حل امتحان الرياضيات للثالث الثانوي العلمي
الدورة الأولى 2024

أولاً ، السؤال الأول:

① $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

② $x = -\frac{3}{2}$

③ $]-2, 0[$

④ $f(D) = [-1, 2]$

⑤ $]-\infty, -\frac{3}{2}]$

رهام الشامي

السؤال الثاني:

$A(1,1,1)$ $B(2,0,3)$

① $\vec{u}_{(AB)} = \vec{AB}(1, -1, 2)$

$$AB: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \quad : t \in R \\ z = 2t + 1 \end{cases}$$

② $R = OA = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

معادلة الكرة

$x^2 + y^2 + z^2 = 3$

① نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB) في معادلة الكرة

$(t+1)^2 + (-t+1)^2 + (2t+1)^2 = 3$

$t^2 + 2t + 1 + t^2 - 2t + 1 + 4t^2 + 4t + 1 = 3$

$6t^2 + 4t = 0 \Rightarrow 2t(3t+2) = 0$ إما $t = 0$

ومنه نقطة التقاطع الأولى $A(1,1,1)$

أو $t = -\frac{2}{3} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} \\ y &= +\frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \\ z &= -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3} \end{aligned}\right\} A'\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

<u>السؤال الثالث</u> : $(E): y'-2y=-4x+6$

1) لو $f(x)=ax+b$ ⇐ $f'(x)=a$

نعوض في (E) $a-2ax-2b=-4x+6$

$-2ax+(a-2b)=-4x+6$

بالمطابقة

$-2a=-4 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$a-2b=6 \Rightarrow \boxed{b=-2}$ $\Big\}$ $f(x)=2x-2$

2) $(F): y'-2y=0 \Rightarrow y'=2y$

الحل $y=ke^{2x}$

3) $h(x)=2x-2+ke^{2x}$

$h'(x)=2+2ke^{2x}$

نعوض في (E) $2+\cancel{2ke^{2x}}-4x+4-\cancel{2ke^{2x}}=-4x+6$

محققة $-4x+6=-4x+6$

⇐ $h(x)$ حل المعادلة التفاضلية (E)

<u>السؤال الرابع</u>: ثلاث مجموعات من المستقيمات المتوازية

$\binom{4}{2}\binom{3}{2}+\binom{4}{2}\binom{2}{2}+\binom{3}{2}\binom{2}{2}$

<<< : المستقيمات — المستقيمات >> — المستقيمات >>> — المستقيمة > — المستقيمات >> — المستقيمات >

$=(6)(3)+(6)(1)+(3)(1)$

$=18+6+3=27$

(2)

السؤال الخامس:

$t_{n+1} = \frac{t_n+4S_n}{5}$, $t_0=1$ $\qquad$ $S_{n+1} = \frac{t_n+S_n}{2}$, $S_0=10$

$w_n = S_n - t_n$

(1)

$$w_{n+1} = S_{n+1}-t_{n+1} = \frac{t_n+S_n}{2} - \frac{t_n+4S_n}{5} = \frac{5t_n+5S_n-2t_n-8S_n}{10}$$

$$= \frac{3t_n-3S_n}{10} = +\frac{3}{10}(t_n-S_n) = -\frac{3}{10}(S_n-t_n) = -\frac{3}{10}w_n$$

ـه w_n هندسية أساسها $-1 < q = -\frac{3}{10} < 1$

ـه $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$

(2)

$$t_{n+1}-t_n = \frac{t_n+4S_n}{5} - t_n = \frac{t_n+4S_n-5t_n}{5} = \frac{4S_n-4t_n}{5}$$

$= \frac{4}{5}(S_n-t_n) \geq 0$ لأن $S_n \geq t_n$

ـه المتتالية t_n متزايدة تماماً. [illegible]

$$S_{n+1}-S_n = \frac{t_n+S_n}{2} - S_n = \frac{t_n+S_n-2S_n}{2} = \frac{t_n-S_n}{2}$$

$= \frac{1}{2}(t_n-S_n) \leq 0$ لأن $t_n \leq S_n$

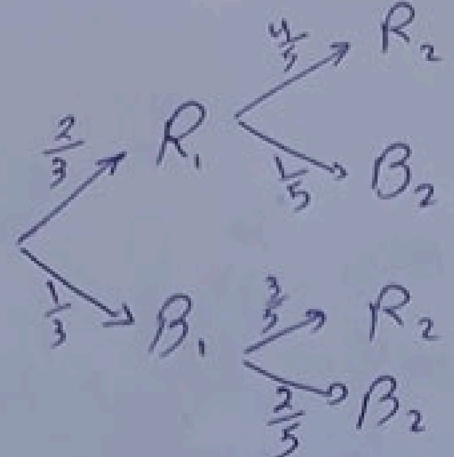
ـه المتتالية S_n متناقصة تماماً.

