وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الرابع: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

العبيكان Obeikan
McGraw Hill Education
يوزع مجانًا ولا يباع
١٤٣٥هـ - ٢٠١٤م

Glencoe Mathematics © 2010

CHAPTER RESOURCE MASTERS

Precalculus

الرياضيات ـ الصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

www.obeikaneducation.com

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله، والصلاة والسلام على نبينا محمد، وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم.

وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوعٍ من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التالية:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدِّمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقًا من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجَّهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسُّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقًا بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغَّرة.

الفهرس

4-1 تدريبات إعادة التعليم

القطوع المكافئة

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًا القطع المكافئ هو المحل الهندسي لجميع نقاط المستوى التي يكون بُعدها عن نقطة تسمى **البؤرة**، يساوي بُعدها عن مستقيم معلوم يسّمى **الدليل.** والصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًا هي $(x-h)^2 = 4c(y-k)$، وعندما تكون c سالبة، فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى أسفل، وعندما تكون c موجبة، فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى أعلى. أمّا الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًا فهي $(y-k)^2 = 4c(x-h)$. وعندما تكون c سالبةً، فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى جهة اليسار، وعندما تكون c موجبة، فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى جهةاليمين.

مثال **حدّد خصائص القطع المكافئ $(x-3)^2 = 12(y+4)$، ثم مثّل منحناه بيانيًا.**

المعادلة في صورتها القياسية والحد التربيعي هو x، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح رأسيًا. وبما أن $4c = 12$ فإن $c = 3$ ؛ لذا فهو مفتوح إلى أعلى.

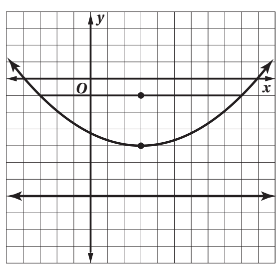
وبما أن المعادلة في الصورة: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ ؛ إذن: $h = 3$ و $k = -4$. استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

الرأس: $(3, -4)$ (h, k) الدليل : $y = -7$ $y = k - c$

البؤرة: $(3, -1)$ $(h, k + c)$ محور التماثل: $x = 3$ $x = h$ طول الوتر البؤري: 12 $|4c|$

عيّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل والوتر البؤري، مستعملًا بعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع المكافئ، ثم ارسم منحنًى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتَي الوتر البؤري، ويجب أن يكون متماثلًا حول محور التماثل.

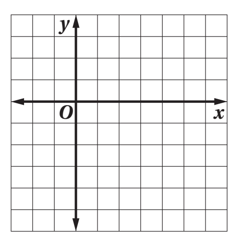
x	0	2	4	6
y	$-3\frac{1}{4}$	$-3\frac{11}{12}$	$-3\frac{11}{12}$	$-3\frac{1}{4}$



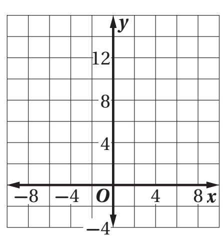
تمارين

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كلٍّ ممّا يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًا:

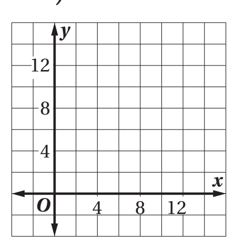
(1 $(y+1)^2 = 8(x-3)$



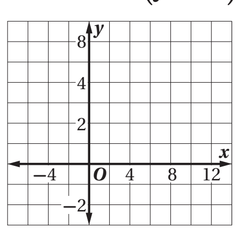
(2 $(x+2)^2 = 4(y-1)$



(3 $(y-3)^2 = 2(x-6)$



(4 $\frac{1}{12}(x-3)^2 = (y+2)$



الاسم: ____________ التاريخ: ____________

4-1 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

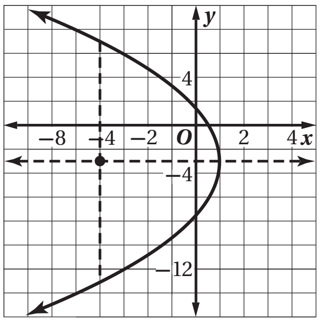
القطوع المكافئة

معادلات القطوع المكافئة يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

مثال **اكتب معادلة القطع المكافئ، إذا كانت بؤرته $(-4, -3)$ ورأسه $(1, -3)$، ثم مثّله بيانيًّا.**

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y، فإن المنحنى مفتوح أفقيًّا؛ لذا فالبؤرة هي $(h + c, k)$،

وعليه تكون قيمة c هي $-4 - 1 = -5$، ولمّا كانت c سالبة، فإن المنحنى مفتوح إلى جهة اليسار.



اكتب معادلة القطع المكافئ في الصورة القياسية مستعملًا القيم h, c, k.

$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	الصورة القياسية
$[y-(-3)]^2 = 4(-5)(x-1)$	$c = -5, h = 1, k = -3$
$(y+3)^2 = -20(x-1)$	بسِّط

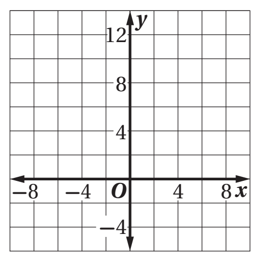
الصورة القياسية للمعادلة هي: $(y+3)^2 = -20(x-1)$.

مثّل بيانيًّا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم القطع المكافئ.

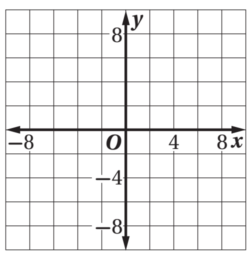
تمارين

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا:

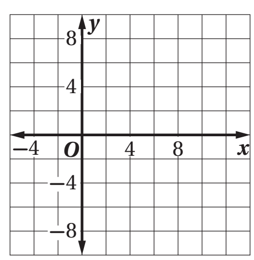
1) البؤرة $(-1, 5)$، والرأس $(2, 5)$



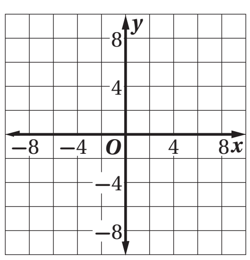
2) البؤرة $(1, 4)$، ومفتوح إلى أسفل ; ويحوي $(-3, 1)$



3) الدليل $y = 6$، ومفتوح إلى أسفل، والرأس $(5, 3)$



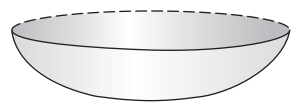
4) البؤرة $(1.5, 1)$، ومفتوح إلى جهة اليمين، ومعادلة الدليل $x = 0.5$



4-1 تدريبات حل المسألة

القطوع المكافئة

1) **عاكسات:** يوضح الشكل الآتي مرآةً عاكسةً على شكل قطع مكافئ، ويمكن نمذجة مقطع طولي للمرآة بالمعادلة $x^2 = 16y$، أوجد المسافة بين الرأس والبؤرة في هذه المرآة.

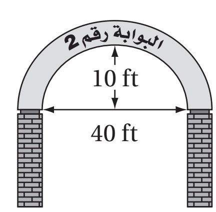


2) **قمصان ألعاب:** رُمي قميص يحمل شعار الفريق الفائز بعد المباراة في الهواء بواسطة جهاز بسرعة ابتدائية $32\,ft\,/\,s$، إذا كانت المعادلة: $y = -16x^2 + 32x + 5$ تمثل ارتفاع القميص y (بالقدم) فوق الأرض بعد x ثانيةً.

a) اكتب معادلة القطع المكافئ في الصورة القياسية.

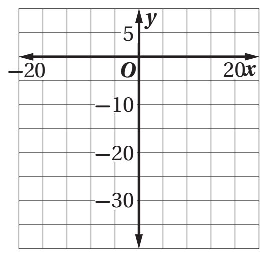
b) ما أقصى ارتفاع يصل إليه القميص؟

3) **عمارة:** أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة إحدى الكليات الجامعية كما في الشكل:

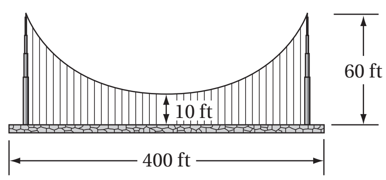


a) اكتب معادلة القطع المكافئ.

b) مثّل منحنى القطع المكافئ بيانيًّا.



4) **جسور:** تبدو السلسلة المعدنية لأحد الجسور المعلقة على شكل قطع مكافئ، والدعامات الرأسية موضحة كما في الشكل الآتي.

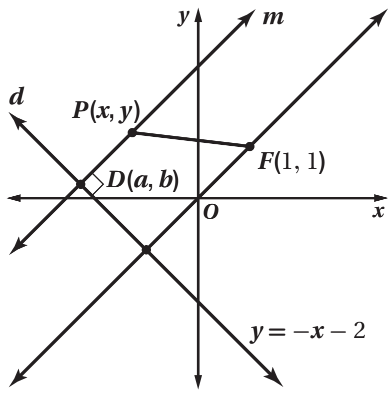


a) اكتب معادلة السلسلة المعدنية .

b) أوجد طول الدعامة الرأسية التي تبعد عن المركز 100 قدمٍ.

4-1 التدريبات الإثرائية

القطوع المكافئة المائلة



يوضح الشكل المجاور نقطة ثابتة $F(1, 1)$، والمستقيم d الذي معادلته $y = -x - 2$. إذا كانت $P(x, y)$ تحقق الشرط $PD = PF$، فإن P تقع على قطع مكافئ. وهدفنا هو إيجاد معادلة القطع المكافئ المائل، وهو المحل الهندسي لجميع النقاط التي لها البعد نفسه عن $(1, 1)$ والمستقيم $y = -x - 2$.

أولًا: أوجد معادلة المستقيم m الذي يمر بالنقطة $P(x, y)$ وعمودي على المستقيم d عند $D(a, b)$، وأوجد الإحداثيين (a, b) للنقطة D بدلالة x و y، ثم استعمل $(PD)^2 = (PF)^2$؛ لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

ارجع إلى المناقشة أعلاه.

1) أوجد معادلة المستقيم m.

2) استعمل معادلتَي المستقيمين m و d؛ لتوضح أن إحداثيَّي النقطة D هما $D(a, b) = \left(\frac{x - y - 2}{2}, \frac{y - x - 2}{2}\right)$.

3) استعمل إحداثيات F, P, D، والعلاقة $(PD)^2 = (PF)^2$ ؛ لإيجاد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F، ودليله المستقيم d.

4) a) لكل قطع مكافئ محور تماثل، أوجد معادلة محور التماثل للقطع المكافئ المشار إليه أعلاه، وبرّر إجابتك.

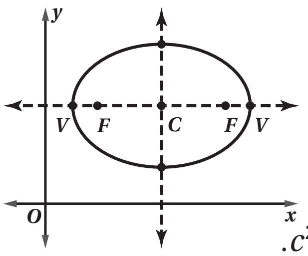
b) استعمل إجابتك من الجزء **a**؛ لإيجاد إحداثيَّي رأس القطع المكافئ، وبرّر إجابتك .

الاسم: ______________________________ التاريخ: ____________

4-2 تدريبات إعادة التعليم

القطوع الناقصة والدوائر

تحليل القطع الناقص و الدائرة و تمثيلهما بيانيًّا : القطع الناقص هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوي التي يكون مجموع بُعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان **البؤرتين** يساوي مقدارًا ثابتًا. والصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص هي:



$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ حيث المحور الأكبر أفقي. وفي هذه الحالةa^2 هو مقام الحد الذي يحوي x .

والصورة القياسية هي $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}+\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=2$ عندما يكون المحور الأكبر رأسيًّا.

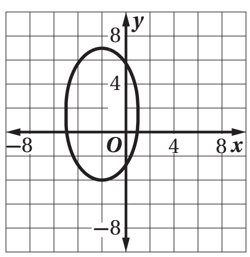
وفي هذه الحالة فإن a^2 هي مقام الحد الذي يحوي y، وفي كلتا الحالتين يكون $c^2=a^2-b^2$.

مثال

حدِّد خصائص القطع الناقص الذي معادلته $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$

المعادلة في الصورة القياسية.

$a^2=25, b^2=9$, $c^2=a^2-b^2=25-9=16$, $a^2>b^2$ ؛ إذن $a=5, b=3, c=4$، استعمل هذه القيم لتحديد رأسي القطع الناقص ومحوريه، بما أن a^2 مقام الحد الذي يحوي y فإن المحور الأكبر يوازي محور y .

