الجمهورية اليمنية

وزارة التربية والتعليم

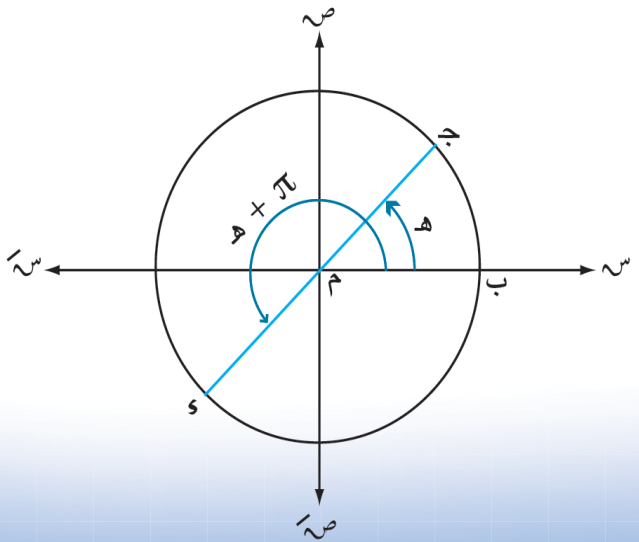
قطاع المناهج والتوجيه

الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

كتاب التمارين

للصف الثاني الثانوي (القسم العلمي)



حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٤٣٦هـ/ ٢٠١٥م

إيماناً منا بأهمية المعرفة ومواكبة لعصر التكنولوجيا تتشرف الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني بخدمة أبنائنا الطلاب والطالبات في ربوع الوطن الحبيب بهذا العمل آملين أن ينال رضا الجميع

فكرة وإعداد

أ. عادل علي عبدالله البقع

مساعد

أ. زينب محمود السمان

مراجعة وتدقيق

أ. ميسونة العبيدي

أ. فاطمة العجل

أ. أفراح الحزمي

متابعة

أمين الإدريسي

إشراف مدير عام

الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني

أ. محمد عبده الصرمي

el-online.net

وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

كتاب التمارين

للصف الثاني الثانوي (القسم العلمي)

تأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً.

د. أمة الإله علي حمد الحوري. أ. سالمين محمد باسلوم (منسقاً).
د. عوض حسين البكري. د. محمد علي مرشد.
د. محمد رشاد الكوري. أ. يحيى بكار مصفر.
د. محمد حسن عبده المسوري. أ. عبدالباري طه حيدر.
د. عبدالله سالم بن شحنة. أ. نصر محمد بدر.
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري. أ. جميلة إبراهيم الرازحي.
د. علي شاهر القرشي. أ. عادل علي مقبل البنا.
أ. مريم عبدالجبار سلمان. أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان.
أ. يحيى محمد الكنز.

فريق المراجعة:

أ/ أحمد عبده الصغير الدبعي. أ/ سميرة حسن فضائل.
أ/ زايد مقبل عبدالخالق الأغبري. أ/ محمد صالح الخضر.
أ/ خالد محمد القلذي.

تنسيق: أ / سعيد محمد ناجي الشرعبي.
تدقيق: د/ أمة الإله علي حُمد الحوري.
إشراف: د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

الإخراج الفني

الصف والتصميم : جلال سلطان علي إبراهيم.
إدخال التصويبات : علي عبدالله علي السلفي.

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني.

١٤٣٦هـ / ٢٠١٥م

el-online.net

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د/ عبدالله عبده الحامدي.
د/ عبدالله سالم لملس.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.
د/ فضل أحمد ناصر مطلي.
د/ صالح ناصر الصوفي.
د/ محمد عمر سالم باسليم.
أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ.د/ محمد حاتم المخلافي.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.
د/ عبده أحمد علي النزيلي.
أ/ محمد عبدالله زبارة.

أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.
أ/ علي حسين الحيمي.
د/ إشراق هائل عبدالجليل الحكيمي.
أ/ محسن صالح حسين اليافعي.
أ.د/ أحمد علي المعمري.
أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.
أ.د/ شكيب محمد باجرش.
أ.د/ صالح عوض عرم.
أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ.د/ إبراهيم محمد الحوثي.
أ/ عبدالله علي إسماعيل الرازحي.

د. عبدالله سلطان الصلاحي.

el-online.net

بسم الله الرحمن الرحيم

تقـــديـــم :

في إطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية.

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات.

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي.

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها.

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية.

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول
وزير التربية والتعليم
رئيس اللجنة العليا للمناهج

el-online.net

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمـــــة:

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم المرسلين وآله وصحبه وسلم .

إن إعادة النظر في مناهج الرياضيات وكتبها المدرسية أمر ضروري تحتمه مواكبة التطور العلمي وتحديث تربويات الرياضيات إضافة إلى مسايرة التغيرات الاجتماعية .

واستجابة لذلك يأتي هذا الكتاب « كتاب التمارين للصف الثاني الثانوي القسم العلمي » كحلقة ضمن سلسلة متكاملة من التطوير على مستوى المرحلتين : الأساسية (١- ٩) والثانوية من (الأول الثانوي إلى الثالث الثانوي) .

لقد عُرضت التمارين في تماسك وتكامل وفق تسلسل علمي ونفسي تربوي ومراعاة للفروق الفردية تم تقديم المادة الدراسية في الكتاب المدرسي بأسلوب سلس واضح لاغموض فيه ولاتعقيد ، حيث أوردنا قدراً كافياً من الأمثلة بعد العرض النظري واتبعنا ذلك بعدد من التمارين والمسائل آملين إتاحة فرص كثيرة للتعامل مع المادة ليكون الطالب محور التعلم معتمداً على النشاط ويكون النشاط بدافع ذاتي محققاً بذلك الأهداف الوجدانية وبعد ذلك جاءنا كتاب التمارين ليعطي المزيد من التمارين ويفي بالمزيد من الأنشطة حتى يمكن تحقيق أهداف المادة بشكل جيد .

ومقارنة بالكتب السابقة فإن كتاب التمارين المرافق للكتاب المدرسي ، ودليل المعلم يهتم اهتماماً كبيراً بالمفاهيم الأساسية إلى جانب تقديمه معارف سليمة ومراعاته انسجام الموضوعات مع عمليات التعلم الطبيعي للطلبة كما تحفز المدرسين على ابتكار أساليب تدريس جديدة بما يضمن لطلبتهم تعلماً فاعلاً .

ومن أهم أهداف وزارة التربية والتعليم أن يظل التطوير في نمو وتطور مستمرين، بمتابعة كل جديد في تدريس الرياضيات وهذا لايتأتى إلا بالاستفادة من واقع التطبيق في الميدان التدريسي . فإذا راعينا كل المبادئ المذكورة أعلاه بقدر ما وفقنا المولى عز وجل بإعداد هذه المواد التربوية في ضوء استراتيجيات تهدف إلى تقديم الأجود، مادة وطريقة . . . فإننا ننظر بشوق بالغ أن يوافينا كافة ذوي العلاقة بملاحظاتهم بغية الاستفادة منها .

نسأل المولى العلي القدير أن نكون قد وفقنا في كل ما نصبو إليه فهو ولي التوفيق والهادي إلى سواء السبيل .

المؤلفون

el-online.net

المحتويات

الموضوع	الصفحة
الوحدة الأولى : الحلقة والحقل	٦
الوحدة الثانية : الدوال الحقيقية	١٠
الوحدة الثالثة : المتتاليات	٢٤
الوحدة الرابعة : اللوغاريتمات	٣٨
الوحدة الخامسة : النهايات والاتصال والاشتقاق	٤٧
الوحدة السادسة : المصفوفات والمحددات	٥٨
الوحدة السابعة : الهندسة الإحداثية	٦٧
الوحدة الثامنة : الهندسة الفضائية	٧٢
الوحدة التاسعة : حساب المثلثات	٨٠
الوحدة العاشرة : الإحصاء والاحتمالات	٨٦

el-online.net

البند (١ - ٢) الحلقة :

[١] لتكن س$_{\sim}$ = { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ، ولنعرّف على س$_{\sim}$ العمليتين الثنائيتين ⊛ ، ○ على النحو التالي :

س ⊛ ص = باقي قسمة (س + ص) على ١٠

، س ○ ص = باقي قسمة (س ص) على ١٠

أ) كوّن جدولين مختلفين لهاتين العمليتين .

ب) تحقق من أن (س$_{\sim}$ ، ⊛ ، ○) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .

[٢] لتكن (س$_{\sim}$ ، + ، ٠) حلقة غير تبديلية ولنعرّف على س$_{\sim}$ عملية جديدة ○ على النحو التالي :

أ) ا ○ ب = ا ب - ب ا ∀ ا ، ب ∈ س$_{\sim}$

برهن أن (س$_{\sim}$ ، + ، ○) حلقية تبديلية

البند (١ - ٣) الحقل :

[٣] لنعرف على د العمليتين الثنائيتين ⊛ ، ○ على النحو التالي :

س ⊛ ص = س + ص - ١

، س ○ ص = س ص - س - ص + ٢

برهن أن النظام (د ، ⊛ ، ○) حقل .

[٤] إذا علمت أن (ص$_{٧}$ ، ⊕ ، ⊙) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .

أ) تحقق من أن (ص$_{٧}$ ، ⊕ ، ⊙) حقل .

ب) حل المعادلة : ٣ ⊙ س ⊕ ١ = ٤ في هذا الحقل .

البند (١ - ٤) حقل الأعداد الحقيقية :

[٥] استخدم خواص حقل الأعداد الحقيقية لحل المتراجحات التالية في ح :

أ) -٦ س - ٢ < ٥

el-online.net

ب) $٤ > ٢س - ٣ \geq ١٠$

جـ) $(س - ١)(س + \frac{١}{٢}) \leq ٠$

د) $\frac{س}{(س - ١)(س + ٢)} < ٠$

[٦] أوجد مجموعة الحل لكل من أزواج المتراجحات الآتية ، ومثل الحل على خط الأعداد :

أ) $س - ٠,٣ > ١,٥$ أو $س < -٠,٨$

ب) $٣س - ٥ \geq ٢$ و $س \leq ١$

جـ) $٢س - \frac{١}{٣} > \frac{٢}{٣}$ أو $س < ٠$

تمارين عامه ومسائل

[١] من المعلوم أن كلَّ حقلٍ هو حلقة تامة ، وكلَّ حلقةٍ تامة هي حلقة إبدالية . لكن عكس أي من العبارتين ليس بالضرورة يكون صحيحاً . بين ذلك باعطاء :

أ) مثال لحلقة تامة لكنها ليست حقلاً .

ب) مثال لحلقة إبدالية لكنها ليست تامة .

جـ) مثال لحلقة تامة منتهية . هل هي حقل ؟

[٢] ليكن (ح ، ✻ ، X) حقلاً ، حيث X عملية الضرب على الأعداد الحقيقية والعملية ✻ معرفة على ح كما يلي :

$س ✻ ص = س + ص + ٣ \quad \forall س ، ص \in ح$

حل المعادلة $٢س ✻ ٣ = ٦$ في هذا الحقل .

[٣] لتكن (س، + ، ○) حلقة ذات عنصر محايد . فبرهن أن :

أ) العنصر المحايد بالنسبة للعملية ○ وحيد .

el-online.net

ب) إذا كان للعنصر ا نظير بالنسبة للعملية ○ فإن ا$^{-1}$ وحيد .

جـ) إذا وُجد ا$^{-1}$ فكذلك (ا$^{-1}$)$^{-1}$ ويكون (ا$^{-1}$)$^{-1}$ = (ا$^{-1}$)

حيث ا$^{-1}$ نظير ا بالنسبة للعملية ⁎

[٤] برهن أنه إذا كانت (س ، ⁎ ، ○) حلقة تبديلية فإن :

(ا ⁎ ب) ○ (ا ⁎ ب) = (ا ○ ا) ⁎ (ب ○ ب)

(ملاحظة : ابدأ بالحالة الخاصة عندما تكون العمليتان هما + ، × المعرفتين على الأعداد ، ثم عمم النتيجة لأي عمليتين ثنائيتين) .

[٥] تعلم أنه إذا كانت (س ، ⁎ ، ○) حلقة تامة فإن قانوني الحذف يتحققان ، ولكن هذا لايقتضي أن يكون لكل معادلة من الشكل التالي :

ا ○ س = ب حلاً في تلك الحلقة . اعط مثال لحلقة تامة بحيث توضح ما سبق.

