] إِذا كانت أ$_1$ صورة النقطة أ بالدوران (م ، – ٤٥ْ) ، فما الدوران الذي يجعل النقطة أ صورة للنقطة أ$_1$ ؟

٦ : ٦ التكبيـــر

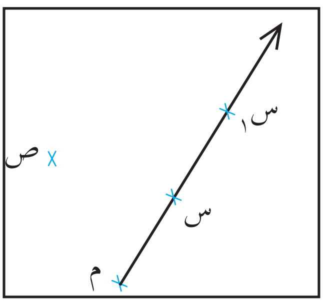
تمهيد :

تذكر أن كلاً من الانعكاس والانسحاب والدوران يحول كل نقطة في المستوى إلى نقطة أخرى في المستوى نفسه ، لذلك نسمي كل منها تحويلاً هندسياً ، وتذكر أيضاً أن التحويلات سابقة الذكر تحفظ قياس الأطوال ، لذلك تسمى تحويلات متقايسة .

في هذا البند ستتعرف على تحويل هندسي رابع يسمى التكبير ، وهو تحويل لا يحفظ الأطوال .

نشـاط (١)

في الشكل(٦–٣٣) : س ، ص ، م ثلاث نقاط في المستوى .



شكل (٦ – ٣٣)

– ارسم $\overleftarrow{م س}$ ، وحدد عليه $س_١$ بحيث $\frac{|م س_١|}{|م س|} = \frac{٢}{١}$ ،

بهذا الإجراء تكون قد حددت النقطة $س_١$ صورة النقطة س بتكبير مركزه م ونسبته ٢ ، تسمى هذه النسبة معامل التكبير .

– لتكن $ص_١$ صورة ص بتكبير مركزه م ، ونسبته ٢ .

– ما الشروط التي يجب أن تحفظ لهذا التكبير ؟

الشروط : ١) أن تقع $ص_١$ على $\overleftarrow{م ص}$.

٢) $\frac{|م ص_١|}{|م ص|} = ٢$.

– اختر نقاطاً أخرى في المستوى ، وحدد صورها بالتكبير السابق نفسه ماذا تلاحظ ؟

من النشاط السابق نستنتج أنه :

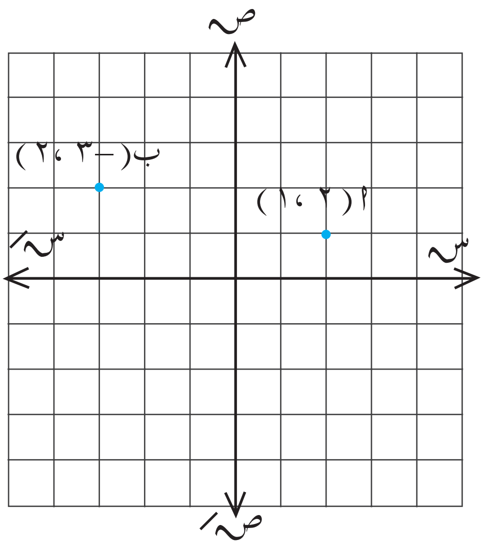
– لأي نقطة س في المستوى يمكن تعيين $س_١$ صورة س بتكبير محدد المركز والمعامل .

– تكون النقطة $س_١$ صورة النقطة س بتكبير مركزه م ومعامله د ، إذا كان :

١) $س_١ \in \overleftarrow{م س}$ ($س_١$ تقع على $\overleftarrow{م س}$) .

٢) $\frac{|م س_١|}{|م س|} = د$.

نشـــاط (٢)



شكل (٦ –٣٤)

على مستوى إحداثي، حدد النقطة

أ (٢ ، ١) كما في الشكل (٦ –٣٤)

– حدد النقطة أ$_{١}$ صورة أ بتكبير مركزه و [نقطة الأصل(٠ ، ٠)] ومعامله ٣ .

– ما إحداثي النقطة أ$_{١}$ ؟

– إذا كانت ب (–٣ ، ٢)، فما إحداثي صورتها ب$_{١}$ بالتكبير السابق نفسه ؟

– ما نسبة إحداثي كل صورة إلى إحداثي النقطة نفسها ؟

– قارن تلك النسب بمعامل التكبير ، ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ أن :

$$\frac{\text{الإحداثي السيني لـ أ}_{١}}{\text{الإحداثي السيني لـ أ}} = \frac{\text{الإحداثي السيني لـ ب}_{١}}{\text{الإحداثي السيني لـ ب}} = ٣ = \text{معامل التكبير ،}$$

$$\frac{\text{الإحداثي الصادي لـ أ}_{١}}{\text{الإحداثي الصادي لـ أ}} = \frac{\text{الإحداثي الصادي لـ ب}_{١}}{\text{الإحداثي الصادي لـ ب}} = ٣ = \text{معامل التكبير}$$

من النشاط السابق نستنتج أن :

صورة النقطة (س ، ص) بتكبير مركزه نقطة الأصل و (٠ ، ٠) ومعامله ﻫ هي (ﻫ س ، ﻫ ص) .

سنرمز للتكبير الذي مركزه م ومعامله ﻫ بالرمز ت (م ، ﻫ)

وحيث أن التكبير : ت (م ، ﻫ) ينقل النقطة (س ،ص) إلى النقطة (ﻫ س ، ﻫ ص) فإننا نعبر عن ذلك رمزياً كما يلي :

ت : (س ، ص) ← (ﻫ س ، ﻫ ص) .

مثال (١)

عين صورة كل نقطة مما يأتي بالتكبير [(٠ ، ٠) ، ٢] أي :

ت : (س ، ص) ← (٢س ، ٢ص) .

أ) (–٣ ، ٣) ، ب) (٢ ، –٤) ،

جـ) ($-\frac{١}{٢}$ ٢ ، $-\frac{١}{٢}$ ١) ، ء) (٠ ، ٠) .

الحل :

أ) (–٣ ، ٣) ← (٢ × –٣ ، ٢ × ٣) = (–٦ ، ٦) .

ب) (٢ ، –٤) ← (٢ × ٢ ، ٢ × –٤) = (٤ ، –٨) .

جـ) ($-\frac{١}{٢}$ ٢ ، $-\frac{١}{٢}$ ١) ← (٢ × $\frac{-٥}{٢}$ ، ٢ × $\frac{-٣}{٢}$) = (–٥ ، –٣) .

ء) (٠ ، ٠) ← (٢ × ٠ ، ٢ × ٠) = (٠ ، ٠) .

تلاحظ من المثال السابق الفقرة (ء)أن صورة النقطة (٠,٠) هي (٠ ، ٠) نفسها ذلك لأن النقطة (٠ ، ٠) هي مركز التكبير . وبصورة عامة ، لأي تكبير ت (م ، أ) يكون : ت : م ← م أي أن صورة مركز التكبير هي النقطة نفسها .

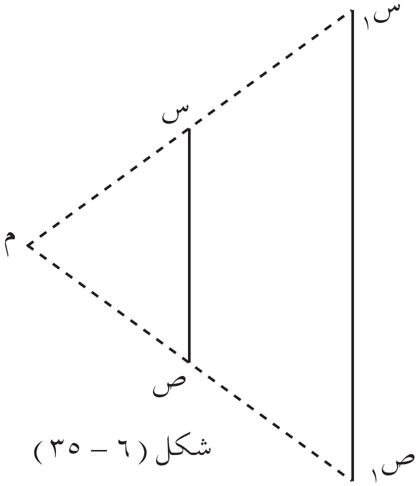
مثال (٢)

ارسم صورة $\overline{\text{س ص}}$ بالتكبير :

أ) ت (م ، ٢) . ب) ت (م ، $\frac{1}{2}$) حيث م $\notin$ $\overline{\text{س ص}}$.

الحل :

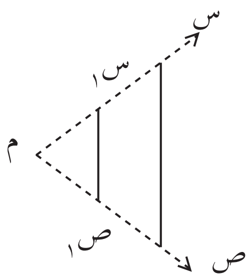
أ) نحدد س_1 صورة س بالتكبير (م ، ٢) ، ثم ص_1 صورة ص بالتكبير نفسه ، نرسم $\overline{\text{س}_1\text{ص}_1}$ وهي صورة $\overline{\text{س ص}}$ بالتكبير (م ، ٢) [انظر الشكل (٦ – ٣٥)] .



شكل (٦ – ٣٥)

ب) نحدد س_1 صورة س بالتكبير (م ، $\frac{1}{2}$) باتباع ما يلي :

نرسم $\overrightarrow{\text{م س}}$ ثم نحدد عليه نقطة س_1 بحيث يكون $\frac{|\text{م س}_1|}{|\text{م س}|} = \frac{1}{2}$ (معامل التكبير)، فتكون س_1 صورة س بالتكبير (م ، $\frac{1}{2}$) ،



شكل (٦ – ٣٦)

– بنفس الطريقة نعين ص_1 صورة ص بالتكبير (م ، $\frac{1}{2}$) ،

– نرسم $\overline{\text{س}_1\text{ص}_1}$ وهي صورة $\overline{\text{س ص}}$ بالتكبير (م ، $\frac{1}{2}$) ،

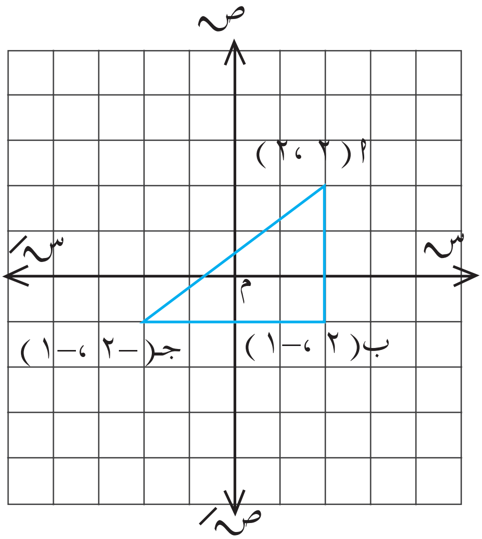
لاحظ في الشكل (٦ – ٣٥) أن |س١ص١| > |س ص| ، وهي حالة تكبير
أما في الشكل (٦ –٣٦) فتلاحظ أن |س١ص١| < |س ص| ، وهي حالة تصغير،
وبصورة عامة يحدث التصغير عندما تكون ٠ < ده < ١ ،
أي عندما يكون معامل التكبير أكبر من الصفر وأقل من الواحد .

