



وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

لصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الرابع: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

العبيكان
Obekon

Mc
Graw
Hill Education

يوزع مجاناً ولا يباع

١٤٣٥ هـ - ٢٠١٤ م

Glencoe Mathematics © 2010
CHAPTER RESOURCE MASTERS
Precalculus

الرياضيات - الصف الثالث الثانوي
مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدت النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

www.obeikaneducation.com



English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.



حقوق الطبع الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل ©.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨م / ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين
والاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله، والصلاة والسلام على نبينا محمد، وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدّم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم. وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوع من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التالية:

تدريبات إعادة التعليم

تركّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدّمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقًا من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجّهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقًا بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغرة.

المقدمة.....	4
الدرس 4-1 القطوع المكافئة	
تدريبات إعادة التعليم.....	6
تدريبات حل المسألة.....	8
التدريبات الإثرائية.....	9
الدرس 4-2 القطوع الناقصة والدوائر	
تدريبات إعادة التعليم.....	10
تدريبات حل المسألة.....	12
التدريبات الإثرائية.....	13
الدرس 4-3 القطوع الزائدة	
تدريبات إعادة التعليم.....	14
تدريبات حل المسألة.....	16
التدريبات الإثرائية.....	17
الدرس 4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها	
تدريبات إعادة التعليم.....	18
تدريبات حل المسألة.....	20
التدريبات الإثرائية.....	21
الدرس 4-5 المعادلات الوسيطة	
تدريبات إعادة التعليم.....	22
تدريبات حل المسألة.....	24
التدريبات الإثرائية.....	25
ملحق الإجابات.....	26

4-1

تدريبات إعادة التعليم

القطع المكافئة

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانياً القطع المكافئ هو المحل الهندسي لجميع نقاط المستوى التي يكون بعدها عن نقطة تسمى **البؤرة**، يساوي بعدها عن مستقيم معلوم يسمى **الدليل**. والصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ المفتوح رأسياً هي $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ ، وعندما تكون c سالبة، فإن المنحنى يكون مفتوحاً إلى أسفل، وعندما تكون c موجبة، فإن المنحنى يكون مفتوحاً إلى أعلى. أما الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ المفتوح أفقياً فهي $(y-k)^2 = 4c(x-h)$. وعندما تكون c سالبة، فإن المنحنى يكون مفتوحاً إلى جهة اليسار، وعندما تكون c موجبة، فإن المنحنى يكون مفتوحاً إلى جهة اليمين.

مثال

حدّد خصائص القطع المكافئ $(x-3)^2 = 12(y+4)$ ، ثم مثل منحناه بيانياً.

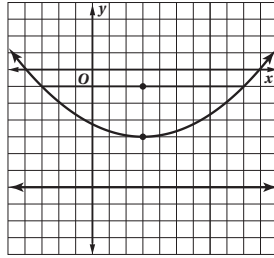
المعادلة في صورتها القياسية والحد التربيعي هو x ، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح رأسياً. وبما أن $4c = 12$ فإن $c = 3$ ؛ لذا فهو مفتوح إلى أعلى.

وبما أن المعادلة في الصورة: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ ؛ إذن: $h = 3$ و $k = -4$. استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

الرأس: $(3, -4)$ (h, k) الدليل: $y = -7$ $y = k - c$

البؤرة: $(3, -1)$ $(h, k + c)$ محور التماثل: $x = 3$ $x = h$ طول الوتر البؤري: $|4c| = 12$

عيّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل والوتر البؤري، مستعملاً بعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع المكافئ، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد ماراً بنهائتي الوتر البؤري، ويجب أن يكون متماثلاً حول محور التماثل.



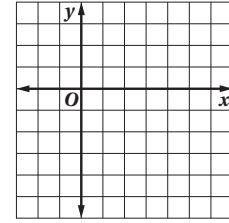
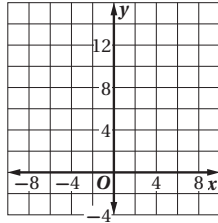
x	0	2	4	6
y	$-3\frac{1}{4}$	$-3\frac{11}{12}$	$-3\frac{11}{12}$	$-3\frac{1}{4}$

تمارين

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كلِّ مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانياً:

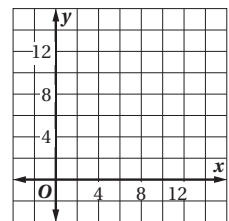
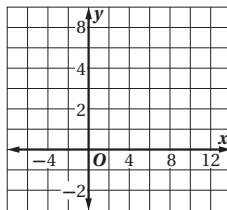
$$(x+2)^2 = 4(y-1) \quad (2)$$

$$(y+1)^2 = 8(x-3) \quad (1)$$



$$\frac{1}{12}(x-3)^2 = (y+2) \quad (4)$$

$$(y-3)^2 = 2(x-6) \quad (3)$$



4-1

تدريبات إعادة التعليم

القطوع المكافئة

(تتمة)

معادلات القطوع المكافئة يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

مثال اكتب معادلة القطع المكافئ، إذا كانت بؤرته $(-4, -3)$ ورأسه $(1, -3)$ ، ثم مثله بيانياً.

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y ، فإن المنحنى مفتوح أفقيًا؛ لذا فالبؤرة هي $(h + c, k)$ ، وعليه تكون قيمة c هي $-4 - 1 = -5$ ، ولما كانت c سالبة، فإن المنحنى مفتوح إلى جهة اليسار.

اكتب معادلة القطع المكافئ في الصورة القياسية مستعملًا القيم h, c, k .

الصورة القياسية

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

$$c = -5, h = 1, k = -3$$

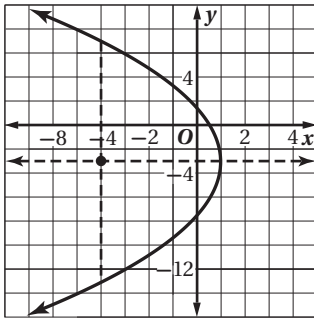
$$[y - (-3)]^2 = 4(-5)(x - 1)$$

بسّط

$$(y + 3)^2 = -20(x - 1)$$

الصورة القياسية للمعادلة هي: $(y + 3)^2 = -20(x - 1)$.

مثل بيانياً الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم القطع المكافئ.

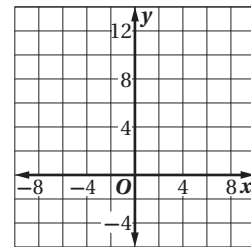
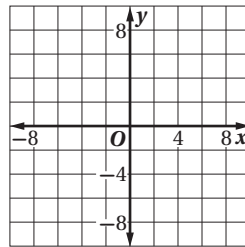


تمارين

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلِّ مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانياً:

(1) البؤرة $(-1, 5)$ ، والرأس $(2, 5)$

(2) البؤرة $(1, 4)$ ، ومفتوح إلى أسفل؛ ويجوي $(-3, 1)$

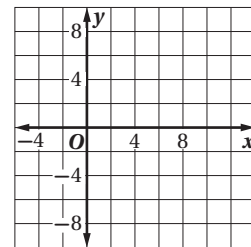
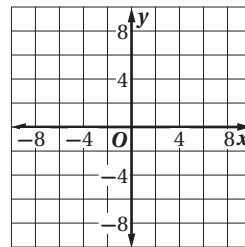


(3) الدليل $y = 6$ ، ومفتوح إلى أسفل،

(4) البؤرة $(1.5, 1)$ ، ومفتوح إلى جهة اليمين، ومعادلة

الدليل $x = 0.5$

والرأس $(5, 3)$



تدريبات حل المسألة

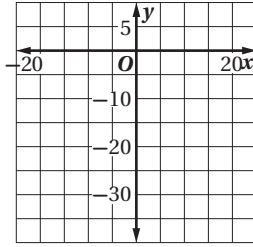
4-1

القطوع المكافئة

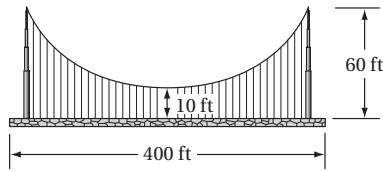
(1) عاكسات: يوضح الشكل الآتي مرآة عاكسة على شكل قطع مكافئ، ويمكن نمذجة مقطع طولي للمرآة بالمعادلة $x^2 = 16y$ ، أوجد المسافة بين الرأس والبؤرة في هذه المرآة.



(b) مثل منحني القطع المكافئ بيانياً.



(4) جسر: تبدو السلسلة المعدنية لأحد الجسور المعلقة على شكل قطع مكافئ، والدعامات الرأسية موضحة كما في الشكل الآتي.



(a) اكتب معادلة السلسلة المعدنية .

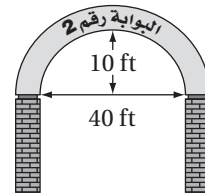
(b) أوجد طول الدعامات الرأسية التي تبعد عن المركز 100 قدم.

(2) قمصان ألعاب: رُمي قميص يحمل شعار الفريق الفائز بعد المباراة في الهواء بواسطة جهاز بسرعة ابتدائية $y = -16x^2 + 32x + 5$ ، إذا كانت المعادلة: y تمثل ارتفاع القميص (بالقدم) فوق الأرض بعد x ثانية.

(a) اكتب معادلة القطع المكافئ في الصورة القياسية.

(b) ما أقصى ارتفاع يصل إليه القميص؟

(3) عمارة: أنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة إحدى الكليات الجامعية كما في الشكل:

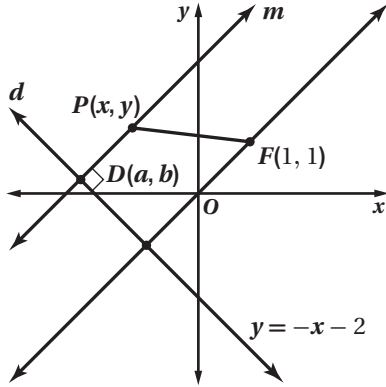


(a) اكتب معادلة القطع المكافئ.

التدريبات الإثرائية

4-1

القطع المكافئة المائلة



يوضح الشكل المجاور نقطة ثابتة $F(1, 1)$ ، والمستقيم d الذي معادلته $y = -x - 2$. إذا كانت $P(x, y)$ تحقق الشرط $PD = PF$ ، فإن P تقع على قطع مكافئ. وهدفنا هو إيجاد معادلة القطع المكافئ المائل، وهو المحل الهندسي لجميع النقاط التي لها البعد نفسه عن $(1, 1)$ والمستقيم $y = -x - 2$. أولاً: أوجد معادلة المستقيم m الذي يمر بالنقطة $P(x, y)$ وعمودي على المستقيم d عند $D(a, b)$ ، وأوجد الإحداثيين (a, b) للنقطة D بدلالة x و y ، ثم استعمل $(PD)^2 = (PF)^2$ ؛ لإيجاد معادلة القطع المكافئ. ارجع إلى المناقشة أعلاه.

(1) أوجد معادلة المستقيم m .

(2) استعمل معادلتَي المستقيمين m و d ؛ لتوضح أن إحداثيَي النقطة D هما $D(a, b) = \left(\frac{x - y - 2}{2}, \frac{y - x - 2}{2} \right)$.

(3) استعمل إحداثيات F, P, D ، والعلاقة $(PD)^2 = (PF)^2$ ؛ لإيجاد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F ، ودليله المستقيم d .

(4) (a) لكل قطع مكافئ محور تماثل، أوجد معادلة محور التماثل للقطع المكافئ المشار إليه أعلاه، وبرر إجابتك.

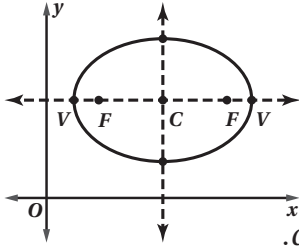
(b) استعمل إجابتك من الجزء a؛ لإيجاد إحداثيَي رأس القطع المكافئ، وبرر إجابتك.

4-2

تدريبات إعادة التعليم

القطع الناقصة والدوائر

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانياً: القطع الناقص هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوي التي يكون مجموع بُعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان البؤرتين يساوي مقداراً ثابتاً. والصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص هي:



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

حيث المحور الأكبر أفقي. وفي هذه الحالة a^2 هو مقام

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 2$$

عندما يكون المحور الأكبر رأسياً.