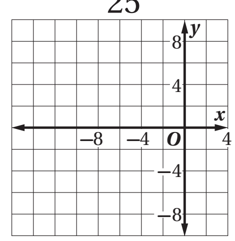


الاتجاه :	رأسي	
المركز:	$(-2, 1)$	(h, k)
البؤرتان:	$(-2, 5), (-2, -3)$	$(h, k\pm c)$
الرأسان:	$(-2, 6), (-2, -4)$	$(h, k\pm a)$
الرأسان المرافقان:	$(-5, 1), (1, 1)$	$(h\pm b, k)$
المحور الأكبر :	$x=-2$، وطوله 10	$x=h$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$y=1$ ، وطوله 6	$y=k$ ، طول المحور الأصغر $2b$

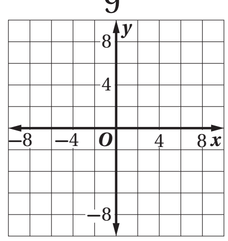
تمارين

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

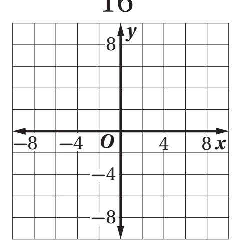
1) $\dfrac{(x+5)^2}{64}+\dfrac{(y+2)^2}{25}=1$



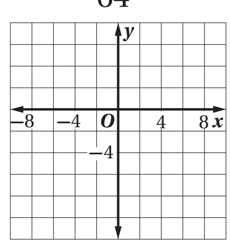
2) $\dfrac{(x+2)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$



3) $\dfrac{(x+3)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=2$



4) $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+3)^2}{64}=1$



الاسم: ________________ التاريخ: ________

4-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

القطوع الناقصة والدوائر

تحديد أنواع القطوع المخروطية إذا عُلمت معادلة قطع مخروطي، فبإمكانك أن تحدد نوعه باستعمال خصائص المعادلة. الصيغة القياسية لمعادلة دائرة مركزها (h, k) وطول نصف قطرها r هي: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

مثال **اكتب كل معادلة من المعادلتين الآتيتين في الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.**

a) $\mathbf{4x^2+9y^2+24x-36y+36=0}$

$4x^2+9y^2+24x-36y+36=0$	المعادلة الأصلية
$4(x^2+6x+?)+9(y^2-4y+?)=-36+?+?$	بإكمال المربع.
$4(x^2+6x+9)+9(y^2-4y+4)=-36+36+36$	$\left(-\frac{4}{2}\right)^2=4\ ,\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$
$4(x+3)^2+9(y-2)^2=36$	بالتحليل.
$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$	بقسمة الطرفين على 36

لمّا كانت صيغة المعادلة هي: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ،فإن المنحنى يمثل قطعًا ناقصًا مركزه $(-3, 2)$.

b) $\mathbf{x^2-16x-8y+80=0}$

$x^2-16x-8y+80=0$	المعادلة الأصلية
$(x^2-16x+?)-8y+80=0$	بإكمال المربع.
$(x^2-16x+64)-8y+80-64=0$	$\left(\frac{16}{2}\right)^2=64$
$(x-8)^2-8(y-2)=0$	حلل .
$(x-8)^2=8(y-2)$	بجمع $8(y-2)$ للطرفين

لمّا كان التربيع لحدٍّ واحدٍ، فإن المنحنى يمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(8, 2)$.

التمارين

اكتب كل معادلة مما يأتي في الصورة القياسية، ثم حدد نوع القطع المخروطي المرتبط بها:

1) $y^2+2y+6x^2-24x=5$

2) $y^2+2y+x^2-24x=24$

3) $4x-8+y^2+4y=0$

4) $x^2+4x+y^2-2y-49=0$

5) $4x^2+8x+5y^2-30y-11=0$

6) $6x^2+24x+2y-10=0$

4-2 تدريبات حلّ المسألة

القطوع الناقصة والدوائر

1) **صالة الهمس:** في أحد المتاحف، توجد صالة همس صوتي على شكل قطع ناقص، طول الصالة 84 قدمًا وعرضها 46 قدمًا.

a) اكتب معادلة تمثل شكل الصالة، مفترضًا مركزها عند نقطة الأصل والمحور الأكبر أفقي.

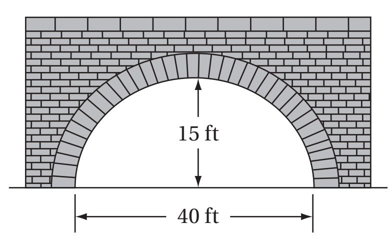
b) أوجد موقعَي البؤرتين.

2) **لوحات:** لوحة على شكل قطع ناقص. إذا كان الاختلاف المركزي 0.60، وطول اللوحة $48\ cm$.

a) فاكتب معادلة القطع الناقص، إذا كان مركز اللوحة عند نقطة الأصل.

b) ما عرض اللوحة؟

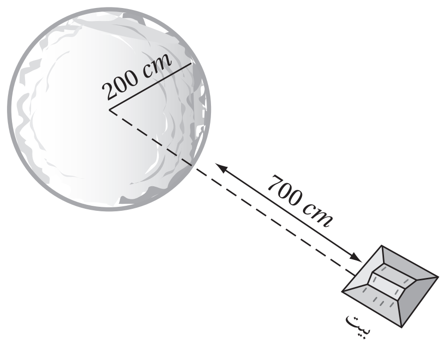
3) **نفق:** مدخل نفق على شكل نصف قطع ناقص كما في الشكل.



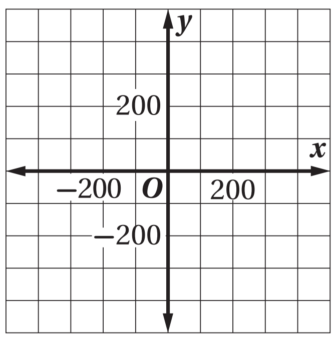
a) اكتب المعادلة التي تمثل القطع الناقص.

b) احسب ارتفاع النفق فوق نقطة تبعد $10\ ft$ عن المركز.

4) **بركة:** يزداد طول نصف قطر بركة لتجميع الماء المتدفق من أرض مجاورة بمعدل $100\ cm$ لكل يوم على نحو ما هو موضح أدناه.



a) مثّل بيانيًا الدائرة التي تمثل الماء على الشكل أعلاه، وأوجد البعد بين مركز البركة والبيت.



b) إذا استمرت بركة الماء في الاتساع بالمعدل نفسه، فبعد كم يوم يصل الماء إلى البيت؟

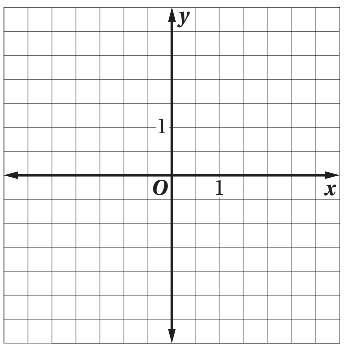
c) اكتب معادلة بركة الماء في الوقت الحالي ومعادلتها عندما يصل الماء إلى البيت.

4-2 التدريبات الإثرائية

عائلة منحنيات لامي

مجموعة المنحنيات التي تكون معادلاتها في الصورة: $\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1$ ، حيث: $a \neq 0, b \neq 0, n > 0$،
تسمى عائلة منحنيات لامي، نسبة إلى عالم الفيزياء والرياضيات الفرنسي لامي($Lamé$(1795–1870)).

1) مثّل كلًّا من المعادلتين الآتيتين بيانيًّا، وحدّد نوع المنحنى الناتج في كل مرة:

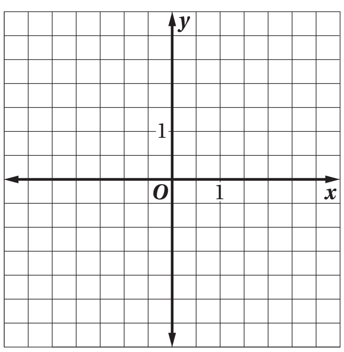


a) $\left|\frac{x}{2}\right|^2 + \left|\frac{y}{2}\right|^2 = 1$

b) $\left|\frac{x}{3}\right|^2 + \left|\frac{y}{2}\right|^2 = 1$

2) بناءً على سؤال 1، هل تضم مجموعة منحنيات لامي الدائرة والقطع الناقص.

3) استعمل قيم a, b, n المعطاة في كلٍّ من الحالات الآتية في معادلة عائلة منحنيات لامي، واكتب المعادلة الناتجة في كل حالة ، ثم مثّلها بيانيًّا على الشبكة البيانية المجاورة.



a) $a = 2, b = 3, n = 4$

b) $a = 2, b = 3, n = 6$

c) $a = 2, b = 3, n = 8$

4) ما الشكل الذي يقترب إليه منحنى $\left|\frac{x}{2}\right|^n + \left|\frac{y}{3}\right|^n = 1$ لقيم n الصحيحة الموجبة الزوجية الكبيرة؟

4-3 تدريبات إعادة التعليم

القطوع الزائدة

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًا القطع الزائد هو المحل الهندسي لجميع نقاط المستوى التي يكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان **البؤرتين**، مقدارًا ثابتًا والصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد هي: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًا، والصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد هي: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًا

وفي كلتا الحالتين يكون: $a^2 + b^2 = c^2$.

مثال

حدّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

المعادلة بالصورة القياسية. كلٌّ من h و k يساوي صفرًا، لذا فإن المركز عند نقطة الأصل، ولمّا كان الحد المطروح يحوي x، فإن المحور القاطع رأسي، أوجد قيم a, b, c، واستعملها لتحديد الرأسين والبؤرتين.

بما أن $a^2 = 16$ و $b^2 = 4$، فإنّ $a = 4$ و $b = 2$. استعمل قيمتَي a و b لإيجاد قيمة c.

$c^2 = a^2 + b^2$	العلاقة بين a, b, c
$c^2 = 4^2 + 2^2$	$a = 4 , b = 2$
$c = \sqrt{20}$ أو 4.47 تقريبًا	بالتبسيط.

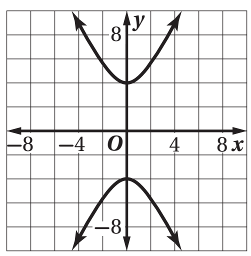
حدّد خصائص القطع الزائد.

المركز: $(0, 0)$ $\quad (h, k)$ $\quad$ البؤرتان: $(0, \sqrt{20}), (0, -\sqrt{20})$ $\quad (h, k \pm c)$

الرأسان: $(0, 4), (0, -4)$ $\quad (h, k \pm a)$ $\quad$ خطّا التقارب : $y = 2x, y = -2x$ $\quad y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$

أنشئ جدول قيم لتمثيل منحنى القطع الزائد.

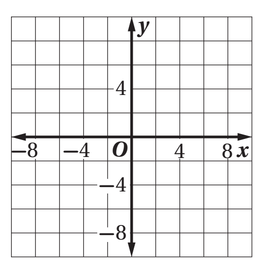
x	y
-2	$-5.7, 5.7$
-1	$-4.5, 4.5$
0	-4, 4
1	-4.5, 4.5
2	$-5.7, 5.7$



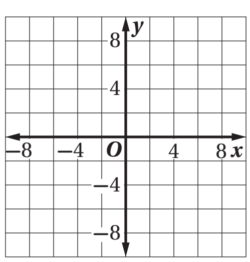
تمارين

حدّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّله بيانيًا.

(1 $\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$



(2 $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{36} = 1$



4-3 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

القطوع الزائدة

كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه : يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع الزائد.

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص التالية: رأساه $(2, -2), (-4, -2)$، وبؤرتاه $(4, -2), (-6, -2)$.

بما أن احداثيَّي y متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع أفقي، أوجد المركز، وقيم a, b, c.

المركز $(-1, -2)$ — نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين أو البؤرتين

$a = \sqrt{(-4+1)^2 + (-2+2)^2} = 3$ — المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز.

$c = \sqrt{(4+1)^2 + (-2+2)^2} = 5$ — المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز.

$b = \sqrt{25 - 9} = 4$ — $c^2 = a^2 + b^2$

بما أن المحور القاطع أفقي، فإن a^2 ترتبط بالحد x^2؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي: $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$.

تمارين

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) البؤرتان هما $(0, 4), (0, -4)$ ، وطول المحور المرافق 6

2) الرأسان هما $(3, -6), (3, 2)$ ، وخطّا التقارب هما $y = \frac{4}{5}x - \frac{22}{5}$ ، وَ $y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$.