خواص التكبير :

نشاط (٣)

على الشكل (٦ –٣٧) : ؟ب جـ مثلث، إِحداثيات رؤوسه، كما في الرسم،

- انقل الشكل إِلى ورقة رسم بياني .
- ارسم المثلث ؟١ ب١ جـ١ ، صورة المثلث ؟ب جـ بتكبير مركزه نقطة الأصل ومعامله ٣ .



شكل (٦ – ٣٧)

- ما إِحداثيات النقاط ؟١ ، ب١ ، جـ١ .
- باستخدام قانون البعد بين نقطتين ، أوجد أطوال أضلاع ΔΔ ؟ب جـ ، ؟١ ب١ جـ١ ، ثم قارن بينها ، ماذا تلاحظ ؟

لابد أنك لاحظت أن $\frac{|؟_١ ب_١|}{|؟ ب|} = \frac{|ب_١ جـ_١|}{|ب جـ|} = \frac{|؟_١ جـ_١|}{|؟ جـ|} = ٣$

- باستخدام المنقلة أوجد قياس زوايا ΔΔ ؟ب جـ ، ؟١ ب١ جـ١ ، ثم قارن بين

قياس كل زاوية من Δ أ ب جـ وقياس الزاوية المناظرة لها (صورتها) من المثلث أ$_1$ ب$_1$ جـ$_1$ ، ماذا تلاحظ ؟

في Δ أ ب جـ . تلاحظ أن $\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، لماذا ؟

– هل $\overline{\text{أ}_1\text{ ب}_1} \perp \overline{\text{ب}_1\text{ جـ}_1}$ ؟ لماذا ؟

من النشاط السابق نستنتج أن :

١ – التكبير يكبر أبعاد الأضلاع أو يصغرها بنسبة معينة هي معامل التكبير

٢ – التكبير يحفظ قياس الزوايا .

مثال (٣)

إِذا كانت $\overline{\text{س}_1\text{ ص}_1}$ هي صورة $\overline{\text{س ص}}$ بتكبير ت (م ، ﮐ) ، فأوجد معامل التكبير (ﮐ) في كلٍ من الحالات الآتية :

١) | م س | = ٤سم ، | م س$_1$ | = ١٢سم

٢) | م س | = ٨سم ، | م س$_1$ | = ٤ سم

٣) | س ص | = ٤ سم ، | س$_1$ ص$_1$ | = ٢٤سم

الحـــل :

١) حيث أن س$_1$ صورة س بالتكبير (م ، ﮐ) ، فإِن :

ﮐ = $\dfrac{|\text{م س}_1|}{|\text{م س}|}$ (شروط التكبير) ،

، $\because$ | م س | = ٤سم ، | م س$_1$ | = ١٢سم

$\therefore$ ﮐ = $\dfrac{١٢}{٤}$ = ٣

٢) بنفس الأسلوب في (١) نجد أن : $ك = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

٣) من خواص التكبير نجد أن :

$$ك = \frac{|س_١ ص_١|}{|س ص|} \qquad \therefore ك = \frac{٢٤}{٤} = ٦ \ .$$

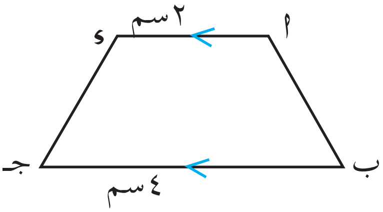
مثال (٤) في الشكل (٦ – ٣٨) : أ ب جـ ء شبه منحرف ، فيه

$\overline{أء} \parallel \overline{ب جـ}$ ، $|أء| = ٢$سم ،

$|ب جـ| = ٤$سم ، فإذا كانت $\overline{ب جـ}$

صورة $\overline{أء}$ بتكبير(م ، ك) ،

فأوجد معامل التكبير(ك)، وعيّن مركز التكبير(م) .



شكل (٦ – ٣٨)

الحـــل :

$\because$ $\overline{ب جـ}$ صورة $\overline{أء}$ بالتكبير (م ، ك)

$$\therefore ك = \frac{|ب جـ|}{|أ ء|} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

ومركز التكبير (م) هي نقطة تقاطع $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، لماذا ؟

تدريب

في الشكل (٦ – ٣٨) : ارسم $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، حدد نقطة تقاطعهما (م)،

ثم تحقق أن $\frac{|م ب|}{|م أ|} = \frac{|م جـ|}{|م ء|} = ٢$سم .

تمارين ومسائل

[١] عيّن صورة كلٍ من النقاط التالية : (٣ ، ٣) ، (–٦ ، ٠) ، (–١٢ ، ٣)

تحت تأثير كلٍ من : ١) ت (و ، ٤)   ٢) ت (و ، $\frac{٢}{٣}$) .

[٢] التكبير ت(و، ﻫ) مركزه نقطة الأصل و(٠ ،٠) ومعامله ﻫ ، إذا كان :

ت (و ، ﻫ) : أ ⟵ $أ_{١}$ فأوجد معامل التكبير في كلٍ من الحالات الآتية :

١) أ (٣ ، ٢) ← $أ_{١}$ (١٢ ، ٨)

٢) أ (٠ ، ٥) ← $أ_{١}$ (٠ ، ١٠)

٣) أ (٤ ، ٨) ← $أ_{١}$ (١ ، ٢)

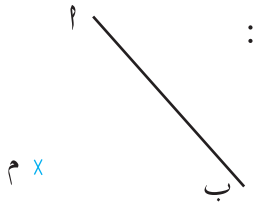
٤) أ (٦ ، ٩) ← $أ_{١}$ (٩ ، ١٣,٥) .

[٣] انقل الشكل (٦ – ٣٩) إلى دفترك، ثم ارسم :

١) صورة أ بالتكبير (م ، ٣) .

٢) صورة ب بالتكبير نفسه .

٣) صورة $\overline{أب}$ بالتكبير نفسه .



شكل (٦ –٣٩)

[٤] ارسم صورة Δ أ ب جـ الذي رؤوسه أ (٢ ، ١) ، ب (٠ ، ١) ،

جـ (–٢ ، –١) بالتكبير (و ، ٢)، حيث و هي نقطة الأصل (٠ ، ٠) .

[٥] بين أن Δ Δ أ ب جـ ، $أ_{١}$ $ب_{١}$ $جـ_{١}$ الموضحة بياناتهما في التمريـن [٤]

متشابها (تذكر أنه : يتشابه المثلثان إذا تناسبت أضلاعهما المتناظرة) .

٦ : ٧ تمارين عامة ومسائل

[١] أوجد | س ص | في كلٍ مما يلي :

أ) س (٣ ، ٥) ، ص (–٢ ، ٨)

ب) س (٠ ، ٢) ، ص (–٥ ، ٣)

جـ) س (–١ ، –٢) ، ص (–٤ ، ٥)

[٢] أوجد إِحداثيات نقطة منتصف س ص في كلٍ مما يلي :

أ) س (١ ، ٣) ، ص (–٣ ، ١)

ب) س (٣,٥ ، ٢) ، ص (–١,٥ ، ٠)

جـ) س (–١ ، ٠,٥) ، ص (٠,٤ ، ١,٧)

[٣] حدد نوع التحويل الهندسي الذي يجعل $ع_١$ صورة ع ، كما في مثال الفقرة (أ) في كلٍ مما يلي :

أ) ع (س ، ص) ← $ع_١$ (٢س ، ٢ص) تكبير مركزه نقطة الأصل ومعامله ٢ ،

ب) ع (س ، ص) ← $ع_١$ (س ، –ص)

جـ) ع (س ، ص) ← $ع_١$ (–ص ، س)

ء) ع (س ، ص) ← $ع_١$ (س – ١ ، ص)

هـ) ع (س ، ص) ← $ع_١$ ($\frac{١}{٢}$ س ، $\frac{١}{٢}$ ص)

و) ع (س ، ص) ← $ع_١$ (س ، ص + ٣)

[٤] عيِّن صورة كل نقطة من النقاط : س (٠ ، –٣) ، ص ($\frac{١}{٢}$ ٢ ، – $\frac{١}{٢}$ ١) ، ع ($\frac{٣}{٢}$ ، –٢) تحت تأثير كلٍ من :

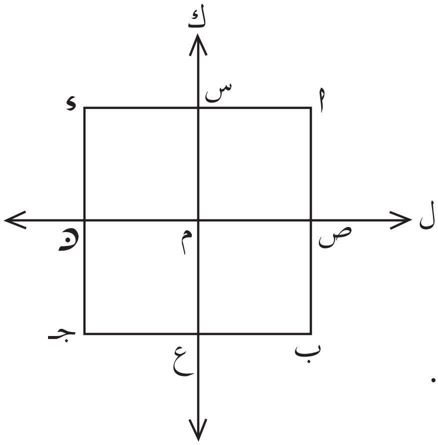
أ) انعكاس في المحور السيني .

ب) انسحاب في الاتجاه الموجب للمحور الصادي بمقدار ٣ وحدات .

جـ) دوران مركزه نقطة الأصل و (٠ ، ٠) ، وزاويته (– ٩٠°) .