وفي هذه الحالة فإن a^2 هي مقام الحد الذي يحوي y ، وفي كلتا الحالتين يكون $c^2 = a^2 - b^2$.

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

حدّد خصائص القطع الناقص الذي معادلته

مثال

المعادلة في الصورة القياسية.

$$a=5, b=3, c=4, a^2 > b^2, c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16, a^2 = 25, b^2 = 9$$

رأسي القطع الناقص ومحوريه، بما أن a^2 مقام الحد الذي يحوي y فإن المحور الأكبر يوازي محور y .

رأسي

الاتجاه:

$$(h, k) \quad (-2, 1)$$

المركز:

$$(h, k \pm c) \quad (-2, 5), (-2, -3)$$

البؤرتان:

$$(h, k \pm a) \quad (-2, 6), (-2, -4)$$

الرأسان:

$$(h \pm b, k) \quad (-5, 1), (1, 1)$$

الرأسان المرافقان:

$$2a \text{ طول المحور الأكبر } x = h \quad 10 \text{ وطوله } x = -2$$

المحور الأكبر:

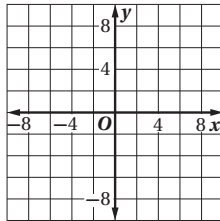
$$2b \text{ طول المحور الأصغر } y = k \quad 6 \text{ وطوله } y = 1$$

المحور الأصغر:

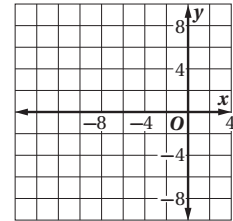
تمارين

حدّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانياً.

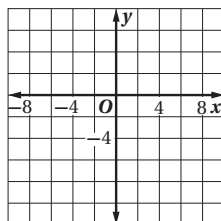
$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \quad (2)$$



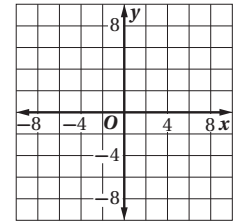
$$\frac{(x+5)^2}{64} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1 \quad (1)$$



$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{64} = 1 \quad (4)$$



$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 2 \quad (3)$$



4-2

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

القطوع الناقصة والدوائر

تحديد أنواع القطوع المخروطية إذا عُلِّمت معادلة قطع مخروطي، فبإمكانك أن تحدد نوعه باستعمال خصائص المعادلة. الصيغة القياسية لمعادلة دائرة مركزها (h, k) وطول نصف قطرها r هي: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

مثال

اكتب كل معادلة من المعادلتين الآتيتين في الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

$$4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0 \quad (a)$$

المعادلة الأصلية

$$4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$$

بإكمال المربع.

$$4(x^2 + 6x + ?) + 9(y^2 - 4y + ?) = -36 + ? + ?$$

$$\left(-\frac{4}{2}\right)^2 = 4, \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$$

$$4(x^2 + 6x + 9) + 9(y^2 - 4y + 4) = -36 + 36 + 36$$

بالتحليل.

$$4(x + 3)^2 + 9(y - 2)^2 = 36$$

بقسمة الطرفين على 36

$$\frac{(x + 3)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{4} = 1$$

لما كانت صيغة المعادلة هي: $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ ، فإن المنحنى يمثل قطعاً ناقصاً مركزه $(-3, 2)$.

$$x^2 - 16x - 8y + 80 = 0 \quad (b)$$

المعادلة الأصلية

$$x^2 - 16x - 8y + 80 = 0$$

بإكمال المربع.

$$(x^2 - 16x + ?) - 8y + 80 = 0$$

$$\left(\frac{16}{2}\right)^2 = 64$$

$$(x^2 - 16x + 64) - 8y + 80 - 64 = 0$$

حلل.

$$(x - 8)^2 - 8(y - 2) = 0$$

بجمع $8(y - 2)$ للطرفين

$$(x - 8)^2 = 8(y - 2)$$

لما كان التربيع لحدٍّ واحدٍ، فإن المنحنى يمثل قطعاً مكافئاً رأسه $(8, 2)$.

التمارين

اكتب كل معادلة مما يأتي في الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي المرتبط بها:

$$y^2 + 2y + x^2 - 24x = 24 \quad (2) \quad y^2 + 2y + 6x^2 - 24x = 5 \quad (1)$$

$$x^2 + 4x + y^2 - 2y - 49 = 0 \quad (4) \quad 4x - 8 + y^2 + 4y = 0 \quad (3)$$

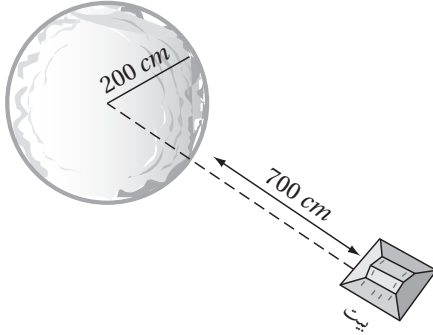
$$6x^2 + 24x + 2y - 10 = 0 \quad (6) \quad 4x^2 + 8x + 5y^2 - 30y - 11 = 0 \quad (5)$$

4-2

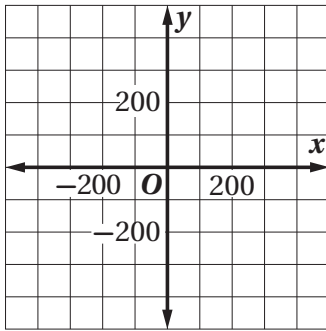
تدريبات حل المسألة

القطع الناقصة والدوائر

(4) **بركة**: يزداد طول نصف قطر بركة لتجميع الماء المتدفق من أرض مجاورة بمعدل 100 cm لكل يوم على نحو ما هو موضح أدناه.



(a) مثل بيانياً الدائرة التي تمثل الماء على الشكل أعلاه، وأوجد البعد بين مركز البركة والبيت.



(b) إذا استمرت بركة الماء في الاتساع بالمعدل نفسه، فبعد كم يوم يصل الماء إلى البيت؟

(c) اكتب معادلة بركة الماء في الوقت الحالي ومعادلتها عندما يصل الماء إلى البيت.

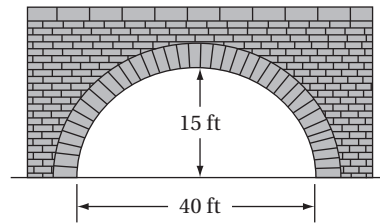
(1) **صالة الهمس**: في أحد المتاحف، توجد صالة همس صوتي على شكل قطع ناقص، طول الصالة 84 قدمًا وعرضها 46 قدمًا. اكتب معادلة تمثل شكل الصالة، مفترضًا مركزها عند نقطة الأصل والمحور الأكبر أفقي.

(b) أوجد موقعي البورتين.

(2) **لوحات**: لوحة على شكل قطع ناقص. إذا كان الاختلاف المركزي 0.60 ، وطول اللوحة 48 cm . اكتب معادلة القطع الناقص، إذا كان مركز اللوحة عند نقطة الأصل.

(b) ما عرض اللوحة؟

(3) **نفق**: مدخل نفق على شكل نصف قطع ناقص كما في الشكل.



(a) اكتب المعادلة التي تمثل القطع الناقص.

(b) احسب ارتفاع النفق فوق نقطة تبعد 10 ft عن المركز.

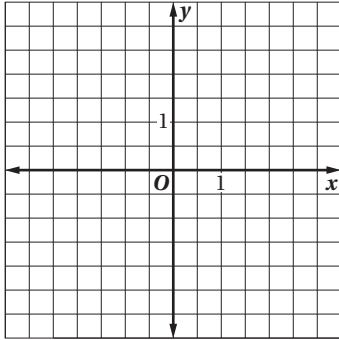
التدريبات الإثرائية

4-2

عائلة منحنيات لامي

مجموعة المنحنيات التي تكون معادلاتها في الصورة: $\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1$ ، حيث: $a \neq 0, b \neq 0, n > 0$.
تسمى عائلة منحنيات لامي، نسبة إلى عالم الفيزياء والرياضيات الفرنسي لامي (Lamé) (1795–1870).

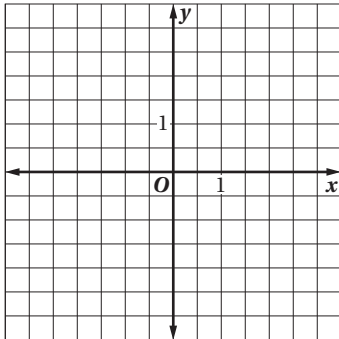
(1) مثل كلاً من المعادلتين الآتيتين بيانياً، وحدد نوع المنحنى الناتج في كل مرة:



$$\left|\frac{x}{2}\right|^2 + \left|\frac{y}{2}\right|^2 = 1 \quad (a)$$

$$\left|\frac{x}{3}\right|^2 + \left|\frac{y}{2}\right|^2 = 1 \quad (b)$$

(2) بناءً على سؤال 1، هل تضم مجموعة منحنيات لامي الدائرة والقطع الناقص.



(3) استعمل قيم a, b, n المعطاة في كلٍّ من الحالات الآتية في معادلة عائلة منحنيات لامي، واكتب المعادلة الناتجة في كل حالة، ثم مثلها بيانياً على الشبكة البيانية المجاورة.

$$a = 2, b = 3, n = 4 \quad (a)$$

$$a = 2, b = 3, n = 6 \quad (b)$$

$$a = 2, b = 3, n = 8 \quad (c)$$

(4) ما الشكل الذي يقترب إليه منحنى $\left|\frac{x}{2}\right|^n + \left|\frac{y}{3}\right|^n = 1$ لقيم n الصحيحة الموجبة الزوجية الكبيرة؟

4-3 تدريبات إعادة التعليم

القطوع الزائدة

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانياً القطع الزائد هو المحل الهندسي لجميع نقاط المستوى التي يكون الفرق

المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان البؤرتين، مقداراً ثابتاً والصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد هي: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقياً، والصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

عندما يكون المحور القاطع رأسياً وفي كلتا الحالتين يكون: $a^2 + b^2 = c^2$.

مثال

حدّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$ ، ثم مثل منحناه بيانياً.

المعادلة بالصورة القياسية. كلٌّ من h و k يساوي صفرًا، لذا فإن المركز عند نقطة الأصل، ولما كان الحد المطروح يجوي x ، فإن المحور القاطع رأسي، أوجد قيم a ، b ، c ، واستعملها لتحديد الرأسين والبؤرتين. بما أن $a^2 = 16$ و $b^2 = 4$ ، فإن $a = 4$ و $b = 2$. استعمل قيمتي a و b لإيجاد قيمة c .

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a = 4, b = 2 \quad c^2 = 4^2 + 2^2$$

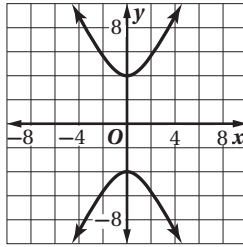
$$c = \sqrt{20} \text{ أو } 4.47 \text{ تقريباً}$$

حدّد خصائص القطع الزائد.

$$(h, k \pm c) \quad (0, \sqrt{20}), (0, -\sqrt{20}) \quad \text{البؤرتان} \quad (h, k) \quad (0, 0) \quad \text{المركز}$$

$$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h) \quad y = 2x, y = -2x \quad \text{خطا التقارب} \quad (h, k \pm a) \quad (0, 4), (0, -4) \quad \text{الرأسان}$$

أنشئ جدول قيم لتمثيل منحنى القطع الزائد.



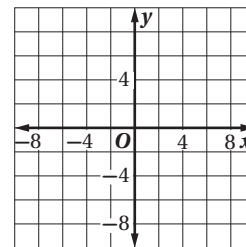
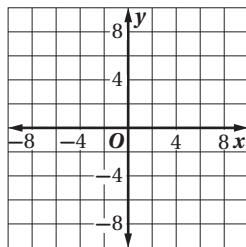
x	y
-2	-5.7, 5.7
-1	-4.5, 4.5
0	-4, 4
1	-4.5, 4.5
2	-5.7, 5.7

تمارين

حدّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كلٍّ مما يأتي، ثم مثله بيانياً.

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{36} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1 \quad (1)$$



4-3

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

القطوع الزائدة

كتابة معادلة قطع زائد إذا علم بعض خصائصه: يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع الزائد.

مثال
اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص التالية: رأساه $(-4, -2)$, $(2, -2)$ ، وبؤرتاه $(-6, -2)$, $(4, -2)$.