3) الرأسان هما $(10, 2), (6, 2)$ ، والبورتان هما $(12, 2), (4, 2)$

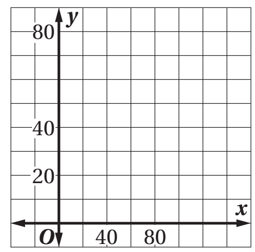
الاسم: ________________ التاريخ: ________

4-3 تدريبات حل المسألة

القطوع الزائدة

1) زلازل: المركز السطحي لزلزالٍ يقع على أحد فرعَي منحنى القطع الزائد الذي معادلته: $\frac{(x-50)^2}{1600} - \frac{(y-35)^2}{2500} = 1$، حيث تقع راسمات الزلازل عند البؤرتين.

a) مثّل القطع الزائد بيانيًّا.

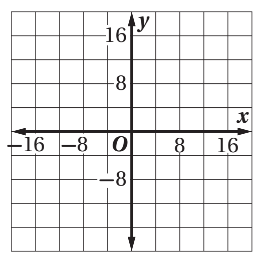


b) أوجد إحداثيات موقعَي راسمتَي الزلازل.

2) ظلال: يسقط ضوء مصباح على جدار، فيتكون ظلٌّ حدوده على شكل قطع زائد، معادلته:

3) $\frac{y^2}{196} - \frac{x^2}{121} = 1$

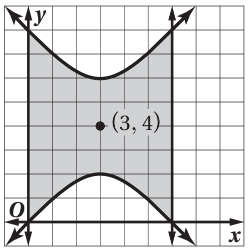
a) مثّل القطع الزائد بيانيًّا.



b) اكتب معادلتَي خطَّي التقارب .

c) أوجد الاختلاف المركزي.

4) منتزهات: حدّان من حدود منطقة لعب عشبية على شكل قطع زائد كما هو موضح في الشكل أدناه:



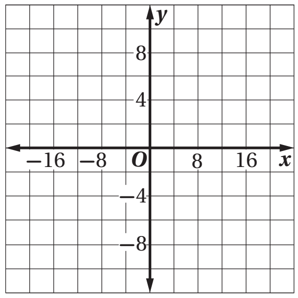
a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي يمثل حدود منطقة اللعب.

b) إذا كانت كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل $3\,ft$، فما أضيق عرض لمنطقة اللعب؟

5) ظلال: يكون مسار ظل مؤشر الساعة الشمسية على شكل قطعٍ زائدٍ غالبًا.

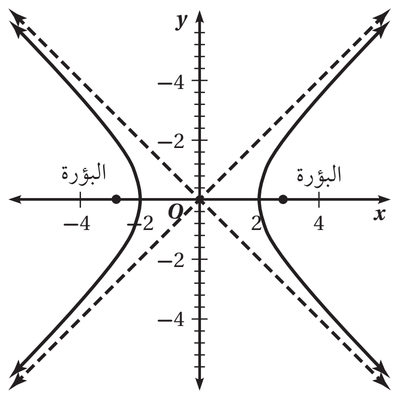
a) اكتب معادلتَي القطع الزائد بالصورة القياسية، إذا كان المركز يقع في نقطة الأصل، والمسار المار بالمحور القاطع يبعد $2\,mm$ عن إحدى البؤرتين، و $12\,mm$ عن المركز.

b) مثّل أحد القطعين الزائدين بيانيًّا.



4-3 التدريبات الإثرائية

البؤرتان المتحركتان



تذكّر أن معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع أفقي هي: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. والبؤرتان هما: $(-c, 0)$, $(c, 0)$، حيث $c^2 = a^2 + b^2$،
والرأسان هما: $(-a, 0)$, $(a, 0)$، ومعادلتا خطَّي التقارب هما: $y = \pm\frac{b}{a}x$، والشكل المجاور يمثل منحنى هذا القطع الزائد.
ماذا يحدث لهذا المنحنى عندما تزيد قيمة c بلا حدود أو تقل بلا حدود؟

استعمل القطع الزائد المشار إليه أعلاه للإجابة عن الأسئلة 4–1 .

1) اكتب دليلًا مقنعًا لتوضح أنه عندما تقترب c من 0،
فإن البؤرتين والرأسين والمركز للقطع الزائد، تصبح جميعها نقطةً واحدةً.

2) استعمل الحاسبة البيانية أو حاسوبًا لتمثّل القطوع: $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 0.1, x^2 - y^2 = 0.01$ بيانيًا،
حيث تتعلق هذه القطوع الزائدة بقيم متناقصة لـِ c، وصف التغيرات في المنحنيات، وما الشكل الذي تقترب إليه عندما تقترب c من 0؟

3) افترض أن a تبقى ثابتة، وأنّ c تقترب من الما لانهاية، فكيف يتغير شكل القطع الزائد؟

4) افترض أن b تبقى ثابتةً، وأنّ c تقترب من الما لانهاية، فكيف يتغير شكل القطع الزائد؟

الاسم: ______________________ التاريخ: ____________

4-4 تدريبات إعادة التعليم

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

تحديد أنواع القطوع المخروطية : بإمكانك أن تحدد نوع القطع المخروطي عندما تكون معادلته معطاة بالصورة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، باستعمال المميز $B^2 - 4AC$.

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0 , A \neq C$ أو $B \neq 0$
دائرة	$B^2 - 4AC < 0 , B = 0 , A = C$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

مثال حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها في الصورة القياسية:

a) $2x^2 + 6y^2 - 8x + 12y - 2 = 0$

بما أن: $A = 2$ وَ $B = 0$ وَ $C = 6$، فإن المميز يساوي:

$B^2 - 4AC = 0^2 - 4(2)(6) = -48$

المميز أصغر من 0 ، لذا يجب أن يكون القطع المخروطي دائرةً أو قطعًا ناقصًا، ولمّا كانت $A \neq C$ فإنه قطع ناقص.

b) $5x^2 + 8xy - 2y^2 + 4x - 3y + 10 = 0$

بما أن: $A = 5$ وَ $B = 8$ وَ $C = -2$، فإن المميز يساوي:

$B^2 - 4AC = 8^2 - 4(5)(-2) = 104$.

المميز أكبر من 0؛ لذا فإن القطع المخروطي قطع زائد.

c) $12x^2 + 12xy + 3y^2 - 7x + 2y - 6 = 0$

بما أن: $A = 12$ وَ $B = 12$ وَ $C = 3$، فإن المميز يساوي:

$B^2 - 4AC = 12^2 - 4(12)(3) = 0$

المميز يساوي 0 ؛ لذا فإن القطع المخروطي قطع مكافئ.

تمارين

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها في الصورة القياسية:

1) $4x^2 + 4y^2 - 2x - 9y + 1 = 0$

2) $10x^2 + 6y^2 - x + 8y + 1 = 0$

3) $-2x^2 + 6xy + y^2 - 4x - 5y + 2 = 0$

4) $x^2 + 6xy + y^2 - 2x + 1 = 0$

5) $5x^2 + 2xy + 4y^2 + x + 2y + 17 = 0$

6) $x^2 + 2xy + y^2 + x + 10 = 0$

7) $25x^2 + 100x - 54y = -200$

8) $16x^2 + 100x - 54y^2 = -100$

4-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

دوران القطوع المخروطية يمكن كتابة المعادلة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ في المستوى xy في الصورة: $A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ في المستوى $x'y'$، وذلك بتدوير محورَي الإحداثيات بزاوية θ، ويمكن إيجاد المعادلة في المستوى $x'y'$ باستعمال الصيغتين:

$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta ,\ y = y' \cos\theta + x' \sin\theta$.

مثال

استعمل $\theta = 45°$ لكتابة الصيغة القياسية للمعادلة: $x^2 - 2xy - 4y^2 + \frac{1}{2} = 0$ في المستوى $x'y'$، وحددّ نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

القطع المخروطي هو قطع زائد؛ لأنّ $B^2 - 4AC > 0$، أوجد معادلتَي x , y.

$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$	صيغتا الدوران x , y	$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y'$	$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} , \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$= \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'$

بالتعويض في المعادلة الأصلية.

$$x^2 \quad - 2xy \quad - 4y^2 \quad + \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}\,y'}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0$$
بالتعويض عن x , y.

$$\frac{1}{2}(x')^2 - x'y' + \frac{1}{2}(y')^2 - (x')^2 + (y')^2 - 2(x')^2 - 4x'y' - 2(y')^2 + \frac{1}{2} = 0$$
بإيجاد مفكوك ذات الحدين.

$$-\frac{5}{2}(x')^2 - 5x'y' - \frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{2} = 0$$
بالتبسيط.

فتكون معادلة القطع الزائد بدوران $45°$ هي: $5(x')^2 + 10x'y' + (y')^2 = 1$

تمارين

استعمل قيمة θ المعطاة؛ لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة من المعادلتين الآتيتين في المستوى $x'y'$، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله:

1) $x^2 - 4x + y^2 = 2, \theta = \frac{\pi}{4}$

2) $8x^2 - 5y^2 = 40, \theta = 30°$

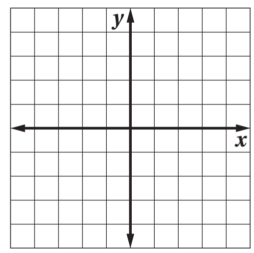
4-4 تدريبات حل المسألة

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

1) اتصالات: إذا كانت معادلة مقطع عرضي لطبق قمر اصطناعي بعد دورانه بزاوية قياسها $60°$ هي $y' = \frac{1}{8}x'^2$

a) اكتب المعادلة في المستوى xy.

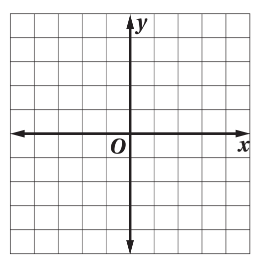
b) مثّل المعادلة بيانيًّا.



2) ناقل الحركة: افترض أن معادلة ناقل حركة السيارة على شكل قطع ناقص بعد دورانه بزاوية $60°$ في المستوى $x'y'$، هي: $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{20} = 1$.

a) اكتب معادلة القطع الناقص في المستوى xy .

b) مثّل المعادلة بيانيًّا.

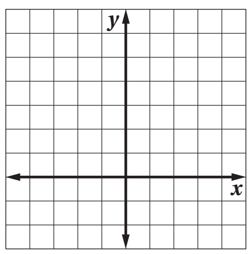


3) صور: ترسم سعاد صورًا لقطوع مكافئة بعد دورانها، وتريد أن تمثل القطع $(x' - 3)^2 = 12(y' - 4)$ بيانيًّا، إذا دار بزاوية $45°$ في المستوى xy .

a) أوجد رأس القطع في المستوى xy .

b) أوجد معادلة محور التماثل في المستوى xy.

c) ارسم المنحنى في المستوى xy.

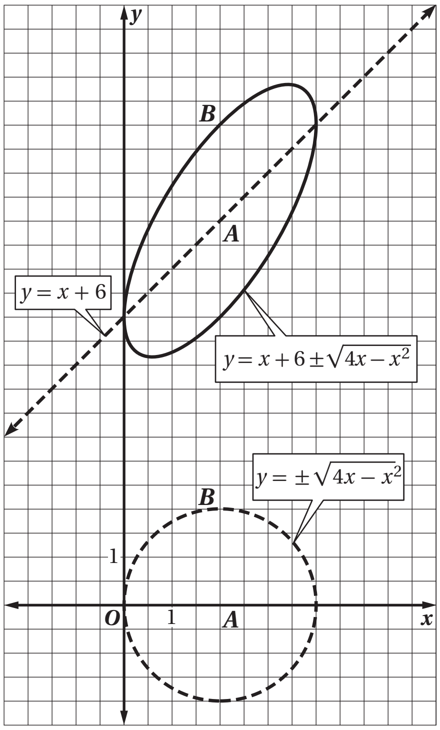


4) منطق: إذا دار قطع زائد $40°$ في اتجاه عقارب الساعة، فما قياس الزاوية اللازمة لدورانه حتى يعود إلى موقعه الأصلي؟

5) أشكال: يمكن تمثيل مقطع من مرآة عاكسة بالمعادلة: $25x^2 + 13xy + 2y^2 = 100$، حدّد نوع القطع الذي تمثله المرآة العاكسة.