ء) تكبير مركزه نقطة الأصل ومعامله ٣ .

[٥] استعن بالشكل (٦–٤٠) وأكمل الآتي ، علماً بأن : أ ب جـ ء مربع ،



شكل (٦ – ٤٠)

أ) صورة المثلث م أ ص بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ك}$ هي ....

ب)صورة المثلث م ص ب بانسحاب مسافته |ب م| وفي اتجاه $\overleftarrow{ب ء}$ هي ...

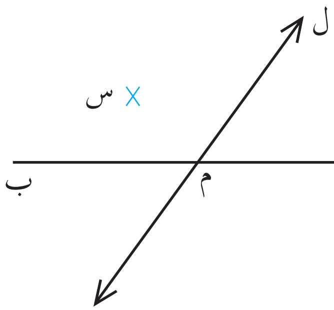
جـ) صورة المثلث م ع ب بالدوران (م ، ٩٠°) هي ....

ء) صورة المثلث أ ص م بالتكبير (أ ، ٢) هي ....

هـ) المستقيم .... يمثل محور تناظر للمستطيل أ ص د ء .

و) الشكلان أ ص د ء ، ب ص د جـ متناظران حول المحور ....

[٦] انقل الشكل (٦ – ٤١) إلى دفترك ثم ارسم صورة $\overline{أ ب}$ تحت تأثير :



شكل (٦ – ٤١)

أ) انعكاس في المحور ل .

ب) انسحاب مسافته |م ب| وباتجاه $\overleftarrow{م ل}$.

جـ) ء (م ، ٤٥°) ء) ت (س ، ٢) .

[٧] في مستوى إِحداثي ، ارسم Δ ؏ ب جـ الذي إِحداثيات رؤوسه هي
؏ (١ ، ٣) ، ب (٥ ، ٦) ، جـ (٤ ، –١) ، ثم أجب عما يلي :

؏) بيِّن أن Δ ؏ ب جـ قائم الزاوية .

ب) أوجد إِحداثيات نقطتي المنتصف للضلعين $\overline{\text{؏ ب}}$ ، $\overline{\text{؏ جـ}}$ ، سمِّهما ء ، هـ على الترتيب .

جـ) ما التحويل الهندسي الذي يجعل Δ ؏ ب جـ صورة للمثلث ؏ ء هـ؟

[٨] على مستوى إِحداثي ، ارسم مربعاً طول ضلعه ٢ سم ، ثم :

؏) كبرّ أضلاعه إِلى ثلاثة أمثالها ، كم تصبح مساحته ؟

ب) صغِّر أضلاعه إِلى النصف ، كم تصبح مساحته ؟

(اعتبر مركز التكبير هي نقطة الأصل في كل حالة) .

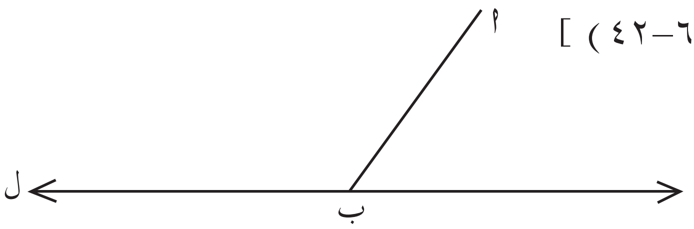
٦ : ٨ اختبـــار الوحــدة

[١] إذا كانت : ء (١ ، –١) ، هـ (–٢ ، ٣) فأوجد :

أ) | ء هـ | ب) إحداثيات نقطة منتصف $\overline{\text{ءهـ}}$.

[٢] ارسم صورة $\overline{\text{أب}}$ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ،

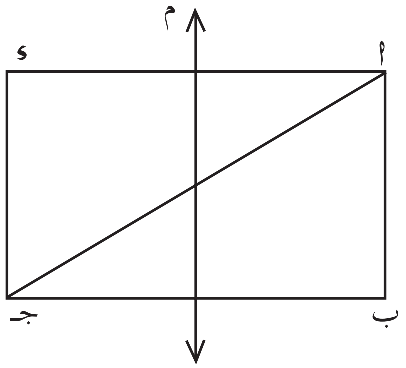
[انظر الشكل (٦–٤٢)]



شكل (٦ – ٤٢)

[٣] اذكر خواص الانعكاس في محور .

[٤] في الشكل (٦ – ٤٣) حدد أي من المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م}}$ يعتبر محور تناظر للمستطيل أ ب جـ ء.



شكل (٦ –٤٣)

[٥] في Δ أ ب جـ : | أ ب | = | أ جـ | ،

أ) ارسم صورة Δ أ ب جـ بانسحاب مسافته وحدتين وفي اتجاه $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، سمِّ المثلث الناتج أ$_1$ ب$_1$ جـ$_1$.

ب) هل | أ$_1$ ب$_1$ | = | أ$_1$ جـ$_1$ | ؟ لماذا ؟

[٦] ارسم صورة المثلث الذي رؤوسه س (٣ ، ١)، ص (–١ ، ١)، ع (١ ، ٦)

تحت تأثير :

أ) ء (و ، ٩٠°) .

ب) ت (و ، ٢)

(اعتبر و هي نقطة الأصل في الحالتين) .

[٧] اكمل ما يلي :

أ) الدوران يحفظ الأطوال ، . . . . ، . . . . . .

ب) التكبير يحفظ قياس الزوايا ، ويكبر . . . .، ويحفظ. . . . . . .

الوحدة السابعة
الإحصاء

مقدمة :

تعرفت في الصفوف السابقة على بعض الأساليب الخاصة بعرض البيانات الإحصائية كالجداول والأشكال البيانية ، وهي أساليب مهمة إلاّ أنها غير كافية أحياناً .

لذلك لابد لنا من أساليب أخرى تفيد في عرض وتلخيص البيانات الإحصائية وإجراء المقارنات، من أبرز هذه الأساليب استخدام مقاييس إحصائية لوصف وتحليل البيانات وأول أنواعها ما يسمى بمقاييس النزعة المركزية . وفي هذه الوحدة سنتعرف على المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال ، وهي كثيرة الاستعمال لوصف البيانات الإحصائية في التطبيقات الحياتية المختلفة .

٧ : ١ المتوسط الحسابي

سبق وأن تعرفت على كيفية حساب المتوسط الحسابي باستخدام العلاقة التالية :

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع البيانات}}{\text{عددها}}$$

وكذلك على استخدامه للمقارنة، فمثلاً : إذا كان متوسط دخل أسرة هو (١٠٠٠٠) ريال في الشهر ومتوسط دخل أسرة أخرى هو (١٢٠٠٠) ريال في الشهر فنقول أن دخل الأسرة الثانية أعلى من دخل الأولى . وفي الصف الثامن تعرفت على كيفية حساب المتوسط الحسابي من جداول تكرار بسيطة .

وفي هذا الدرس سنتعمق في حساب المتوسط باستخدام جداول تكرار بسيطة بفئات وبدون فئات فمثلاً :

إذا كان لدينا الملاحظات التالية : $س_١$ ، $س_٢$ ، . . . ، $س_ن$ فإن المتوسط الحسابي يُعطى بالعلاقة التالية :

$$\overline{س} = \frac{س_١ + س_٢ + \cdots + س_ن}{ن}$$

حيث $س_١$ تعني الملاحظة الأولى ، $س_٢$ الملاحظة الثانية . . . إلخ ، (. . .) النقاط الثلاث تعني أن هناك ملاحظات أخرى ، أمّا $س_ن$ فتعني الملاحظة الأخيرة التي رتبتها ن ، وبالتالي فإن عدد الملاحظات هو ن .

ولتسهيل التعبير عن المجموع السابق،يُستخدم الرمز مجـ(ويُقرأ مجموع) للدلالة على المجموع ، أي عندما يكون لدينا (ن) من الملاحظات ، فإن :

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن} .$$

مثال (١) عبّر عن المتوسط الحسابي بالرموز إذا كان لدينا البيانات التالية :

$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$ ، $س_٥$ ، $س_٦$ ، $س_٧$ ، $س_٨$.

الحـــل :

$$\overline{س} = \frac{س_١ + س_٢ + \cdots + س_٨}{٨} = \frac{\sum_{ر=١}^{٨} س_ر}{٨}$$

مثال (٢)

لدينا البيانات التالية : ٢ ، ٦ ، ٤ ، ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٠ ، ١ ، ١٤ .

أولاً : عبر عن متوسطها الحسابي بالرموز .

ثانياً : أوجد متوسطها الحسابي .

الحـــل :

أولاً : $\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{9} س_ر}{ن} = \frac{س_1 + س_2 + \cdots + س_9}{9}$

ثانياً : $\bar{س} = \frac{2 + 6 + 4 + 3 + 5 + 9 + 10 + 1 + 14}{9}$

$\therefore \bar{س} = \frac{54}{9} = 6$.

حساب المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري بسيط

سبق وأن تعرفت على أن التوزيعات التكرارية البسيطة نوعان ، هما :

- توزيعات تكرارية بسيطة بدون فئات .
- توزيعات تكرارية بسيطة كفئات .

تذكر أن :

الفئة هي مجموعة من المشاهدات (الملاحظات) أو البيانات تبدأ بملاحظة تسمى الحد الأدنى للفئة وتنتهي بملاحظة تسمى الحد الأعلى للفئة .

طول الفئة = (الحد الأعلى للفئة – الحد الأدنى للفئة) + ١ .

أو هو الفرق بين الحد الأدنى لفئة والحد الأدنى للفئة التي تليها .

مركز الفئة = $\frac{\text{الحد الأدنى + الحد الأعلى}}{2}$.

وحجم العينة هو مجموع التكرارات . الأمثلة التالية توضح كيفية حساب المتوسط الحسابي من خلال التوزيع التكراري البسيط .