بما أن إحداثي y متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع أفقي، أو جد المركز، وقيم a, b, c .

المركز $(-1, -2)$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين أو البؤرتين

$$a = \sqrt{(-4+1)^2 + (-2+2)^2} = 3$$

المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز.

$$c = \sqrt{(4+1)^2 + (-2+2)^2} = 5$$

المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad b = \sqrt{25 - 9} = 4$$

بما أن المحور القاطع أفقي، فإن a^2 ترتبط بالحد x^2 ؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي: $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$.

تمارين

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلِّ مما يأتي:

(1) البؤرتان هما $(0, 4)$, $(0, -4)$ ، وطول المحور المرافق 6

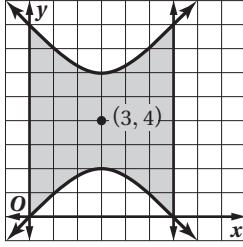
(2) الرأسان هما $(3, -6)$, $(3, 2)$ ، وخطاً التقارب هما $y = \frac{4}{5}x - \frac{22}{5}$ ، و $y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$.

(3) الرأسان هما $(10, 2)$, $(6, 2)$ ، والبؤرتان هما $(12, 2)$, $(4, 2)$.

4-3 تدريبات حل المسألة

القطوع الزائدة

(4) **منتزهات:** حدّان من حدود منطقة لعب عشبية على شكل قطع زائد كما هو موضح في الشكل أدناه:



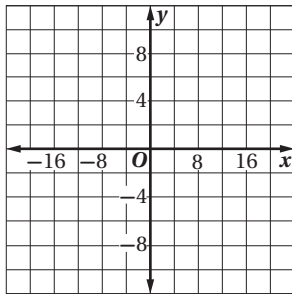
(a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي يمثل حدود منطقة اللعب.

(b) إذا كانت كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل 3 ft، فما أضيّق عرض لمنطقة اللعب؟

(5) **ظلال:** يكون مسار ظل مؤشر الساعة الشمسية على شكل قطع زائد غالبًا.

(a) اكتب معادلتَي القطع الزائد بالصورة القياسية، إذا كان المركز يقع في نقطة الأصل، والمسار المار بالمحور القاطع يبعد 2 mm عن إحدى البؤرتين، و 12 mm عن المركز.

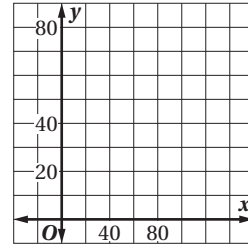
(b) مثل أحد القطعين الزائدين بيانيًا.



(1) **زلازل:** المركز السطحي لزلازل يقع على أحد فرعي منحنى القطع الزائد الذي معادلته:

$$\frac{(x - 50)^2}{1600} - \frac{(y - 35)^2}{2500} = 1$$

حيث تقع راسمات الزلازل عند البؤرتين. (a) مثل القطع الزائد بيانيًا.

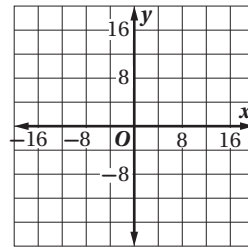


(b) أوجد إحداثيات موقعي راسمَي الزلازل.

(2) **ظلال:** يسقط ضوء مصباح على جدار، فيتكون ظلّ حدوده على شكل قطع زائد، معادلته:

$$\frac{y^2}{196} - \frac{x^2}{121} = 1 \quad (3)$$

(a) مثل القطع الزائد بيانيًا.



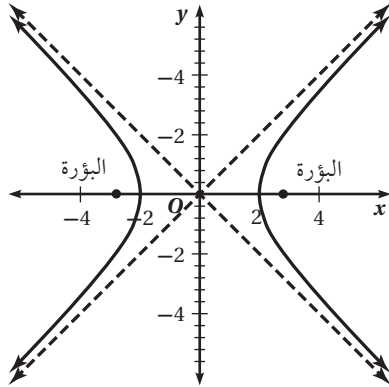
(b) اكتب معادلتَي خطَي التقارب.

(c) أوجد الاختلاف المركزي.

التدريبات الإثرائية

4-3

البؤرتان المتحركتان



تذكر أن معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع أفقي هي:
 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ والبؤرتان هما: $(c, 0)$, $(-c, 0)$ ، حيث $c^2 = a^2 + b^2$ ،
 والرأسان هما: $(a, 0)$, $(-a, 0)$ ، ومعادلتا خطي التقارب هما:
 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ، والشكل المجاور يمثل منحنى هذا القطع الزائد.
 ماذا يحدث لهذا المنحنى عندما تزيد قيمة c بلا حدود أو تقل بلا حدود؟

استعمل القطع الزائد المشار إليه أعلاه للإجابة عن الأسئلة 1-4.

(1) اكتب دليلاً مقنعاً لتوضح أنه عندما تقترب c من 0،
 فإن البؤرتين والرأسين والمركز للقطع الزائد، تصبح جميعها نقطة واحدة.

(2) استعمل الحاسبة البيانية أو حاسوباً لتمثل القطوع: $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 0.1$, $x^2 - y^2 = 0.01$ بيانياً،
 حيث تتعلق هذه القطوع الزائدة بقيم متناقصة لـ c ، وصف التغيرات في المنحنيات، وما الشكل الذي تقترب إليه
 عندما تقترب c من 0؟

(3) افترض أن a تبقى ثابتة، وأن c تقترب من المالا لانهاية، فكيف يتغير شكل القطع الزائد؟

(4) افترض أن b تبقى ثابتة، وأن c تقترب من المالا لانهاية، فكيف يتغير شكل القطع الزائد؟

4-4

تدريبات إعادة التعليم

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

تحديد أنواع القطوع المخروطية: بإمكانك أن تحدد نوع القطع المخروطي عندما تكون معادلته معطاة بالصورة:
 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، باستعمال المميز $B^2 - 4AC$.

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0, A \neq C$ أو $B \neq 0$
دائرة	$B^2 - 4AC < 0, B = 0, A = C$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

مثال

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها في الصورة القياسية:

$$2x^2 + 6y^2 - 8x + 12y - 2 = 0 \quad (a)$$

بما أن: $A = 2$ و $B = 0$ و $C = 6$ ، فإن المميز يساوي:

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4(2)(6) = -48$$

المميز أصغر من 0، لذا يجب أن يكون القطع المخروطي دائرة أو قطعاً ناقصاً، ولما كانت $A \neq C$ فإنه قطع ناقص.

$$5x^2 + 8xy - 2y^2 + 4x - 3y + 10 = 0 \quad (b)$$

بما أن: $A = 5$ و $B = 8$ و $C = -2$ ، فإن المميز يساوي:

$$B^2 - 4AC = 8^2 - 4(5)(-2) = 104$$

المميز أكبر من 0؛ لذا فإن القطع المخروطي قطع زائد.

$$12x^2 + 12xy + 3y^2 - 7x + 2y - 6 = 0 \quad (c)$$

بما أن: $A = 12$ و $B = 12$ و $C = 3$ ، فإن المميز يساوي:

$$B^2 - 4AC = 12^2 - 4(12)(3) = 0$$

المميز يساوي 0؛ لذا فإن القطع المخروطي قطع مكافئ.

تمارين

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها في الصورة القياسية:

$$10x^2 + 6y^2 - x + 8y + 1 = 0 \quad (2) \quad 4x^2 + 4y^2 - 2x - 9y + 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 6xy + y^2 - 2x + 1 = 0 \quad (4) \quad -2x^2 + 6xy + y^2 - 4x - 5y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + 10 = 0 \quad (6) \quad 5x^2 + 2xy + 4y^2 + x + 2y + 17 = 0 \quad (5)$$

$$16x^2 + 100x - 54y^2 = -100 \quad (8) \quad 25x^2 + 100x - 54y = -200 \quad (7)$$

4-4

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

دوران القطوع المخروطية يمكن كتابة المعادلة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ في المستوى xy في الصورة: $A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ في المستوى $x'y'$ ، وذلك بتدوير محوري الإحداثيات بزاوية θ ، ويمكن إيجاد المعادلة في المستوى $x'y'$ باستعمال الصيغتين:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, y = y' \cos \theta + x' \sin \theta$$

استعمل $\theta = 45^\circ$ لكتابة الصيغة القياسية للمعادلة: $x^2 - 2xy - 4y^2 + \frac{1}{2} = 0$ في المستوى $x'y'$.

مثال

وحدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

القطع المخروطي هو قطع زائد؛ لأن $B^2 - 4AC > 0$ ، أوجد معادلتَي x, y .

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

صيغتا الدوران x, y

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y'$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية.

$$x^2 - 2xy - 4y^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{بالتعويض عن } x, y \text{ : } \left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2} \right) - 4 \left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2}(x')^2 - x'y' + \frac{1}{2}(y')^2 - (x')^2 + (y')^2 - 2(x')^2 - 4x'y' - 2(y')^2 + \frac{1}{2} = 0$$

بإيجاد مفكوك ذات الحدين.

$$\text{بالتبسيط.} \quad -\frac{5}{2}(x')^2 - 5x'y' - \frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{2} = 0$$

فتكون معادلة القطع الزائد بدوران 45° هي: $5(x')^2 + 10x'y' + (y')^2 = 1$

تمارين

استعمل قيمة θ المعطاة؛ لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة من المعادلتين الآتيتين في المستوى $x'y'$ ، ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله:

$$8x^2 - 5y^2 = 40, \theta = 30^\circ \quad (2)$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 2, \theta = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

تدريبات حل المسألة

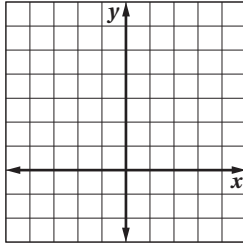
تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

(3) **صور:** ترسم سعاد صوراً لقطع مكافئة بعد دورانها، وتريد أن تمثل القطع $(x' - 3)^2 = 12(y' - 4)$ بيانياً، إذا دار بزاوية 45° في المستوى xy .

(a) أوجد رأس القطع في المستوى xy .

(b) أوجد معادلة محور التماثل في المستوى xy .

(c) ارسم المنحنى في المستوى xy .



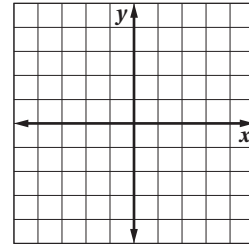
(4) **منطق:** إذا دار قطع زائد 40° في اتجاه عقارب الساعة، فما قياس الزاوية اللازمة لدورانها حتى يعود إلى موقعه الأصلي؟

(5) **أشكال:** يمكن تمثيل مقطع من مرآة عاكسة بالمعادلة: $25x^2 + 13xy + 2y^2 = 100$ ، حدّد نوع القطع الذي تمثله المرآة العاكسة.

(1) **اتصالات:** إذا كانت معادلة مقطع عرضي لطبق قمر اصطناعي بعد دورانه بزاوية قياسها 60° هي $y' = \frac{1}{8}x'^2$

(a) اكتب المعادلة في المستوى xy .

(b) مثل المعادلة بيانياً.

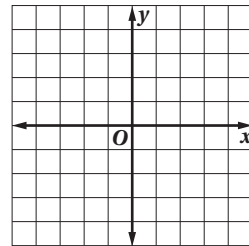


(2) **ناقل الحركة:** افترض أن معادلة ناقل حركة السيارة على شكل قطع ناقص بعد دورانه بزاوية 60° في

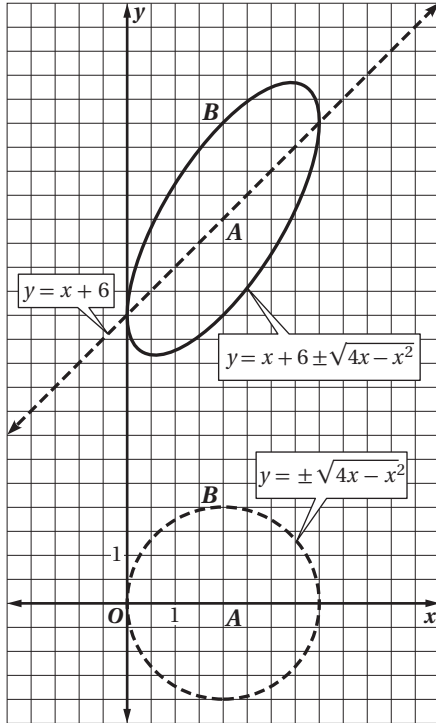
المستوى $x'y'$ ، هي: $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{20} = 1$.