ومنه المتتاليتين S_n و t_n متجاورتين لأنهما مختلفتان بجهة الاطراد ،

$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty}(S_n-t_n) = 0$

السؤال السابع:

①



②

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{11}{15}$$

③

$$P(B_1 | R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{3}{15}}{\frac{11}{15}} = \frac{3}{11}$$

السؤال الثامن:

$$f(x) = e^{-x} \ln(1+e^{x})$$

①

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \times 0$$ حالة عدم تعيين

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1+e^{x})}{e^{x}}$$

$X = e^{x}$

عندما $x \to -\infty$

فإن $X \to 0$

$$= \lim_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$ (قاعدة)

②

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(1+e^{x}) + \frac{e^{x}}{1+e^{x}} \cdot e^{-x} = -f(x) + \frac{1}{1+e^{x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

③

$$h(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} \quad \frac{g'}{g} \Rightarrow H(x) = -\ln(1+e^{-x})$$

(5) $$f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} - f'(x) \Rightarrow F(x) = -\ln(1+e^{-x}) - f(x) = -\ln(1+e^{-x}) - e^{-x}\ln(1+e^{x})$$

السؤال السادس :

$w = 8$

① $w = 8 = 8e^{2\pi k i}$

② (أ,1) $z^3 = 8$ .. $z_0 = 2$ جذر للمعادلة

نقسم على $z-2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^2+2z+4 \\
z-2 & z^3-8 \\
 & \ominus z^3 \oplus 2z^2 \\
\hline
 & 2z^2-8 \\
 & \ominus 2z^2 \oplus 4z \\
\hline
 & 4z-8 \\
 & \ominus 4z \oplus 8 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$(z-2)(z^2+2z+4) = 0$

اما $z_0 = 2$

أو $z^2+2z+4 = 0$

$\Delta = 4-4(1)(4) = -12$

$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$z_1 = \frac{-2+2\sqrt{3}\,i}{2} = -1+\sqrt{3}i$

$z_2 = \overline{z_1} = -1-\sqrt{3}i$

$a+b+c = 2-1+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i = 0$ ج

(أ,2) $z = re^{i\theta}$ نفرض أن جذور المعادلة من الشكل

ونعوض

$(re^{i\theta})^3 = 8$

$r^3 e^{3i\theta} = 8 = 8e^{2\pi k i}$

انتبه

بالمطابقة $r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$

, $3\theta = 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{2\pi k}{3}$

$k=0 \Rightarrow \theta_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 2e^0 = 2$

$k=1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z_1 = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$k=2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow z_2 = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$

ثانياً : المسألة الأولى :

$$P: 2x-y+z-2=0$$
$$Q: x+y+2z-1=0$$

1)

$\vec{n}_Q(1,1,2)$, $\vec{n}_P(2,-1,1)$

غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستويين P و Q متقاطعين بفصل مشترك d .

$x=t \Rightarrow -y+z=-2t+2$

$y+2z=-t+1$

بالجمع $3z=-3t+3 \Rightarrow z=-t+1$

$\Rightarrow y=2x+z-2=2t-t+1-2=t-1$

$$\Rightarrow d:\begin{cases} x=t \\ y=t-1 \\ z=-t+1 \end{cases} : t\in\mathbb{R}$$

2) R يعامد P و Q $\Leftarrow$ $\vec{n}_R=\vec{u}_d(1,1,-1)$

$\Rightarrow x+y-z+d=0$

$B(0,2,1)\in R \Rightarrow 0+2-1+d=0 \Rightarrow d=-1$

$$\boxed{R: x+y-z-1=0}$$

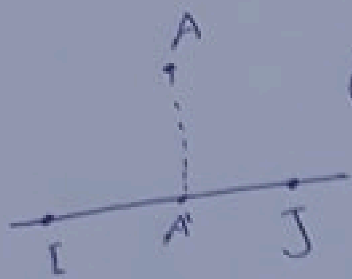
3) نعوض المعادلات الوسيطية للفصل المشترك d في معادلة المستوي R

$t+t-1+t-1-1=0 \Rightarrow t=1$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \quad I(1,0,0) \text{ نقطة التقاطع}$$