أولاً : حساب المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري بدون فئات :

مثال (٣) جدول التوزيع التكراري التالي يبين درجات امتحان ٢٠ طالباً في مادة الرياضيات [الدرجة العظمى (٢٠) درجة] :

الدرجة $س_ر$	التكـــرار $ك_ر$	الدرجة × التكرار $س_ر \times ك_ر$
١١	٢	٢٢
١٢	٣	٣٦
١٣	٥	٦٥
١٤	٢	٢٨
١٥	٣	٤٥
١٦	٢	٣٢
١٧	٢	٣٤
١٨	١	١٨
المجموع	٢٠ طالباً	٢٨٠ درجة

حيث $ك_ر$ تعني تكرار الدرجة $س_ر$. احسب المتوسط الحسابي للبيانات العددية السابقة .

الحـــل :

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (حواصل ضرب الدرجة × تكرارها)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$= \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر ك_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر}$$

وباستخدام المعلومات من الجدول السابق نحصل على :

$$\bar{س} = \frac{٢٨٠}{٢٠} = ١٤ \text{ درجة .}$$

وبصورة عامة :

إذا كان لدينا الملاحظات : $س_١ ، س_٢ ، ... ، س_ن$

لدينا التكـــرارات المناظـرة : $ك_١ ، ك_٢ ، ... ، ك_ن$

فإن المتوسط الحسابي يُعطى من العلاقة :

المتوسط الحسابي = مجموع (حواصل ضرب الملاحظة × تكرارها المناظر) / مجموع التكرارات

ورمزياً :

$$\bar{س} = \frac{س_١ ك_١ + س_٢ ك_٢ + \dots + س_ن ك_ن}{ك_١ + ك_٢ + \dots + ك_ن} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر ك_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر}$$

ثانياً : حساب المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري كفئات :

مثال (٤) اعتمد على جدول التكرار التالي ذي الفئات لإيجاد المتوسط الحسابي $\bar{س}$:

الفئــة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ك_ر$	مركز الفئة × التكرار $س_ر × ك_ر$
٣٠ – ٣٤	٣٢	٣	٩٦
٣٥ – ٣٩	٣٧	٦	٢٢٢
٤٠ – ٤٤	٤٢	١٠	٤٢٠
٤٥ – ٤٩	٤٧	٤	١٨٨
٥٠ – ٥٤	٥٢	٥	٢٦٠
٥٥ – ٥٩	٥٧	٢	١١٤
المجمـــوع		٣٠	١٣٠٠

الحـــل :

من الجدول نجد أن عدد القيم س هي (٦) قيم ،

أي أن ن = ٦ .

$\therefore \sum_{ر=١}^{٦} س_ر ك_ر = س_١ك_١ + س_٢ك_٢ + س_٣ك_٣ + س_٤ك_٤ + س_٥ك_٥ + س_٦ك_٦$

$= ٣٢ \times ٣ + ٣٧ \times ٦ + ٤٢ \times ١٠ + ٤٧ \times ٤ + ٥٢ \times ٥ + ٥٧ \times ٢$

$= ٩٦ + ٢٢٢ + ٤٢٠ + ١٨٨ + ٢٦٠ + ١١٤ = ١٣٠٠$ ،

مجموع التكرارات $= \sum_{ر=١}^{٦} ك_ر = ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ك_٤ + ك_٥ + ك_٦$

$= ٣ + ٦ + ١٠ + ٤ + ٥ + ٢ = ٣٠$

$\therefore \bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر ك_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر} = \frac{١٣٠٠}{٣٠} = ٤٣,٣$ (تقريباً) .

$\therefore$ حجم العينة في المثال السابق = ٣٠ .

مثال (٥)

فيمايلي عدد القطع التي أنتجها (٢٠) عاملاً في أحد المصانع .

٣٥	٤٠	٣٧	٣٢	٣٣
٣٧	٣٣	٣٥	٢٠	٣٧
٤٠	٣٢	٣٥	٢٧	٣٧
٣٩	٣٧	٤٠	٢٥	٣٩

أ) كوّن جدولاً تكرارياً من القطع بدون فئات ثم أوجد المتوسط الحسابي للدرجات .

ب) كوّن جدولاً تكرارياً كفئات بحيث يكون طول الفئة (٦) ثم أوجد المتوسط الحسابي .

جـ) قارن بين المتوسطين في أ ، ب .

الحل :

أ)

الدرجات	٢٠	٢٥	٢٧	٣٢	٣٣	٣٥	٣٧	٣٩	٤٠	المجموع
التكرار	١	١	١	٢	٢	٣	٥	٢	٣	٢٠
القطعة × التكرار	٢٠	٢٥	٢٧	٦٤	٦٦	١٠٥	١٨٥	٧٨	١٢٠	٦٩٠

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (حواصل ضرب القطعة × تكرارها)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$= \frac{٦٩٠}{٢٠} = ٣٤,٥ \text{ قطعة}$$

ب)

الفئات	٢٠ – ٢٥	٢٦ – ٣١	٣٢ – ٣٧	٣٨ – ٤٣	المجموع
مركز الفئة	٢٢,٥	٢٨,٥	٣٤,٥	٤٠,٥	
التكرار	٢	١	١٢	٥	٢٠
مركز الفئة × التكرار	٤٥	٢٨,٥	٤١٤	٢٠٢,٥	٦٩٠

$$\therefore \text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (حاصل ضرب مركز الفئة × تكرارها)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$= \frac{٦٩٠}{٢٠} = ٣٤,٥ \,.$$

جـ) تلاحظ أن المتوسطين متساويان .

تمارين ومسائل

[١] اعتمد جدول التكرار التالي :

الملاحظة	٥	٤	٣	١	المجموع
التكرار	١	٤	٢	٣	١٠
الملاحظة × التكرار	٥	١٦	٦	٣	٣٠

أ) ما الملاحظة التي لها تكرار أكثر ؟ ب) احسب المتوسط الحسابي .

[٢] الجدول التكراري التالي يبين علامات أحد الصفوف في مادة الإحصاء (الدرجة العظمى ٢٠ درجة) .

الدرجة	٧	٩	١٠	١٢	١٤	١٥	١٧	١٨	المجموع
التكرار	٢	١	٢	٣	٢	٣	٤	٣	٢٠
الدرجة × التكرار									

أ) أكمل الجدول أعلاه . ب) ما الدرجة التي لها تكرار أكثر؟

جـ) احسب المتوسط الحسابي .

[٣] يمثُل الجدول التكراري التالي بيانات موزعة في جدول كفئات :

الفئات	١٠ – ١٤	١٥ – ١٩	٢٠ – ٢٤	٢٥ – ٢٩	المجموع
مركز الفئة	١٢	١٧	٢٢	٢٧	–
التكرار	٣	٧	١٢	٦	٢٨ طالباً
مركز الفئة × التكرار	٣٦	١١٩	٢٦٤	١٦٢	٥٨١

أ) ما عدد الفئات . ب) ما حجم العينة ؟

جـ) احسب المتوسط الحسابي .

[٤] الجدول التكراري التالي يمثل علامات صف في مادة الرياضيات في إِحدى المدارس :

الفئات	٢٠ – ٢٨	٢٩ – ٣٧	٣٨ – ٤٦	٤٧ – ٥٥	٥٦ – ٦٤	المجموع
مركز الفئة	٢٤	٣٣	٤٢	٥١	٦٠	–
التكرار	٥	٧	١٥	١٠	١٣	٥٠
مركز الفئة × التكرار						

أ) أكمل الجدول أعلاه .　　　　ب) ما حجم العينة ؟

جـ) احسب المتوسط الحسابي .

[٥] أكمل الجدول التكراري التالي ، ثم أوجد المتوسط الحسابي .

الفئات	١٠ – ١٨	١٩ – ٢٧	٢٨ – ٣٦	٣٧ – ٤٥	المجموع
مركز الفئة					
التكرار	٥	٨	١٠	٧	٣٠
مركز الفئة × التكرار					

[٦] البيانات التالية تمثّل درجات الحرارة العظمى المسجلة خلال ٣٠ يوماً في مدينة صنعاء :

٢٧	٢٥	٢٢	٢٢	٢٤
٢٦	٢٢	٢٧	٢٥	٢٣
٢٤	٢٦	٢٥	٢٤	٢٢
٢٢	٢٣	٢٧	٢٢	٣٠
٢٤	٣٠	٢٤	٢٥	٢٣
٢٣	٢٦	٢٤	٢٩	٢٧

أ) كوّن جدولاً تكرارياً بدون فئات ، ثم أوجد المتوسط الحسابي .

ب) كوّن جدولاً تكرارياً كفئات بحيث يكون طول الفئة (٥) ثم أوجد المتوسط الحسابي .

جـ) قارن بين المتوسطين في أ ، ب .

٧ : ٢ المنـــــوال

يعتبر المنوال من أكثر مقاييس النزعة المركزية استخداماً، وذلك للسهولة في حسابه، حيث يُعرّف كالتالي :

المنوال هو القِيمة الأكثر تكراراً في البيانات الإحصائية.

حساب المنوال لتوزيع تكراري بدون فئات :

مثال (١) إذا كان لديك البيانات الآتية :

٨ ، ٨ ، ٩ ، ١١ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ١٩ ، ١٩ .

فتلاحظ أن (١٥) تكررت (٥) مرات وهي أكثر البيانات تكراراً ، وعلى هذا الأساس فإن المنوال هو (١٥) .

مثال (٢)

اعتبر البيانات التالية : ٧ ، ٩ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٣٢ ، ٤٨ ، والتي تلاحظ أن تكرارات هذه البيانات متساوية ، أي أن كل منها تكررت مرة واحدة ، وفي هذه الحالة ليس لها منوال، أي عديمة المنوال .