(a) اكتب معادلة القطع الناقص في المستوى xy .

(b) مثل المعادلة بيانياً.



التدريبات الإثرائية

التمثيل البياني بإضافة الإحداثي y 

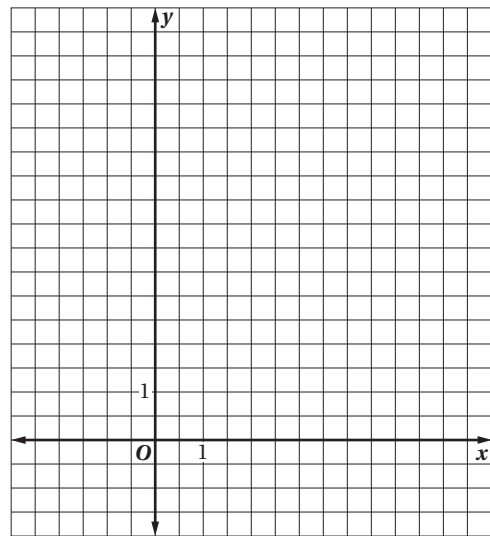
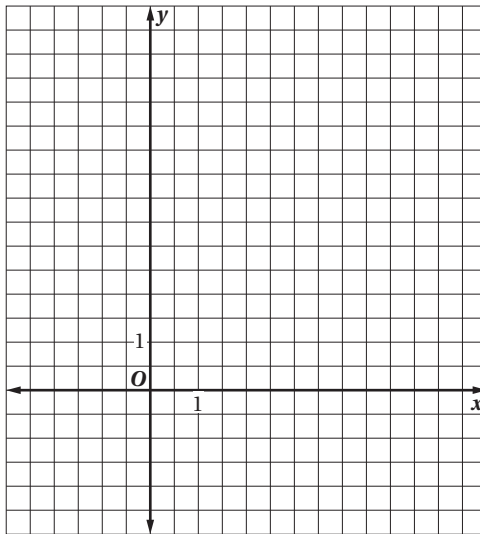
تمثيل منحنيات معادلات القطوع المكافئة والناقصة والزايدة المائلة بالنسبة للمحورين x, y ، أكثر صعوبة مقارنة بمنحنيات المعادلات التي درستها.

وغالبًا ما تستعمل التمثيل البياني لمعادلتين بسيطتين؛ لإيجاد التمثيل البياني لمعادلات أكثر تعقيدًا. فمثلًا، يمكن الحصول على منحنى القطع الناقص في الشكل المجاور بإضافة الإحداثي y لكل نقطة على الدائرة، إلى الإحداثي y لكل نقطة مناظرة من المستقيم.

مثّل كلاً من المعادلتين الآتيتين بيانياً، ثم حدّد نوع المنحنى لكل تمثيل:

$$y = x \pm \sqrt{x} \quad (2)$$

$$y = 6 - x \pm \sqrt{4 - x^2} \quad (1)$$



استعمل ورقة بيانية منفصلة؛ لتمثيل كل من المعادلتين الآتيتين بيانياً، ثم حدّد نوع المنحنى لكل تمثيل:

$$y = -2x \pm \sqrt{-2x} \quad (4)$$

$$y = 2x \pm \sqrt{7 + 6x - x^2} \quad (3)$$

4-5

تدريبات إعادة التعليم

المعادلات الوسيطة

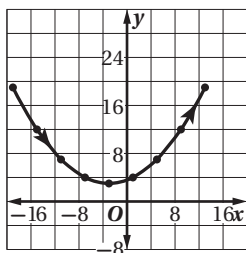
التمثيل البياني للمعادلات الوسيطة: تُستعمل المعادلات الوسيطة لوصف المركبتين (الأفقية والرأسية) لمعادلة، والمتغير الوسيط قيمة اختيارية تكون عادة إما الزمن وإما قياس الزاوية.

مثال 1

مثّل بيانياً المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة:

$$x = -3 + 4t, y = t^2 + 3, -4 \leq t \leq 4$$

كوّن جدولاً من بعض قيم t في الفترة $-4 \leq t \leq 4$ ، ثم مثّل بيانياً النقطة (x, y) لكل قيمة لـ t ، ثم صل بين النقاط بمنحنى.



t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-19	-15	-11	-7	-3	1	5	9	13
y	19	12	7	4	3	4	7	12	19

مثال 2

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = 4t - 2, y = t^2 + 1$ بالصورة الديكارتية.

المعادلة الأولى

الحل بالنسبة لـ t .عوّض $\frac{x+2}{4}$ بدلاً من t في المعادلة الثانية.رّبع $\frac{x+2}{4}$.

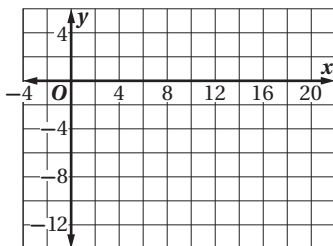
بسّط

$$\begin{aligned} x &= 4t - 2 \\ \frac{x+2}{4} &= t \\ y &= \left(\frac{x+2}{4}\right)^2 - 2 \\ &= \frac{x^2 + 4x + 4}{16} - 2 \\ &= \frac{x^2}{16} + \frac{x}{4} - \frac{7}{4} \end{aligned}$$

المعادلة الديكارتية هي: $y = \frac{x^2}{16} + \frac{x}{4} - \frac{7}{4}$

تمارين

(1) مثّل بيانياً المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة: $x = t^2 + 4, y = \frac{t}{6} - 3; -4 \leq t \leq 4$



(2) اكتب المعادلتين الوسيطيتين: $x = \frac{t}{3}, y = \sqrt{t} + 2$ بالصورة الديكارتية.

4-5

تدريبات إعادة التعليم

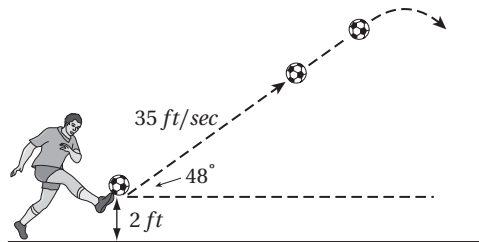
(تتمة)

المعادلات الوسيطة

حركة المقذوفات تستعمل المعادلات الوسيطة غالباً في معادلات حركة المقذوفات، فإذا قُذِفَ جسم بزاوية غير قائمة، تميل θ على الأفق وبسرعة ابتدائية v_0 ، وبالتالي يمكن إيجاد المسافة الأفقية x بالمعادلة: $x = tv_0 \cos \theta$ ، والمسافة الرأسية y بالمعادلة: $y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$ ، حيث g ثابت الجاذبية الأرضية، و t الزمن، و h_0 الارتفاع الابتدائي.

مثال
ركل ماجد كرة قدم بسرعة ابتدائية مقدارها 35 ft/s ، وبزاوية تميل 48° على الأفق، إذا كان ارتفاع الكرة قدمين عند ركلها، فما المسافة الأفقية التي تقطعها قبل ارتطامها بالأرض؟

خطوة 1: ارسم شكلاً يوضح الموقف.



خطوة 2: اكتب معادلة وسيطة لموقع الكرة الراسي.

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الوسيطة لموقع الكرة الراسي} & y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0 \\ v_0 = 35, \theta = 48^\circ, g = 32, h_0 = 2 & = t(35) \sin(48) - \frac{1}{2}(32)t^2 + 2 \end{aligned}$$

خطوة 3: مثل معادلة الموقع الراسي بيانياً، وأوجد نقطة تقاطع المنحنى مع $y = 0$ باستعمال الحاسبة البيانية. فتكون القيمة 1.7 ثانية تقريباً.

خطوة 4: حدد موقع الكرة الأفقي عند 1.7 ثانية.

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الوسيطة للموقع الأفقي} & x = tv_0 \cos \theta \\ v_0 = 35, \theta = 48^\circ, t = 1.7 & = 1.7(35) \cos 48 \\ \text{باستعمال الآلة الحاسبة.} & \approx 39.8 \end{aligned}$$

ستقطع الكرة مسافة أفقية مقدارها 39.8 ft قبل ارتطامها بالأرض.

تمارين

1) ركل خالد كرة بسرعة ابتدائية مقدارها 28 ft/s ، وبزاوية تميل على الأفق 56° من ارتفاع 4 أقدام، فما المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة قبل أن ترتطم بالأرض؟

2) ضرب عمر كرة تنس أرضي بسرعة ابتدائية مقدارها 38 ft/s ، وبزاوية تميل على الأفق 42° من ارتفاع 1.5 قدم، فما المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة إذا لم يعترضها الخصم؟

4-5

تدريبات حل المسألة

المعادلات الوسيطة

(1) فيزياء: أُطلق صاروخ بسرعة ابتدائية مقدارها 5 m/s ، وبزاوية تميل على الأفق 8° ، فما المسافة الأفقية التي يقطعها الصاروخ بعد 0.4 s ؟

(2) القرص الطائر: تلعب سميرة وسارة لعبة القرص الطائر، حيث ترمي سميرة القرص إلى سارة بسرعة ابتدائية مقدارها 38 ft/s ، وبزاوية تميل على الأفق 28° ، ومن ارتفاع 4 أقدام، وقد كانت سارة تبعد عن سميرة مسافة 40 قدمًا.

(a) ما ارتفاع القرص عن الأرض عندما يصل إلى سارة؟

(b) ما أقصى ارتفاع للقرص الطائر؟

(3) كرة التنس: يضرب وليد كرة تنس بسرعة ابتدائية مقدارها 42 ft/s في الثانية، وبزاوية تميل على الأفق 16° ، ومن ارتفاع قدمين، إذا كانت المسافة بينه وبين الشبكة 20 قدمًا، وارتفاع الشبكة 3 أقدام، فهل تتخطى الكرة الشبكة؟

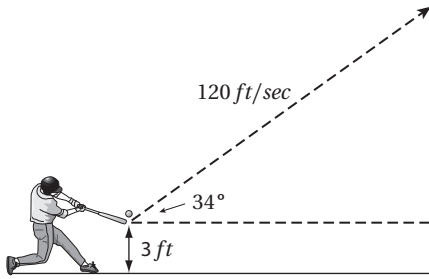
(4) كرة سلة: يرمي محمد كرة سلة بسرعة ابتدائية مقدارها 28 ft/s ، وبزاوية تميل على الأفق 60° ، إذا رمى محمد الكرة من ارتفاع 5 أقدام، فاكتب معادلتين لتحديد المسافة الرأسية والمسافة الأفقية للكرة.

(5) جولف: يضرب بلال كرة جولف بسرعة ابتدائية مقدارها 100 ft/s ، وبزاوية تميل على الأفق 39°

(a) اكتب معادلات وسيطة لمسار الكرة.

(b) أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.

(6) كرة البيسبول: يضرب سلمان كرة البيسبول بسرعة ابتدائية مقدارها 120 ft/s من ارتفاع 3 أقدام، وبزاوية تميل على الأفق 34° .



(a) ما المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة قبل أن ترتطم بالأرض؟

(b) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟

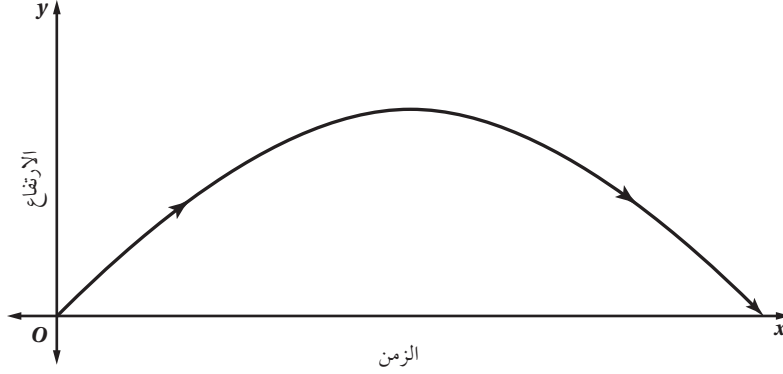
(c) إذا كان ارتفاع السياج 8 أقدام، ويبعد 400 قدم عن موقع سلمان، فهل تجتاز الكرة السياج؟ وضح ذلك.