اختبار الوحدة

[١] كل من الأنظمة التالية ليس حلقة . اعط سبباً واحداً على الأقل لكل حالة :

أ) (ط ، + ، ×) ب) (ص* ، + ، ×)

جـ) (د ، × ، +)

[٢] بين أياً من الأنظمة التالية حقل ، وأياً منها حلقة وليس حقلاً :

أ) (ص ، + ، ×) ب) (د ، + ، ×)

جـ) (ص$_4$ ، ⊕ ، ⊙) د) (ص$_5$ ، ⊕ ، ⊙)

[٣] بين نوع النظام الرياضي (حلقة ، حلقة تامة ، حقل) الذي تتحقق فيه كل من الخواص الأتية :

أ) للمعادلة ا ○ س ⁎ ب = جـ فيه حلٌ وحيدٌ ، حيث ا ≠ و

ب) س ○ ص = س ○ ع ⟸ ص = ع

جـ) س ○ ص = و ⟸ س = و أو ص = و

د) لكل عنصر ا ∋ س ، ا ≠ و نظير بالنسبة للعملية ○ . حيث و هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية ○ في النظام (س ، ⁎ ، ○)

el-online.net

[٤] حل المعادلة ٢ ○ س ✻ ٣ = ٤ في كل من الأنظمة الرياضية الآتية :

أ) (ح ، + ، ×)

ب) (صـ٥ ، ⊕ ، ⊙)

جـ) (صـ٦ ، ⊕ ، ⊙)

[٥] اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

أ) مجموعة حل المتراجحة ٢ س + ١ ≥ ٢ هي :

[٣/٢ ، ∞ [،] −∞ ، ١/٢] ، [١/٢ ، ∞ [

ب) مجموعة حل المتراجحة ١ − ٢ س > ٣ هي :

] −∞ ، −١ [،] ٢ ، ∞ [،] −∞ ، ٢ [

جـ) مجموعة حل المتراجحة ١/س > ٢ ، س ≠ ٠ هي :

] ٠ ، ١/٢ [،] ١/٢ ، ∞ [،] −∞ ، ١/٢ [

el-online.net

(٢ : ١) الدوال الحقيقية :

[١] أوجد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية :

أ) د (س) = $\frac{س^{٢} + ١}{س^{٤} + ١}$

ب) د (س) = $\sqrt{س} + \sqrt{٢ - س}$

جـ) د (س) = $|س| + |س - ٢|$

د) د (س) = $\sqrt{س - ١}\ \sqrt{٤ - س}$

هـ) د (س) = $\frac{١}{س^{٢} - ٣٦}$

[٢] ليكن د (س) = $\sqrt{س - ١}$ ، هـ (س) = $\frac{١}{س}$ أوجد مجموعة تعريف الدوال التالية :

أ) د (س) + هـ (س)

ب) د (س) − هـ (س)

جـ) د (س) × هـ (س)

د) $\frac{د (س)}{هـ (س)}$

هـ) (هـ ○ و) (س)

el-online.net

[٣] أوجد مدى كل من الدوال التالية :

أ) د (س) = $س^{٢}$ + ١

ب) د (س) = $\frac{٢ س + ١}{س - ١}$

جـ) د (س) = $س^{٢}$ – ٤ س + ١١

د) د (س) = $\sqrt{س}$

هـ) د (س) = $\frac{١}{٢ - \text{جتا } ٣ س}$

[٤] أوجد مجموعة التعريف والمدى لكل من الدوال التالية :

أ) د (س) = $\frac{١}{س}$

ب) د (س) = $\frac{س}{٥ س + ٣}$

جـ) د(س) = $\sqrt{٢ س - ٥}$ + ٤

د) د(س) = $\sqrt{س - ٣}$

هـ) د (س) = $\begin{cases} ٣ & ، \ س > ٢ \\ -١ & ، \ س < ٢ \end{cases}$

el-online.net

(٢ : ٢) بعض أنواع الدوال وتمثيلها :

[٥] أعد تعريف كل من الدوال التالية ومثّلها :

أ) د (س) = | ٥ س – ٢ |

ب) د (س) = | س + ٥ | – ١٠

جـ) د (س) = | $\frac{س}{٤}$ | – ٣

د) د (س) = | س^{٢} – ١٠٠ |

هـ) د (س) = | س^{٢} – ٤ س – ٥ |

[٦] أوجد مجموعة حل المعادلات التالية :

أ) | س – ٥ | – ٧ = ٠

ب) ٣ $\sqrt{س^{٢}}$ – ٥ = ٠

جـ) | ٢ س – ٥ | + ٢٥ = ٠

د) | ٥ – ٤ س | = ١٦

هـ) [٣ س + ٢] = ٠

و) [٥ – ٤ س] = – ٣

ز) [٤ س – ١] – ٩ = ٠

ح) $\frac{[س - ٥]}{[س + ٣]} = \frac{٤}{٥}$

el-online.net

[٧] بيّن نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

أ) د (س) = $س^{٣} - ١١ س$

ب) د (س) = $٣ س^{٤} - ٥ س^{٢} + ١١$

جـ) د (س) = $\frac{س^{٢}}{٢ س^{٢} + ١}$

د) د (س) = س ($س^{٣} - \frac{١}{س}$) ،

هـ) د (س) = جا ٣ س جتا س ،

و) د (س) = $\sqrt{س^{٢} + ٥}$

ز) د (س) = س |س|

ح) د (س) = $\begin{cases} س + ٢ & ، \quad س \leq -٢ \\ س - ٢ & ، \quad س > -٢ \end{cases}$

ط) د (س) = $(\frac{س}{٣} + \frac{٣}{س})^{٣}$

ي) د (س) = $س^{٢}$ + ظا س

[٨] أوجد قيمة كل مما يأتي عند س = ٤

أ) [س]

ب) [$\frac{١}{٤}$ س]

جـ) [٥ – $\frac{١}{٢}$س]

د) [٥ – ٣ س] – س

هـ) [س – ٤] + ٣

el-online.net

[٩] إذا كانت [س] ≤ س ≤ [س] + ١ تحقق بمثال عددي من صحة ذلك .

[١٠] أوجد قيمة هـ إذا كانت هـ عدداً صحيحاً في كل مما يأتي :

أ) [س + هـ] – [س] = ٦

ب) [س + هـ] – [س – هـ] = ٨

[١١] مثّل الدوال التالية بيانياً :

أ) د (س) = – [س] ، –٣ ≤ س < ٠

ب) د (س) = [س + ٢] ، –٢ ≤ س ≤ ٠

جـ) د (س) = | ٣ – س |

د) د (س) = { ١ ، س ≤ ٤ ; √س ، ٠ < س < ٤ }

هـ) د (س) = √(٦ – س)

و) د (س) = ٢س^{٢} – ٤

ز) د (س) = { [س] ، –١ < س < ٢ ; س + ١ ، ٢ < س < ٤ }

el-online.net

(٢ : ٣) اطراد الدوال :

[١٢] ابحث اطراد كل من الدوال التالية :

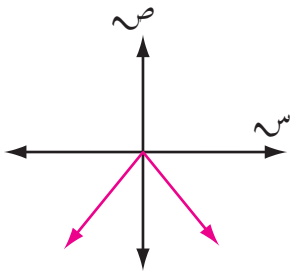
أ) د (س) ٣ س + ٥ ب) د (س) = ٩

جـ) د (س) = ٣ – س د) د (س) = ٢ س^{٢} + س + ١

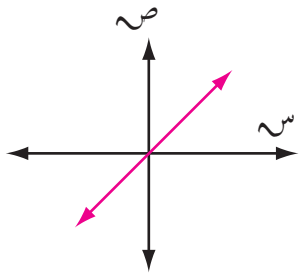
هـ) د (س) = $|$ –س^{٢} + ٣ $|$ و) د (س) = $\frac{١}{\sqrt{س + ٣}}$ – ٩

ز) د (س) = جتا س ، س $\in$ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

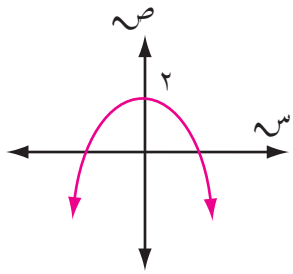
[١٣] ابحث اطراد الدوال المرسومة في الشكل (٢– ١ أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و) ، ثم أوجد مجموعة تعريفها ومداها :



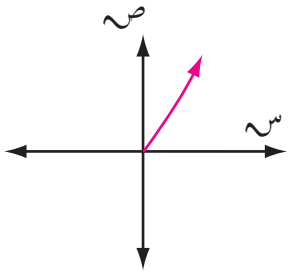
شكل (٢ – ١ جـ)



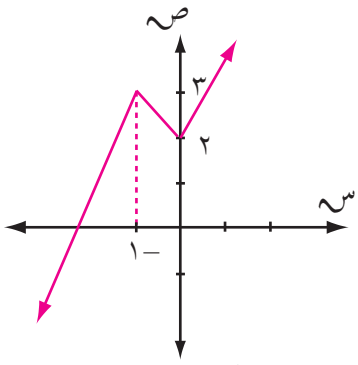
شكل (٢ – ١ ب)



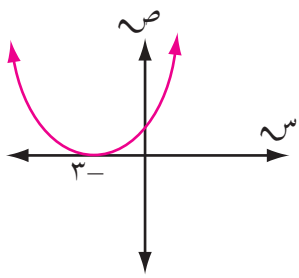
شكل (٢ – ١ أ)



شكل (٢ – ١ و)



شكل (٢ – ١هـ)



شكل (٢ – ١د)

el-online.net

[١٤] مثّل الدوال التالية ومن الرسم أوجد المدى ، وابحث اطراد كل منها ، وبيّن القيم العظمى والصغرى – إن وجدت – :

أ) د (س) = $س^{٢}$ – ٤ س + ٥

ب) د (س) = ١ – (س + ٢)^{٢}

جـ) د (س) = $|س|$ (س – ١)

د) د (س) = س $|س - ١|$ + س – ١

هـ) د (س) = $\frac{س|س - ٤|}{س + ٢}$ + ١

و) د (س) = ٢ + جاس

[١٥] أثبت أن الدوال التالية محدودة ، ثم أوجد حديها :

أ) د (س) = ٢$س^{٢}$ –٧ س + ١ في الفترة [–١ ، ٢]

ب) د (س) = $س^{٢}$ + ٤ س + ٩ في الفترة [–٢ ، ٢]

جـ) د (س) = $\frac{٣س^{٢} - ٥}{٢س^{٢} + ٧}$.

د) د (س) = (٢ – س)^{٢} – ١ في الفترة [١ ، ٢]

هـ) د (س) = $\frac{س^{٢}}{س^{٢} + ٤}$

el-online.net

تمارين ومسائل عامة

[١] أوجد مجموعة التعريف والمدى لكل من الدوال التالية :

١ ■ د (س) = ٦

٢ ■ د (س) = $\frac{٢}{٢ س - ١}$

٣ ■ د (س) = $\frac{٣}{س - ٣}$

٤ ■ د (س) = $\frac{٤}{س^{٢} - ١}$

٥ ■ د (س) = [س] − ١

٦ ■ د (س) = س − [س]

٧ ■ د (س) = | س − ٨ |

٨ ■ د (س) = $\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} + ٢ س + ٥}$

٩ ■ د (س) = $\begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س \neq ٠ \\ ٠ & ، س = ٠ \end{cases}$

١٠ ■ د (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

١١ ■ د (س) = $\frac{١}{|س| + ٣}$

el-online.net

١٤ ■ د (س) = ١ − |س|

١٢ ■ د (س) = $\sqrt{\frac{س}{س + ٧}}$

١٣ ■ د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٥ س + ٤}$

١٥ ■ د (س) = $\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س - ٣}}$

١٦ ■ د (س) = $\sqrt{|س - ١| - س}$

[٢] بيّن نوع الدوال التالية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ ■ د (س) = $س^{٤} - ٢ س^{٢} + ١$

٢ ■ د (س) = $\frac{س^{٤} + ٣}{٤ س - س^{٣}}$

٣ ■ د (س) = $\sqrt[٣]{س^{٣} - ٨ س}$

٤ ■ د (س) = $س (س - \frac{١}{س})^{٣}$

٥ ■ د (س) = $\frac{س^{٢} + ١}{س^{٣} - ٢٥ س}$

٦ ■ د (س) = $(س + ١)^{٢} - (س - ١)^{٢}$

٧ ■ د (س) = $\frac{س^{٢}}{جتا س}$

٨ ■ د (س) = $س^{٣}$ جا^{٢} س

el-online.net

٩■ د (س) = $\frac{\sqrt{س^٢ + ١} + س^٢ + ١}{س^٣}$

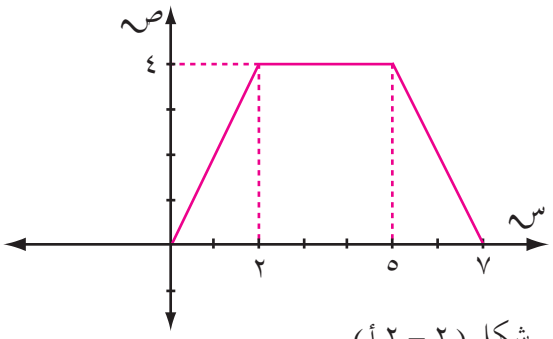
١٠■ د (س) = $\begin{cases} ٢ س & ، \quad س \geq ٠ \\ -٢ س & ، \quad س < ٠ \end{cases}$

١١■ د (س) = $\begin{cases} \frac{١}{س - ١} & ، \quad س > ١ \\ \frac{١}{١ - س} & ، \quad س < ١ \end{cases}$