مثال (٣) إذا كان لديك الدرجات التالية :

١٨ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٣ ، ٢٣ ، ٢٣ ، ٢٦ ، ٢٦ ، ٢٦ ، ٣١ ، ٣٥

تجد (٣) تكرارات للدرجة (٢٣) ومثلها للدرجة (٢٦) وهنا يمكن اعتبار كل منهما منوالاً، أي إذا تساوت قيمتان من حيث تكرارهما يكون للقيم منوالان.

حساب المنوال لتوزيع تكراري كفئات :

في التوزيعات التكرارية ذات الفئات نستخدم التعريف التالي :

المنـــوال هو مركـــز الفئـــة ذات التكـــرار الأكبر .

مثال (٤) أوجد المنوال من جدول التوزيع التكراري التالي :

الفئات	١٠ –١٨	١٩ –٢٧	٢٨ –٣٦	٣٧ –٤٥
التكـــرار	٥	٨	١٠	٧

الحـــل:

نجد أن الفئة (٢٨ – ٣٦) لها أكبر تكرار (١٠) ، وبالتالي فإن المنوال هو مركز هذه الفئة ، أي أن المنوال = $\frac{٢٨ + ٣٦}{٢} = \frac{٦٤}{٢} = ٣٢$.

مثال (٥) أوجد المنوال للتوزيعات التكرارية التالية :

الفئات	٠ – ٥	٦ –١١	١٢ –١٧	١٨ –٢٣	٢٤ –٢٩	٣٠ –٣٥
التكـــرار	٤	٥	٨	٧	٨	٣

الحــل : بما أن الفئتين (١٢–١٧) ، (٢٤ – ٢٩) لهما التكرار نفسه .

∴ التوزيعـات التكراريـة لها منـوالان ، همـا :

المنـوال الأول = $\frac{١٢ + ١٧}{٢}$ = $\frac{٢٩}{٢}$ = ١٤,٥ ،

المنوال الثاني = $\frac{٢٤ + ٢٩}{٢}$ = $\frac{٥٣}{٢}$ = ٢٦,٥ .

تمارين ومسائل

[١] أوجد المنوال لكل من المجموعات التالية :

أ) ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٨

ب) ٣ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ٢ ، ٤ ، ٥

جـ) ٩ ، ٩ ، ٩ ، ٩ ، ٦ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٥

[٢] أوجد المنوال للتوزيعات التكرارية الآتية :

أ)

الفئـات	التكرار
١٠ – ١٤	٤
١٥ – ١٩	٧
٢٠ – ٢٤	٨
٢٥ – ٢٩	٥
٣٠ – ٣٤	٣

ب)

الفئـات	التكرار
١٠ – ١٤	٣
١٥ – ١٩	٩
٢٠ – ٢٤	٦
٢٥ – ٢٩	٩
٣٠ – ٣٤	٢

جـ)

الفئـات	التكرار
١٠ – ١٤	٦
١٥ – ١٩	٦
٢٠ – ٢٤	٦
٢٥ – ٢٩	٦
٣٠ – ٣٤	٦

[٣] أوجد المنوال للتوزيع التكراري التالي ، ثم احسب المتوسط الحسابي :

الفئات	١٠ – ١٩	٢٠ – ٢٩	٣٠ – ٣٩	٤٠ – ٤٩	٥٠ – ٥٩
مركز الفئة	١٤,٥	٢٤,٥	٣٤,٥	٤٤,٥	٥٤,٥
التكرار	٣	٥	٨	١	٣

[٤] أوجد المنوال والمتوسط الحسابي لجدول التوزيعات التكرارية التالية :

الفئات	١٠ – ١٨	١٩ – ٢٧	٢٨ – ٣٦	٣٧ – ٤٥	٤٦ – ٥٤
التكرار	١	٥	٣	٨	٣

[٥] الجدول التالي يوضح غياب طلاب الصف التاسع في إِحدى المدارس خلال العام الدراسي :

عدد أيام الغياب	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
التكرار	٧	١٥	٢٢	٢٤	١٧	١٠	٦	٣

أ) أوجد المتوسط الحسابي لعدد أيام الغياب .

ب) أوجد المنوال لعدد أيام الغياب .

٧ : ٣ التكرار المتجمع

سبق أن تعلمت في الصفين السابع والثامن كيفية تكوين جداول إِحصائية بيانية وكذلك جداول تكرارية بسيطة بدون فئات وبفئات . كما تعرفت على بعض أساليب التمثيل البياني .

وهنا سوف تتعرف على كيفية تكوين جداول للتكرار المتجمع ، أي التكرار التراكمي ، وهو نوعان تصاعدي وتنازلي ، كما ستتعرف على كيفية رسم منحنى كل منهما .

مثال (١)

يبين الجدول التكراري التالي توزيع درجات اختبار شهري في الرياضيات لطلاب الصف التاسع . (درجته العظمى ٣٠ درجة) .

الدرجات	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	المجموع
التكـــرار	١	١	٢	٨	٩	١٥	١٢	١٠	٤	٦٢

كوّن جدولي التكرار المتجمع التصاعدي والتنازلي .

الحـــل :

أولاً : لتكوين الجدول التكراري المتجمع التصاعدي نفتح سطـــراً ثالثاً فـــي الجدول السابق وذلك للتكرار المتجمع التصاعدي كما يلي :

أول تكرار = ١ ، ثاني تكرار = ١ + ١ = ٢ ، ثالث تكرار = ٢ + ٢ = ٤ ، رابع تكرار =٤ + ٨ = ١٢ ، . . . وهكذا ، فكل تكرار متجمع هو مجموع ذلك التكرار مع كل التكرارات السابقة،فيكون جدول التكرار المتجمع الصاعد هو :

الدرجات	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	المجموع
التكرار	١	١	٢	٨	٩	١٥	١٢	١٠	٤	٦٢
التكرار المتجمع الصاعد	١	٢	٤	١٢	٢١	٣٦	٤٨	٥٨	٦٢	

ملحوظة : التكرار المتجمع الصاعد لدرجة ما هو عدد الطلاب الحاصلين على تلك الدرجة أو على درجة أصغر منها .

ثانياً : لتكوين جدول التكرار المتجمع التنازلي ، نفتح سطـــراً ثالثاً للتكـــرار المتجمع التنازلي .

تعلم أن مجموع التكرارات في الجدول السابق هو ٦٢، هذه القيمة هي أول تكرار .

∴ أول تكـــرار = ٦٢ ، ثاني تكــــرار = ٦٢ – ١ = ٦١ ، ثالث تكرار = ٦١ – ١ = ٦٠ ، رابع تكرار = ٦٠ – ٢ = ٥٨ ، ... وهكذا ، فكل تكرار متجمع هو مجموع التكرارات كلها ناقصاً مجموع التكرارات السابقة .

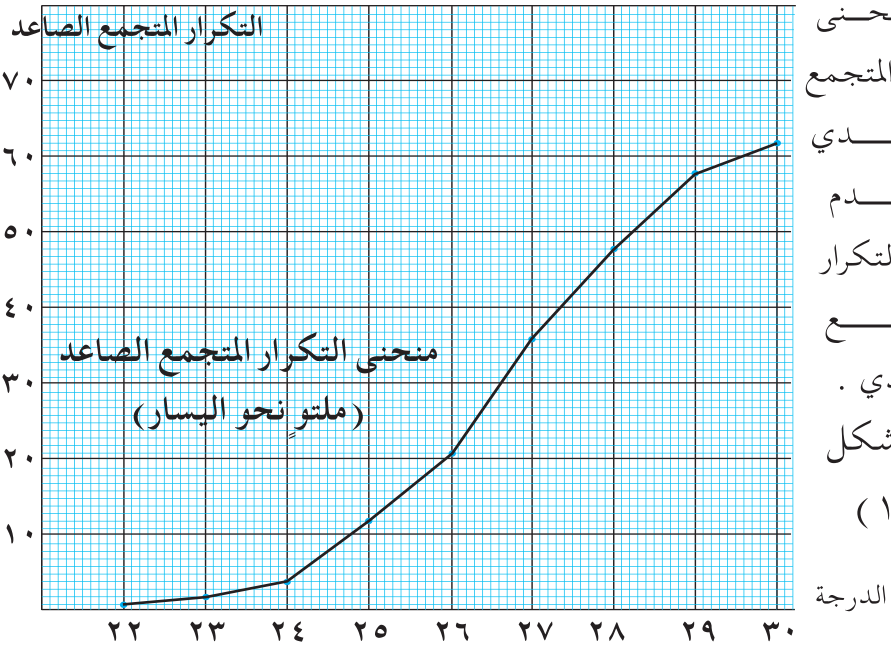
فيصبح جدول التكرار المتجمع النازل كالتالي :

الدرجات	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	المجموع
التكرار	١	١	٢	٨	٩	١٥	١٢	١٠	٤	٦٢
التكرار المتجمع النازل	٦٢	٦١	٦٠	٥٨	٥٠	٤١	٢٦	١٤	٤	

ملحوظة : التكرار المتجمع النازل لدرجة ما هو عدد الطلاب الحاصلين على هذه الدرجة أو على درجة أكبر منها .