4-5

التدريبات الإثرائية

المعادلات الديكارتية للمقذوفات

يمثل مسار قذيفة بعد انطلاقتها قطعاً مكافئاً عند تمثيله بيانياً على مستوى إحداثي.



على افتراض أن الجاذبية الأرضية هي القوة الوحيدة المؤثرة في القذيفة، ومعادلة مسار قذيفة في المستوى الإحداثي هي:

$$y = -\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right)x^2 + (\tan \alpha)x$$

حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي 9.8 m/s^2 أو 32 ft/s^2 ، و v_0 السرعة الابتدائية، و α زاوية انطلاق القذيفة مع الأفق.

مثال

اكتب معادلة مسار قذيفة تنطلق بزاوية 10° مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها 120 m/s .

$$y = -\left(\frac{9.8}{2(120)^2 \cos^2 10^\circ}\right)x^2 + (\tan 10^\circ)x$$

$$y = -0.00035x^2 + 0.18x$$

أوجد معادلة المسار لكل من القذيفتين الآتيتين:

- (1) أُطلقت قذيفة بزاوية مقدارها 80° مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها 200 ft/s .
- (2) أُطلقت قذيفة بزاوية مقدارها 40° مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها 150 m/s .

ملحق الإجابات

(تتمه)

4-1 تدريبات إعادة التعليم

القطع الكافية

معادلات القطوع الكافية يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع الكافية.

مثال اعط معادلة القطع الكافية، إذا كانت بؤرتي $(-4, -3)$ ورأسه $(1, -3)$ ثم مثله بيانياً.

جاء أن البؤرة والرأس متطابقان في الإحداثي y ، فإن المنحني مفتوح أفقياً، لذا فالبؤرة هي (h, k) ، وعليه تكون قيمة c هي -5 ، وأذا كانت c سالبة، فإن المنحني مفتوح إلى جهة اليسار.

اكتب معادلة القطع الكافية في الصورة القياسية لمعادلة القطع الكافية h, k .

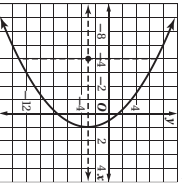
$$\text{الصورة القياسية} \quad (y - k)^2 = 4c(x - h)$$

$$c = -5, h = 1, k = -3 \quad [y - (-3)]^2 = 4(-5)(x - 1)$$

$$\text{مبسطة} \quad (y + 3)^2 = -20(x - 1)$$

الصورة القياسية للمعادلة هي: $(y + 3)^2 = -20(x - 1)$.

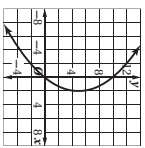
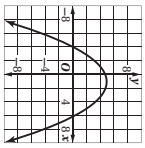
مثل بيانياً الرأس والبؤرة ومحور التماس والبؤرتي، ثم ارسم القطع الكافية.



تجارب

اكتب معادلة القطع الكافية الذي يجتز الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثل معناه بيانياً:

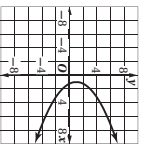
(1) البؤرة: $(-1, 5)$ والرأس $(2, 5)$



$$(x - 1)^2 = -4(y - 5)$$

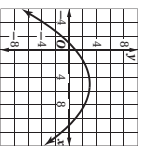
$$(y - 5)^2 = -12(x - 2)$$

(2) البؤرة: $(1, 4)$ ومفتوح إلى أسفل، ومعاينة الدليل $x = 0.5$



$$(x - 1)^2 = 2(y - 1)^2$$

(3) الدليل: $y = 6$ ومفتوح إلى أسفل، والرأس $(5, 3)$



$$(x - 5)^2 = -12(y - 3)$$

الفصل 4: القطوع الجبرية والمعادلات البسيطة

7

المصفوفات المتساوية

4-1 تدريبات إعادة التعليم

القطع الكافية

تحليل القطع الكافية وتشبيهه بيانياً القطع الكافية هو المثل القياسي لجميع نقاط المستوى التي يكون عليها من نقطة تسمى البؤرة، يساوي بعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل. والصفة القياسية لمعادلة القطع الكافية المنفتح رأسياً هي $(x - h)^2 = 4c(y - k)$ ، وعندما تكون سالبة، فإن المنحني يكون مفتوحاً إلى أسفل، وعندما تكون موجبة، فإن المنحني يكون مفتوحاً إلى أعلى. أما الصفة القياسية لمعادلة القطع الكافية المنفتح أفقياً فهي $(y - k)^2 = 4c(x - h)$ ، وعندما تكون سالبة، فإن المنحني يكون مفتوحاً إلى جهة اليسار، وعندما تكون موجبة، فإن المنحني يكون مفتوحاً إلى جهة اليمين.

مثال

$$\text{حدّد خصائص القطع الكافية، } (x - 3)^2 = 12(y + 4)$$

المعادلة في صورها القياسية والحد التريعي هو xy وهذا يعني أن المنحني مفتوح رأسياً، وبما أن $4c = 12$ فإن $c = 3$ ، ولذا فهو مفتوح إلى أعلى.

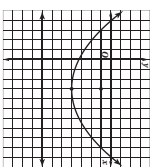
وبما أن المعادلة في الصورة: $(x - h)^2 = 4c(y - k)$ ؛ إذن: $h = 3$ و $k = -4$ ، واستعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع الكافية.

$$\text{الرأس: } (3, -4) \quad \text{الدليل: } y = -7 \quad \text{محور التماس: } y = k - c$$

$$\text{البؤرة: } (3, -1) \quad \text{محور التماس: } x = 3 \quad \text{طول الوتر البؤري: } |4c|$$

عنى الرأس والبؤرة ومحور التماس والدليل والوتر البؤري، مستعملاً بعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الكافية، ثم ارسم منحنى يدور بالرأس ويعتد مماساً لنهايتي الوتر البؤري، ويجب أن يكون متانلاً حول محور التماس.

x	0	2	4	6
y	$-3\frac{1}{4}$	$-3\frac{11}{12}$	$-3\frac{11}{12}$	$-3\frac{1}{4}$

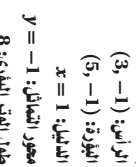
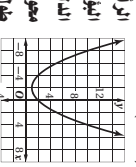


تجارب

حدّد خصائص القطع الكافية المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثل معناه بيانياً:

(1) $(y + 1)^2 = 8(x - 3)$

(2) $(x + 2)^2 = 4(y - 1)$



(3) الرأس: $(3, -1)$

(4) البؤرة: $(5, -1)$

(5) الدليل: $x = 1$

(6) محور التماس: $y = -1$

(7) طول الوتر البؤري: 8

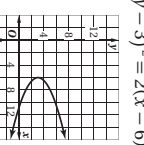
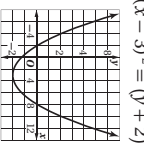
(8) الرأس: $(3, 3)$

(9) البؤرة: $(\frac{1}{2}, 3)$

(10) الدليل: $x = \frac{1}{2}$

(11) محور التماس: $y = 3$

(12) طول الوتر البؤري: 2



الفصل 4: القطوع الجبرية والمعادلات البسيطة

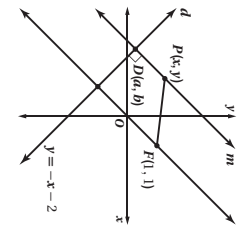
6

المصفوفات المتساوية

التاريخ: _____

الاسم: _____

4-1 التدرجات الإثرائية انقطاع الكافئة المتألفة



يوضح الشكل الجارو نقطة ثابتة $(1, 1)$ والمستقيم d الذي معادلته $-x - 2 = y$. إذا كانت $P(x, y)$ تحقق الشرط $PD = PD$ ، فإن P تقع على قطع مكافئ، وهذا هو إيجاد معادلة القطع المكافئ الناتج، وهو الحل النهائي لجميع النقاط التي لها البعد نفسه عن $(1, 1)$ والمستقيم $-x - 2 = y$. أولاً: أوجد معادلة المستقيم m الذي يمر بالنقطة $P(x, y)$ وعمودي على المستقيم d عند $D(a, b)$ ، وأوجد الإحداثيين (a, b) للنقطة D بدلالة x و y . ثم استعمل $(PD)^2 = (PD)^2$ لإيجاد معادلة القطع المكافئ. ارجع إلى المناقشة أعلاه.

1 أوجد معادلة المستقيم m .
 $x - y + (b - a) = 0$

2 استعمل معادلتين المستقيمين m و d لتوضيح أن إحداثيي النقطة D هما $D(a, b) = \left(\frac{x - y - 2}{2}, \frac{y - x - 2}{2} \right)$
من معادلة المستقيم m : $-a + b = -x + y$
من معادلة المستقيم d : $a + b = -2$ ؛ اطرح لتحصل على $a = \frac{x - y - 2}{2}$
وارجع لتحصل على $b = \frac{y - x - 2}{2}$

3 استعمل إحداثيات D, P ، والمعادلة $(PD)^2 = (PD)^2$ لإيجاد معادلة القطع المكافئ الذي يوزر إحداثيه d .
 $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$

4 اكتب قطع مكافئ محور فائق، أوجد معادلة محور التماثل للقطع المكافئ، المتار إليه أعلاه، ووزر إحداثيات a لأن $y = x$ ، و b لأن $y = x + 1$ ، و c لأن $y = x + 1$ ، و d لأن $y = x + 1$.

5 استعمل إحداثيات a, b لإيجاد إحداثيي رأس القطع المكافئ، ووزر إحداثيات $(0, 0)$ ؛ $(0, 0)$ نقطة منتصف المسافة بين النقطتين F و F' والمستقيم d .

الفصل 14: انقطاع الجبروتية والمتادلات الوسيطة

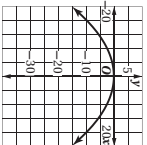
9

الصفحة: اثبات التناوبي

التاريخ: _____

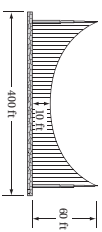
الاسم: _____

4-1 تدريبات حل المسألة انقطاع الكافئة



4 مثل معنى القطع المكافئ بيانياً.

4 جسون، تبدو السلسلة المعدنية لأحد الجسور المعلقة على شكل قطع مكافئ، والدعامات الرأسية موضحة كما في الشكل الآتي.



أكتب معادلة السلسلة المعدنية.
 $800y = x^2$

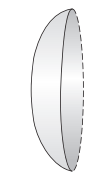
ب أوجد طول الدعامات الرأسية التي تبعد عن المركز 100 قدم.
 $22.5 ft$

الفصل 14: انقطاع الجبروتية والمتادلات الوسيطة

8

الصفحة: اثبات التناوبي

1 عاكسات، يوضح الشكل الآتي مرآة عاكسة على شكل قطع مكافئ، ويمكن تحديد مقطع طولي للمرآة بالمعادلة $16y = x^2$ أو $x^2 = 16y$ ، أوجد المسافة بين الرأس والنبوءة في هذه المرآة.

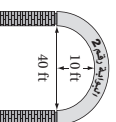


2 قمعان أعصاب، رُمي قمع يحمل شعار الفريق الفائز بعد المباراة في الهواء بواسطة جهاز يسرع ابتدائية $s = 32 ft/s^2 + 32x - 5$ ؛ إذا كانت المعادلة: $-16x^2 = y$ تمثل ارتفاع القمع y (بالقدم) فوق الأرض بعد x ثانية.

أكتب معادلة القطع المكافئ في الصورة القياسية.
 $(x - 1)^2 = -\frac{1}{16}(y - 21)$

ب عاقي ارتفاع يصل إليه القمع؟
 $21 ft$

3 عمارة، أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة إحدى الكليات الجامعية كما في الشكل:



أكتب معادلة القطع المكافئ.
 $x^2 = -40y$

(تتمه)

4-2 تدريبات إعادة التعليم

القطع الناقصة والدوائر

تحديد أنواع القطع المخروطية إذا أُعلنت معادلة قطع مخروطي، فإليك انك أن تحدد نوعه باستعمال خصائص المعادلة. الصيغة القياسية لمعادلة دائرة مركزها (h, k) وطول نصف قطرها r هي: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

اكتب كل معادلة من المعادلات الآتية في الصورة القياسية، ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

مثال

$$a) 4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$$

$$4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$$

$$4(x^2 + 6x + 9) + 9(y^2 - 4y + 4) = -36 + 36 + 36$$

$$\left(-\frac{4}{2}\right)^2 = 4, \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$$

$$4(x+3)^2 + 9(y-2)^2 = 36$$

بالتجليل.