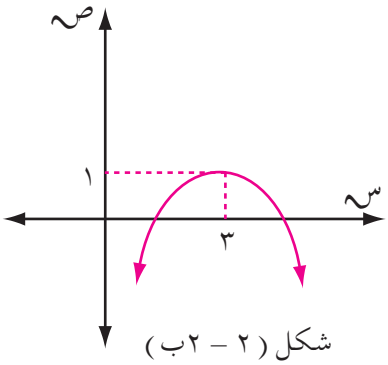
١٢■ د (س) = $(س + ٢)^٢$

el-online.net

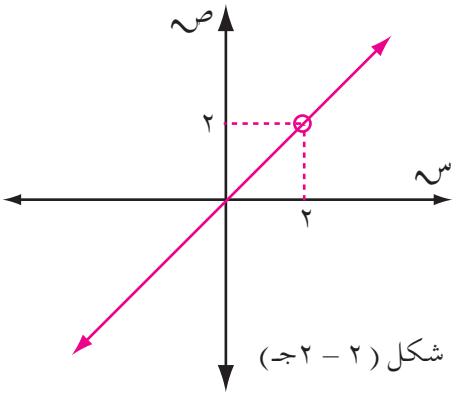
[٣] بيّن نوع الدوال التالية المرسومة في الشكل(٢ –٢ أ ، ب ، جـ ،د، هـ ، و) من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك،وبينّ اطرادها،ثم أوجد مجموعة تعريفها ومداها :



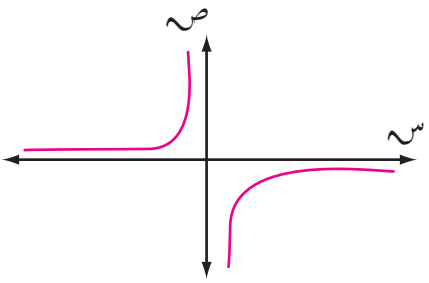
شكل (٢ – ٢ أ)



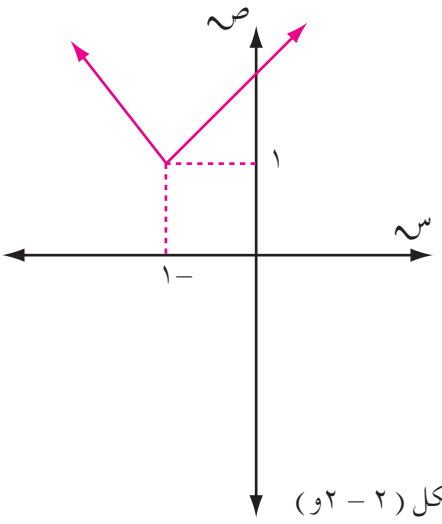
شكل (٢ – ٢ب)



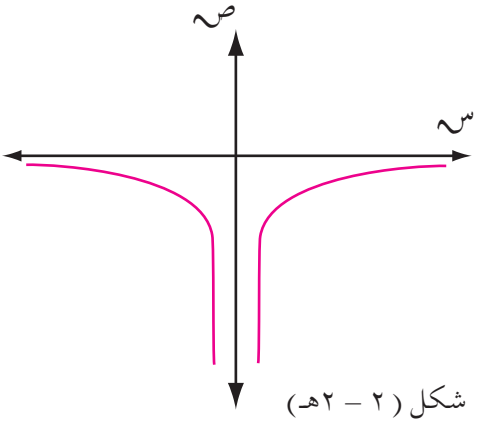
شكل (٢ – ٢جـ)



شكل (٢ – ٢د)



شكل (٢ – ٢و)



شكل (٢ – ٢هـ)

el-online.net

[٤] أعد تعريف كل من الدوال الآتية ، وعيّن مداها :

أ) د (س) = $|س + ٣|$

ب) د (س) = $|س - ٤| - ٣$

جـ) د (س) = $|٢ س| - \frac{١}{٢}$

د) د (س) = $|س^{٢} - \frac{٩}{١٦}|$

هـ) د (س) = $|س - ٥| + ٢|س + ٢| + س$

[٥] أوجد مجموعة الحل للمعادلات التالية :

أ) $|س| - ١٩ = ٠$

ب) $|٢ س - ٣| + ٢ = ٥$

جـ) $|س - ٢| - س + ١ = ٠$

د) $٤ - ٢|س - ١| = ٠$

هـ) $٣ - ٣|س - ١| + ٢ س = ٠$

و) $س - [س] = ٠$

ز) $\frac{[س - ٣]}{[س - ٥]} = \frac{١}{٢}$

el-online.net

[٦] مثّل الدوال التالية ومن الرسم أوجد مجموعة التعريف، والمدى وبين اطراد كل منها وكذلك إن كانت زوجية أو فردية أو غير ذلك :

أ) د (س) = | س | − ١ ب) د (س) = ٣ − ٢ | س |

جـ) د (س) = | ٢ س − ١ | − ٣ + ٢ س .

د) د (س) = [س − ٢] ، ٤ ≤ س < ٦

هـ) د (س) = ١٢ س − ٤ س^{٢} − ٥

و) د (س) = $\frac{|س^{٣}|}{س}$ + ٤ س

ز) د (س) = س^{٣} + ٤

ح) د (س) = − (س + ٤)^{٣}

ط) د (س) = $\begin{cases} -٢ - س & ، \quad س \leq ٠ \\ ٢ + س & ، \quad س > ٠ \end{cases}$

[٧] ابحث الدوال التالية إن كانت محدودة أم لا .

أ) د (س) = ٥ − ٢ س في الفترة [−٥ ، −٣]

ب) د (س) = (س + ٢)^{٢} + ٥ في الفترة [−٢ ، ٢]

جـ) د (س) = (س − ٣)^{٢} − ٢ في الفترة [٣ ، ٥]

د) د (س) = $\frac{٥}{١ + س}$ جتا س ، س ≤ ٠

هـ) د (س) = $\frac{٢}{س + ٤}$ جا س ، س > ٠

و) د (س) = $\frac{٤}{\sqrt{(س + ٢)^{٢}}}$

ز) د (س) = س^{٢} − ١

ح) د (س) = $\frac{٥}{س^{٢} + ٥}$

[٨] ارسم الدالة د (س) = ظا س ، ثم بيّن أنها دورية ، وعيّن دورها .

el-online.net

اختبار الوحدة

[١] أ) عرّف الدالة الدورية .

ب) أوجد مجموعة تعريف ومدى الدالة : د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٢٥}$

[٢] مثّل بيانياً الدالة : د (س) = ٢س^{٢} – ٢ س ومن الرسم بيّن اطرادها ، وأوجد القيم العظمى والصغرى – إن وجدت –

[٣] بيّن نوع الدالة التالية : د (س) = | س | + ٣ ، من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

[٤] أثبت أن الدالة د(س) = جا ٢ س دورية ، ثم أوجد دورها .

[٥] أثبت أن الدالة د (س) = $\frac{س}{٢س^{٢} + ١}$ محددة ، وأوجد حديها .

el-online.net

(٣ - ١) المتتاليات :

[١] بين أيّا من الدوال الآتية تمثل متتالية :

أ) ح(د) = (−١)^د د^٢ ، د ∈ ط*

ب) د(د) = ٣د^٢ + ١ ، د ∈ ص

جـ) هـ(د) = $\frac{د}{٣د^{٢} + ٢د + ١}$ ، د ∈ ط

د) ل(د) = $\frac{١}{د + ١}$ ، د ∈ ح

هـ) ك(د) = جا π د ، د ∈ ط*

و) ع(د) = ٣ جتا $\frac{\pi}{د}$ ، د ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

[٢] اكتب الخمسة الحدود الأولى من المتتاليات التي حدها العام مُعطى ثم مثِّلها بيانياً :

أ) ح_د = ٥ د + ٢

ب) ح_د = (−١)^د (د + ٧)

جـ) ح_د = $\frac{٢}{٣د}$

د) ح_د = $\frac{٥}{٢د + ١}$

هـ) ح_د = $\frac{(٢)^{د}}{٥د}$

و) ح_د = $\frac{د + ٥}{٣د - ٤}$

ز) ح_د = $\frac{(-١)^{د} (٦د - ٥)}{د}$

el-online.net

[٣] أوجد الحد المشار إليه أمام كل متتالية :

أ) $\langle\ ٣د + ٥\ \rangle$ ، $ح_{٩}$

ب) $\langle\ ٧ - ٢د\ \rangle$ ، $ح_{١١}$

جـ) $\langle\ \frac{١}{د٣}\ \rangle$ ، $ح_{٣٧}$

د) $\langle\ \frac{٤د - ٣}{٢د + ٧}\ \rangle$ ، $ح_{١٧}$

[٤] اكتب الستة الحدود الأولى للمتتاليات المعطاة بالصيغ :

أ) $ح_{١} = ٤$ ، $ح_{د} = ٣ ح_{د-١} + ٤$

ب) $ح_{١} = ١$ ، $ح_{د} = ح_{د-١} + ٣$

جـ) $ح_{١} = ٧$ ، $ح_{د} = ٤ ح_{د-١} + ١$

د) $ح_{١} = ٠$ ، $ح_{د+١} = \frac{١}{١ + ح_{١}}$

هـ) $ح_{١} = ١$ ، $ح_{د+١} = (د - ١)\ ح_{د}$

و) $ح_{١} = \frac{٣}{٢}$ ، $ح_{د+١} = \frac{٤}{٣}\ ح_{د}$

el-online.net

[٥] اكتب الحد العام لكل من المتتاليات التالية :

أ) $\langle ٢ ، -٢ ، ٢ ، -٢ ، ... \rangle$

ب) $\langle ١ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ... \rangle$

جـ) $\langle \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، ... \rangle$

د) $\langle ٤ ، ٤ ، ٤ ، ... \rangle$

هـ) $\langle -١ ، \frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٥} ، ... \rangle$

و) $\langle -٢ ، ١ ، ٦ ، ١٣ ، ٢٢ ، ... \rangle$

[٦] اكتب المتتالية $\langle ح_د \rangle$ حيث :

$$ح_د = \begin{cases} \frac{د - ١}{د + ١} & \text{إذا كان } د \text{ عدد فردي} \geq ٧ \\ -١ & \text{إذا كان } د \text{ عدد زوجي} \geq ٨ \end{cases}$$

[٧] حدد أيّا من المتتاليات الآتية تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك :

أ) $\langle ١ + \frac{١}{\sqrt{د}} \rangle$

ب) $\langle ٣د - ٣^د \rangle$

جـ) $\langle ١٠ + \frac{١}{٢د} \rangle$

د) $\langle ٧^د \rangle$

هـ) $\langle جا \frac{د}{٢} \pi \rangle$

و) $\langle \frac{١}{٢د} \rangle$

ز) $\langle \frac{٣د + ٢}{د} \rangle$

ي) $\langle ٣د^{-٢} \rangle$

el-online.net

[٨] اكتب حدود كل من التسلسلات الآتية ، ثم أوجد مجموعها :

أ) $\sum_{د=١}^{٣} (٥د^{٢} + ١)$

ب) $\sum_{ك=١}^{٥} \frac{١}{٣} ك^{٢}$

جـ) $\sum_{د=١}^{٣} (٢ د^{٢} + ٣ د + ١$

د) $\sum_{ك=١}^{٤} ٥ ك -$

(٣ - ٢) المتتالية الحسابية :

[٩] أيٌّ من المتتاليات الآتية تكوّن متتالية حسابية ؟

أ) $\langle ح_د \rangle$ حيث $ح_د = ٣د - ٢$

ب) $\langle هـ_د \rangle$ حيث $هـ_د = ٢ + \frac{٣}{د}$

جـ) $\langle د_د \rangle$ حيث $د_د = ٥ - ٢د (-١)^{د}$ د

د) $\langle ك_د \rangle$ حيث $ك_د = ١١,١ - ٠,٤$ د

[١٠] أوجد ما يأتي :

أ) عدد حدود المتالية : $\langle ١١ ، ١٣ ، ١٥ ، ... ، ١٩٥ \rangle$

ب) رتبة الحد الذي قيمته ٦ في المتتالية : $\langle ٨٢ ، ٧٨ ، ٧٤ ، ... \rangle$

جـ) العشرة الحدود الأولى للمتتالية : $\langle \frac{د^{٢}}{د^{٢} + ١} \rangle$

el-online.net

د) الستة الحدود الأولى للمتتالية : $\langle (-1)^{ن-1} \times (ن) \rangle$

هـ) العشرة الحدود الأولى من المتتالية التي فيها :

$ح_{ن+1} = ح_ن + د$ ، $ح_1 = 1$

و) الحد الخامس عشر من المتتالية : $\langle ٨٧ ، ٨٠ ، ٧٣ ، ... \rangle$

[١١] أوجد ما يأتي :

أ) متتالية حسابية حدها الثالث ١٦ ، مجموع حدّيها الرابع والتاسع ١٠٠

ب) سبعة أوساط حسابية بين ٣ ، ١٩

جـ) المتتالية الحسابية التي حدها السادس = ١٥ وأساسها = −٥

د) المتتالية الحسابية التي حدها الخامس = ١٢ وحدها السادس = ١٩

هـ) رتبة أول حد سالب من المتتالية : $\langle ١٣٥ ، ١٢٨ ، ١٢١ ، ... \rangle$

و) الحد السادس من نهاية المتتالية : $\langle ٧ ، ٩ ، ١١ ، ... ، ٥ \rangle$

[١٢] أ) إذا كانت س وسطاً حسابياً بين −٦ ، −١٢ ، وكانت ص وسطاً حسابياً بَيْن ٥ ، ١٣ ، وكانت ع هي الحد السابع من المتتالية $\langle ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ... \rangle$ فبيِّن أن س ، ص ، ع تكوّن ثلاثة حدود متتالية من متتالية حسابية .