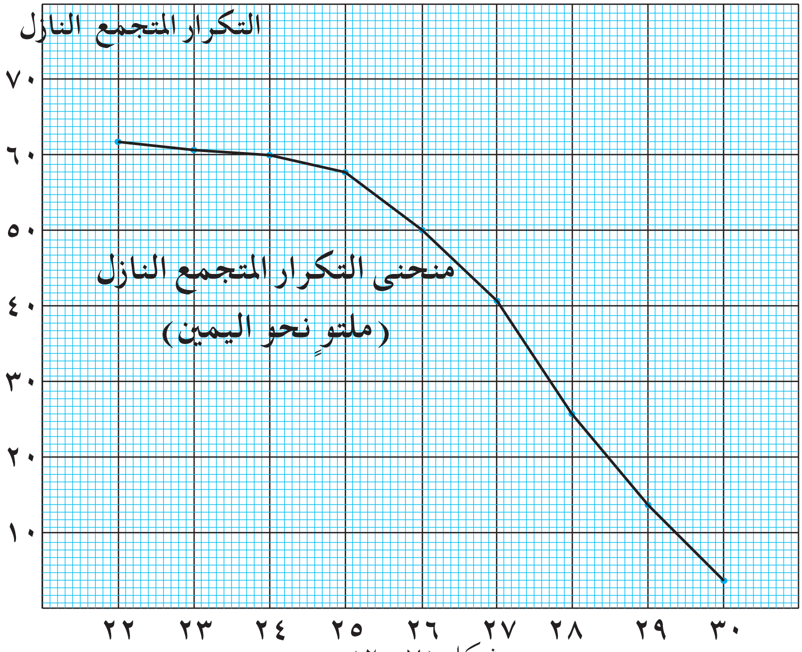
التمثيل البياني لجدولي التكرار المتجمع التصاعدي والتنازلي :

لرسم منحنى التكرار المتجمع التصاعدي نستخدم جدول التكرار المتجمع التصاعدي . انظر الشكل (٧ – ١)



شكل (٧ – ١)

لرسم منحنى التكرار المتجمع التنازلي نستخدم جدول التكرار المتجمع التنازلي انظر الشكل (٧ – ٢).



شكل (٧ – ٢)

ملحوظة :

* يمكن تمثيل كل جدول تكراري (تصاعدي أو تنازلي) بيانياً منفرداً أو في رسم بياني واحد .

* كما أنه يمكن عمل جدول واحد يحتوي التكرارين المتجمعين التصاعدي والتنازلي .

تمارين ومسائل

[١] الجدول التكراري التالي يوضح درجات (٣٠) طالباً في اختبار شهري في مادة الرياضيات (الدرجة العظمى ٣٠ درجة) .

الدرجة	٨	١١	١٤	١٧	٢٠	٢٣	المجموع
التكرار	٣	٦	١٠	٤	٥	٢	٣٠
التكرار المتجمع الصاعد	٣			٢٣			
التكرار المتجمع النازل	٣٠					٢	

أ) أكمل الجدول السابق .

ب) ارسم منحنى كل من التكرارين المتجمعين التصاعدي والتنازلي .

[٢] جدول التوزيع التكراري التالي يمثل درجات الصف التاسع في مادة العلوم في أحد الاختبارات الشهرية : الدرجة العظمى (٥٠ درجة) .

الفئات	مركز الفئة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
١٠ – ١٤		٤		
١٥ – ١٩	١٧	٩		
٢٠ – ٢٤		١٥		
٢٥ – ٢٩		١٢		٤٢
٣٠ – ٣٤		٢٠	٦٠	
٣٥ – ٣٩		٧		
٤٠ – ٤٤	٤٢	٣		
المجمـــوع		٧٠		

أ) أكمل الجدول أعلاه .

ب) ارسم منحنى التكرار المتجمع التصاعدي ومنحنى التكرار المتجمع التنازلي على الشكل نفسه .

جـ) ما النقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان التصاعدي والتنازلي ؟

ء) أوجد المتوسط الحسابي .

[٣] الجدول التالي يوضح توزيعات التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل :

الفئات	مركز الفئة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
٠ –٤	٢	١	١	
٥ – ٩		٣		٤٩
١٠ –١٤		٩		
١٥ –١٩		٨		
٢٠ –٢٤	٢٢	١٠		
٢٥ –٢٩		١٢		
٣٠ –٣٤		٤		
٣٥ –٣٩	٣٧	٣	٥٠	
المجمــــوع		٥٠		

أ) أكمل الجدول أعلاه .

ب) ارسم منحنى التكرار المتجمع التصاعدي ومنحنى التكرار المتجمع التنازلي على الشكل نفسه .

جـ) ارسم عموداً من نقطة التقاطع على المحور الأفقي ، ما إحداثيات هذه النقطة ؟

ء) أوجد المنوال .　　　　هـ) احسب المتوسط الحسابي .

[٤] بلغت أعمار (٣٠) عضواً ينتمون لنادٍ رياضي كما يلي :

١١	١٢	١٣	٢٠	٢١	١١	١٥	١٦	٣٠	٣٦
٢٢	٢٠	١٨	١٩	١٧	١٢	٢٠	٢٣	٢٧	٢٩
٢١	٢٥	٢٤	٢٣	٣١	٣٢	٣٥	٣٦	٣١	٣٠

الفئات	مركز الفئة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
١٠ –١٤				٣٠
			١٠	
	٢٧	٣		
٣٥ –٣٩		٣		
المجمـــــوع		٣٠		

أ) أكمل الجدول (علماً بأن طول الفئة = ٥)

ب) ارسم التكرار المتجمع التصاعدي والتكرار المتجمع التنازلي .

جـ) أوجد المنوال .　　　　　　ء) أوجد المتوسط الحسابي .

٧ : ٤ الوسيـــــط

البيانات التالية تمثل أوزان سبعة أطفال بالكيلوجرام ١٨ ، ٢١ ، ١٢ ، ١٩ ، ٢٥ ، ١٥ ، ١٦ وعند ترتيب هذه الأوزان تصاعدياً تكون : ١٢ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢١ ، ٢٥ ، رتب هذه الأوزان تنازلياً .

تلاحظ أن القيمة ١٨ تتوسط هذه القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً لذا نسمي مثل هذه القيمة الوسيط ويُعرف كالتالي :

الوسيط لمجموعة من القيم هو القيمة التي تتوسط هذه القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً .

وللحصول على الوسيط نرتب القيم إما تصاعدياً أو تنازلياً ثم نأخذ القيمة التي تقع في الوسط تماماً إذا كان عدد القيم (ن) عدداً فردياً، أما إذا كان عدد القيم (ن) عدداً زوجياً فإننا نأخذ متوسط القيمتين الوسطيتين لهذه القيم .

مثال (١) أوجد الوسيط للقيم الآتية :

أ) ٧٨ ، ٨٨ ، ٥٥ ، ٦٢ ، ٧٠ ، ٨٢ ، ٨٠

ب) ٣٢ ، ٢٨ ، ٢٥ ، ٣٤ ، ٣٥، ٣٠ ، ٣٨ ، ٢٢

الحـــل :

أ) ترتب القيم تصاعدياً كما يلي :

٥٥ ، ٦٢ ، ٧٠ ، ٧٨ ، ٨٠ ، ٨٢ ، ٨٨ لاحظ أن القيمة ٧٨ تتوسط القيم ، وذلك لأن عددها فردياً .

∴ الوسيط لهذه القيم = ٧٨

ب) نرتب القيم تصاعدياً كما يلي :

٢٢ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٨ نلاحظ أن القيمتين ٣٠ ، ٣٢ تتوسطان القيم ، وذلك لأن عددها زوجي .

$$\therefore \text{الوسيط} = \frac{٣٠ + ٣٢}{٢} = \frac{٦٢}{٢} = ٣١ \ .$$

حساب الوسيط في التوزيعات التكرارية :

عندما يكون لدينا توزيعات تكرارية ، فإنه لايمكننا إيجاد الوسيط مباشرة لذلك علينا ان نتبع الخطوات التالية :

١) نكوّن جدولاً تكرارياً متجمعاً صاعداً أو نازلاً .

٢)نعيّن ترتيب الوسيط وهو $\frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{\text{ن}}{٢}$ سواء كانت(ن) فردية أم زوجية .

٣) نحدد الفئة الوسيطية التي تحتوي على ترتيب الوسيط .

٤) يتم حساب الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد من العلاقة الآتية :

$$\textbf{الوسيط} = \text{أ} + \frac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ك}_١}{\text{ك}_٢} \times \text{ل}$$

حيث : أ = الحد الأدنى الحقيقي للفئة الوسيطية .

ن = التكرار الكلي .

$\text{ك}_١$ = التكرار المتجمع التصاعدي للفئة السابقة للفئة الوسيطية

$\text{ك}_٢$ = تكرار الفئة الوسيطية .

ل = طول الفئة الوسيطية .

٥) يتم حساب الوسيط للتكرار المتجمع النازل من العلاقة الآتية :

$$\textbf{الوسيط} = \text{ب} - \frac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ك}_٣}{\text{ك}_٢} \times \text{ل}$$

حيث : ب = الحد الأعلى الحقيقي للفئة الوسيطية .

ن = التكرار الكلي .

$\text{ك}_٣$ = التكرار المتجمع التنازلي للفئة اللاحقة للفئة الوسيطية .

$\text{ك}_٢$ = تكرار الفئة الوسيطية .

ل = طول الفئة الوسيطية .

مثال (٢) لدينا الجدول التكراري التالي :

الملاحظـــة	التكـــرار
٥	٥
٤	١٠
٣	٢٠
٢	٢٥
١	٤٠
المجموع	١٠٠

أ) احسب الوسيط في حالة التكرار المتجمع التصاعدي .

ب) احسب الوسيط في حالة التكرار المتجمع التنازلي .

الحـــل :

١) نكوّن جدول التكرار المتجمع التصاعدي والتنازلي كما يلي :

الملاحظة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
٥	٥	٥	١٠٠
٤	١٠	١٥	٩٥
٣	٢٠	$\boxed{٣٥}$ ك$_١$	٨٥
٢	$\boxed{٢٥}$ ك$_٢$	٦٠	٦٥
١	٤٠	١٠٠	$\boxed{٤٠}$ ك$_٣$
المجمـــوع	١٠٠		

٢) ترتيب الوسيط = $\frac{ن}{٢} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$ ويقع هذا الترتيب ضمن التكرار المتجمع التصاعدي (٦٠) وهذا يناظر الملاحظة (٢) وحيث إن ترتيب الوسيط يساوى ترتيب الفئة الوسيطية .