بقسمة الطرفين على 36

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

$$b) \text{أ} كانت صيغة المعادلة هي: $1 = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}$ ، فإن المنحني يمثل قطعًا ناقصًا مركزه $(2, -3)$.$$

$$x^2 - 16x - 8y + 80 = 0$$

$$x^2 - 16x + ? - 8y + 80 = 0$$

$$\left(\frac{16}{2}\right)^2 = 64 \quad (x^2 - 16x + 64) - 8y + 80 - 64 = 0$$

$$\text{حال.} \quad (x-8)^2 - 8(y-2) = 0$$

$$(y-2) = 8(x-8) \quad \text{بجمع الطرفين}$$

$$\text{أ} كان الترتيب على واحد، فإن المنحني يمثل قطعًا ناقصًا مركزًا رأسه $(8, 2)$.$$

التعاريف

اكتب كل معادلة مما يأتي في الصورة القياسية، ثم حدد نوع القطع المخروطي المرتبط بها:

$$1) \quad x^2 + 2y + x^2 - 24x = 24$$

$$2) \quad y^2 + 2y + x^2 - 24x = 24$$

$$3) \quad x^2 + 4x + y^2 - 2y - 49 = 0$$

$$4) \quad x^2 + 4x + y^2 - 2y - 49 = 0$$

$$5) \quad 6x^2 + 24x + 2y - 10 = 0$$

$$6) \quad 4x^2 + 8x + 5y^2 - 30y - 11 = 0$$

$$7) \quad x^2 + 2y + x^2 - 24x = 24$$

$$8) \quad y^2 + 2y + x^2 - 24x = 24$$

$$9) \quad x^2 + 4x + y^2 - 2y - 49 = 0$$

$$10) \quad 6x^2 + 24x + 2y - 10 = 0$$

الفصل 4: القطع المخروطية والمعادلات الوسيطة

11

المصفى: انتابت انتابوي

4-2 تدريبات إعادة التعليم

القطع الناقصة والدوائر

تحليل القطع الناقص والدائرة وتبليغها بيانيًا، القطع الناقص هو المنحني القياسي لمجموعة نقاط المسوي التي يكون مجموع بُعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا، والصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص هي:

$$1 = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} \quad \text{حيث المحور الأكبر أفقي. وفي هذه الحالة } a^2 \text{ هو مقام المحور الذي يجري } x.$$

$$\text{والصورة القياسية هي } 2 = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} \quad \text{عندما يكون المحور الأكبر رأسيًا.}$$



$$\text{وفي هذه الحالة فإن } a^2 \text{ هي مقام المحور الذي يجري } y \text{، وفي كلتا الحالتين يكون } c^2 = a^2 - b^2.$$

$$\text{المعادلة في الصورة القياسية:} \quad \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

مثال

$$9 = b^2, c^2 = 25 - 9 = 16, a^2 = b^2 - c^2 = 9, \text{ إذن } a = 3, c = 4, b = 5, \text{ استعمال هذه القيم لتحديد رأسي القطع الناقص وعرضه، بما أن } a^2 \text{ مقام المحور الذي يجري } y \text{ فإن المحور الأكبر يوازي محور } y.$$

$$\text{رأسي:} \quad (h, k) \quad (-2, 1)$$

$$\text{البؤرتان:} \quad (h, k \pm c) \quad (-2, 5), (-2, -3)$$

$$\text{الرؤسان:} \quad (h, k \pm a) \quad (-2, 6), (-2, -4)$$

$$\text{المحور الأكبر:} \quad (h \pm a, k) \quad (-5, 1), (1, 1)$$

$$\text{المحور الأصغر:} \quad x = h \quad \text{وطوله } 2a = 10$$

$$\text{المحور الأصغر:} \quad y = k \quad \text{وطوله } 2b = 6$$

$$\text{تعاريف}$$

حدد خصائص القطع الناقص المبطة معادلته في كل مما يأتي، ثم مقل معادلته بيانيًا.

$$1) \quad \frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$2) \quad \frac{(x+5)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{64} = 1$$

$$3) \quad \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{64} = 1$$

$$4) \quad \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 2$$

$$5) \quad \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{64} = 1$$

$$6) \quad \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{64} = 1$$

$$7) \quad \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{64} = 1$$

$$8) \quad \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{64} = 1$$

$$9) \quad \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{64} = 1$$

$$10) \quad \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{64} = 1$$

الفصل 4: القطع المخروطية والمعادلات الوسيطة

10

المصفى: انتابت انتابوي

التاريخ:

الاسم:

4-2 التدرجات الإثرائية

عائلة منحنيات لامي

مجموعة المنحنيات التي تكون معادلاتها في الصورة: $\left| \frac{x^n}{a} \right| + \left| \frac{y^n}{b} \right| = 1$ ، حيث: $a \neq 0, b \neq 0, n > 0$.
تسمى عائلة منحنيات لامي، نسبة إلى عالم الفيزياء والرياضيات الفرنسي لامي (Lamé(1795-1870).

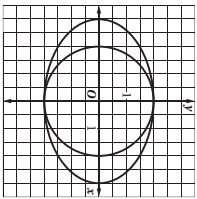
1) مثل كلاً من المعادلتين الآتيتين بيانياً، وحدد نوع المنحنى الناتج في كل مرة:

$$a) \left| \frac{x^2}{2} \right| + \left| \frac{y^2}{2} \right| = 1$$

دايرة

$$b) \left| \frac{x^2}{3} \right| + \left| \frac{y^2}{2} \right| = 1$$

قطع ناقص



2) بناء على سؤال 1، هل تقسم مجموعة منحنيات لامي الدائرة والقطع الناقص.

نعم

3) استعمل قيم a, b, n المعطاة في كل من الحالات الآتية في معادلة عائلة منحنيات لامي، واكتب المعادلة الناتجة في كل حالة، ثم مقلها بيانياً على الشبكة البيانية المجاورة.

$$a) a = 2, b = 3, n = 4$$

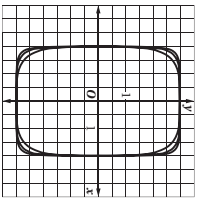
$$\left| \frac{x^4}{2} \right| + \left| \frac{y^4}{3} \right| = 1$$

$$b) a = 2, b = 3, n = 6$$

$$\left| \frac{x^6}{2} \right| + \left| \frac{y^6}{3} \right| = 1$$

$$c) a = 2, b = 3, n = 8$$

$$\left| \frac{x^8}{2} \right| + \left| \frac{y^8}{3} \right| = 1$$



4) ما الشكل الذي يقترب إليه منحنى $\left| \frac{x^n}{2} \right| + \left| \frac{y^n}{3} \right| = 1$ لقيم n الصحيحة الموجبة الزوجية الكبيرة؟
مستطيل طوله 6 وعرضه 4 وحدات، ومركزه نقطة الأصل.

الفصل 4: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

13

الصفحة: اثنتان اثنا عشر

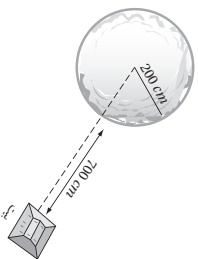
التاريخ:

الاسم:

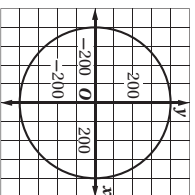
4-2 تدريبات حل المسألة

القطوع الناقصة والدوائر

4) بركة: يزداد طول نصف قطر بركة لتجميع الماء المتدفق من أرض مجاورة بمعدل 100 cm لكل يوم على نحو ما هو موضح أدناه.



a) مثل بيانياً الدائرة التي تمثل الماء على الشكل أعلاه، واوجد البعد بين مركز البركة والبيت.



900 yd

b) إذا استمرت بركة الماء في الاتساع بالمعدل نفسه، فبعد كم يوم يصل الماء إلى البيت؟
7 أيام

c) اكتب معادلة بركة الماء في الوقت الحاصل ومعادلتها عندما يصل الماء إلى البيت.

$$x^2 + y^2 = 40000;$$

$$x^2 + y^2 = 810000$$

الفصل 4: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

12

الصفحة: اثنتان اثنا عشر

1) صالة التيمس، أحد المبانى الحديثة، توجد صالة تيمس صوتي على شكل قطع ناقص، طول الصالة 84 m عندما وعرضها 46 m فقط.

a) اكتب معادلة تيمس على شكل الصالة، مبركاً مركزها عند نقطة الأصل والمحور الأكبر أفقي.

$$x^2 + \frac{y^2}{1764} = 1$$

b) أوجد موقعي البورتين.

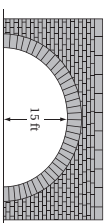
2) نوحات، لوحة على شكل قطع ناقص. إذا كان الاختلاف المركزي $0,60$ ، وطول اللوحة 48 cm

a) فاكتب معادلة القطع الناقص، إذا كان مركز اللوحة عند نقطة الأصل.

$$x^2 + \frac{y^2}{576} + \frac{y^2}{368.64} = 1$$

b) ما عرض اللوحة؟
 38.4 cm

3) نفق: مدخل نفق على شكل نصف قطع ناقص كما في الشكل.



a) اكتب المعادلة التي تمثل القطع الناقص.

$$x^2 + \frac{y^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$$

b) احسب ارتفاع النفق فوق نقطة تبعد 10 ft عن المركز.
 $\approx 13 \text{ ft}$

(تتمه)

4-3 تدريبات إعادة التعليم

القطع الزائده

كتابة معادلة قطع زائد اذا علم بعض خصائصه، يمكن استعمال خصائص موجبة لتحديد معادلة القطع الزائد.

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص التالية: رأساه $(-2, -4)$ ، $(2, -2)$ ، وبؤرتاه

$(-6, -2)$ ، $(4, -2)$.

يا أن احصائي y متساويان للراسين، فإن المحور القاطع أفقي، أو جد المركز، وقيم c ، b ، a .

مثال

تقطعة منتصف القطعة المستقيمة الواقعة بين الراسين أو البؤرتين

المركز $(-2, -1)$

المسافة بين أي من الراسين والمركز.

$$a = \sqrt{(-4+1)^2 + (-2+2)^2} = 3$$

المسافة بين أي من البؤرتين والمركز.

$$c = \sqrt{(4+1)^2 + (-2+2)^2} = 5$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = 4$$

بأن المحور القاطع أفقي، فإن a^2 تربط بالمحور x^2 ؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي: $1 = \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16}$.

تعاريف

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المطاة في كل ما يأتي:

1 الرأسان هما $(0, 4)$ ، $(0, -4)$ ، وطول المحور الرافق 6

$$\frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{9} = 1$$

2 الرأسان هما $(-6, 3)$ ، $(3, -2)$ ، ومحط التقارب هما $y = \frac{4}{5}x - \frac{22}{5}$ ، و $y = \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$.

$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$$

3 الرأسان هما $(2, 10)$ ، $(2, 6)$ ، والبؤرتان هما $(2, 12)$ ، $(4, 2)$

$$\frac{(x-8)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$$

الفصل 4: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

15

الصفحة: اثباتك التاموي

4-3 تدريبات إعادة التعليم

القطع الزائده

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانياً القطع الزائد هو المحل الهندسي لجميع نقاط المستوى التي يكون الفرق

المطلق بين بعديها من نقطتين ثابتين (البؤرتين، مقداراً ثابتاً) والصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد

هي: $1 = \frac{(x-k)^2}{b^2} - \frac{(y-h)^2}{a^2}$ عندما يكون المحور القاطع أفقياً، والصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{(x-k)^2}{a^2} - \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$$

وفي كلتا الحالتين يكون: $c^2 = a^2 + b^2$.

مثال

حدد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $1 = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4}$ ، ثم مثل منحناه بيانياً.

المعادلة بالصورة القياسية: كل من h و k يساوي صفراً، لذا فإن المركز عند تقاطع المحورين، ولذا كان المحور الرافق x ، فإن المحور القاطع رأسي، أو جد قيم c ، b ، a ، واستعملها لتحديد الراسين والبؤرتين.

بأن $a^2 = 16$ و $b^2 = 4$ ، فإن $a = 4$ و $b = 2$. استعمل قيمتي a و b لإيجاد قيمة c .