[١٣] إذا كانت $\langle ح_ن \rangle$ متتالية حسابية : أثبت أن الحد $ح_م$ هو الوسط الحسابي للحدَّين $ح_{م-1}$ ، $ح_{م+1}$ حيث $م > د$

[١٤] إذا كان الحد النوني من المتتالية : $\langle ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ... \rangle$ يساوي ثلاثة أمثال الحد النوني من المتتالية : $\langle ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ... \rangle$ ، فأوجد قيمة د والحد النوني (العام) في كل منها .

el-online.net

[١٥] أثبت أن : $\frac{١ + ٣ + ٥ + \ldots + ٩٩}{١٠١ + ١٠٣ + ١٠٥ + \ldots + ١٩٩} = \frac{١}{٣}$

[١٦] مجموع العشرة الحدود الأولى من متتالية حسابية هو ١٢٠ ، ومجموع العشرة الحدود التالية هي ٣٢٠ . أوجد الحد الأول والسادس .

[١٧] أوجد ما يأتي :

أ) عدد الحدود اللازم أخذها ابتداء من الحد الأول للمتتالية :

< ٢٨ ، ٢٦ ، ٢٤ ، ... > ليكون المجموع ٢١٠

ب) المتتالية العددية التي حدّها الرابع ٣٥ ومجموع الاثنى عشر حداً الأولى منها ٥٧٠

جـ) مجموع العشرين حداً الأولى لمتتالية حسابية حدّها النوني ٥ ن – ١

د) مجموع الخمسة عشر حداً الأولى لمتتالية حسابية حدّها الأول –٨ وحدّها الخامس عشر ٣٠

هـ) مجموع الحدود الموجبة من المتتالية الحسابية : < ٣٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ... >

[١٨] أثبت ما يأتي : (إذا كوّنت ا ، ب ، جـ متتالية حسابية) .

أ) ا – ٢ ، ب – ٢ ، جـ – ٢ تكوّن متتالية حسابية .

ب) ٢ ا (ا – ب) ، ٢ ب (ب – جـ) ، جـ (ا – جـ) تكوّن متتالية حسابية .

[١٩] حنفية تصب المياء في حوض بمعدل ٥٠ لتراً في الساعة ، ثم بعد ساعة أخذت تصب فيه بزيادة ٥ لترات في كل ساعة على الساعة التي قبلها . فبعد كم ساعة يكون بالحوض ٧٢٥ لتراً ؟

el-online.net

[٢٠] اقتصدت طالبة في شهر ما ٢٠٠ ريال وأخذت تقتصد في كل شهر ١٠٠ ريال زيادة على ما تقتصده في الشهر السابق . فبعد كم شهر يصبح مجموع ما معها ١٧٠٠٠ ريال ؟

[٢١] باستخدام خواص المتتالية الحسابية أثبت أن مجموع د من الأعداد الفردية الأولى : ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، (٢ د – ١) هو د^{٢}

[٢٢] إذا كان مجموع د حداً الأولى من متتالية حسابية يساوي ٢ د^{٢} + د فما هو حدها الخامس عشر ؟

(٣ – ٣) المتتالية الهندسية :

[٢٣] أوجد ما يأتي :

أ) المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٣ وأساسها ٢

ب) المتتالية الهندسية التي فيها ح$_{٢}$ = ٨ ، ح$_{٧}$ = ٦٤٨

جـ) الحد السادس للمتتالية الهندسية : < ٣ ، ١٢ ، ٤٨ ، ... >

د) عدد حدود المتتالية الهندسية : < ٣٢٠ ، ١٦٠ ، ... ، ١٠ >

هـ) ح$_{٦}$ للمتتالية الموجبة التي فيها مجموع الحدّين الأول والثاني يساوي ٢٤ وحدها الثالث يساوي ٢

el-online.net

[٢٤] أوجد ما يأتي :

أ) أربعة أوساط هندسية بين العددين ٢٥٦ ، ٨

ب) عددين وسطهما الحسابي ١٥ ، ووسطها الهندسي ٩

جـ) قيمة رتبة الحد الذي قيمته $-\frac{٣}{٤}$ من المتتالية الهندسيـة :

$\langle ٢٤ ، -١٢ ، ٦ ، \ldots \rangle$

د) المتتالية الهندسية التي فيها : $ح_{١٠} = ٣٢٠$ ، $ح_{٦} = ٢٠$

هـ) المتتالية الهندسية التي مجموع الحدّين الثاني والثالث منهـا يساوى ٦ ، ومجموع الحدّين السادس والسابع منها يساوى ٤٨٦

و) المتتالية الهندسية التي حدها الثالث يزيد على حدها الثاني بمقـدار ١٢ ، وكان حدها السادس يزيد على حدها الخامس بمقدار ٣٢٤

[٢٥] أوجد ما يأتي :

أ) الخمسة الحدود الأولى لمتتالية هندسية إذا كان مجموع الثلاثة الحدود الأولى لها = ٩ ، مجموع الحدود الثلاثة التالية لها = -٧٢

ب) عددان موجبان وسطهما الهندسي ٦ ، ووسطهما الحسابي $٧\frac{١}{٢}$

جـ) الوسط الهندسـي للحدين الثاني والسـادس للمتتاليـة التي حـدها العـام $ح_د = ٣^{١-د}$

د) قيمة أ (عدداً صحيحاً) إذا كانت (٢أ – ٢) ، (٣أ – ١١) ، (أ – ٣) هي الثلاثة الحدود الأولى من متتالية هندسية .

el-online.net

[٢٦] أوجد ما يأتي :

أ) مجموع التسعة الحدود الأولى من المتتالية الهندسية : ⟨ ١ ، $\sqrt{٣}$ ، ٣ ، ... ⟩

ب) مجموع المتتالية الهندسية التي حدها الأول = ٢٤٠ ، وحدها الأخير = ١٥

وأساسها = $\frac{١}{٢}$

جـ) المتتالية التي حدودها موجبة ومجموع حديها الأول والرابع = ٣ أمثال مجموع حديها الثاني والخامس، وحاصل ضرب الحدين الثاني والرابع = ٤

د) عدد حدود المتتالية الهندسية التي مجموع حدودها $٦٣\frac{٣}{٤}$ ، وحدها الأول = $\frac{١}{٤}$ وحدها الأخير = ٣٢

[٢٧] أوجد المتتالية الهندسية التي فيها : $ح_١ = \frac{٢}{٣}$، $م = -\frac{٢}{٣}$ ، ثم أوجد عدد الحدود اللازم أخذه منها ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها = $\frac{٩٢٦}{٢١٨٧}$

[٢٨] أثبت أن الوسط الحسابي لعددين حقيقيين موجبين أكبر من أو يساوى الوسط الهندسي لهما .

[٢٩] بيّن أيّاً من المتسلسلات الآتية حسابية وأيهما هندسية .

أ) $\sum_{د=١}^{٨} ٣^{د}$

ب) $\sum_{د=١}^{١٠} (٣د - ٢)$

جـ) $\sum_{د=١}^{٦} (-\frac{١}{٣})^{د}$

د) $\sum_{د=١}^{٨} (-\sqrt{٣})^{د}$

el-online.net

[٣٠] خزان مياه فارغ ، صب فيه في اليوم الأول ٢٤٣ جالوناً ، وصب فيه بعد ذلك وفي كل يوم قدر ما صب فيه في اليوم السابق مباشرة مرة وثلثاً . أوجد سعة الخزان . علماً بأنه امتلأ في ٦ أيام .

[٣١] يريد مدرس أن يوفر مبلغاً من المال من خلال توفير ١٠٠ ريال في اليوم الأول ، ثم ٢٠٠ ريال في اليوم الثاني ، ثم ٤٠٠ ريال في اليوم الثالث ، وهكذا يوفر كل يوم ضعف ما يوفره في اليوم السابق مباشرة . أوجد مجموع ما يوفره بعد ١٥ يوماً ، ومجموع ما يوفره في ٣٠ يوماً .

[٣٢] سيارة تنقص قيمتها ١٥٪ كل سنة . أوجد قيمتها بعد ٥ سنوات إذا كان ثمنها ١٧٠٠٠٠٠ ريال .

[٢٣] قيمة ما تنتجه بئر من البترول في كل عام = $\frac{٢}{٣}$ قيمة الإنتاج في العام السابق .

فإذا كانت قيمة ما تنتجه البئر في هذه السنة = ٣ ملايين دولار من قيمة إنتاج البئر من ٦ سنوات، فبعد كم سنة تقريباً ستصبح قيمة ما تنتجه البئر = ١٠٠٠٠٠ دولار في السنة فقط .

el-online.net

تمارين عامة

[١] أي العبارات التالية صحيحة وأيها خطأ .

أ) كل دالة حقيقية مجالها $ط^*$ هي متتالية .

ب) كل دالة حقيقية مجالها $ط^*$ ومداها $صـ^*$ متتالية .

جـ) كل دالة حقيقية مداها $ط^*$ متتالية .

د) كل دالة مجالها $\{ ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٧ \}$ متتالية منتهية .

هـ) كل دالة حقيقية مجالها $\{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ \}$ متتالية منتهية .

و) الدالة $د (س) = (٢ س)^{٢}$ ، $س \in ط$ متتالية .

ز) إذا كانت المتتالية $< ح_د >$ متتالية هندسية فإن $ح_د \neq ٠$ لكل $د$ في مجال المتتالية .

د) إذا كان أساس متتالية هندسية موجباً فإن جميع حدودها تكون موجبة أو سالبة .

ل) إذا كان مجموع الحدين الأول والثاني في متتالية هندسية = صفراً ، فإن الأساس = -١

ك) المتتالية : $< ا ، ا ، ا ، ... >$ حيث $ا \in ح$ متتالية هندسية .

[٢] أ) أثبت أن مجموع $٢ د$ من حدود المتتالية الحسابية ١٠ ، ١٤ ، ١٨ ، ... يساوى $٨ د (د + ٢)$ ، ثم أثبت أن :

$$\frac{١٠ + ١٤ + ١٨ + ... \text{ إلى } ٢ د \text{ من الحدود}}{٣ + ٥ + ٧ + ... \text{ إلى } د \text{ من الحدود}} = ٨$$

ب) متتالية حسابية حدها الثاني = ٧ ، حدها الخامس = ١٩ ، وحدها الأخير = ٣٩ . أوجد الحد الأول والأساس ومجموع حدودها .

جـ) مجموع الحدين الأول والثاني من متتالية هندسية = ٩ ، ومجموع الحدين الرابع والخامس منها ٧٢ . أوجد المتتالية ، ثم أوجد رتبة الحد الذي يكون مساوياً ٩٦ .

el-online.net

[٣] أوجد الثلاثة الحدود الأولى للمتتالية < $\frac{١}{د^{٢}}$ > ثم بين نوعها ، وأوجد السبعة الحدود الأولى منها .

[٤] ثلاثة أعداد تكون متتالية هندسية مجموعها ١٩ فإذا أضيف إليها على الترتيب ٣ ، ٥ ، ٦ كوّنت النواتج متتالية حسابية . أوجد هذه الأعداد .

[٥] أ) كم حداً يلزم أخذها من متتالية حسابية حدها الرابع ٩ ومجموع حديها الخامس والتاسع = صفر ليكون المجموع مساوياً ٥٤ ؟ فسر معنى إجابتك .

ب) أوجد المتتالية التي مجموع د حداً الأولى منها يتعين بالقاعدة :

$\frac{٣}{٢}$ ($٣^{د}$ – ١) ، ثم عين نوعها .

[٦] متتالية هندسية فيها الحد الثاني = حاصل ضرب حديها الثالث والرابع وحدها السادس = $\frac{١}{٢}$. أوجد مجموع الثمانية الحدود الأولى منها .

[٧] متتالية هندسية حدها الرائي = ($\frac{٣}{٥}$)$^{د-١}$. أوجد المتتالية ، ثم أوجد كلاً من الوسط الحسابي والوسط الهندسي لحديها الثاني والسادس .

[٨] متتالية حسابية حدها الأول = ١٢ ، وحدها الأخير = ٨٨ ، وإذا كان مجموعهما = ١٠٠٠ ما مجموع النصف الأخير من هذه المتتالية .

[٩] الأعداد ٦ ، ١٠ ، $٢\sqrt{٣٧}$ ، –٢ ، ٢٢ ، ٢ بعضها يكون متتالية حسابية والآخر يكون متتالية هندسية . اكتب منها متتاليتين في ترتيب تصاعدي إحداهما حسابية والأخرى هندسية . وأوجد $ح_{١٠}$ في كل منها .

[١٠] أي حد في المتتالية : < ١ ، $\sqrt{٢٧}$ ، ٢ ، .... > يساوى الحد الذي ترتيبه ٨٠ في المتتالية < $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، ... >

el-online.net

[١١] متتالية حسابية مجموع الحدود السبعة الأولى منها ٥٦ وحدودها الأول والثاني والرابع في تتال هندسي . أوجد المتتالية .

[١٢] أثبت أنه إذا كانت الأعداد أ ب ، ب٢ ، جـ٢ تكون متتالية حسابية ، فإن الأعداد ب ، جـ ، (٢ ب – أ) تكون متتالية هندسية .