4-4 التدريبات الإثرائية

التمثيل البياني بإضافة الإحداثي y

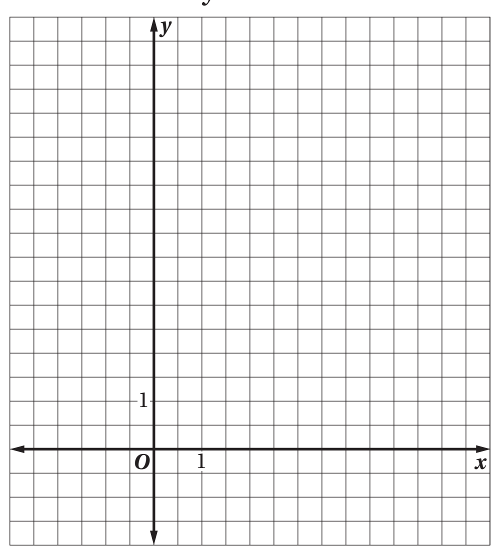


تمثيل منحنيات معادلات القطوع المكافئة والناقصة والزائدة المائلة بالنسبة للمحورين y , x، أكثر صعوبة مقارنة بمنحنيات المعادلات التي درستها.

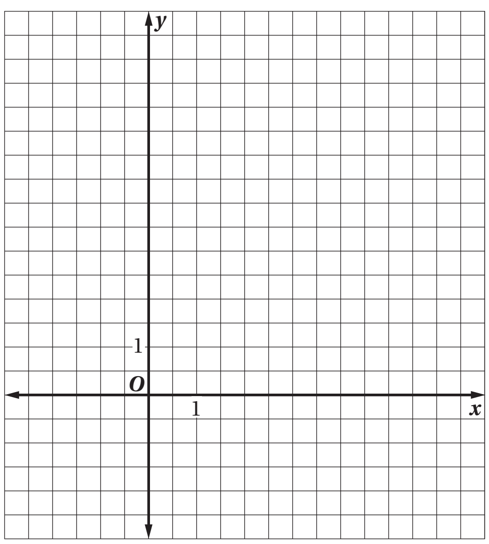
وغالبًا ما تستعمل التمثيل البياني لمعادلتين بسيطتين؛ لإيجاد التمثيل البياني لمعادلات أكثر تعقيدًا. فمثلًا ، يمكن الحصول على منحنى القطع الناقص في الشكل المجاور بإضافة الإحداثي y لكل نقطة على الدائرة، إلى الإحداثي y لكل نقطة مناظرة من المستقيم.

مثّل كلًّا من المعادلتين الآتيتين بيانيًّا، ثم حدّد نوع المنحنى لكل تمثيل:

(1 $y = 6 - x \pm \sqrt{4 - x^2}$



(2 $y = x \pm \sqrt{x}$



استعمل ورقةً بيانيةً منفصلةً؛ لتمثيل كلٍّ من المعادلتين الآتيتين بيانيًّا، ثم حدّد نوع المنحنى لكل تمثيل:

(3 $y = 2x \pm \sqrt{7 + 6x - x^2}$

(4 $y = -2x \pm \sqrt{-2x}$

4-5 تدريبات إعادة التعليم

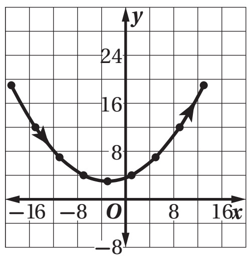
المعادلات الوسيطية

التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية : تُستعمل **المعادلات الوسيطية** لوصف المركبتين (الأفقية والرأسية) لمعادلة، والمتغير **الوسيط** **قيمة** اختيارية تكون عادة إما الزمن وإمّا قياس الزاوية.

مثال 1 **مثّل بيانيًا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة:**
$x = -3 + 4t\,,\ y = t^2 + 3\,,\ -4 \le t \le 4$.

كوّن جدولًا من بعض قيم t في الفترة $-4 \le t \le 4$، ثم مثّل بيانيًا النقطة (x, y) لكل قيمة لـِ t، ثم صل بين النقاط بمنحنى.

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-19	-15	-11	-7	-3	1	5	9	13
y	19	12	7	4	3	4	7	12	19



مثال 2 **اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = 4t - 2\,,\ y = t^2 + 1$ بالصورة الديكارتية.**

$x = 4t - 2$ المعادلة الأولى

$\dfrac{x+2}{4} = t$ الحل بالنسبة لـِ t.

$y = \left(\dfrac{x+2}{4}\right)^2 - 2$ عوّض $\dfrac{x+2}{4}$ بدلًا من t في المعادلة الثانية.

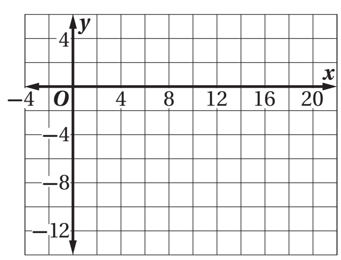
$= \dfrac{x^2 + 4x + 4}{16} - 2$ ربّع $\dfrac{x+2}{4}$.

$= \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{7}{4}$ بسّط

المعادلة الديكارتية هي: $y = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{7}{4}$

تمارين

1) مثّل بيانيًا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة: $x = t^2 + 4\,,\ y = \dfrac{t}{6} - 3;\ -4 \le t \le 4$



2) اكتب المعادلتين الوسيطيتين: $x = \dfrac{t}{3}\,,\ y = \sqrt{t} + 2$ بالصورة الديكارتية .

4-5 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

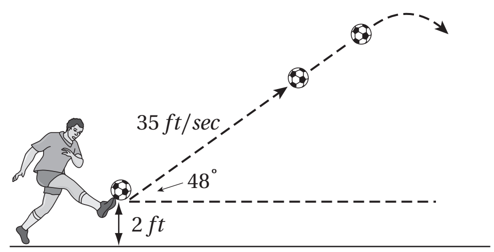
المعادلات الوسيطية

حركة المقذوفات تستعمل المعادلات الوسيطية غالبًا في معادلات حركة المقذوفات، فإذا قُذف جسم بزاوية غير قائمة، تميل θ على الأفق وبسرعة ابتدائية v_0 ، وبالتالي يمكن إيجاد المسافة الأفقية x بالمعادلة: $x = tv_0 \cos \theta$، والمسافة الرأسية y بالمعادلة: $y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2} gt^2 + h_0$ ، حيث g ثابت الجاذبية الأرضية ،و t الزمن،و h_0 الارتفاع الابتدائي.

مثال

ركل ماجد كرة قدم بسرعة ابتدائية مقدارها $35\,ft/s$، وبزاوية تميل $48°$ على الأفق، إذا كان ارتفاع الكرة قدمين عند ركلها، فما المسافة الأفقية التي تقطعها قبل ارتطامها بالأرض؟

خطوة 1: ارسم شكلًا يوضح الموقف.



خطوة 2: اكتب معادلة وسيطية لموقع الكرة الرأسي.

$y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2} gt^2 + h_0$ المعادلة الوسيطية لموقع الكرة الرأسي

$= t(35) \sin (48) - \frac{1}{2}(32)t^2 + 2$ $\quad v_0 = 35, \theta = 48°, g = 32, h_0 = 2$

خطوة 3: مثّل معادلة الموقع الرأسي بيانيًا، وأوجد نقطة تقاطع المنحنى مع $y = 0$ باستعمال الحاسبة البيانية. فتكون القيمة 1.7 ثانية تقريبًا.

خطوة 4: حدد موقع الكرة الأفقي عند 1.7 ثانية.

$x = tv_0 \cos \theta$ المعادلة الوسيطية للموقع الأفقي

$= 1.7(35) \cos 48$ $\quad v_0 = 35, \theta = 48°, t = 1.7$

≈ 39.8 باستعمال الآلة الحاسبة.

ستقطع الكرة مسافة أفقية مقدارها $39.8\,ft$ قبل ارتطامها بالأرض.

تمارين

1) ركل خالد كرة بسرعة ابتدائية مقدارها $28\,ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $56°$ من ارتفاع 4 أقدام، فما المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة قبل أن ترتطم بالأرض؟

2) ضرب عمر كرة تنس أرضي بسرعة ابتدائية مقدارها $38\,ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $42°$ من ارتفاع 1.5 قدم، فما المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة إذا لم يعترضها الخصم؟

4-5 تدريبات حل المسألة

المعادلات الوسيطية

1) **فيزياء:** أُطلق صاروخ بسرعة ابتدائية مقدارها $5\,m/s$، وبزاوية تميل على الأفق $8°$، فما المسافة الأفقية التي يقطعها الصاروخ بعد $0.4\,s$ ؟

2) **القرص الطائر:** تلعب سميرة وسارة لعبة القرص الطائر، حيث ترمي سميرة القرص إلى سارة بسرعة ابتدائية مقدارها $38\,ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $28°$، ومن ارتفاع 4 أقدام، وقد كانت سارة تبعد عن سميرة مسافة 40 قدمًا.

a) ما ارتفاع القرص عن الأرض عندما يصل إلى سارة؟

b) ما أقصى ارتفاع للقرص الطائر؟

3) **كرة التنس:** يضرب وليد كرة تنس بسرعة ابتدائية مقدارها $42\,ft/s$ في الثانية، وبزاوية تميل على الأفق $16°$، ومن ارتفاع قدمين، إذا كانت المسافة بينه وبين الشبكة 20 قدمًا، وارتفاع الشبكة 3 أقدام، فهل تتخطَّى الكرة الشبكة؟

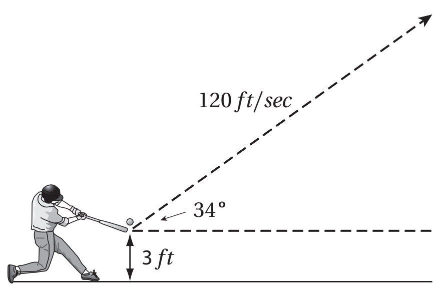
4) **كرة سلة:** يرمي محمد كرة سلة بسرعة ابتدائية مقدارها $28\,ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $60°$، إذا رمى محمد الكرة من ارتفاع 5 أقدام ، فاكتب معادلتين لتحدد المسافة الرأسية والمسافة الأفقية للكرة.

5) **جولف:** يضرب بلال كرة جولف بسرعة ابتدائية مقدارها $100\,ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $39°$

a) اكتب معادلات وسيطية لمسار الكرة.

b) أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.

6) **كرة البيسبول:** يضرب سلمان كرة البيسبول بسرعة ابتدائية مقدارها $120\,ft/s$ من ارتفاع 3 أقدام، وبزاوية تميل على الأفق $34°$.



a) ما المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة قبل أن ترتطم بالأرض؟

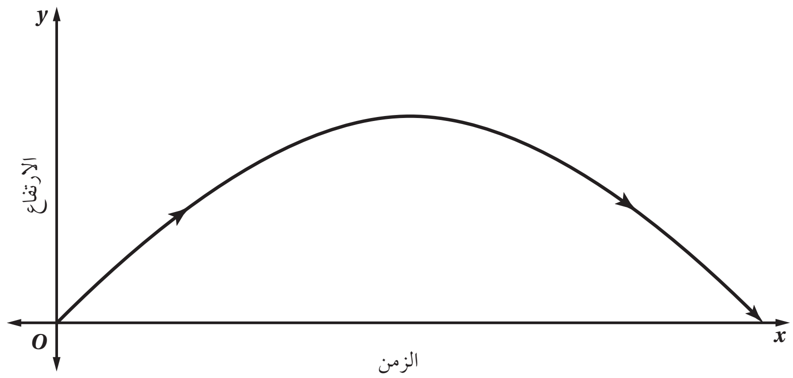
b) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟

c) إذا كان ارتفاع السياج 8 أقدامٍ، ويبعد 400 قدمٍ عن موقع سلمان، فهل تجتاز الكرة السياج؟ وضّح ذلك.

4-5 التدريبات الإثرائية

المعادلات الديكارتية للمقذوفات

يمثل مسار قذيفة بعد انطلاقها قطعًا مكافئًا عند تمثيله بيانيًّا على مستوى إحداثي.



على افتراض أن الجاذبية الأرضية هي القوة الوحيدة المؤثرة في القذيفة،
ومعادلة مسار قذيفة في المستوى الإحداثي هي:

$$, y = -\left(\frac{g}{2v_0{}^2\, cos^2\alpha}\right)x^2 + (tan\ \alpha)x$$

حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\ m/s^2$ أو $32\ ft/s^2$،
وv_0 السرعة الابتدائية, وα زاوية انطلاق القذيفة مع الأفق.