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 4^2 + 2^2$$

$$c = 4^2 + 2^2$$

$$c = \sqrt{20}$$

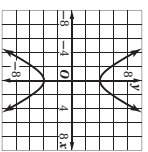
حدد خصائص القطع الزائد.

المركز: $(0, 0)$

البؤرتان: $(h, k \pm c)$ $(0, \sqrt{20})$ ، $(0, -\sqrt{20})$

الرأسان: $(0, 4)$ ، $(0, -4)$ ، محط التقارب: $y = 2x$ ، $y = -2x$

أشنى جدول قيم لتمثيل منحنى القطع الزائد.



x	y
-2	-5.7, 5.7
-1	-4.5, 4.5
0	-4, 4
1	-4.5, 4.5
2	-5.7, 5.7

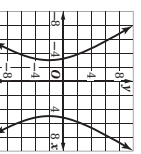
تعاريف

حدد خصائص القطع الزائد المطاة معادلته في كل ما يأتي، ثم مثله بيانياً.

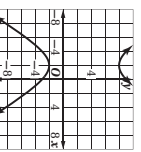
$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$$

الافتتاح: أفقي

المركز: $(1, -2)$ الرأسان: $(-3, -2)$ ، $(5, -2)$
البؤرتان: $(-2, -2\sqrt{13})$ ، $(2, -2\sqrt{13})$
محط التقارب: $(x-1) \pm \frac{3}{2}y$


الافتتاح: رأسي

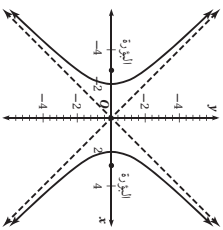
المركز: $(3, -2)$ الرأسان: $(-2, -2)$ ، $(-2, 8)$
البؤرتان: $(-2, 3 \pm \sqrt{34})$
محط التقارب $(x+2) \pm \frac{5}{3}(y-3)$


الفصل 4: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

14

الصفحة: اثباتك التاموي

4-3 التغيرات الإثرائية النورتان المتحركتان



تذكر أن معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومحوره القطع أفقي هي:
 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ والبروتان هما: $(a, 0)$ ، $(-a, 0)$ ، بحيث $a^2 = a^2 + b^2 = 1$
 والراسان هما: $(0, -b)$ ، $(0, b)$ ، ومداننا نحكي التقارب هما:
 $y = \pm \frac{b}{a}x$ والشكل المجاور يمثل منحني هذا القطع الزائد.
 ماذا يحدث فلذا المنحني عندما تزيد قيمة c بلا حدود أو تقل بلا حدود؟

استعمل القطع الزائد الفشار إليه، أهداه للإجابة عن الأسئلة 1-4.

1) اكتب دليلاً مقنعاً لتوضح أنه عندما تقترب c من 0، فإن البروتان والراسان والبروك للقطع الزائد، تصبح جميعاً نقطة واحدة.

أيا كانت $a < a < 0$ ، وبتقريب c من 0، فإن a تقترب من 0؛ لذا:

فإن الإحداثي x للبروتان والراسان يقترب من 0، وهو الإحداثي x للبروك.
 وثبات الإحداثيات y متساوية، فإن النقاط تصبح نقطة واحدة.

2) استعمل النسبة البينية أو حاسماً لتنبأ التقاطع: $x^2 - y^2 = 0.01$ ، $x^2 - y^2 = 1$ ، $x^2 - y^2 = x^2$ ، يتبنا، حيث تتعلق هذه القطع الزائدة بقم متناظرة لـ a ، وصف التغيرات في المنحنيات، وما الشكل الذي تقترب إليه عندما تقترب c من 0؟

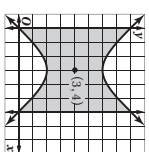
يتضح خطاً التقارب كما هما، ولكن فرض المنحني يصبحان أكثر حداً عند الراسين، ويقتربان أكثر من المستقيمين $x = y$ و $x = -y$

3) افترض أن a تبقى ثابتة، وأن c تقترب من a الايجابية، وكيف يتغير شكل القطع الزائد؟

يبقى الراسان عند $(0, a)$ ، $(0, -a)$ ، ولكن القوسين يصبحان أكثر قرباً إلى الخط $y = a$ ،
 ويقتربان من المستقيمين $x = -a$ و $x = a$

4) افترض أن b تبقى ثابتة، وأن c تقترب من a الايجابية، وكيف يتغير شكل القطع الزائد؟
 يرتد الراسان إلى ما لا نهاية، ويصبح قوساً المنحني مستقيماً ويبعد جداً عن البروك،
 وعندما تقترب c من a الايجابية، فإن المنحني يتبنا إلى التلاشي.

4-3 تدريبات حل المسألة القطع الزائدة



4) منتزهات، حضان من حدود منطقة لعب عشبية على شكل قطع زائد كما هو موضح في الشكل أدناه:

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يمثل حدود منطقة اللعب.

$$\frac{(x-3)^2}{3} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

5) إذا كانت كل وحدة على المسير الإحداثي تمثل 3.3، فما أضيض عرض منطقة اللعب؟

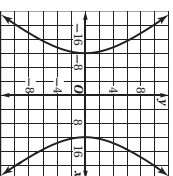
12ft

6) طلال، يكون مسار ظل موثر الساعة الشمسية على شكل قطع زائد غالباً.

اكتب معادلاتي القطع الزائد بالصورة القياسية، إذا كان المركز يقع في نقطة الأصل، والمسار المار بالحدود القاطع يبعد 2 mm عن إحدى البروتين، و 12 mm عن البروك.

$$\frac{x^2}{52} - \frac{y^2}{144} = 1; \frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{52} = 1$$

7) مثل أحد القطعين الزائدين يتبناً، إجابة ممكنة:

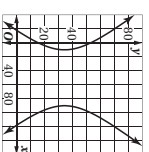


1) زلازل، المركز السطحي للزلازل يقع على أحد قوسي منحني القطع الزائد الذي معادلته:

$$\frac{(x-50)^2}{1600} - \frac{(y-35)^2}{2500} = 1$$

راسيات الزلازل عند البروتين.

ا) مثل القطع الزائد يتبناً،

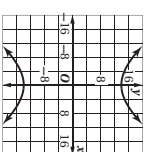


ب) أوجد إحداثيات موقعي راسيتي الزلازل. $(-14, 35)$, $(114, 35)$

2) طلال، يسقط ضوء مصباح على جدار فيتكون ظل حدوده على شكل قطع زائد معادلته:

$$\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{196} = 1$$

ا) مثل القطع الزائد يتبناً.



ب) اكتب معادلاتي نحني التقارب.

$$y = \pm \frac{14}{11}x$$

ج) أوجد الاختلاف البروكي.

$$\frac{\sqrt{317}}{14}$$

التاريخ: _____

الاسم: _____

(تتمه)

4-4 تدريبات إعادة التعليم

تحديد أنواع القطع المخروطية ودورتها

دوران القطع المخروطية يمكن كتابته المعادلة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ في المستوى xy في الصورة: $0 = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ في المستوى xy ، وذلك بتدوير محورَي الإحداثيات بزوايا θ ، ويمكن إيجاد المعادلة في المستوى $x'y'$ باستعمال الصيغتين:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, y = y' \cos \theta + x' \sin \theta$$

مثال

استعمل $\theta = 45^\circ$ لكتابة الصيغة القياسية للمعادلة: $x^2 - 2xy - 4y^2 + \frac{1}{2} = 0$ في المستوى $x'y'$. وحدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

القطع المخروطي هو قطع زائد، لأن $4AC > 0$ ، $B^2 - 4AC > 0$ أو نجد معادلتَي x, y .

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y'$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية.

$$x^2 - 2xy - 4y^2$$

$$- 4y^2$$

$$+ \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2} \right) - 4 \left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2}(x')^2 - x'y' + \frac{1}{2}(y')^2 - (x')^2 + (y')^2 - 2(x')^2 - 4x'y' - 2(y')^2 + \frac{1}{2} = 0$$

بإيجاد مشترك ذات

الحددين.

بالتبسيط.

$$-\frac{5}{2}(x')^2 - 5x'y' - \frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{2} = 0$$

نتايرين

استعمل قيمة θ المطاوعة، لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة من المعادلتين الآتيتين في المستوى $x'y'$ ، ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

$$8x^2 - 5y^2 = 40, \theta = 30^\circ \quad (2)$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 2, \theta = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$19(x)^2 - 26\sqrt{3}xy -$$

$$(x)^2 + (y)^2 - 2\sqrt{2}x' +$$

$$7(y)^2 = 160$$

$$2\sqrt{2}y' - 2 = 0$$

قطع زائد

دائرة

الانصاف، انصاف التناوب

19

الانصاف، انصاف التناوب

التاريخ: _____

الاسم: _____

4-4 تدريبات إعادة التعليم

تحديد أنواع القطع المخروطية ودورتها

تحديد أنواع القطع المخروطية بإمكاننا أن نحدد نوع القطع المخروطي عندما تكون معادلته معطاة بالصورة: $B^2 - 4AC < 0, A \neq C, B \neq 0$. باستعمال المميز $B^2 - 4AC < 0, B = 0, A = C$ دائرة

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0, A \neq C, B \neq 0$
دائرة	$B^2 - 4AC < 0, B = 0, A = C$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

مثال

حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها في الصورة القياسية:

$$(a) \quad 2x^2 + 6y^2 - 8x + 12y - 2 = 0$$

$$(b) \quad 2x^2 + 6y^2 = 0, A = 2, B = 0, C = 6$$

$$(c) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(d) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(e) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(f) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(g) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(h) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(i) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(j) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(k) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(l) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(m) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(n) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(o) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(p) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(q) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(r) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(s) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(t) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(u) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(v) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(w) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(x) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(y) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(z) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(aa) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(ab) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(ac) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(ad) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(ae) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(af) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(ag) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(ah) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

$$(ai) \quad 6x^2 + 6y^2 = 0, A = 6, B = 0, C = 6$$

الانصاف، انصاف التناوب

18

الانصاف، انصاف التناوب

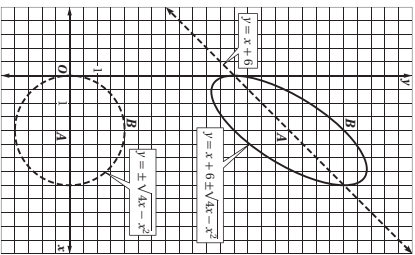
التاريخ:

الاسم:

4-4 التمثيل البياني بإضافة الإحداثي y

تمثيل منحنيات معادلات القطع المكافئ والنقطة والزاوية الثالثة بالنسبة للمحورين x, y ، أكثر صعوبة مقارنة بمنحنيات المعادلات التي درسناها.

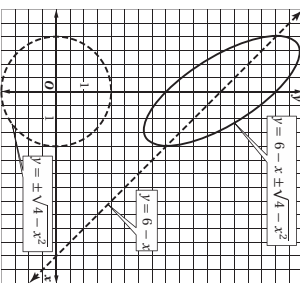
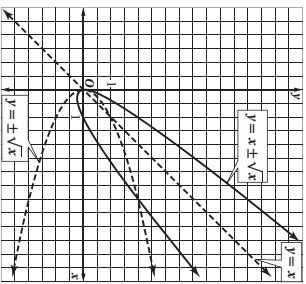
وعلاوة على ذلك، نستعمل التمثيل البياني للمعادلتين: يستعملنا لإيجاد التمثيل البياني لمعادلات أكثر تعقيداً. فمثلاً، يمكن الحصول على معنى القطع الناقص في الشكل المجاور بإضافة الإحداثي y لكل نقطة على الدائرة، إلى الإحداثي y لكل نقطة متطابقة من المستقيم.



مثل كل من المعادلتين الأتيتين بيانياً، ثم حدد نوع المنحنى لكل قفل:

(1) $y = x \pm \sqrt{x}$

(2) $y = 6 - x \pm \sqrt{4 - x^2}$



قطع مكافئ

قطع ناقص

استعمل ورقة بيانية منقسمة؛ لتمثيل كل من المعادلتين الأتيتين بيانياً، ثم حدد نوع المنحنى لكل قفل:

(3) $y = -2x \pm \sqrt{7 - x^2}$

(4) $y = 2x \pm \sqrt{4 - x^2}$

قطع مكافئ

قطع ناقص

انظر رسوم الطلاب.

انظر رسوم الطلاب.