[١٣] عددان موجبان الوسط الحسابي لهما ١٧ والوسط الهندسي لهما = ١٥ . أوجد العددين ، وإذا كوّن العددان ووسطهما الهندسي الثلاثة الحدود الأولى لمتتالية هندسية أساسها أصغر من الواحد ؛ فاوجد مجموع الأربعة الحدود الأولى منها .

[١٤] مجموع ثلاثة أعداد تكون متتالية حسابية هو ٢٤ ، وإذا طرح من العدد الأوسط ٢ كونت مقلوباتها عندئذ متتالية عددية أخرى . فما هي هذه الأعداد ؟ وإذا رتبت هذه الأعداد ترتيباً تنازلياً بحسب قيمتها مكونة المتتالية الحسابية ؛ فأوجد كم حداً من حدودها ابتداء من الحد الأول يكون مجموعها مساوياً –١٢٠

[١٥] إذا كان الوسط الحسابي بين س ، ص هو ٧ والوسط الهندسي بين $\frac{١}{س + ٢}$ ، $\frac{١}{ص - ٦}$ هو $\frac{١}{٥}$. فاوجد قيمة كل من س ، ص ، ثم أوجد عدد الحدود التي يجب أخذها من المتتالية الحسابية س ، ص ، .... ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع مساوياً ٥٦٤

el-online.net

اختبـار الوحـدة

[١] أ) عيّن أيّاً من الدوال التالية تمثل متتالية :

أ) ح (د) = $\frac{١}{د^{٢}}$ ، د ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ب) د (د) = $(-١)^{د^{٢}}$ (د + ١)^{٢} ، د ∈ ط*

جـ) ك (د) = $\frac{١}{د}$ ، د ∈ ح

[٢] بيِّن نوع كلاً من المتتاليات الآتيـة (من حيـث كونها حسابية أو هندسية أو غير ذلك) ، ثم أوجد حدها العام – إن أمكن – .

أ) < ٥ ، ٢٥ ، ٦٥٢ ، ... >

ب) < −٣٦ ، ٦ ، −١ ، ... >

جـ) < ٣ ، ٧ ، ١١ ، ... >

د) < ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ... >

[٣] متتالية عددية عدد حدودها = ٦ وحدها الأخير = ٢٧ ، ومجموعها = ١٠٢ أوجد الحد الأول والأساس .

[٤] متتالية هندسية حدها الأول = $\frac{١}{٢}$ ، وحدها الثاني $\frac{١}{٦}$. فما هو ترتيب الحد الذي يساوي = $\frac{١}{٤٨٦}$

[٥] ثلاثة أعداد تكون متتالية هندسية وحاصل ضرب هذه الأعداد = ٢٧ ، فإذا وضعنا العدد الثالث مكان العدد الثاني والعدد الثاني مكان العدد الثالث كونت الأعداد الثلاثة متتالية عددية . أوجد هذه الأعداد الثلاثة .

[٦] سقط جسم من السكون رأسياً في الفضاء فقطع في الثانية الأولى ٦ أمتار ، ثم قطع ١٢ متراً زيادة عن الثانية السابقة لها مباشرة . فما هي المسافة التي يقطعها الجسم في ١١ ثانية؟

el-online.net

(٤ - ١) الدالة الأسية :

[١] ارسم منحنى الدالة : د (س) = $(\frac{٣}{٢})^{س}$

[٢] حل المعادلة : $(\sqrt{٣})^{٢} = ٣^{س - \frac{١}{٢}}$

[٣] أوجد مجموعة تعريف الدالة : ص = $\sqrt{١^{س}}$

(٤ - ٢) اللوغاريتم والدالة اللوغاريتمية :

[١] حول كلاً مما يأتي إلى صيغة اللوغاريتم :

أ) $(\frac{١}{٢})^{-٥} = ٣٢$ ب) $(\sqrt{٧})^{٣} = \sqrt{٧^{٧}}$

[٢] أجب عن الأسئلة التالية :

أ) حول ما يأتي إلى الصيغة الأسية : $لو_{٥} ٦٢٥ = ٤$

ب) إذا كانت : $لو_{\sqrt{٢٧}} س = ٦$. فما قيمة س ؟

جـ) حل المعادلة : لو ٧ + لو س = ٢ لو ٧

د) أوجد مجموعة تعريف الدالة : ص = $لو_{أ}$ س - ٣

[٣] ارسم كلاً من الدوال التالية :

أ) $لو_{\frac{١}{٢}} س = ص$ ب) ص = $لو_{٩}$ س

el-online.net

(٤ – ٣) قوانين اللوغاريتمات :

[١] ضع المقدار : لو $\frac{٥}{٣}$ + لو $\frac{١٥}{٦٢٥}$ – لو $\frac{٩}{٢٥}$ + لو $\frac{٢٧}{٥}$ في ابسط صوره .

[٢] أوجد قيمة كل من :

أ) لو ٠,٠٠٠١٠ ب) لو (لو $_{٦}$ ٦ $_{٣}$)

[٣] أثبت أن : لو $_{٥}$ ٢٥ + لو $_{٥}$ ١٢٥ = لو $_{٥}$ ٣١٢٥

(٤ – ٤) اللوغاريتم المعتاد :

[١] أوجد باستخدام الآلة الحاسبة :

أ) لو $_{١٠}$ ٢٥ ب) لو $_{١٠}$ ٠,٠٠٧ جـ) لو $_{٢,٣}$ ٣,٢٥

[٢] إذا كانت لو $_{١٠}$ س = ٠,٠٠٥٢٧ . أوجد باستخدام الآلة الحاسبة قيمة س .

(٤ – ٥) اللوغاريتم الطبيعي :

[١] أوجد قيمة : هـ$^{٢ \text{ لو}_{هـ} ٣}$

[٢] أوجد قيمة ما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة :

أ) لو $_{هـ}$ ٢٣٥ ب) لو $_{هـ}$ ٦,٠٢٥

[٣] باستخدام الآلة الحاسبة . أوجد قيمة س إذا كانت :

أ) لو $_{هـ}$ س = ٢,٣٥ ب) لو $_{هـ}$ س = ٠,٠٠٥٣

(٤ – ٦) التبسيط باستخدام اللوغاريتمات :

[١] أوجد قيمة : $\frac{\sqrt{٠,٤٢٣} \times ٣,٢١}{١,٤٠٢}$ باستخدام اللوغاريتمات .

el-online.net

[٢] مثلث ا ب جـ فيه |ا ب| = |ا جـ| = ٢,٨١ ، وقياس زاوية ا ب جـ = ٣٠°
أوجد باستخدام اللوغاريتمات مساحة Δ ا ب جـ

[٣] احسب قيمة ما يأتي باستخدام اللوغاريتمات :

$\sqrt[٥]{٣٢٣} \times \sqrt[٦]{(٢٤)^{٣}} \times \sqrt[٤]{(١٦,٢٣٥)^{٣}}$

تمارين عامة

[١] حل المعادلات التالية :

أ) $\sqrt[٣]{\frac{١}{٩}} = ٢٧^{س+٢}$

ب) $(س - \frac{٢}{٣})^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{٦}$

جـ) $٥^{س} = \sqrt[٥]{١٢٥}$

د) $(٢^{س} - ٨)(٣^{س} - ٢٧) = ٠$

هـ) $(٢٥)^{س-١} - ٦ \times ٥^{س-١} + ٥ = ٠$

و) $٣^{\frac{١}{س}} \times ٣^{\frac{٢}{س}} = ٢٤٣$

ز) $٢^{س} \times \sqrt[٣]{٤} = (\frac{١}{١٦})^{\frac{١}{٣}}$

ح) $\sqrt[٣]{٣} \times ٩^{س+١} = \sqrt[٣]{٩}$

[٢] ارسم بيان كل من الدوال التالية :

أ) ص = $(\frac{١}{٢})^{س}$

ب) ص = $(\frac{١}{٢})^{-ص}$

جـ) ص = $هـ^{|س|}$

[٢] ما هو أساس الدالة الأسية التي يمر بيانها بالنقطة (-٤ ، ٨١)؟

[٣] اكتب كلاً مما يأتي بالصورة اللوغاريتمية :

أ) $٢١٦ = ٦^{٣}$

ب) $٧^{-٣} = \frac{١}{٣٤٣}$

el-online.net

[٤] ضع ما يأتي في الصورة الأسّية :

أ) $\log_{10} ٠,٠٠٠١ = -٤$ ب) $\log_{١٣} ٢١٩٧ = ٣$

[٥] احسب قيمة كل مما يأتي :

أ) $\log_{\frac{١}{٥}} \sqrt{٢٥}$ ب) $\log_{٢} \sqrt{٣٢}$

جـ) $\log_{\frac{١}{٢}} \sqrt{٣٢}$ د) $\log_{\frac{١}{٢}} ١٦$

هـ) $\log_{٢} ٨ \sqrt{٣٢}$

[٦] حل المعادلات التالية :

أ) $\log_{٣} \frac{١}{٨١} = س - ٢$ ب) $\log_{س} \frac{٣}{٨} = ٣ = \frac{٣}{٢}$

جـ) $\log_{٨} (س + ٣) = \frac{١}{٣}$ د) $\log_{١٠} \sqrt[٣]{١٠} = \frac{س}{٦}$

هـ) $\log_{س+١} ٤ = -\frac{٢}{٧}$ و) $\log_{\sqrt{٣٢}} (س^{٢} - س) = ٢$

ط) $\log_{٤} (\log_{٢} (\log_{٢} ١٦)) = س$

[٧] أثبت أن :

أ) $\log_{٣} ٢٧ = \log_{٣} ٢١٨٧ - \log_{٣} ٨١$ ب) $\log_{٢} ٢٣ + \log_{٢} ١٢٨ = \log_{٢} ١٠٢٤$

[٨] اختصر كلاً مما يأتي :

أ) $\log \frac{٧}{١٥} + \log \frac{٣٥}{٣} + \log \frac{٢٥}{٢} - \log \frac{٣}{٤}$ ب) $\log_{٤} ٤٥ - ٢ \log_{٤} ٣ + \log_{٤} ١٢$

جـ) $\log_{٣} ٣٦ = \log_{٣} ٤ - \log_{٥} ٢٥$ د) $\frac{٣}{٢} \log_{١٠} س - \frac{٣}{٤} \log_{١٠} ص - \frac{٤}{٥} \log_{١٠} ع$

el-online.net

[٩] ما هو العدد الذي لوغاريتمة للأساس ٥ يساوي −٤ ؟

[١٠] أيهما أكبر لو ٣ ، لو ٣ ؟
$\frac{١}{٢}$ $\frac{١}{٥}$

[١١] أثبت أن :

أ) $\frac{\text{لو } ٨ - ٣ \text{ لو } ٩}{\text{لو } ٤ - ٤ \text{ لو } ٣} = \frac{٣}{٢}$

ب) لو ٣,٤٣ + لو ١٢٥ − ٣ لو ١,٤ + لو ٠,٦٤ = ٢

جـ) لو $\frac{٢٤٥}{٢٩٧}$ − لو $\frac{٤٩}{٨١}$ + لو $\frac{١١}{٥١}$ = ٠

د) ٢ لو ٠,٦ − لو ٢١٦ + لو ٨ + لو ١٢٥ = −٣

هـ) لو $\frac{٢٥٦}{٣}$ + ٣ لو $\frac{٥}{٣}$ + لو $\frac{٨١}{٣٢}$ = ٣

[١٢] أوجد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية :

أ) د (س) = لو (س − ٣)

ب) لو (٤ − س^{٢}) = ص

جـ) ص = لو$_{٣}$ (س + ١)

د) ص = $\frac{\text{لو}_{أ} \text{ س}}{١ + \text{لو}_{أ} \text{ س}}$

[١٣] ارسم بيان كل من الدوال التالية :

أ) ص = ٢ + لو$_{٢}$ س

ب) ص = لو$_{٢}$ (س + ٣)

جـ) ص = لو$_{٢}$ س

د) ص = لو$_{\frac{١}{٣}}$ (٣ − س)

هـ) ص = لو$_{٢}$ (س − ١)

و) ص = لو$_{١٠}$ س

[١٤] أوجد نقاط تقاطع بيان كل دالة من دوال تمرين [١٣] مع أحد المحورين .

el-online.net

[١٥] ما هو أساس الدالة اللوغاريتمية التي يمر بيانها بالنقطة (٢٥ $\sqrt{١٢٥}$ ، $\frac{٧}{٢}$)؟

[١٦] باستخدام قوى العدد عشرة اكتب كلَّ عددٍ فيما يلي على صورة عدد صحيح وكسر بحيث يكون العدد الصحيح أقل من العشرة :

أ) ٣٢ ب) ٠,٠٠٦٥ جـ) ٤١٢,٣

د) ٠,٦١ هـ) ٠,٢

[١٧] أثبت أن :

أ) $\text{لو}_{١٠}$ ٣٥٠ = $\text{لو}_{١٠}$ ٣٥ + ١ ب) $\text{لو}_{١٠}$ ٣٢٥ = $\text{لو}_{١٠}$ ٣,٢٥ + ٢

جـ) $\text{لو}_{١٠}$ ٠,٠٠١ = $\text{لو}_{١٠}$ ١ – ٣ د) $\text{لو}_{١٠}$ ٠,٠٠٢٣ = $\text{لو}_{١٠}$ ٢,٣ – ٣