مثال **اكتب معادلة مسار قذيفة تنطلق بزاوية $10°$ مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها $120\ m/s$.**

$$y = -\left(\frac{9.8}{2(120)^2\, cos^2 10°}\right)x^2 + (tan\ 10°)x$$

$$y = -0.00035x^2 + 0.18x$$

أوجد معادلة المسار لكلٍّ من القذيفتين الآتيتين:

1) أُطلقت قذيفة بزاوية مقدارها $80°$ مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها $200\ ft/s$.

2) أُطلقت قذيفة بزاوية مقدارها $40°$ مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها $150\ m/s$.

ملحق الإجابات

4-1 تدريبات إعادة التعليم

القطوع المكافئة

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًا القطع المكافئ هو المحل الهندسي لجميع نقاط المستوى التي يكون بُعدها عن نقطة تسمى **البؤرة**، يساوي بُعدها عن مستقيم معلوم يسّمى **الدليل**. والصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًا هي $(x-h)^2 = 4c(y-k)$، وعندما تكون c سالبة، فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى أسفل، وعندما تكون c موجبة، فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى أعلى. أمّا الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًا فهي $(y-k)^2 = 4c(x-h)$. وعندما تكون c سالبةً، فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى جهة اليسار، وعندما تكون c موجبة، فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى جهةاليمين.

مثال حدّد خصائص القطع المكافئ $(x-3)^2 = 12(y+4)$، ثم مثِّل منحناه بيانيًا.

المعادلة في صورتها القياسية والحد التربيعي هو x، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح رأسيًا. وبما أن $4c = 12$ فإن $c = 3$؛ لذا فهو مفتوح إلى أعلى.

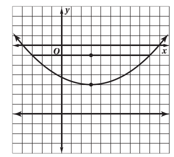
وبما أن المعادلة في الصورة: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$؛ إذن: $h = 3$ و $k = -4$. استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

الرأس: $(3, -4)$ (h, k) الدليل: $y = -7$ $y = k - c$

البؤرة: $(3, -1)$ $(h, k+c)$ محور التماثل: $x = 3$ $x = h$ طول الوتر البؤري: 12 $|4c|$

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل والوتر البؤري، مستعملًا بعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع المكافئ، ثم ارسم منحنًى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتَي الوتر البؤري، ويجب أن يكون متماثلًا حول محور التماثل.

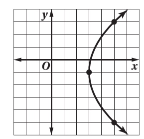
x	0	2	4	6
y	$-3\frac{1}{4}$	$-3\frac{11}{12}$	$-3\frac{11}{12}$	$-3\frac{1}{4}$



تمارين

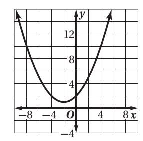
حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كلٍّ ممّا يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا:

1) $(y+1)^2 = 8(x-3)$



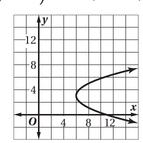
الرأس: $(3, -1)$
البؤرة: $(5, -1)$
الدليل: $x = 1$
محور التماثل: $y = -1$
طول الوتر البؤري: 8

2) $(x+2)^2 = 4(y-1)$



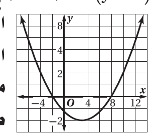
الرأس: $(-2, 1)$
البؤرة: $(-2, 2)$
الدليل: $y = 0$
محور التماثل: $x = -2$
طول الوتر البؤري: 4

3) $(y-3)^2 = 2(x-6)$



الرأس: $(6, 3)$
البؤرة: $\left(6\frac{1}{2}, 3\right)$
الدليل: $x = 5\frac{1}{2}$
محور التماثل: $y = 3$
طول الوتر البؤري: 2

4) $\frac{1}{12}(x-3)^2 = (y+2)$



الرأس: $(3, -2)$، البؤرة: $(3, 1)$
الدليل: $y = -5$
محور التماثل: $x = 3$
طول الوتر البؤري: 12

4-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

القطوع المكافئة

معادلات القطوع المكافئة يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

مثال اكتب معادلة القطع المكافئ، إذا كانت بؤرته $(-4, -3)$ ورأسه $(1, -3)$، ثم مثّله بيانيًا.

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y، فإن المنحنى مفتوح أفقيًا؛ لذا فالبؤرة هي $(h+c, k)$، وعليه تكون قيمة c هي $-5 = 1 - 4-$، ولمّا كانت c سالبة، فإن المنحنى مفتوح إلى جهة اليسار.

اكتب معادلة القطع المكافئ في الصورة القياسية مستعملًا القيم h, c, k.

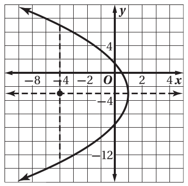
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$ الصورة القياسية

$[y-(-3)]^2 = 4(-5)(x-1)$ $c = -5, h = 1, k = -3$

$(y+3)^2 = -20(x-1)$ بسِّط

الصورة القياسية للمعادلة هي: $(y+3)^2 = -20(x-1)$.

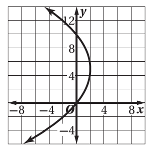
مثِّل بيانيًا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم القطع المكافئ.



تمارين

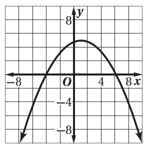
اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا:

1) البؤرة $(5, -1)$، والرأس $(2, 5)$



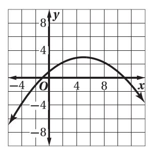
$\boldsymbol{(y-5)^2 = -12(x-2)}$

2) البؤرة $(1, 4)$؛ ومفتوح إلى أسفل ; ويحوي $(-3, 1)$



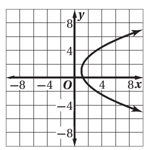
$\boldsymbol{(x-1)^2 = -4(y-5)}$

3) الدليل $y = 6$؛ ومفتوح إلى أسفل، والرأس $(5, 3)$



$\boldsymbol{(x-5)^2 = -12(y-3)}$

4) البؤرة $(1.5, 1)$؛ ومفتوح إلى جهة اليمين، ومعادلة الدليل $x = 0.5$



$\boldsymbol{(x-1) = 2(y-1)^2}$

4-1 تدريبات حل المسألة

القطوع المكافئة

1) **عاكسات:** يوضح الشكل الآتي مرآةً عاكسةً على شكل قطع مكافئ، ويمكن نمذجة مقطع طولي للمرآة بالمعادلة $x^2 = 16y$، أوجد المسافة بين الرأس والبؤرة في هذه المرآة.

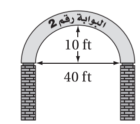
4 وحدات.

2) **قمصان ألعاب:** رُمي قميص يحمل شعار الفريق الفائز بعد المباراة في الهواء بواسطة جهاز بسرعة ابتدائية $32\,ft/s$، إذا كانت المعادلة: $y = -16x^2 + 32x + 5$ تمثل ارتفاع القميص y (بالقدم) فوق الأرض بعد x ثانيةً.

a) اكتب معادلة القطع المكافئ في الصورة القياسية.
$$(x-1)^2 = -\frac{1}{16}(y-21)$$

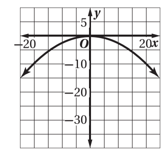
b) ما أقصى ارتفاع يصل إليه القميص؟
$21\,ft$

3) **عمارة:** أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة إحدى الكليات الجامعية كما في الشكل:

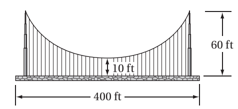


a) اكتب معادلة القطع المكافئ.
$x^2 = -40y$

b) مثّل منحنى القطع المكافئ بيانيًا.



4) **جسور:** تبدو السلسلة المعدنية لأحد الجسور المعلقة على شكل قطع مكافئ، والدعامات الرأسية موضحة كما في الشكل الآتي.

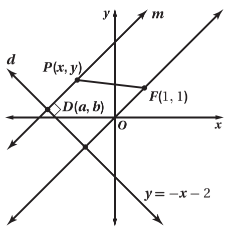


a) اكتب معادلة السلسلة المعدنية .
$x^2 = 800y$

b) أوجد طول الدعامة الرأسية التي تبعد عن المركز 100 قدم.
$22.5\,ft$

4-1 التدريبات الإثرائية

القطوع المكافئة المائلة



يوضح الشكل المجاور نقطة ثابتة $F(1, 1)$، والمستقيم d الذي معادلته $y = -x - 2$. إذا كانت $P(x, y)$ تحقق الشرط $PD = PF$، فإن P تقع على قطع مكافئ. وهدفنا هو إيجاد معادلة القطع المكافئ المائل، وهو المحل الهندسي لجميع النقاط التي لها البعد نفسه عن $(1, 1)$ والمستقيم $y = -x - 2$.
أولًا: أوجد معادلة المستقيم m الذي يمر بالنقطة $P(x, y)$ وعمودي على المستقيم d عند $D(a, b)$، وأوجد الإحداثيين (a, b) للنقطة D بدلالة x و y، ثم استعمل $(PD)^2 = (PF)^2$؛ لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

ارجع إلى المناقشة أعلاه.

1) أوجد معادلة المستقيم m.
$$\boldsymbol{x - y + (b - a) = 0}$$

2) استعمل معادلتَي المستقيمين m و d؛ لتوضح أن إحداثيَّي النقطة D هما $D(a, b) = \left(\frac{x-y-2}{2}, \frac{y-x-2}{2}\right)$.

من معادلة المستقيم m : $-a + b = -x + y$
من معادلة المستقيم d : $a + b = -2$، اطرح لتحصل على $a = \frac{x-y-2}{2}$
واجمع لتحصل على $b = \frac{y-x-2}{2}$

3) استعمل إحداثيات F, P, D، والعلاقة $(PD)^2 = (PF)^2$ ؛ لإيجاد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F، ودليله المستقيم d.
$$\boldsymbol{x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0}$$

4) a) لكل قطع مكافئ محور تماثل، أوجد معادلة محور التماثل للقطع المكافئ المشار إليه أعلاه، وبرّر إجابتك.
$y = x$، لأن $y = x$ تحتوي على $F(1, 1)$، و عمودي على المستقيم d .

b) استعمل إجابتك من الجزء a؛ لإيجاد إحداثيَّي رأس القطع المكافئ، وبرّر إجابتك .
$(0, 0)$؛ لأنّ $(0, 0)$ نقطة منتصف المسافة بين النقطة F والمستقيم d .

4-2 تدريبات إعادة التعليم

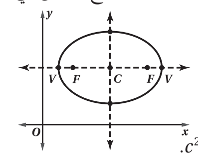
القطوع الناقصة والدوائر

تحليل القطع الناقص و الدائرة و تمثيلهما بيانيًا: القطع الناقص هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوي التي يكون مجموع بُعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان **البؤرتين** يساوي مقدارًا ثابتًا. والصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ حيث المحور الأكبر أفقي. وفي هذه الحالة a^2 هو مقام الحد الذي يحوي x.

والصورة القياسية هي 2 $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ عندما يكون المحور الأكبر رأسيًا.

وفي هذه الحالة فإن a^2 هي مقام الحد الذي يحوي y، وفي كلتا الحالتين يكون $c^2 = a^2 - b^2$.

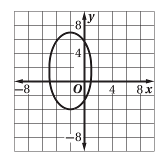


مثال حدِّد خصائص القطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$

المعادلة في الصورة القياسية.

$a=5, b=3, c=4$ إذن $a^2 > b^2$ ؛ $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$, $a^2 = 25$, $b^2 = 9$، استعمل هذه القيم لتحديد رأسي القطع الناقص ومحوريه، بما أن a^2 مقام الحد الذي يحوي y فإن المحور الأكبر يوازي محور y.

الاتجاه:	رأسي	
المركز:	$(-2, 1)$	(h, k)
البؤرتان:	$(-2, 5), (-2, -3)$	$(h, k \pm c)$
الرأسان:	$(-2, 6), (-2, -4)$	$(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان:	$(-5, 1), (1, 1)$	$(h \pm b, k)$
المحور الأكبر:	$x = -2$، وطوله 10	$x = h$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$y = 1$، وطوله 6	$y = k$، طول المحور الأصغر $2b$

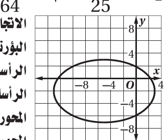


تمارين

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍّ مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا.