الفصل 14: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

21

الصفحة 1: اثبات التناوب

التاريخ:

الاسم:

4-4 تدريبات حل المسألة

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

- (3) صورة: ترسم سداً مموراً تقطع مكافئاً بعدد دورانها، وترى أن قفل القطع $(4 - y)^2 = 12(x - 3)^2$ بيانياً، إذا دار بزاوية 45° في المستوى xy .

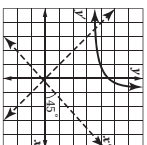
(a) أوجد رأس القطع في المستوى xy .

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2} \right)$$

(b) أوجد معادلة محور التماثل في المستوى xy .

$$y = 3\sqrt{2} - x$$

(c) ارسم المنحنى في المستوى xy .



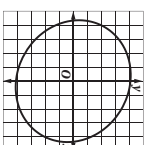
- (4) منقطع؛ إذا دار قطع زائد 40° في اتجاه عقارب الساعة، فما قياس الزاوية اللازمية للدورانه حتى يعود إلى موقعه الأصلي؟

(5) أشكال: يمكن تمثيل مقطع من مرآة عاكسة بالمعادلة:

$$100 = 2y^2 + 13xy + 25x^2$$

الذي يمثله المرآة العاكسة.

قطع ناقص

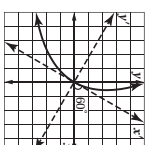


- (1) اتصالات: إذا كانت معادلة مقطع عرضي لطبق قمر اصطناعي بعد دورانه بزاوية قياسها 60° هي $x^2 = \frac{1}{8}y^2$

(a) اكتب المعادلة في المستوى xy .

$$\frac{\sqrt{3}}{32}x^2 + \frac{3}{32}xy + \frac{3}{32}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0$$

(b) مثل المعادلة بيانياً.



- (2) ناقص الزوجية: افترض أن معادلة ناقص حركة السيارة على شكل قطع ناقص بعد دورانه بزاوية 60° في المستوى xy هي: $(y^2)^2 = 1 + \frac{y^2}{20}$.

(a) اكتب معادلة القطع الناقص في المستوى xy .

$$-320 = 19y^2 + 2\sqrt{3}xy + 17x^2$$

(b) مثل المعادلة بيانياً.

الفصل 14: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

20

الصفحة 1: اثبات التناوب

التاريخ: _____

الاسم: _____

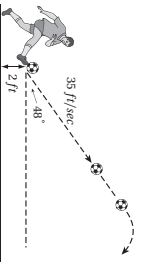
4-5 تدريبات إعادة التعليم المعادلات الوسيطة

حركة المقذوفات تستعمل المعادلات الوسيطة غالباً في معادلات حركة المقذوفات، وإذا قُذف جسم بزاوية غير قائمة، تُمثل θ على الأفق وسرعة ابتدائية v_0 ، وبالتالي يمكن إيجاد المسافة الأفقية x بالمعادلة: $x = tv_0 \cos \theta$ والمسافة الرأسية y بالمعادلة: $h_0 + v_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 = y$ ، حيث g ثابت الجاذبية الأرضية، و t الزمن، و h_0 الارتفاع الابتدائي.

كل واحد كرة قدم سرعة ابتدائية مقدارها 35 ft/sec ، وزاوية تُميل 48° على الأفق، إذا كان ارتفاع الكرة قديماً عند ركوبها، في المسافة الأفقية التي تقطعها قبل ارتطامها بالأرض؟

خطوة 1: ارسم شكلاً يوضح الوقت.

مثال



خطوة 2: اكتب معادلة وسيطة لموقع الكرة الرأسية.

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الوسيطة لموقع الكرة الرأسية} \\ y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0 \\ v_0 = 35, \theta = 48^\circ, g = 32, h_0 = 2 \\ = t(35) \sin(48) - \frac{1}{2}(32)t^2 + 2 \end{aligned}$$

خطوة 3: مثل معادلة الموقع الرأسية، يأتياً، أو وحدها نقطة تقاطع المنحنى مع $y = 0$ باستخدام الحاسبة البيانية. فكل من القيمة 1.7 ثانية تقريباً.

خطوة 4: حدد موقع الكرة الأفقي عند 1.7 ثانية.

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الوسيطة للموقع الأفقي} \\ x = tv_0 \cos \theta \\ v_0 = 35, \theta = 48^\circ, t = 1.7 \\ \approx 39.8 \end{aligned}$$

يستعمل الآلة الحاسبة.

سقطت الكرة مسافة أفقية مقدارها 39.8 ft قبل ارتطامها بالأرض.

تقارنين

- 1) كل خالد كرة بسرعة ابتدائية مقدارها 28 ft/sec ، وزاوية تُميل على الأفق 56° من ارتفاع 4 أقدام، في المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة قبل أن ترتطم بالأرض؟
25 ft تقريباً
- 2) ضرب صموئيل كرة تنس أرضية بسرعة ابتدائية مقدارها 38 ft/sec ، وزاوية تُميل على الأفق 42° من ارتفاع 1.5 أقدام، في المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة إذا ما عبرتها الحظم؟
46.6 ft تقريباً

الفصل 4: التقطع الجبرية والمعادلات الوسيطة

23

المصف: اناثات اناثاوي

التاريخ: _____

الاسم: _____

4-5 تدريبات إعادة التعليم المعادلات الوسيطة

التمثيل البياني للمعادلات الوسيطة؛ تُستعمل المعادلات الوسيطة لوصف الكين (الأفقية والرأسية) بالمعادلة، والتغير الوسيط قيمة اختيارية تكون عادة إما الزمن وإما قياس الزاوية.

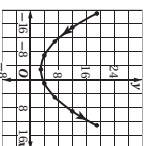
مثل بيانياً المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطتين على الفترة المعطاة:

$$x = -3 + 4t, y = t^2 + 3, -4 \leq t \leq 4$$

مثال 1

كُن جنسلاً من بعض قيم t في الفترة $-4 \leq t \leq 4$ ، ثم مثل بيانياً النقطة (x, y) لكل قيمة لـ t ، ثم صل بين النقاط ببعضى.

t	x	y
-4	-3	-2
-3	-2	-1
-2	-1	0
-1	0	1
0	1	2
1	2	3
2	3	4
3	4	7
4	7	13
5	11	19
6	15	27
7	19	37



اكتب المعادلتين الوسيطتين $x = 4t - 2, y = t^2 + 1$ بالصورة الديكارية.

مثال 2

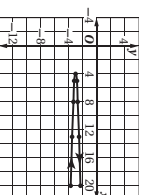
$$\begin{aligned} \text{المعادلة الأولى} \\ x = 4t - 2 \\ \text{الحل بالنسبة لـ } t \\ \text{عوض } x + 2 \text{ بدلاً من } t \text{ في المعادلة الثانية.} \\ y = \left(\frac{x+2}{4}\right)^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ربح } \frac{x+2}{4} \\ \text{بمط} \\ = \frac{x^2 + 4x + 4}{16} - 2 \\ = \frac{x^2}{16} + \frac{x}{4} - \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\text{المعادلة الديكارية هي: } y = \frac{x^2}{16} + \frac{x}{4} - \frac{7}{4}$$

تقارنين

- 1) مثل بيانياً المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطتين على الفترة المعطاة: $-4 \leq t \leq 4, y = \frac{t}{6} - 3, x = t^2 + 4$



- 2) اكتب المعادلتين الوسيطتين: $y = \sqrt{t} + 2, x = \sqrt{t} + 2$ بالصورة الديكارية. $y = \sqrt{3x + 2}$

الفصل 4: التقطع الجبرية والمعادلات الوسيطة

22

المصف: اناثات اناثاوي

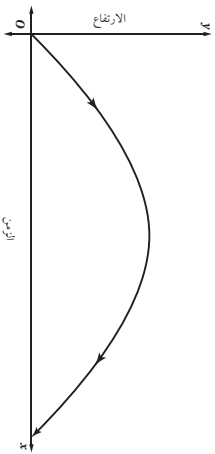
التاريخ:

الاسم:

التمرينات الإثرائية

4-5

يشل مسار قذيفة بعد انطلاقها ففما مكانها عند تحياله بيانياً على مستوى إحداثي.



على افتراض أن الجاذبية الأرضية هي القوة الوحيدة المؤثرة في القذيفة، ومعادلة مسار قذيفة في المستوى الإحداثي هي:

$$y = -\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right)x^2 + (\tan \alpha)x$$

حيث g مسارع الجاذبية الأرضية ويساوي 9.8 m/s^2 أو 32 ft/s^2 ، و v_0 السرعة الابتدائية، و α زاوية انطلاق القذيفة مع الأفق.

اكتب معادلة مسار قذيفة تنطلق بزاوية 10° مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها 120 m/s .

مقال

$$y = -\left(\frac{9.8}{2(120)^2 \cos^2 10^\circ}\right)x^2 + (\tan 10^\circ)x$$
$$y = -0.00035x^2 + 0.18x$$

أوجد معادلة المسار لكل من القذيفتين الآتيتين:

- 1) أطلقت قذيفة بزاوية مقدارها 80° مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها 200 ft/s .
2) أطلقت قذيفة بزاوية مقدارها 40° مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها 150 m/s .
 $y = -0.013x^2 + 5.67x$
 $y = -0.00037x^2 + 0.84x$

الفصل ١٠٤ القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

25

الصفحة: اثنتان اثناوي

التاريخ:

الاسم:

تمرينات حل المسألة

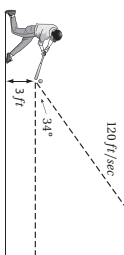
4-5

المعادلات الوسيطة

5) جوف، يضرب بالبال كرة جوف بكرة بسرعة ابتدائية مقدارها 100 ft/s ، و بزاوية 39° مع الأفق.

- a) اكتب معادلات وسيطة لمسار الكرة.
 $x = 100t \cos 39^\circ$
 $y = 100t \sin 39^\circ - 16t^2$
b) أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.
 61.9 ft تقريباً

6) كرة التيسول، يضرب سلات كرة التيسول بسرعة ابتدائية مقدارها 120 ft/s من ارتفاع 3 أقدام، وبزاوية 34° مع الأفق.



- a) ما المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة قبل أن ترتطم بالأرض؟
 421.6 ft
b) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟
 73.36 ft
c) إذا كان ارتفاع السياج 8 أقدام، وبعد 400 قدم من موقع سلات، فهل تجاز الكرة السياج؟ وضح ذلك.

إجابة ممكنة: نعم، عندما تكون المسافة الأفقية 400 ft ، فإن ارتفاع الكرة يكون 15.4 ft فوق الأرض، وعليه فإنها تجتاز السياج.

الفصل ١٠٤ القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

24

الصفحة: اثنتان اثناوي

1) فيزياء: أطلق صاروخ بسرعة ابتدائية مقدارها 5 m/s ، وبزاوية 8° مع الأفق في المسافة الأفقية التي يقطعها الصاروخ بعد 0.4 s .

1.98 m

2) القروض الطائر، تلعب سميرة وسارة لعبة القرض الطائر، حيث ترمي سميرة القرض إلى سارة بسرعة ابتدائية مقدارها 38 ft/s ، وبزاوية 28° مع الأفق، ومن ارتفاع 4 أقدام، وقد كانت سارة تبعد عن سميرة مسافة 40 قدماً.

- a) ما ارتفاع القرض عن الأرض عندما يصل إلى سارة؟
 2.53 ft
b) ما أقصى ارتفاع للقرض الطائر؟
 8.97 ft

3) كرة التنس: يضرب ريد كوك تشيس بسرعة ابتدائية مقدارها 42 ft/s في الثانية، وبزاوية 16° مع الأفق، ومن ارتفاع معين، إذا كانت المسافة بينه وبين الشبكة 20 قدماً، وارتفاع الشبكة 3 أقدام، فهل تتخطى الكرة الشبكة؟

نعم؛ ارتفاع الكرة فوق الأرض يساوي 3.8 ft عند المسافة 20 ft .

4) كرة سلة: يرمي محمد كرة سلة بسرعة ابتدائية مقدارها 28 ft/s ، وبزاوية 60° مع الأفق، إذا رمى محمد الكرة من ارتفاع 5 أقدام، فكم عدد معادلتين لتحديد المسافة الرأسية والمسافة الأفقية للكرة.

- معادلة المسافة الرأسية:
 $y = f(28) \sin(60) - 16t^2 + 5$
معادلة المسافة الأفقية:
 $x = f(28) \cos(60)$