[١٨] أوجد كلاً مما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة :

أ) $\text{لو}_{هـ}$ ٤,٣٢ ب) $\text{لو}_{هـ}$ ٠,٠٠٢٧

جـ) $\text{لو}_{هـ}$ ١٣,٠٠١٢ د) $\text{لو}_{١٠}$ ٠,٠٠٢٦٥

هـ) $\text{لو}_{١٠}$ ٠,٢٦ و) $\text{لو}_{١٠}$ ٢٥٦,٣٨

[١٩] (باستخدام الآلة الحاسبة) . أوجد قيمة س لما يأتي إذا كان :

أ) $\text{لو}_{١٠}$ س = ١,١٩٢٧ ب) $\text{لو}_{١٠}$ س = ٠٠,٥٥٦

جـ) $\text{لو}_{١٠}$ س = – ٠,٩٩٦٥

[٢٠] أوجد قيمة س فيما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة إذا كان :

أ) $\text{لو}_{هـ}$ س = ٣,٢٤ ب) $\text{لو}_{١٠}$ س = ١,٢٣

el-online.net

جـ) لو س = ٠,١٠٠٢ هـ

د) لو س = ٠,٠٢٨٤ ١٠

هـ) لو س = –٠,٤٣٢ هـ

و) لو س = – ٠,٠١٤ ١٠

[٢١] أوجد : أ) لو ٦٠ ٤ ب) لو ٧ ٢ جـ) لو ٧٥ ٧ د) لو ٥٣ ٠,٢

[٢٢] احسب ما يأتي باستخدام اللوغاريتمات :

أ) $\sqrt[٣]{٠,٣٤٨٢} \times \sqrt[٣]{٥,٣٧٨}$

ب) $(١٣,٨٤)^{٩}$

جـ) $\frac{(٤,٠٠٧)^{٣} \times ٠,٧٣٥٢}{\sqrt[٣]{٨٠٩,٦} \times ٠,٨٣٤٢}$

د) $\sqrt[٣]{\frac{(٩,٢٧)^{٣} + (١٤,٣٧)^{٢}}{٠,٧٣ \times (٣٥,٤٤)^{٢}}}$

هـ) $\sqrt[٥]{(٧١,٣٢)^{٣}}$

و) $\sqrt[٤]{٠,٠٠٣٨}$

[٢٣] حل المعادلات التالية :

أ) لو ٢ = س ٥

ب) لو (لو س) = ١ هـ هـ

جـ) لو ٣ = س ٢

د) لو س + لو $\sqrt{٦ س + ٥}$ = ١ ٥ ٥

هـ) لو $س^{٢}$ = (لو س)^{٢} س

و) لو س = ٢ + لو (١ – س) هـ هـ

ز) لو هـ = ٢ هـ

[٢٤] إذا كانت لو $(\frac{أ + ب}{٣}) = \frac{١}{٢}$ (لو أ + لو ب) . أثبت أن : $أ^{٢} + ب^{٢} = ١٧ أ ب$. هـ هـ

[٢٥] إذا كانت لو (س + ص) = لو س + لو ص . أوجد قيمة ص بدلالة س . هـ هـ هـ

el-online.net

اختبار الوحدة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول :

١ ■ حل المعادلة : $٣س^{٢} - ٣ س = ٩$

٢ ■ ارسم بيان الدالة ، ص = $٣^{س}$

٣ ■ أوجد مجموعة تعريف الدالة : ص = $لو_{٢} (س - ٣)$

السؤال الثاني :

١ ■ حل المعادلة : $لو_{٢\sqrt{٢}} ٣٢ = \sqrt[٥]{٤}$ س

٢ ■ أثبت أن : $لو_{٢} ٣٢ + لو_{٢} ١٢٨ = لو_{٢} ٤٠٩٦$

٣ ■ حل المعادلة : $لو_{٢} (س - ٣) + لو_{٢} (س + ٥) = لو_{٢} ٨$

٤ ■ أثبت أن : $لو_{١٠} \frac{١٧٠}{٧} - لو_{١٠} \frac{١٨}{٣٥} + لو_{١٠} \frac{٧٢}{٢٤} = ٢$

السؤال الثالث :

١ ■ اكتب ما يأتي على شكل [عدد قياسي × $١٠^{ص}$] : ٠,٣٢٥ ، ٣٢٥ .

٢ ■ أوجد باستخدام الآلة الحاسبة كلاً من :

أ) $لو_{هـ}$ ٠,٠٠٣٢٥ ب) $لو_{١٠}$ ١,٠٠٣٥ جـ) $لو_{هـ}$ ١٨ د) $لو_{١٠}$ ٠,٠٠٠٩

٣ ■ ما هو أساس الدالة اللوغاريتمية التي يمر بيانها بالنقطة (٣٢ ، ٥)؟

السؤال الرابع :

١ ■ إذا كان $لو_{١٠} س = ٣,٤٥٢٣$. أوجد قيمة س باستخدام الآلة الحاسبة .

el-online.net

٢ ■ احسب باستخدام اللوغاريتمات كل من :

أ) $\frac{(١,٢٥)^{٣} \times (٠,٠٠٨٧)^{٢}}{\sqrt[٥]{(١,٣٦)^{٦} \times ٤٣٤}}$

ب) $\frac{\sqrt[٥]{(٣٢٣)^{٦} \times ١٣} \sqrt[٦]{٨٧}}{(٦٥٤٣)^{\frac{٣}{٢}}}$

٣ ■ إذا كانت نصف قطر قاعدة اسطوانة دائرية قائمة من القانون نق = $\sqrt{\frac{ح}{ط ع}}$

احسب قيمة نق حيث:

ح (الحجم) = ٤٨٢,٣سم^{٣} ، ع = ١٢,٤٢سم ، ط ≃ ٣,١٤١٦

٤ ■ ارسم الدالة : ص = $\frac{١}{٤}$ لو س مستفيداً من بيان الدالة ص = $\frac{١}{٢}$ لو س

el-online.net

البند (٥ – ١) نهاية متتالية :

[١] أوجد كلاً من النهايات الآتية ∀ د ∈ صـ$^{+}$

أ) $\text{نهـــا}_{د \to \infty} \frac{١ + ٣ + ٥ + \ldots + (٢ د - ١)}{١ + ٤ + ٧ + \ldots + (٣ د - ٢)}$

ب) $\text{نهـــا}_{د \to \infty} ١ + \frac{١}{٢} + (\frac{١}{٢})^{٢} + \ldots + (\frac{١}{٢})^{د}$

جـ) $\text{نهـــا}_{د \to \infty} (\sqrt{د - ١} - \sqrt{د + ١})$

البند (٥ – ٢) نهاية الدوال الحقيقية :

أولاً : نهاية الدوال الحقيقية عند نقطة :

أوجد :

١) $\text{نهـــا}_{س \to ٢} (٢ س + ١)$

٢) $\text{نهـــا}_{س \to -١} (س - ١)$

٣) $\text{نهـــا}_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٤ س^{٢} - ١}{٢ س - ١}$

٤) $\text{نهـــا}_{س \to -١} (٣ س - ١)$

٥) $\text{نهـــا}_{س \to ٤} (\sqrt{س} - \frac{٤}{س^{٢}})$

٦) $\text{نهـــا}_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٢٥}{\sqrt{س^{٣} + ١١}}$

ثانياً : نهاية الدوال عند اللانهاية :

أوجد :

١) $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{س^{٣} + ٢ س^{٢} + ١}{٣ س^{٣} - س - ٣}$

٢) $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨ س^{٣} - ٥ س^{٢} + ١}}{٣ س - ٢}$

el-online.net

٣) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{٢ \times ٣^{س} - ٤ \times ٥^{س}}{٣ \times ٥^{س} - ٢ \times ٤^{س}}$

٤) $\text{نهـــا}_{م \leftarrow \infty} \frac{٣^{م+١} - ٤ \times ٢^{م-٢}}{٣^{م}+ ١}$

٥) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} (\sqrt{س^{٢} - س + ١} - \sqrt{س^{٢} - س - ١})$

٦) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -\infty} \frac{٣ س + ٥}{\sqrt{٤ س^{٢} + ١}}$

٧) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -\infty} \frac{\sqrt{س^{٢} + ١}}{\sqrt[٤]{س^{٤} + ١}}$

البند (٥ - ٣) الاتصال :

[١] ابحث اتصال الدوال الآتية عند النقاط المرافقة لكل منها :

أ) $د(س) = \frac{س - ٢}{٢ |س - ٢|}$ عند $س = ٣$

ب) $و(س) = \begin{cases} ٣ - س & : \ س \neq -١ \\ ١ & : \ س = -١ \end{cases}$ عند $س = -١$

جـ) $م(س) = س^{٢} - |س|$ عند $س = ٠$

د) $ك(س) = \begin{cases} |س| - س & : \ س \neq ٠ \\ ٢ & : \ س = ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

[٢] ابحث اتصال الدوال الآتية على الفترات المذكورة :

أ) $هـ(س) = \begin{cases} ٢ س & \text{إذا كانت } ٠ \leq س < ١ \\ ٤ & : \ س = ١ \\ ٥ - ٣ س & \text{إذا كانت } ١ < س \leq ٣ \end{cases}$ في $[٠ ، ٣]$

ب) $و(س) = \begin{cases} ٥ - ٢س & : \ -١ \leq س < ٢ \\ ٢ س - ٣ & : \ ٢ \leq س \leq ٣ \end{cases}$

el-online.net

البند (٥ - ٤) معدل تغير الدالة :

[١] أوجد دالة التغير د للدوال الآتية :

أ) د : س ⟵ ٢ س + ١ عند س = ٢ ، ثم أوجد د (-١)

ب) د : س ⟵ س^{٣} عند س = ١ ، ثم أوجد د (٠,٢)

[٢] أوجد دالة متوسط التغير للدوال الآتية عند س = س$_{١}$ لما يأتي :

أ) د (س) = ٢ س^{٢} - ٣ س + ٢ ، ثم احسب متوسط التغير عندما تتغير س من ٣ ⟵ ٣,١ .

ب) ص = $\frac{١}{س + ١}$ حيث س ≠ -١ ، ثم احسب متوسط التغير عندما تكون س$_{١}$ = ١ ، هـ = ١ .

جـ) د :س ⟵ $\sqrt{س}$ حيث س ≥ ٠ ، ثم احسب متوسط التغير عندما تتغير س من ٩ إلى ١٠,٢٤ .

د) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س^{٢} & \text{، كان } ١ \geq س < ٣ \\ ٢ س + ١ & \text{، كانت } س \geq ٣ \end{cases}$

فأوجد معدل تغير الدالة د (س) عندما تتغير س من ١ إلى ٢,٥ ، ومن ٣ إلى ٤ .

[٣] افرض أن مجتمعاً ما ينمو تبعاً للعلاقة ح$_{ن}$ = ٣٠٠٠ + ٦٠ن^{٢} ، حيث (ن) الزمن مُقاساً بالأيام . أوجد معدل النمو عندما ن = صفر ، ٢ ، ٥

البند (٥ - ٥) المشتقـة :

[١] أوجد باستخدام تعريف المشتقة، مشتقة كلٍّ من الدوال التالية:

أ) ص = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$

ب) ص = س - $\frac{٣}{٢}$ س^{٢}

el-online.net

جـ) ص = $\sqrt[3]{س^2}$

د) ص = $\sqrt{س + 2}$

هـ) ص = $|س - 1|$

[٢] أوجد ميل المماس للمنحنيات الآتية عند النقاط المبينة أمام كل منها :

أ) د (س) = $س^2 - 6 س + 3$ عندما س = ٢

ب) د (س) = $س^2 + س + 1$ عندما س = ٠

البند (٥ - ٦) المشتقة عند نقطة وعلى فترة :

[١] ابحث قابلية الدوال الآتية للاشتقاق عند النقاط المبينة أمام كل منها :

أ) د(س) = $\begin{cases} ٢ س & \text{إذا كانت } س \leq ١ \\ س^2 + ١ & \text{إذا كانت } س > ١ \end{cases}$ عند النقطة س = ١

ب) د(س) = $\begin{cases} ٢ س + ١ & \text{إذا كانت } س < ٣ \\ ٣ س + ٤ & \text{إذا كانت } س \geq ٣ \end{cases}$ عند النقطة س = ٣

جـ) د (س) = $\begin{cases} س + ٢ & \text{إذا كانت } ٠ \leq س \leq ٢ \\ ٣ س - ١ & \text{إذا كانت } ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$

عند النقاط الآتية : س = ٢ ، س = ٠ ، س = ٥

[٢] الدالة د (س) = $\begin{cases} ٠ & \text{عندما } س > ٠ \\ \frac{١}{٢} & \text{عندما } س = ٠ \\ ١ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

أثبت أن :

أ) د (س) ليست متصلة وليست قابلة للاشتقاق عند س = ٠

el-online.net

ب) الدالة $ر$ (س) = س د (س) متصلة عند س = صفراً ، ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند س = ٠

جـ) الدالة $و$ (س) = $س^{٢}$ د(س) متصلة وكذلك قابلة للاشتقاق عند س = ٠

البند (٥ – ٧) قواعد الدوال القابلة للاشتقاق :

[١] أ) إذا كان ص = $س^{٢}$ – ٢ س ، س = $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{و}$ ، فأوجد $\frac{ء ص}{ء و}$

ب) إذا كان ص = $\sqrt[٣]{ر}$ ، $ر$ = (ع – ٢)^{٤} ، ع = ٢ س + ١ ، فأوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

جـ) أوجد المشتقة الأولى لكلٍّ من الدالتين التاليتين :

١ ■ ص = ($س^{٣}$ – ٣ $س^{٢}$ + ٥)^{٧}

٢ ■ ص = $\frac{س}{\sqrt{س - ١}}$

[٢] أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية مع ذكر قيم س التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق :

أ) ص = $\sqrt[٣]{(س^{٢} + س)^{٢}}$

ب) ص = $\sqrt[٥]{(٤ س + ١)^{٤}}$

جـ) ص = $\frac{س}{س + ١}$

el-online.net

تمارين عامة

[١] أ) عرِّف المتتالية ، ثم مثّل على خط الأعداد الخمسة الحدود الأولى للمتتالية $\langle ح_د \rangle$ ، حيث $ح_١ = ٠,٩$ ، $ح_٢ = ٠,٩٩$ ، $ح_٣ = ٠,٩٩٩$ ، $ح_٤ = ٠,٩٩٩٩$ ، ... وهكذا .