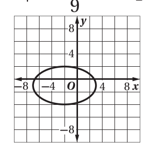
1) $\frac{(x+5)^2}{64} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$

الاتجاه: أفقي، المركز: $(-5, -2)$
البؤرتان: $(-5 \pm \sqrt{39}, -2)$
الرأسان: $(-10, -2)$ ، $(6, -2)$
الرأسان المرافقان: $(-5, -7)$ ، $(-5, 3)$
المحور الأكبر: $y = -2$ ، طوله 16
المحور الأصغر: $x = -5$ ، طوله 10



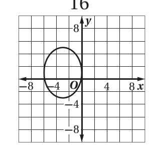
2) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

الاتجاه: أفقي، المركز: $(-2, -1)$
البؤرتان: $(2, -1)$ ، $(-6, -1)$
الرأسان: $(3, -1)$ ، $(-7, -1)$
الرأسان المرافقان: $(-2, 2)$ ، $(-2, -4)$
المحور الأكبر: $y = -1$ ، طوله 10
المحور الأصغر: $x = -2$ ، طوله 6



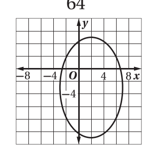
3) $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 2$

الاتجاه: رأسي، المركز: $(-3, 1)$
البؤرتان: $(-3, 1 \pm \sqrt{7})$
الرأسان: $(-3, -3)$ ، $(-3, 5)$
الرأسان المرافقان: $(-6, 1)$ ، $(0, 1)$
المحور الأكبر: $x = -3$، طوله 8
المحور الأصغر: $y = 1$، طوله 6



4) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{64} = 1$

الاتجاه: رأسي، المركز: $(2, -3)$
البؤرتان: $(2, -3 \pm \sqrt{39})$
الرأسان: $(2, 5)$ ، $(2, -11)$
الرأسان المرافقان: $(-3, -3)$ ، $(7, -3)$
المحور الأكبر: $x = 2$ ، طوله 16
المحور الأصغر: $y = -3$ ، طوله 10



4-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

القطوع الناقصة والدوائر

تحديد أنواع القطوع المخروطية إذا عُلمت معادلة قطع مخروطي، فبإمكانك أن تحدد نوعه باستعمال خصائص المعادلة. الصيغة القياسية لمعادلة دائرة مركزها (h, k) وطول نصف قطرها r هي: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

مثال اكتب كل معادلة من المعادلتين الآتيتين في الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

a) $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$

$4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$	المعادلة الأصلية
$4(x^2 + 6x + ?) + 9(y^2 - 4y + ?) = -36 + ? + ?$	بإكمال المربع.
$4(x^2 + 6x + 9) + 9(y^2 - 4y + 4) = -36 + 36 + 36$	$\left(-\frac{4}{2}\right)^2 = 4, \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$
$4(x+3)^2 + 9(y-2)^2 = 36$	بالتحليل.
$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$	بقسمة الطرفين على 36

لمّا كانت صيغة المعادلة هي: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$، فإن المنحنى يمثل قطعًا ناقصًا مركزه $(-3, 2)$.

b) $x^2 - 16x - 8y + 80 = 0$

$x^2 - 16x - 8y + 80 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x^2 - 16x + ?) - 8y + 80 = 0$	بإكمال المربع.
$(x^2 - 16x + 64) - 8y + 80 - 64 = 0$	$\left(\frac{16}{2}\right)^2 = 64$
$(x-8)^2 - 8(y-2) = 0$	حلل .
$(x-8)^2 = 8(y-2)$	بجمع $8(y-2)$ للطرفين

لمّا كان التربيع لحدٍّ واحدٍ، فإن المنحنى يمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(8, 2)$.

التمارين

اكتب كل معادلة مما يأتي في الصورة القياسية، ثم حدد نوع القطع المخروطي المرتبط بها:

1) $y^2 + 2y + 6x^2 - 24x = 5$

$\frac{(y+1)^2}{30} + \frac{(x-2)^2}{5} = 1$; قطع ناقص

2) $y^2 + 2y + x^2 - 24x = 24$

$(x-12)^2 + (y+1)^2 = 169$; دائرة

3) $4x - 8 + y^2 + 4y = 0$

$(y+2)^2 = -4(x-3)$; قطع مكافئ

4) $x^2 + 4x + y^2 - 2y - 49 = 0$

$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 54$; دائرة

5) $4x^2 + 8x + 5y^2 - 30y - 11 = 0$

$\frac{(x+1)^2}{15} + \frac{(y-3)^2}{12} = 1$; قطع ناقص

6) $6x^2 + 24x + 2y - 10 = 0$

$(x+2)^2 = -\frac{1}{3}(y-17)$; قطع مكافئ

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

4-2 تدريبات حلّ المسألة

القطوع الناقصة والدوائر

1) **صالة الهمس:** في أحد المتاحف، توجد صالة همس صوتي على شكل قطع ناقص، طول الصالة 84 قدمًا وعرضها 46 قدمًا.

a) اكتب معادلة تمثل شكل الصالة، مفترضًا مركزها عند نقطة الأصل والمحور الأكبر أفقي.

$$\frac{x^2}{1764} + \frac{y^2}{529} = 1$$

b) أوجد موقعَي البؤرتين.

34 ft تقريبًا عن جانبي المركز على المحور الأكبر .

2) **لوحات:** لوحة على شكل قطع ناقص. إذا كان الاختلاف المركزي 0.60، وطول اللوحة 48 cm.

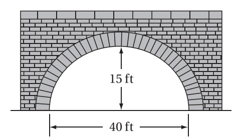
a) فاكتب معادلة القطع الناقص، إذا كان مركز اللوحة عند نقطة الأصل.

$$\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{368.64} = 1$$

b) ما عرض اللوحة؟

38.4 cm

3) **نفق:** مدخل نفق على شكل نصف قطع ناقص كما في الشكل.



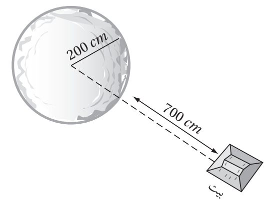
a) اكتب المعادلة التي تمثل القطع الناقص.

$$\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$$

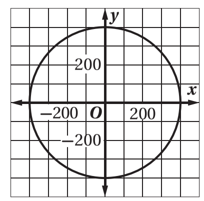
b) احسب ارتفاع النفق فوق نقطة تبعد 10 ft عن المركز.

$\approx 13\,ft$

4) **بركة:** يزداد طول نصف قطر بركة لتجميع الماء المتدفق من أرض مجاورة بمعدل 100 cm لكل يوم على نحو ما هو موضح أدناه.



a) مثّل بيانيًّا الدائرة التي تمثل الماء على الشكل أعلاه، وأوجد البعد بين مركز البركة والبيت.



900 yd ;

b) إذا استمرت بركة الماء في الاتساع بالمعدل نفسه، فبعد كم يوم يصل الماء إلى البيت؟

7 أيام

c) اكتب معادلة بركة الماء في الوقت الحالي ومعادلتها عندما يصل الماء إلى البيت.

$x^2 + y^2 = 40000;$

$x^2 + y^2 = 810000$

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

4-2 التدريبات الإثرائية

عائلة منحنيات لامي

مجموعة المنحنيات التي تكون معادلاتها في الصورة: $\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1$، حيث: $a \neq 0, b \neq 0, n > 0$، تسمى عائلة منحنيات لامي، نسبة إلى عالم الفيزياء والرياضيات الفرنسي لامي (1870–1795) $Lamé$).

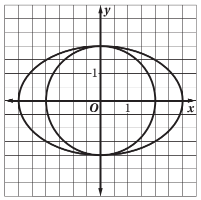
1) مثّل كلًّا من المعادلتين الآتيتين بيانيًّا، وحدّد نوع المنحنى الناتج في كل مرة:

a) $\left|\frac{x}{2}\right|^2 + \left|\frac{y}{2}\right|^2 = 1$

دائرة

b) $\left|\frac{x}{3}\right|^2 + \left|\frac{y}{2}\right|^2 = 1$

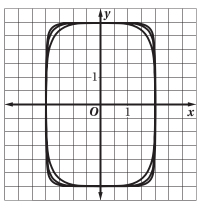
قطع ناقص



2) بناءً على سؤال 1، هل تضم مجموعة منحنيات لامي الدائرة والقطع الناقص.

نعم

3) استعمل قيم a, b, n المعطاة في كلٍّ من الحالات الآتية في معادلة عائلة منحنيات لامي، واكتب المعادلة الناتجة في كل حالة ، ثم مثّلها بيانيًّا على الشبكة البيانية المجاورة.



a) $a = 2, b = 3, n = 4$

$$\left|\frac{x}{2}\right|^4 + \left|\frac{y}{3}\right|^4 = 1$$

b) $a = 2, b = 3, n = 6$

$$\left|\frac{x}{2}\right|^6 + \left|\frac{y}{3}\right|^6 = 1$$

c) $a = 2, b = 3, n = 8$

$$\left|\frac{x}{2}\right|^8 + \left|\frac{y}{3}\right|^8 = 1$$

4) ما الشكل الذي يقترب إليه منحنى $\left|\frac{x}{2}\right|^n + \left|\frac{y}{3}\right|^n = 1$ لقيم n الصحيحة الموجبة الزوجية الكبيرة؟

مستطيل طوله 6 وحداتٍ، و عرضه 4 وحداتٍ، ومركزه نقطة الأصل .

4-3 تدريبات إعادة التعليم

القطوع الزائدة

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًا **القطع الزائد** هو المحل الهندسي لجميع نقاط المستوى التي يكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان **البؤرتين**، مقدارًا ثابتًا والصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد هي: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًا، والصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد هي: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًا

وفي كلتا الحالتين يكون: $a^2 + b^2 = c^2$.

مثال **حدّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$، ثم مثّل منحناه بيانيًا.**

المعادلة بالصورة القياسية. كلٌّ من h و k يساوي صفرًا، لذا فإن المركز عند نقطة الأصل، ولمّا كان الحد المطروح يحوي x، فإن المحور القاطع رأسي، أوجد قيم a, b, c، واستعملها لتحديد الرأسين والبؤرتين.

بما أن $a^2 = 16$ و $b^2 = 4$، فإنّ $a = 4$ و $b = 2$. استعمل قيمتَي a و b لإيجاد قيمة c.

$c^2 = a^2 + b^2$	العلاقة بين a, b, c
$c^2 = 4^2 + 2^2$	$a = 4 , b = 2$
$c = \sqrt{20}$ أو 4.47 تقريبًا	بالتبسيط.

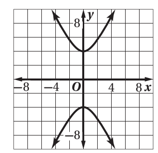
حدّد خصائص القطع الزائد.

المركز: $(0, 0)$ (h, k) البؤرتان: $(0, \sqrt{20}), (0, -\sqrt{20})$ $(h, k \pm c)$

الرأسان: $(0, 4), (0, -4)$ $(h, k \pm a)$ خطَّا التقارب: $y = 2x, y = -2x$ $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$

أنشئ جدول قيم لتمثيل منحنى القطع الزائد.

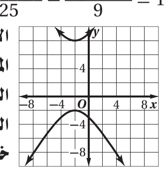
x	y
−2	−5.7, 5.7
−1	−4.5, 4.5
0	-4, 4
1	-4.5, 4.5
2	−5.7, 5.7



تمارين

حدّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّله بيانيًا.

1) $\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$



الاتجاه: رأسي

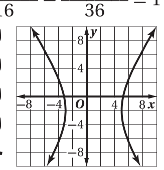
المركز: $(-2, 3)$

الرأسان: $(-2, 8)$, $(-2, -2)$

البؤرتان: $(-2, 3 \pm \sqrt{34})$

خطا التقارب $y - 3 = \pm\frac{5}{3}(x+2)$

2) $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{36} = 1$



الاتجاه: أفقي

المركز: $(1, -2)$

الرأسان: $(5, -2)$, $(-3, -2)$

البؤرتان: $(1 \mp 2\sqrt{13}, -2)$

خطا التقارب $y + 2 = \pm\frac{3}{2}(x-1)$

4-3 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

القطوع الزائدة

كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه: يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع الزائد.

مثال **اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص التالية: رأساه $(-4, -2)$, $(2, -2)$، وبؤرتاه $(4, -2), (-6, -2)$.**

بما أن احداثيَّي y متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع أفقي، أوجد المركز، وقيم a, b, c.

المركز $(-1, -2)$	نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين أو البؤرتين
$a = \sqrt{(-4+1)^2+(-2+2)^2} = 3$	المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز.
$c = \sqrt{(4+1)^2+(-2+2)^2} = 5$	المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز.
$b = \sqrt{25-9} = 4$	$c^2 = a^2 + b^2$

بما أن المحور القاطع أفقي، فإن a^2 ترتبط بالحد x^2؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي: $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$.