٣) الفئة الوسيطية هي (١,٥ – ٢,٥) حدها الأدنى الحقيقي ١,٥ وحدها الأعلى الحقيقي ٢,٥ وهي تناظر التكرار (٢٥) .

طول الفئة = ٢,٥ – ١,٥ = ١

٤) نحسب الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد من العلاقة :

$$\text{الوسيط} = أ + \frac{\frac{ن}{٢} - ك_{١}}{ك_{٢}} \times ل$$

$$\text{الوسيط} = ١,٥ + \frac{\frac{١٠٠}{٢} - ٣٥}{٢٥} \times ١$$

$$= ١,٥ + \frac{١٥}{٢٥} \times ١$$

$$= ١,٥ + \frac{٣}{٥} = ١,٥ + ٠,٦ = ٢,١$$

٥) نحسب الوسيط للتكرار المتجمع التنازلي من العلاقة :

$$\text{الوسيط} = ب - \frac{\frac{ن}{٢} - ك_{٣}}{ك_{٢}} \times ل$$

$$= ٢,٥ - \frac{\frac{١٠٠}{٢} - ٤٠}{٢٥} \times ١ = ٢,٥ - \frac{١٠}{٢٥}$$

$$= ٢,٥ - ٠,٤ = ٢,١$$

ملاحظة :

الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد هو نفسه للتكرار المتجمع النازل وبالتالي يمكن حسابه بواحدة فقط من هاتين الطريقتين .

مثال (٣)

من جدول التكرار الآتي أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد :

الفئـــات	التكـــرار
٣ – ٧	٢
٨ – ١٢	٣
١٣ – ١٧	١٠
١٨ – ٢٢	٥
٢٣ – ٢٧	٤
المجموع	٢٤

الحـــل :

١) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد كما يلي :

الفئـات	التكـــرار	التكرار المتجمع الصاعد
٣ – ٧	٢	٢
٨ – ١٢	٣	$\boxed{٥}$ ك$_١$
١٣ – ١٧	$\boxed{١٠}$ ك$_٢$	١٥
١٨ – ٢٢	٥	٢٠
٢٣ – ٢٧	٤	٢٤
المجموع	٢٤	

٢) ترتيب الوسيط = $\frac{ن}{٢}$ = $\frac{٢٤}{٢}$ = ١٢ ويقع هذا الترتيب ضمن التكرار المتجمع التصاعدي (١٥) وهذا يناظر الفئة (١٣ – ١٧) .

٣) الفئة الوسيطية هي (١٢,٥ –١٧,٥) حدها الأدنى ١٢,٥ وحدها الأعلى ١٧,٥ ، طول الفئة = ١٧,٥ – ١٢,٥ = ٥

٤) نحسب الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد من العلاقة :

$$\text{الوسيط} = \text{أ} + \frac{\frac{ن}{٢} - ك_{١}}{ك_{٢}} \times ل$$

$$\text{الوسيط} = ١٢,٥ + \frac{\frac{٢٤}{٢} - ٥}{١٠} \times ٥$$

$$= ١٢,٥ + \frac{٧}{١٠} \times ٥ = ١٢,٥ + \frac{٣٥}{١٠} = ١٢,٥ + ٣,٥ = ١٦$$

تدريب في المثال (٣) احسب الوسيط باستخدام التكرار المتجمع النازل تأكد من أن قيمة الوسيط مطابقة للقيمة التي حصلت عليها بالنسبة للتكرار المتجمع الصاعد .

حساب الوسيط بيانياً :

يمكننا إيجاد الوسيط من خلال الرسم البياني وذلك باتباع الخطوات التالية :

– نرسم منحنى التكرار المتجمع التصاعدي مع منحنى التكرار المتجمع التنازلي ومن نقطة تقاطع هذين المنحنيين انزل عموداً على المحور الأفقي .

– نقطة تقاطع العمود مع المحور الأفقي هي الوسيط .

مثال (٤) أوجد الوسيط بيانياً باستخدام المعلومات الواردة في جدول التكرار التالي :

الملاحظة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
٨	٣	٣	٣٠
١١	٦	٩	٢٧
١٤	١٠	١٩	٢١
١٧	٤	٢٣	١١
٢٠	٥	٢٨	٧
٢٣	٢	٣٠	٢
	٣٠		

الحل :

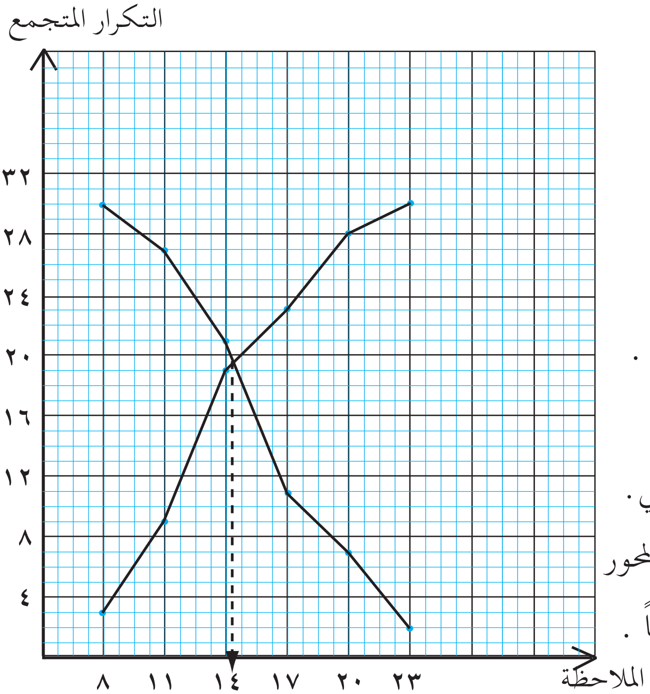
١) ارسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل .

٢)عين نقطة تقاطع المنحنيين .

٣)أانزل عموداً من نقطة تقاطع المنحنين على المحور الأفقي .

٤) نلاحظ أن العمود يقطع المحور الأفقي عند القيمة ١٤ تقريباً .

الوسيط ≈ ١٤ .



شكل (٧ – ٣)

تدريب تحقق من صحة الإجابة جبرياً .

تمارين ومسائل

[١] أوجد الوسيط لكل من القيم التالية :

أ) ٤ ، ٧ ، ١٢ ، ٦ ، ٩

ب) ٣٧ ، ٢٨ ، ٦٥ ، ٤٢ ، ٣٩ ، ٤٦ ، ٣١

جـ) ١٢ ، ٨ ، ١٤ ، ١١ ، ١٧ ، ١٥

ء) ٨٢ ، ٧٣ ، ٨٥ ، ٧٩ ، ٨١ ، ٧٥ ، ٩٢ ، ٩٥ .

[٢] إذا كانت أعمار خمسة أشخاص كما يلي :

٤٤ ، ٣٧ ، ٢٨ ، ٣٥ ، ٣٣ . أوجد الوسيط لهذه الأعمار .

[٣] أوجد الوسيط لجدول التكرار التالي باستخدام التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل ، وقارن بين الإجابتين .

الملاحظة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
٣٢	٣	٣	٣٠
٣٧	٦	٩	٢٧
٤٢	١٠	١٩	٢١
٤٧	٤	٢٣	١١
٥٢	٥	٢٨	٧
٥٧	٢	٣٠	٢
المجموع	٣٠		

[٤] لديك الجدول التكراري ذو الفئات التالية :

الفئات	٢ – ٥	٦ – ٩	١٠ – ١٣	١٤ – ١٧	المجموع
التكرار	٥	٤	٨	٣	٢٠
التكرار المتجمع الصاعد	٥	٩	١٧	٢٠	
التكرار المتجمع النازل	٢٠	١٥	١١	٣	

أ) أوجد الوسيط باستخدام التكرارين المتجمعين الصاعد والنازل .

ب) أوجد الوسيط بيانياً .

[٥] الجدول التالي يوضح درجات الحرارة المسجلة خلال خمسة وعشرين يوماً لمدينة الحوطة بلحج :

درجة الحرارة	٢٩	٣٢	٣٤	٣٥	٣٦	المجموع
التكرار	٣	٥	٧	٨	٢	٢٥
التكرار المتجمع الصاعد	٣	٨	١٥	٢٣	٢٥	
التكرار المتجمع النازل	٢٥	٢٢	١٧	١٠	٢	

أ) احسب الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد .

ب) احسب الوسيط للتكرار المتجمع النازل .

جـ) أوجد الوسيط بيانياً .   ء) قارن بين الوسيطات الثلاثة .

٧ : ٥ تمارين ومسائل عامة

[١] أوجد المتوسط الحسابي والوسيط للقيم التالية :

أ) ١٧ ، ٢٦ ، ٣٢ ، ٢٢ ، ٢٧

ب) ٥٥ ، ٦٢ ، ٥٨ ، ٦٠ ، ٦٣ ، ٥٩

[٢] إذا كانت قيم المتغير س هي : ٨ ، ١١ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥

أ) أوجد قيمة المتوسط الحسابي وقيمة الوسيط للمتغير س .

ب) أوجد قيمة المتوسط الحسابي وقيمة الوسيط للمتغير س + ٣ .

[٣] أوجد المنوال لكل من الحالات الآتية :

أ) ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٨ ، ٥ ، ٩ ، ٥ .

ب) ١٤ ، ١٦ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٤ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٣ ، ١٧ .

جـ) ٢٦ ، ٣٢ ، ٢٤ ، ٢٧ ، ٢٩ .