أ) استنتج من الرسم القيمة التي تقترب منها $\langle ح_د \rangle$ عندما $د \longrightarrow \infty$

ب) أثبت باستخدام التعريف صحة الفقرة (أ)

جـ) برهن على أن المتتالية التي حدها النوني $ح_د = \frac{٤ د^٢ + ١}{٣ د^٢ + ٢}$ تتزايد مع تزايد د . ثم أوجد $\lim_{د \to \infty} ح_د$

[٢] أ) اذكر المعنى الرياضي للجملة $\lim_{س \to س_.} د(س) = ا$ حيث د(س) دالة معرفة في جوار محذوف للنقطة $س_.$ وبناء على ذلك أثبت أن :

$$\lim_{س \to ١} (٢ س + ١) = ٣$$

ب) عرِّف اتصال الدالة د (س) عند النقطة $س = س_١$ ، ثم أثبت إن كانت د (س) قابلة للاشتقاق عند $س = س_١$ ، فإنها تكون متصلة عند نفس النقطة موضحاً بمثال أن العكس غير صحيح .

[٣] أوجد قيمة ما يأتي :

أ) $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٣٢ س^٧ - س^٢}{٨ س^٤ - س}$

ب) $\lim_{د \to \infty} \frac{٢ د^٣ - د^٢}{٣ د^٣ + د^٢}$

[٤] ابحث اتصال الدالة $د(س) = \begin{cases} |س| + س & : \ س \neq ٠ \\ ٢ & : \ س = \text{صفراً} \end{cases}$

وذلك عند النقطة س = صفراً

el-online.net

[٥] ابحث قابلية اشتقاق الدالة :

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & : \ س \geq ١ \\ ٢ س & : \ س < ١ \end{cases}$$ وذلك عند $س = ١$

[٦] تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بسرعة تتعين بالعلاقة : $ع = ٣٦ ز - ٣ ز^{٢}$ سم/ث . احسب أقصى سرعة يتحرك بها الجسم وازاحته حتى يصل إلى هذه السرعة.

[٧] باستخدام تعريف المشتقة . أوجد المشتقة للدالة : $د(س) = س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٥$.

[٨] إذا كانت $\lim_{س \to ا} د_{١}(س) = ل_{١}$ ، $\lim_{س \to ا} د_{٢}(س) = ل_{٢} \neq$ صفراً

أ) أوجد $\lim_{س \to ا} [د_{١}(س) + د_{٢}(س) - د_{١}(س) \cdot د_{٢}(س) + \frac{د_{١}(س)}{د_{٢}(س)}]$

ب) بيّن أن : الدالة $د(س) = \frac{س + ٢}{س^{٢} - ٥ س + ٤} + \frac{س - ٤}{س^{٢} - ٣ س + ٢}$ غير معرفة عند $س = ١$

[٩] عرف الاشتقاق الأيمن والاشتقاق الأيسر للدالة $د(س)$ عند النقطة $س = س_{.}$ موضحاً علاقته بقابلية الدالة $د(س)$ للاشتقاق عند $س = س_{.}$ ، ثم أوجد $د'(٠)$ إذا كان :

$$د(س) = \begin{cases} س^{\frac{٥}{٤}} & : \ س \leq ٠ \\ س^{٣} + ٥ س^{٢} & : \ س > ٠ \end{cases}$$

[١٠] أوجد معادلة المماس للمنحنى : $ص = س^{٣} + ٣ س^{٣} - ٥$ العمودي على المستقيم $٢ س - ٦ ص + ١ =$ صفراً .

[١١] أوجد قيمة ما يلي :

أ) $\lim_{ز \to \infty} (١ - \frac{٢}{ز})$ ب) $\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س^{٢}} \sqrt{١ - \frac{١}{س}}$

el-online.net

جـ) $\lim_{س \to -١} \frac{س^٣ - س^٢ + س + ٣}{س^٣ + س^٢}$

[١٢] أوجد قيمة ا التي تجعل الدالة :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س - ١}{\sqrt[٣]{٣ س - ٢} - \sqrt{س}} & : س \neq ١ \\ ا & : س = ١ \end{cases}$$

متصلة عند س = ١

[١٣] عرِّف النهاية اليمنى $\lim_{س \to ا^+}$ د(س) والنهاية اليسرى $\lim_{س \to ا^-}$ د(س)

ثم أوجد هاتين النهايتين للدالة د (س) = $\frac{|س - ٤|}{س - ٤}$ عندما س $\longrightarrow$ ٤

[١٤] إذا كانت الدالة المعرفة بالقاعدة التالية :

$$د(س) = \begin{cases} س + ١ & : س \geq ١ \\ ٣ - ا س^٢ & : س < ١ \end{cases}$$

فأوجد قيمة ا بحيث تصبح للدالة نهاية عندما س $\longrightarrow$ ١ ، ثم أثبت أنها متصلة عند س = ١

[١٥] أوجد مشتقة كل مما يأتي :

أ) د (س) = $|س|^٢$ ب) ر (س) = س $|س|$

[١٦] مثِّل المتتالية $\langle ح_د \rangle$ حيث $ح_د = \frac{(-١)^د}{٢}$ بيانياً :

أ) بعد كم حد من المتتالية يتحقق: $\left| \frac{(-١)^د}{٢} \right| < ٠,٠١$ ؟

ب) أثبت أن المتتالية تقاربية ، ثم أوجد نهايتها.

[١٧] احسب قيمة ما يلي :

أ) $\lim_{د \to \infty} \frac{١ + ٣ + ٥ + ... + (٢ د - ١)}{د^٢ - د + ١}$

el-online.net

ب) $\lim_{س \to 0}$ $\dfrac{س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}}}{(س + \frac{١}{س})^{٢}}$

جـ) $\lim_{س \to ٣}$ $\dfrac{\sqrt{س^{٢} - س - ٢} - ٢}{س^{٣} - ٢٧}$

د) $\lim_{ه \to \infty}$ $\dfrac{ه \sqrt{ه} - ٣\sqrt{ه - ١}}{(\sqrt{ه} + ٢)\sqrt{ه}\,(ه^{٢} + ١)}$

[١٨] ارسم الدالة د(س) = $\begin{cases} س & : \quad س < ١ \\ \frac{١}{٢}(س^{٢} + ١) & : \quad س \geq ١ \end{cases}$

أ) أثبت أن الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق عند س = ١

ب) ارسم الدالة المشتقة

[١٩] إذا كانت د : س $\longrightarrow$ $\dfrac{٥}{٢ س - ١}$

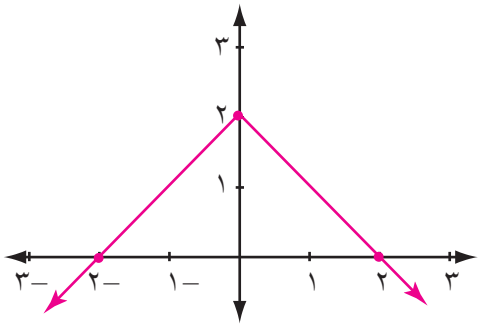
أ) أوجد دالة متوسط التغير د(هـ) عندما تتغير س من س$_{.}$ إلى س$_{.}$ + هـ

ب) احسب متوسط التغير خلال الفترة [٢ ، ٢,٠١]

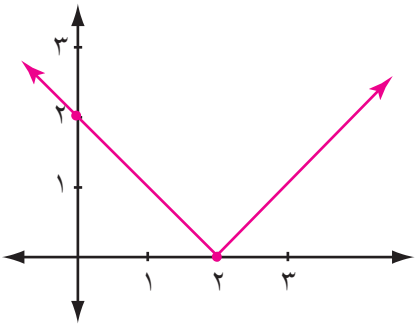
el-online.net

اختبار الوحدة

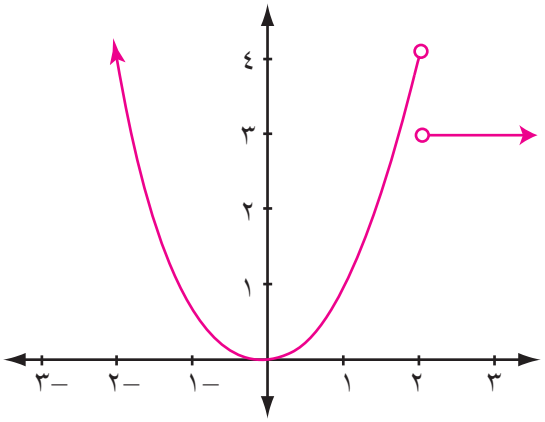
[١] استعن بالأشكال التالية :



$$ر(س) = \begin{cases} -س + ٢ & ، \ س < ٠ \\ س + ٢ & ، \ س > ٠ \end{cases}$$



$$هـ(س) = |س - ٢|$$



$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، \ س < ٢ \\ ٣ & ، \ س > ٢ \end{cases}$$

احسب قيمة النهايات إن وجدت فيما يلي :

أ) $\lim_{س \to ٠}$ ر(س)　　ب) $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س)

جـ) $\lim_{س \to ٢^{-}}$ هـ(س)　　د) $\lim_{س \to ٢}$ د(س)

el-online.net

[٢] إذا كانت هـ (س) = $\begin{cases} س^{٢} + أ & : \ س > -١ \\ ٦ & : \ س = -١ \\ ٢ س - ب & : \ س < -١ \end{cases}$

وكانت نهـــــا هـ (س) = ٢ . أوجد كلاً من أ ، ب
س ← -١

[٣] لتكن د (س) = $\begin{cases} \dfrac{|س + ١|}{س + ١} & : \ س \neq -١ \\ \text{صفر} & : \ س = -١ \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة عند س = -١

[٤] أوجد $\frac{ص}{س}$ إذا علمت أن : ص = $\frac{١}{س^{٣}}$ ، حيث س ≠ ٠

أولاً : باستخدام تعريف المشتقة .

ثانياً : باستخدام خواص قواعد الاشتقاق .

[٥] أوجد معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى الدالة :

د (س) = س^{٢} + ٢ س - ٣ ، عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص = س + ١

el-online.net

بند (٦ - ١) :

[١] إذا كانت : $\begin{bmatrix} ٣ & ٧ & ٢-أ \\ ٠ & ٥- & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ & ٥+ب \\ ٠ & ٥- & ٩ \end{bmatrix}$

أوجد قيم أ ، ب ، جـ ، ء

[٢] اكتب المصفوفات الآتية :

أ) ص من الشكل ٢ × ٣ إذا علمت أن عناصر الصف الأول ٣ ، -٤ ، ٢ ، وعناصر الصف الثاني -٧ ، ٠ ، ٨

ب) س من الشكل ١ × ٣ عناصر الصف الأول أ ، ب ، جـ

[٣] أوجد قيم س ، ص ، ع ، ل إذا كان :

$$\begin{bmatrix} ٨ & ٥ & ٤ & ع \\ ٠ & ص & ٩ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ل & ٥ & ٤ & ٢س \\ ٠ & ٣- & ٣س & ٦ \end{bmatrix}$$

[٤] إذا كان لدينا ثلاثة طلاب أ ، ب ، جـ ، وكانت درجاتهم في اختبار مادة الرياضيات هي ٧٠ ، ٦٠ ، ٥٥ على الترتيب ، وفي مادة الأحياء هي ٧٥ ، ٦٥ ، ٦٤ على الترتيب ، وفي مادة الفيزياء هي ٧٤ ، ٥٠ ، ٥٩ على الترتيب . اكتب المصفوفة س لهذه المعلومات .