تمارين

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

1) البؤرتان هما $(0, 4), (0, -4)$، وطول المحور المرافق 6

$$\frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{9} = 1$$

2) الرأسان هما $(3, -6), (3, 2)$، وخطَّا التقارب هما $y = \frac{4}{5}x - \frac{22}{5}$ ، وَ $y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$.

$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$$

3) الرأسان هما $(10, 2), (6, 2)$، والبورتان هما $(12, 2), (4, 2)$

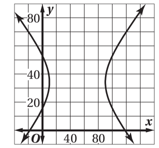
$$\frac{(x-8)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$$

4-3 تدريبات حل المسألة

القطوع الزائدة

1) **زلازل:** المركز السطحي لزلزالٍ يقع على أحد فرعَي منحنى القطع الزائد الذي معادلته: $\frac{(x-50)^2}{1600} - \frac{(y-35)^2}{2500} = 1$، حيث تقع راسمات الزلازل عند البؤرتين.

a) مثّل القطع الزائد بيانيًّا.



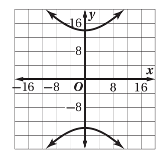
b) أوجد إحداثيات موقعَي راسمتَي الزلازل.

$\boldsymbol{(-14, 35), (114, 35)}$

2) **ظلال:** يسقط ضوء مصباح على جدار، فيتكون ظلٌّ حدوده على شكل قطع زائد، معادلته:

3) $\frac{y^2}{196} - \frac{x^2}{121} = 1$

a) مثّل القطع الزائد بيانيًّا.



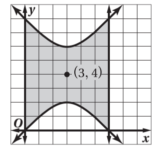
b) اكتب معادلتَي خطَّي التقارب .

$\boldsymbol{y = \pm\frac{14}{11}x}$

c) أوجد الاختلاف المركزي.

$\boldsymbol{\frac{\sqrt{317}}{14}}$

4) **منتزهات:** حدّان من حدود منطقة لعب عشبية على شكل قطع زائد كما هو موضح في الشكل أدناه:



a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي يمثل حدود منطقة اللعب.

$$\boldsymbol{\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{3} = 1}$$

b) إذا كانت كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل $3\,ft$، فما أضيق عرض لمنطقة اللعب؟

$\boldsymbol{12\,ft}$

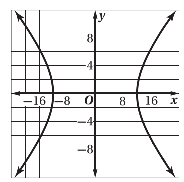
5) **ظلال:** يكون مسار ظل مؤشر الساعة الشمسية على شكل قطعٍ زائدٍ غالبًا.

a) اكتب معادلتَي القطع الزائد بالصورة القياسية، إذا كان المركز يقع في نقطة الأصل، والمسار المار بالمحور القاطع يبعد $2\,mm$ عن إحدى البؤرتين، و $12\,mm$ عن المركز.

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{52} = 1;\ \frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{52} = 1}$$

b) مثّل أحد القطعين الزائدين بيانيًّا.

إجابة ممكنة :

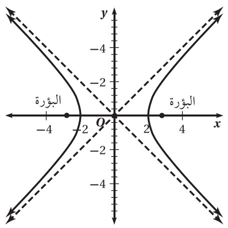


4-3 التدريبات الإثرائية

البؤرتان المتحركتان

تذكّر أن معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع أفقي هي: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. والبؤرتان هما: $(c, 0)$, $(-c, 0)$، حيث $c^2 = a^2 + b^2$، والرأسان هما: $(a, 0)$, $(-a, 0)$، ومعادلتا خطَّي التقارب هما: $y = \pm\frac{b}{a}x$، والشكل المجاور يمثل منحنى هذا القطع الزائد.

ماذا يحدث لهذا المنحنى عندما تزيد قيمة c بلا حدود أو تقل بلا حدود؟



استعمل القطع الزائد المشار إليه أعلاه للإجابة عن الأسئلة 4—1 .

1) اكتب دليلًا مقنعًا لتوضح أنه عندما تقترب c من 0، فإن البؤرتين والرأسين والمركز للقطع الزائد، تصبح جميعها نقطةً واحدةً.

لمّا كانت $c > a > 0$، وتقترب c من 0 ، فإنّ a تقترب من 0؛ لذا فإن الإحداثي x للبؤرتين والرأسين يقترب من 0، وهو الإحداثي x للمركز . ولمّا كانت الإحداثيات y متساوية، فإن النقاط جميعها تصبح نقطةً واحدةً .

2) استعمل الحاسبة البيانية أو حاسوبًا لتمثّل القطوع: $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 0.1, x^2 - y^2 = 0.01$ بيانيًّا، حيث تتعلق هذه القطوع الزائدة بقيم متناقصة لـِ c، وصف التغيرات في المنحنيات، وما الشكل الذي تقترب إليه عندما تقترب c من 0؟

يبقى خطَّا التقارب كما هما، ولكن فرعَي المنحنى يصبحان أكثر حدّة عند الرأسين ، و يقتربان أكثر من المستقيمين: $y = x$ و $y = -x$

3) افترض أن a تبقى ثابتة، وأنّ c تقترب من الما لانهاية، فكيف يتغير شكل القطع الزائد؟

يبقى الرأسان عند $(\pm a, 0)$ ، و لكن الفرعين يصبحان أكثر قربًا إلى الخط الرأسي ، ويقتربان من المستقيمين: $x = -a$ و $x = a$

4) افترض أن b تبقى ثابتةً، وأنّ c تقترب من الما لانهاية، فكيف يتغير شكل القطع الزائد؟

يرتدّ الرأسان إلى ما لا نهاية، ويصبح فرعا المنحنى منبسطين و بعيدين جدًا عن المركز، و عندما تقترب c من الما لا نهاية، فإن المنحنى ينزع إلى التلاشي .

4-4 تدريبات إعادة التعليم

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

تحديد أنواع القطوع المخروطية : بإمكانك أن تحدد نوع القطع المخروطي عندما تكون معادلته معطاة بالصورة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، باستعمال المميز $B^2 - 4AC$.

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$\mathbf{B^2 - 4AC = 0}$
قطع ناقص	$\mathbf{B^2 - 4AC < 0\,,\, A \neq C}$ أو $\mathbf{B \neq 0}$
دائرة	$\mathbf{B^2 - 4AC < 0\,,\, B = 0\,,\, A = C}$
قطع زائد	$\mathbf{B^2 - 4AC > 0}$

مثال حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها في الصورة القياسية:

a) $\mathbf{2x^2 + 6y^2 - 8x + 12y - 2 = 0}$

بما أن: $A = 2$ وَ $B = 0$ وَ $C = 6$، فإن المميز يساوي:

$B^2 - 4AC = 0^2 - 4(2)(6) = -48$

المميز أصغر من 0 ، لذا يجب أن يكون القطع المخروطي دائرةً أو قطعًا ناقصًا، ولمّا كانت $A \neq C$ فإنه قطع ناقص.

b) $\mathbf{5x^2 + 8xy - 2y^2 + 4x - 3y + 10 = 0}$

بما أن: $A = 5$ وَ $B = 8$ وَ $C = -2$، فإن المميز يساوي:

$B^2 - 4AC = 8^2 - 4(5)(-2) = 104$.

المميز أكبر من 0؛ لذا فإن القطع المخروطي قطع زائد.

c) $\mathbf{12x^2 + 12xy + 3y^2 - 7x + 2y - 6 = 0}$

بما أن: $A = 12$ وَ $B = 12$ وَ $C = 3$، فإن المميز يساوي:

$B^2 - 4AC = 12^2 - 4(12)(3) = 0$

المميز يساوي 0 ؛ لذا فإن القطع المخروطي قطع مكافئ.

تمارين

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها في الصورة القياسية:

1) $4x^2 + 4y^2 - 2x - 9y + 1 = 0$ **دائرة**

2) $10x^2 + 6y^2 - x + 8y + 1 = 0$ **قطع ناقص**

3) $-2x^2 + 6xy + y^2 - 4x - 5y + 2 = 0$ **قطع زائد**

4) $x^2 + 6xy + y^2 - 2x + 1 = 0$ **قطع زائد**

5) $5x^2 + 2xy + 4y^2 + x + 2y + 17 = 0$ **قطع ناقص**

6) $x^2 + 2xy + y^2 + x + 10 = 0$ **قطع مكافئ**

7) $25x^2 + 100x - 54y = -200$ **قطع مكافئ**

8) $16x^2 + 100x - 54y^2 = -100$ **قطع زائد**

4-4 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

دوران القطوع المخروطية يمكن كتابة المعادلة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ في المستوى xy في الصورة: $A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ في المستوى $x'y'$، وذلك بتدوير محورَي الإحداثيات بزاوية θ، ويمكن إيجاد المعادلة في المستوى $x'y'$ باستعمال الصيغتين:

$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta\,,\, y = y' \cos\theta + x' \sin\theta$.

مثال استعمل $\theta = 45°$ لكتابة الصيغة القياسية للمعادلة: $\mathbf{x^2 - 2xy - 4y^2 + \frac{1}{2} = 0}$ في المستوى $x'y'$، وحدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

القطع المخروطي هو قطع زائد؛ لأنّ $B^2 - 4AC > 0$، أوجد معادلتَي x, y.

$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$	صيغتا الدوران x, y	$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'$	$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\, \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$

بالتعويض في المعادلة الأصلية.

$$x^2 \quad - 2xy \quad - 4y^2 \quad + \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0$$ بالتعويض عن x, y.

$$\frac{1}{2}(x')^2 - x'y' + \frac{1}{2}(y')^2 - (x')^2 + (y')^2 - 2(x')^2 - 4x'y' - 2(y')^2 + \frac{1}{2} = 0$$ بإيجاد مفكوك ذات الحدين.

$$-\frac{5}{2}(x')^2 - 5x'y' - \frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{2} = 0$$ بالتبسيط.

فتكون معادلة القطع الزائد بدوران $45°$ هي: $5(x')^2 + 10x'y' + (y')^2 = 1$

تمارين

استعمل قيمة θ المعطاة؛ لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة من المعادلتين الآتيتين في المستوى $x'y'$ ، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله:

1) $x^2 - 4x + y^2 = 2,\ \theta = \frac{\pi}{4}$

$\mathbf{(x')^2 + (y')^2 - 2\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' - 2 = 0}$

دائرة

2) $8x^2 - 5y^2 = 40,\ \theta = 30°$

$\mathbf{19(x')^2 - 26\sqrt{3}x'y' - 7(y')^2 = 160}$

قطع زائد

4-4 تدريبات حل المسألة

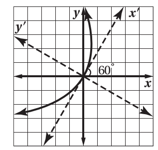
تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

1) **اتصالات:** إذا كانت معادلة مقطع عرضي لطبق قمر اصطناعي بعد دورانه بزاوية قياسها $60°$ هي $y' = \frac{1}{8}x'^2$

a) اكتب المعادلة في المستوى xy.

$$\frac{x^2}{32} + \frac{\sqrt{3}}{16}xy + \frac{3}{32}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0$$

b) مثّل المعادلة بيانيًّا.

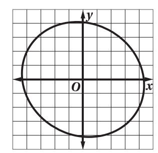


2) **ناقل الحركة:** افترض أن معادلة ناقل حركة السيارة على شكل قطع ناقص بعد دورانه بزاوية $60°$ في المستوى $x'y'$، هي: $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{20} = 1$.

a) اكتب معادلة القطع الناقص في المستوى xy.

$$17x^2 + 2\sqrt{3}xy + 19y^2 - 320 = 0$$

b) مثّل المعادلة بيانيًّا.



3) **صور:** ترسم سعاد صورًا لقطوع مكافئة بعد دورانها، وتريد أن تمثل القطع $(x' - 3)^2 = 12(y' - 4)$ بيانيًّا، إذا دار بزاوية $45°$ في المستوى xy.

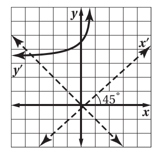
a) أوجد رأس القطع في المستوى xy.

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$$

b) أوجد معادلة محور التماثل في المستوى xy.

$$y = 3\sqrt{2} - x$$

c) ارسم المنحنى في المستوى xy.



4) **منطق:** إذا دار قطع زائد $40°$ في اتجاه عقارب الساعة، فما قياس الزاوية اللازمة لدورانه حتى يعود إلى موقعه الأصلي؟

$40°$ عكس اتجاه عقارب الساعة .