[٤] الجدول التكراري التالي يبين علامات طلاب الصف التاسع في مادة العلوم (الدرجة العظمى ٦٠ درجة) .

الدرجة	٢١	٢٧	٣٠	٣٦	٤٢	٤٥	٥٤	٥٦	المجموع
التكرار	٥	٨	٨	١٤	١٣	١٦	١٢	٤	٨٠
الدرجة X التكرار									

أ) أكمل الجدول التكراري أعلاه . ب) ما حجم العينة .

جـ) احسب المتوسط الحسابي . ء) أوجد المنوال لهذه الدرجات .

هـ) احسب الوسيط لهذه الدرجات .

[٥] البيانات التالية تمثل عدد الأشخاص الذين ارتادوا المكتبة خلال عشرة أيام :

١٣٢ ، ١٣٢ ، ١٣٥ ، ١٣٦ ، ١٤٠

١٤٢ ، ١٤٦ ، ١٣٥ ، ١٤٨ ، ١٥٠

أ) اكتب البيانات السابقة في جدول تكراري ثم احسب المتوسط الحسابي والوسيط لهذه البيانات .

ب) اكتب البيانات السابقة في جدول تكراري بشكل فئات بحيث يكون طول الفئة =٤ ، ثم أوجد المتوسط الحسابي والوسيط لهذه البيانات .

جـ) قارن بين المتوسطين الحسابيين في أ، ب وكذلك بين الوسيطين في أ ،ب أيضاً .

[٦] الجدول التالي يوضح استهلاك الماء بالمتر المكعب لعشرين أسرة في مدينة الحديدة خلال شهرين فقط :

كمية الماء بالمتر المكعب	٣٠	٣٢	٣٣	٣٥	٣٨	المجموع
التكرار	٣	٥	٨	٢	٢	٢٠
التكرار المتجمع الصاعد						
التكرار المتجمع النازل						

أ) أكمل الجدول .

ب) أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد .

جـ) أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع النازل .

ء) أوجد الوسيط بيانياً . هـ) قارن بين الوسيطات الثلاثة السابقة .

[٧] البيانات التالية توضح عدد أفراد ٣٠ أسرة في محافظة إب :

٥ ، ٤ ، ١ ، ٥ ، ٦ ، ٣ ، ٧ ، ٩ ، ٣ ، ٤

٨ ، ٣ ، ٢ ، ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٧ ، ٨ ، ٦

٤ ، ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٧ ، ٥ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ٩

أ)كوّن جدولاً تكرارياً للبيانات السابقة ، ثم أوجد المتوسط والوسيط والمنوال .

ب)كوّن جدولاً تكرارياً للبيانات السابقة بشكل فئات بحيث يكون طول الفئة = ٢ ، ثم أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد والمتوسط الحسابي .

جـ) أوجد الوسيط بيانياً .

٧ : ٦ اختبار الوحدة

[١] أوجد كلاً من المتوسط الحسابي والمنوال والوسيط لكل من القيم التالية :

أ) ٥ ، ٤ ، ٨ ، ٦ ، ١٣ ، ٥ ، ١١ ، ٥ ، ١٥

ب) ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٩ ، ٣ ، ١٥ ، ٣ ، ٧

[٢] لديك جدول التوزيع التكراري الآتي :

الملاحظة	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
التكرار	٣	٥	٢	٣	٣	١٦
الملاحظة × التكرار	٣	١٠	٦	١٢	١٥	٤٦

أوجد : ﺃ) المتوسط الحسابي . ب) المنوال .

[٣] لديك جدول التوزيع التكراري الآتي :

الفئات	٣ – ٥	٦ – ٨	٩ – ١١	١٢ – ١٤	المجموع
مركز الفئة					
التكرار	٢	٦	٦	٣	١٧
مركز الفئة × التكرار					

ﺃ) أكمل الجدول . ب) أوجد المنوال .

جـ) أوجد المتوسط الحسابي .

[٤] الجدول التالي يوضح درجات ٣٥ طالباً في مادة اللغة العربية :

الدرجة	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
التكرار	٢	٣	٦	٩	٨	٥	٢	٣٥
التكرار المتجمع الصاعد								
التكرار المتجمع النازل								

ﺃ) أكمل الجدول .

ب) أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد .

جـ) أوجد الوسيط بيانياً . ﺀ) قارن بين الوسيطين .

بحمد الله

استبانة تقويم الكتاب

بيانات المستجيب:

الاسم/...	المؤهل وتاريخه/...	التخصص/...
العمل الحالي /...		المحافظة/...

بيانات الكتاب:

المادة /...	الصف /...	اسم الكتاب /...
الجزء /...	الطبعة...	السنة الدراسية /...
تاريخ تعبئة الاستبانة...		

نهدف من هذه الاستبانة تقويم الكتاب بغرض تحسينه في الطبعات القادمة.
نرجو التكرم بوضع علامة (✓) تحت الوصف الذي تراه مناسباً لإجابتك أمام كل بند.

البنـــد	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
أولاً- الأهداف: – وضوح الصياغة .				
– تقيس فكرة محددة .				
– يمكن قياسها .				
– شاملة (معرفية – مهارية – وجدانية) .				
ثانياً - المادة العلمية وأسلوب عرضها: – ملائمة لغة الكتاب لمستوى المتعلم .				
– سلامة ووضوح لغة الكتاب .				
– ترسيخ المحتوى للقيم الدينية والوطنية .				
– مادة الكتاب تكسب المتعلم خبرات جديدة .				
– ملامسة المادة لمشكلات المتعلم واهتماماته .				
– مادة الكتاب تساعد المتعلم على فهم المشكلات .				
– مادة الكتاب تراعي الفروق الفردية .				
– خلو الكتاب من التكرار في الموضوعات .				
– يراعي أسلوب عرض المادة الترابط والتسلسل المنطقي .				
– مراعاة مادة الكتاب للحداثة والدقة العلمية .				
– عرض المادة تحفز على القراءة والبحث والتفكير .				
– تحقيق المحتوى لأهداف المادة .				

البنـــد	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
ثالثاً - الوسائل التعليمية: – وضوحها ودقتها .				
– ارتباطها بموضوعات الدرس .				
– مدى ارتباطها بالأهداف .				
رابعاً -التقويم: – الأنشطة والتمارين تكسب المتعلم مهارات متنوعة .				
– بطاقات التفكير تثير دافعية البحث والإطلاع .				
– الأسئلة والتمرينات تقيس مدى تحقيق الأهداف .				
– مناسبة لمستوى المتعلم .				
– دقة ووضوح الصياغة .				
– تراعي الفروق الفردية .				
– متنوعة وشاملة للجوانب المعرفية .				
– تساعد المتعلم في تطبيق ما تعمله في مواقف الحياة المختلفة .				
– كفاية الأسئلة في مساعدة المتعلم على استيعاب مادة الكتاب .				
خامساً - الشكل والإخراج الفني: – ارتباط الغلاف بمحتوى الكتاب .				
– متانة تجليد الكتاب .				
– وضوح الألوان ومناسبتها .				
– وضوح ودقة الطباعة .				
– نوعية ورق الكتاب .				

أسئلة عامة، أجب بـ (نعم) أو (لا):

البنـــد	نعم	لا	
– ينسجم محتوى الكتاب مع نظام الفصلين الدراسيين .			
– عدد الحصص المقررة تكفي لا ستيعاب مادة الكتاب .			
– هل الوسائل التعليمية متنوعة وكافية ؟			
– هل هناك ضرورة لوجود قائمة بالمراجع ومصادر المعلومات ؟			
– هل هناك موضوعات ترى ضرورة حذفها (اذكرها) ؟			
– هل هناك موضوعات ترى ضرورة إضافتها (اذكرها) ؟			

إذا كان لديك ملاحظات أخرى اكتبها ....

....

....

....

....

قائمة الأخطاء العلمية واللغوية والمطبعية:

الخطأ	الصفحة	السطر	الصواب

نرجو التكرم بإرسال الاستبانة إلى

الإدارة العامة للمناهج

تيلفكس : ٠١/٥٧٥٥٤٩

ص . ب : (٣٥٢٨) صنعاء - الجمهورية اليمنية

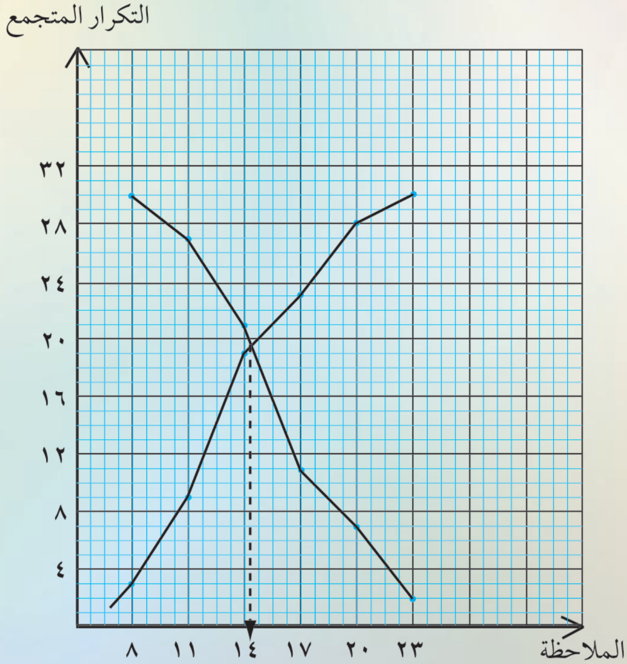
البريد الإلكتروني : manhg2013@hotmail.com

أو إدارة المناهج بمكتب التربية بالمحافظة

الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني

el-online.net

el-online.net



الجمهورية اليمنية
المؤسسة العامة لمطابع الكتاب المدرسي