$t=1 \Rightarrow I(1,0,0)$ نقطة من d

$t=0 \Rightarrow J(0,-1,1)$ نقطة من d



$A'(x,y,z)$ المسقط القائم للنقطة A على المستقيم ~~(AB)~~ (IJ)

حيث يحقق

$$\vec{AA'}\cdot\vec{IJ}=0$$

$$(x-4,y,z)\cdot(-1,-1,1)=0$$

$$(1)\qquad -x+4-y+z=0$$

وتحقق

$$\vec{IA'}=k\,\vec{IJ}$$

$$(x-1,y,z)=k(-1,-1,1)$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} x&=-k+1\\ y&=-k\\ z&=k \end{aligned}$$

نعوض (2) في (1)

$$k-1+4+k+k=0$$

$$\Rightarrow k=-1 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x&=2\\ y&=1\\ z&=-1 \end{aligned}\right\} A'(2,1,-1)$$

$$\Rightarrow AA'=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

وهو بعد A عن المستقيم d.

(5) $A(4,0,0)$ $I(1,0,0)$ $R=3$

محوره $\vec{OI}$ $\qquad y^2+z^2=9\ ,\ 1\le x\le 4$

المسألة الثانية $]0,+\infty[$

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln x$$

①

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي عند $-\infty$

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$$

متزايد تماما.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

على المجال $]0,+\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماما.

$$0 \in f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$

للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد وبما أن $g(1)=0$

فإن هذا الحل الوحيد هو $a=1$

الجزء

②

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = 1 - \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

$g(x) = 0 \Rightarrow x = 1 : f(1) = 0.$

③

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(4)

$d: y = x - 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_d = \lim_{x \to +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$$

$\Leftarrow$ $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى بجوار $+\infty$

(5)

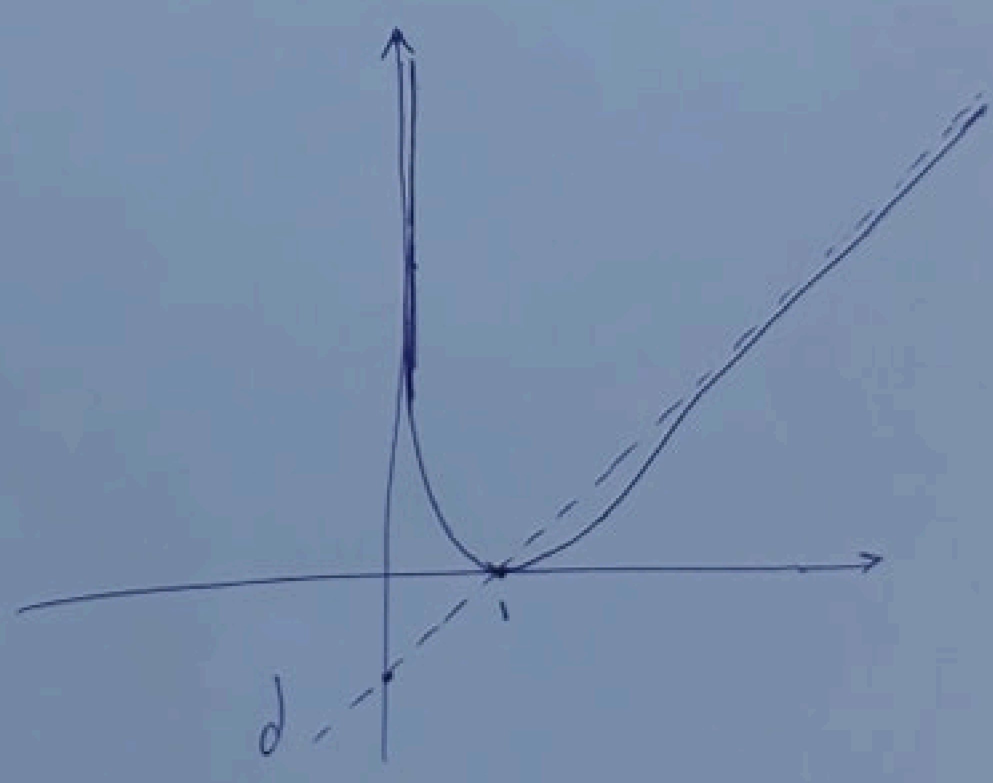
الوضع النسبي، ندرس إشارة الفرق،

$$f(x) - y_d = -\frac{\ln x}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$		$+$	0	$-$	
x	0	$+$		$+$	
الكسر		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C فوق المقارب		C تحت المقارب	

[illegible]

(6)



انتهى الحل.