5) **أشكال:** يمكن تمثيل مقطع من مرآة عاكسة بالمعادلة: $25x^2 + 13xy + 2y^2 = 100$، حدّد نوع القطع الذي تمثله المرآة العاكسة.

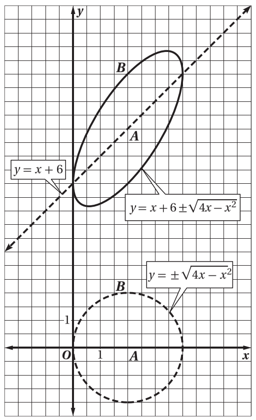
قطع ناقص

4-4 التدريبات الإثرائية

التمثيل البياني بإضافة الإحداثي y

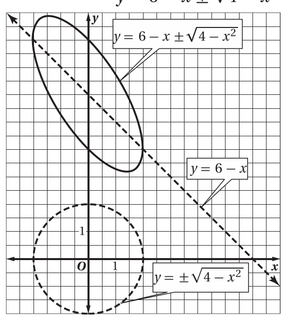
تمثيل منحنيات معادلات القطوع المكافئة والناقصة والزائدة المائلة بالنسبة للمحورين x ، y، أكثر صعوبة مقارنة بمنحنيات المعادلات التي درستها.

وغالبًا ما تستعمل التمثيل البياني لمعادلتين بسيطتين؛ لإيجاد التمثيل البياني لمعادلات أكثر تعقيدًا. فمثلًا ، يمكن الحصول على منحنى القطع الناقص في الشكل المجاور بإضافة الإحداثي y لكل نقطة على الدائرة، إلى الإحداثي y لكل نقطة مناظرة من المستقيم.



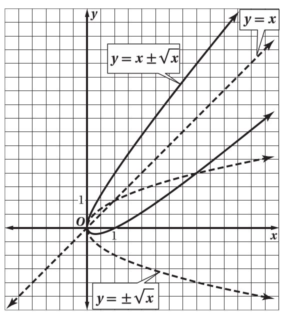
مثّل كلًّا من المعادلتين الآتيتين بيانيًّا، ثم حدّد نوع المنحنى لكل تمثيل:

1) $y = 6 - x \pm \sqrt{4 - x^2}$



قطع ناقص

2) $y = x \pm \sqrt{x}$



قطع مكافئ

استعمل ورقةً بيانيةً منفصلةً؛ لتمثيل كلٍّ من المعادلتين الآتيتين بيانيًّا، ثم حدّد نوع المنحنى لكل تمثيل:

3) $y = 2x \pm \sqrt{7 + 6x - x^2}$

قطع ناقص

انظر رسوم الطلاب .

4) $y = -2x \pm \sqrt{-2x}$

قطع مكافئ

انظر رسوم الطلاب .

4-5 تدريبات إعادة التعليم

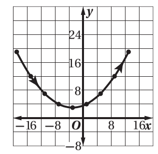
المعادلات الوسيطية

التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية : تُستعمل **المعادلات الوسيطية** لوصف المركبتين (الأفقية والرأسية) لمعادلة،والمتغير **الوسيط** قيمة اختيارية تكون عادة إما الزمن وإمّا قياس الزاوية.

مثال 1 مثِّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة:
$x = -3 + 4t, y = t^2 + 3, -4 \le t \le 4$.

كوِّن جدولًا من بعض قيم t في الفترة $-4 \le t \le 4$، ثم مثِّل بيانيًّا النقطة (x, y) لكل قيمة لِـ t، ثم صل بين النقاط بمنحنى.

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-19	-15	-11	-7	-3	1	5	9	13
y	19	12	7	4	3	4	7	12	19



مثال 2 اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = 4t - 2, y = t^2 + 1$ بالصورة الديكارتية.

$x = 4t - 2$ المعادلة الأولى

$\frac{x+2}{4} = t$ الحل بالنسبة لِـ t.

$y = \left(\frac{x+2}{4}\right)^2 - 2$ عوِّض $\frac{x+2}{4}$ بدلًا من t في المعادلة الثانية.

$= \frac{x^2 + 4x + 4}{16} - 2$ ربِّع $\frac{x+2}{4}$.

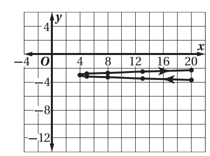
$= \frac{x^2}{16} + \frac{x}{4} - \frac{7}{4}$ بسِّط

المعادلة الديكارتية هي: $y = \frac{x^2}{16} + \frac{x}{4} - \frac{7}{4}$

تمارين

1) مثِّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة: $x = t^2 + 4, y = \frac{t}{6} - 3; -4 \le t \le 4$

$y = \sqrt{3x + 2}$



2) اكتب المعادلتين الوسيطيتين: $x = \frac{t}{3}, y = \sqrt{t} + 2$ بالصورة الديكارتية . **$y = \sqrt{3x + 2}$**

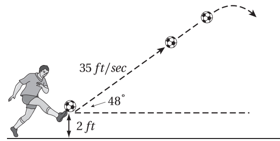
4-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المعادلات الوسيطية

حركة المقذوفات تستعمل المعادلات الوسيطية غالبًا في معادلات حركة المقذوفات، فإذا قُذف جسم بزاوية غير قائمة، تميل θ على الأفق وبسرعة ابتدائية v_0، وبالتالي يمكن إيجاد المسافة الأفقية x بالمعادلة: $x = tv_0 \cos\theta$، والمسافة الرأسية y بالمعادلة: $y = tv_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$، حيث g ثابت الجاذبية الأرضية، و t الزمن، و h_0 الارتفاع الابتدائي.

مثال **ركل ماجد كرة قدم بسرعة ابتدائية مقدارها $35\,ft/s$، وبزاوية تميل $48°$ على الأفق، إذا كان ارتفاع الكرة قدمين عند ركلها، فما المسافة الأفقية التي تقطعها قبل ارتطامها بالأرض؟**

خطوة 1: ارسم شكلًا يوضح الموقف.



خطوة 2: اكتب معادلة وسيطية لموقع الكرة الرأسي.

$y = tv_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$ المعادلة الوسيطية لموقع الكرة الرأسي

$= t(35)\sin(48) - \frac{1}{2}(32)t^2 + 2$ $\quad v_0 = 35, \theta = 48°, g = 32, h_0 = 2$

خطوة 3: مثّل معادلة الموقع الرأسي بيانيًّا، وأوجد نقطة تقاطع المنحنى مع $y = 0$ باستعمال الحاسبة البيانية. فتكون القيمة 1.7 ثانية تقريبًا.

خطوة 4: حدد موقع الكرة الأفقي عند 1.7 ثانية.

$x = tv_0 \cos\theta$ المعادلة الوسيطية للموقع الأفقي

$= 1.7(35)\cos 48$ $\quad v_0 = 35, \theta = 48°, t = 1.7$

≈ 39.8 باستعمال الآلة الحاسبة.

ستقطع الكرة مسافة أفقية مقدارها $39.8\,ft$ قبل ارتطامها بالأرض.

تمارين

1) ركل خالد كرة بسرعة ابتدائية مقدارها $28\,ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $56°$ من ارتفاع 4 أقدام، فما المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة قبل أن ترتطم بالأرض؟
$25\,ft$ تقريبًا

2) ضرب عمر كرة تنس أرضي بسرعة ابتدائية مقدارها $38\,ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $42°$ من ارتفاع 1.5 قدم، فما المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة إذا لم يعترضها الخصم؟
$46.6\,ft$ تقريبًا

الاسم: ________________ التاريخ: ________

4-5 تدريبات حل المسألة

المعادلات الوسيطية

1) **فيزياء:** أُطلق صاروخ بسرعة ابتدائية مقدارها $5\ m/s$، وبزاوية تميل على الأفق $8°$، فما المسافة الأفقية التي يقطعها الصاروخ بعد $0.4\ s$ ؟

$1.98\ m$

2) **القرص الطائر:** تلعب سميرة وسارة لعبة القرص الطائر، حيث ترمي سميرة القرص إلى سارة بسرعة ابتدائية مقدارها $38 ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $28°$، ومن ارتفاع 4 أقدام، وقد كانت سارة تبعد عن سميرة مسافة 40 قدمًا.

a) ما ارتفاع القرص عن الأرض عندما يصل إلى سارة؟

$2.53\ ft$

b) ما أقصى ارتفاع للقرص الطائر؟

$8.97\ ft$

3) **كرة التنس:** يضرب وليد كرة تنس بسرعة ابتدائية مقدارها $42\ ft/s$ في الثانية، وبزاوية تميل على الأفق $16°$، ومن ارتفاع قدمين، إذا كانت المسافة بينه وبين الشبكة 20 قدمًا، وارتفاع الشبكة 3 أقدام، فهل تتخطّى الكرة الشبكة؟

نعم: ارتفاع الكرة فوق الأرض يساوي $3.8\ ft$ عند المسافة $20\ ft$.

4) **كرة سلة:** يرمي محمد كرة سلة بسرعة ابتدائية مقدارها $28\ ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $60°$، إذا رمى محمد الكرة من ارتفاع 5 أقدام، فاكتب معادلتين لتحدد المسافة الرأسية والمسافة الأفقية للكرة.

معادلة المسافة الرأسية:

$$y = t(28)\ sin\ (60) - 16t^2 + 5;$$

معادلة المسافة الأفقية: $x = t(28)\ cos\ (60)$

5) **جولف:** يضرب بلال كرة جولف بسرعة ابتدائية مقدارها $100\ ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $39°$

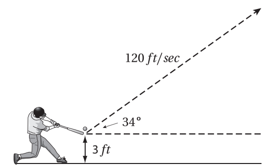
a) اكتب معادلات وسيطية لمسار الكرة.

$$x = 100t\ cos\ 39°,$$
$$y = 100t\ sin\ 39° - 16t^2$$

b) أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.

$61.9\ ft$ تقريبًا

6) **كرة البيسبول:** يضرب سلمان كرة البيسبول بسرعة ابتدائية مقدارها $120\ ft/s$ من ارتفاع 3 أقدام، وبزاوية تميل على الأفق $34°$.



a) ما المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة قبل أن ترتطم بالأرض؟

$421.6\ ft$

b) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟

$73.36\ ft$

c) إذا كان ارتفاع السياج 8 أقدام، ويبعد 400 قدم عن موقع سلمان، فهل تجتاز الكرة السياج؟ وضّح ذلك.

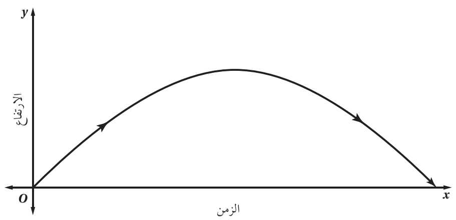
إجابة ممكنة: نعم، عندما تكون المسافة الأفقية $400\ ft$، فإن ارتفاع الكرة يكون $15.4\ ft$ فوق الأرض؛ وعليه فإنها تجتاز السياج.

الاسم: ________________ التاريخ: ________

4-5 التدريبات الإثرائية

المعادلات الديكارتية للمقذوفات

يمثل مسار قذيفة بعد انطلاقها قطعًا مكافئًا عند تمثيله بيانيًا على مستوى إحداثي.



على افتراض أن الجاذبية الأرضية هي القوة الوحيدة المؤثرة في القذيفة، ومعادلة مسار قذيفة في المستوى الإحداثي هي:

$$, y = -\left(\frac{g}{2v_0^2\ cos^2\alpha}\right)x^2 + (tan\ \alpha)x$$

حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\ m/s^2$ أو $32\ ft/s^2$، وv_0 السرعة الابتدائية، وα زاوية انطلاق القذيفة مع الأفق.

مثال **اكتب معادلة مسار قذيفة تنطلق بزاوية $10°$ مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها $120\ m/s$.**

$$y = -\left(\frac{9.8}{2(120)^2\ cos^2 10°}\right)x^2 + (tan\ 10°)x$$

$$y = -0.00035x^2 + 0.18x$$

أوجد معادلة المسار لكلٍّ من القذيفتين الآتيتين:

1) أُطلقت قذيفة بزاوية مقدارها $80°$ مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها $200\ ft/s$.

$$\boldsymbol{y = -0.013x^2 + 5.67x}$$

2) أُطلقت قذيفة بزاوية مقدارها $40°$ مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها $150\ m/s$.

$$\boldsymbol{y = -0.00037x^2 + 0.84x}$$