بند (٦ - ٢) :

[١] اذكر اسم كل من المصفوفات الآتية محدداً نوعها :

أ) س $= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب) ع $= \begin{bmatrix} ٥ & ٢- & ١ \\ ٣ & ٢٠ & ٦ \\ ٤ & ٧- & ١- \end{bmatrix}$

el-online.net

جـ) $\underline{ل} = [\ ١٠ \quad ٢١ \quad -٣\ ]$ ، د) $\underline{هـ} = \begin{bmatrix} ١١ \\ ٢٠ \\ -١٥ \end{bmatrix}$

هـ) $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٧ & ٢ & ٣ \\ ٠ & -٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، ز) $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٥ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

[٢] اكتب المصفوفة $\underline{أ} = [\ أ_{هـو}\ ]$ التي من الشكل ٣ × ٤ . بحيث :

$$أ_{هـو} = \begin{cases} ٧ & \text{عند} \quad هـ + و = ٥ \\ -١ & \text{عندما} \quad هـ + و \neq ٥ \end{cases}$$

[٣] اكتب المصفوفة $\underline{ب} = [\ ب_{هـو}\ ]$ التي من الشكل ٢ × ٥ حيث :

$$ب_{هـو} = \begin{cases} ٧ & \text{عند} \quad هـ + و \leq ٤ \\ ٢ & \text{عندما} \quad هـ + و > ٤ \end{cases}$$

[٤] إذا علمت أن المصفوفة $\underline{س} = [\ س_{هـو}\ ]$ التي من الشكل ٤ × ٤ حيث : $س_{هـو} = ٣هـ - و$. اكتب عناصر المصفوفة س

بند (٦ - ٣) :

[١] اجرِ العمليات التالية – إن أمكن – مع ذكر السبب في حالة عدم امكانية إجراء العملية :

أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & -٣ \\ ٤ & -٧ & -٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٥ & ٤ & ٧ \\ ٣ & -٤ & ٦ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٧ \\ ١١ & -١٠ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٢ & -٣ \\ ٦ & -٤ & -٦ \\ ٩ & -٨ & ٨ \end{bmatrix}$

el-online.net

جـ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٢ & ٧ & ٦ \\ ٣ & ٣ & ٢- \end{bmatrix}$

د) [س ص ع] – [٢ س – ٤ ص – ع]

[٢] لتكن :

ص = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٦- \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$ ، هـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ ٥ & ٣- \end{bmatrix}$

احسب : أ) (ص + ع) – هـ ، ب) ص – (هـ – ع)

[٣] أوجد قيم س ، ص ، ع إذا كان :

$\begin{bmatrix} ٣س & ٥ & ٣ص \\ ٦ & ١ & ٥ع \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٢س & ٦ & ٥ \\ ١- & س & ع \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} س & ع & ٣- \\ ٧ & ٤ & ٤ع \end{bmatrix}$

بند (٦ – ٤) :

[١] إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٤- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix}$

أوجد ناتج ما يلي :

أ) أ + ٣ ب ب) ٢ ب – ٣ أ

جـ) [أ] د) $ب^{٢}$

[٢] أوجد ناتج ما يلي :

أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ ٢- & ١- & ٠ \end{bmatrix}$ • $\begin{bmatrix} ٩ \\ ١ \\ ١- \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٣- & ٤ \\ ١ & ١- & ٠ \end{bmatrix}$ • $\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٣- & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

el-online.net

[٣] إذا كانت :

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & \frac{١}{٢} \\ ٤ & \frac{١}{٣} \end{bmatrix}$$

أوجد أ) $[\underline{س}]$ ب) $٤ \bullet \underline{س}$ جـ) $\underline{س} \bullet \underline{س}$ (إن أمكن).

[٤] احسب ما يلي :

أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ -٣ & ٤ & -٧ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ٤ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٥ & -٧ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣٠ & ٢٥ \\ ١٧ & -٤ \end{bmatrix}$

بند (٦ - ٥) :

احسب قيمة المحددات الآتية :

$$\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix} \text{ ، } \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٠ \end{vmatrix} \text{ ، } \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ -١ & ٥ & ٠ \\ ٤ & ٣ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ -٧ & ٥ & ١ \\ ٤ & ٨ & ٠ \end{vmatrix} \text{ ، } \begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ٥ \\ ٦ & ١٢ & ٥ \\ ٩ & ١٨ & ٢ \end{vmatrix}$$

el-online.net

بند (٦ - ٦) :

أوجد المعكوس الضربي للمصفوفات الآتية :

$$\begin{vmatrix} -١ & ٦ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} ٠ & -٢ & -٣ \\ ١ & ٣ & ٣ \\ -١ & -٢ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٤ \\ ٢ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٧ & ٨ \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} -١ & ٣ & ٢ \\ -٣ & ٥ & ٦ \\ ١ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

بند (٦ - ٧) :

حل نظام المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات ثم المحددات :

١) ٦ س – ص = ١
−٢ س + ٣ ص = ٤

٢) ص + ٢ س – ٤ = ٠
٣ س – ١٣ = −٥ ص

٣) ع = −٢ س – ص
٤س + ٣ ص + ٢ ع = ٢
٢ س – ص = ٣ ع

٤) ٦ س + ٩ ع = ١ + ٨ ص
٣ س + ص = −٢ + ع
٦ – ص + ٢ ع = ٠

تمارين عامة

[١] إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -١ & ٣ & -٤ \\ ٢ & ٦ & ٦ \end{bmatrix}$

فأوجد ما يلي : $\underline{أ} + \underline{ب}$ ، $\underline{أ} - \underline{ب}$ ، $٤\underline{أ} - ٥\underline{ب}$.

el-online.net

[٢] أوجد قيم س ، ص ، ع ، ل إذا كان :

$$\begin{bmatrix} ٢س & ٤ & ٥ & ٢ل \\ ٦ & ٣س & -٣ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ع & ٤ & ٥ & ٨ \\ ٦ & ٩ & ص & ٠ \end{bmatrix}$$

[٣] إذا كانت $\underline{أ} = [أ_{هـ و}]$ مصفوفة من النوع ٣ × ٣ . اكتب المصفوفة $\underline{أ}$ بحيث :

$$أ = \begin{cases} ٥ & \text{عند} \quad هـ + و = ٤ \\ -١ & \text{عندما} \quad هـ + و \neq ٤ \end{cases}$$

[٤] اختصر إلى أبسط صورة كل مما يأتي :

أ) $٣\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ٧ \end{bmatrix} + ٥\begin{bmatrix} ١ & ٩ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٦ & -١ \\ ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} - ٣\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٠ & ١ \\ ١ & -٥ \end{bmatrix}$

جـ) $٢\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ١ \\ -١ & ٠ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

[٥] إذا كانت :

$$\underline{ع} = \begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ٢ & ٠ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$$ فأوجد $\underline{ع}$ ، $\underline{ع}$ • $\underline{ع}$

[٦] أوجد قيمة المحددات التالية :

أ) $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix}$ ، ب) $\begin{vmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & -٣ \end{vmatrix}$ ، جـ) $\begin{vmatrix} ٠ & ٦ \\ ٨ & ١ \end{vmatrix}$

el-online.net

د) $\begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٤ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ٨ & ٩ & ٤ \end{vmatrix}$ ، هـ) $\begin{vmatrix} ٦ & ٩ & ١٢ \\ ٢ & ٤ & ٦ \\ ٧ & ٧ & ٧ \end{vmatrix}$

[٧] أثبت بدون حل أن المحددات التالية متساوية :

أ) $\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ١ \\ ٤ & ٠ & ٢ \\ ١ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$ ، ب) $\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$

ب) $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١٠ \\ ٥ & ١٥ & ٢٠ \\ ٧ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٨ \\ ٥ & ١٥ & ١٥ \\ ٧ & ٤ & -١٢ \end{vmatrix}$

[٨] أثبت أن قيمة كلٍ من المحددات التالية تساوي = صفراً .

$\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٨ & ٤ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ١ & -٩ & ٢ \\ ٤ & ٦ & -٢ \end{vmatrix}$

[٩] بدون نشر المحدد برهن أن :

$$\begin{vmatrix} ١ & أ & ب + جـ \\ ١ & ب & أ + جـ \\ ١ & جـ & أ + ب \end{vmatrix} = ٠$$

[١٠] أوجد المعكوس الضربي لكل من المصفوفات التالية إن أمكن :

$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٨ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٢ \\ ٢ & ٩ & ٤ \\ ٣ & ٨ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & -١ \\ ٣ & -٤ & -٣ \\ ٢ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$

el-online.net

[١١] حل نظام المعادلات التالية باستخدام المصفوفات والمحددات :

١) ٢ س + ٣ ص = ٧
– س + ٢ ص = ٥

٢) ٢ س + ٣ ص = ٧
٤ س + ٦ ص = ٢٧

٣) س + ٢ ص = ١
٣ س + ٤ ص = ٢

٤) س + ص + ع = ٢
٣ س + ٢ ص + ٥ ع = ٢
٢ س – ص + ع = ٠

٥) $\frac{٣}{٢}$ س – $\frac{١}{٤}$ ص = ١
س + ص = ٢

٦) ع = – ٢ س – ص
٤ س + ٣ ص + ٢ ع = ٢
٢ س – ص = ٣ ع

[١٢] أوجد قيمة هـ لكي يكون للمعادلتين :

أ) حل وحيد .

ب) حل لانهائي .

١■ ٣ س + ٤ ص = ٥
٦ س + هـ ص = ١٠

٢■ س + ص – ع = ١
٢ س – ٣ ص + هـ ع = ٣
س – هـ ص + ٣ ع = ٢ .

el-online.net

اختبار الوحدة

[١] ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخطأ في كل مما يأتي :

أ) إذا كانت المصفوفة من النوع م X د فإنها مصفوفة مربعة . ( )

ب) المصفوفة الصفرية جميع عناصرها أصفاراً . ( )

جـ) لايمكن ضرب مصفوفتين إلا إذا كان عدد أعمدة الأولى يساوى عدد صفوف الثانية . ( )

د) $\begin{vmatrix} ٠ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$ ( )

[٢] إذا كانت : $\begin{bmatrix} ل & س \\ ٧ & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٧ & ٩ \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة س ، ل

[٣] إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

فأوجد $\underline{أ} - \underline{ب}$ ، $\underline{أ} + ٣\underline{ب}$ ، $\underline{أ}^{٢} + \underline{ب}^{٢}$

[٤] أوجد المعكوس الضربي للمصفوفات التالية إذا كان ممكناً :

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ١ & ٥ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$

[٤] حل نظام المعادلات التالية باستخدام المحددات :

س + ٢ ص = − ٣ ع

س + ص = − ١

س + ٢ ع = ٣

el-online.net

بند (٧ - ١) :

[١] أوجد معادلة كل من الدوائر الآتية :

أ) مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $\sqrt{٥}$

ب) مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٢ ، ١)

جـ) مركزها (–١ ، ٢) ، نق = ٣

د) مركزها (١ ، ٢) وتمر بالنقطة (٠ ، –٢)

[٢] أوجد معادلة الدائرة التي تكون النقطتان ء (٢ ، –٣) ، هـ (٦ ، ٥) نهايتي قطر فيها .

[٣] أوجد معادلة الدائرة التي تمس محورى الاحداثيات ، وتقع في الربع الثاني ونصف قطرها ٨ وحدات .

[٤] أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (١ ، –٣) وتمس المستقيم ٢ س – ص – ٤ = ٠ .

بند (٧ - ٢) :

[١] أوجد مركز ونصف قطر كل من الدوائر الآتية :

أ) $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$

ب) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س + ٤ ص + ١ = ٠$

جـ) $٤ س^{٢} + ٤ ص^{٢} + ١٦ س - ٤ ص + ١٥ = ٠$

د) $س^{٢} + ص^{٢} + ٩ س + ٥ ص + ١,٥ = ٠$

[٢] أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط الآتية :

أ) (٠ ، ٠) ، (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

ب) (١ ، ١) ، (٢ ، –١) ، (٣ ، ٢)

el-online.net

جـ) (١ ، ٢) ، (٣ ، –٤) ، (٥ ، –٦)

عين المركز ونصف القطر في كل حالة .

[٣] أوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل وتقطع أجزاء تساوى ٣ و ٤ من محوري الاحداثيات .

[٤] بين أن النقطة (١ ، ١) تقع على الدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٦ ص – ١٢ = ٠ ، ثم أوجد النهاية الأخرى للقطر المرسوم من هذه النقطة .

بند (٧ – ٣) :

[١] عين وضع كل من المستقيمات الآتية بالنسبة للدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} – ٨ س + ٦ ص + ٩ = ٠

أ) ص – ١ = ٠

ب) ٢ س + ٣ ص – ١ = ٠

جـ) ٢ س + ٣ ص + ١٥ = ٠

عين في حالة التقاطع نقطتي التقاطع ، وفي حالة التماس نقطة التماس .

[٢] أوجد نقطتي تقاطع المستقيم س + ص – ١ = ٠ ، مع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٤

[٣] أثبت أن المستقيم ص – ٢ س = ١ يمس الدائرة س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ص – ٤ = ٠ ، ثم أوجد نقطة التماس .

بند (٧ – ٤) :

[١] أوجد معادلة المماس للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} – ٤ س + ٦ ص – ١٣ = ٠ عند النقطة (١ ، ٢)

[٢] أثبت أن الدائرة س^{٢} + ص^{٢} – ٤ س – ١ = ٠ تمر بالنقطة (٣ ، –٢) ، ثم أوجد معادلة المماس عند هذه النقطة .

[٣] أوجد معادلة المماس للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٠ عند النقطة ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$)

el-online.net

بند (٧ – ٥) :

[١] أوجد معادلة المماسات للدائرة : ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} – ٤ س – ٤ ص – ٤ = ٠

التي ميلها $-\frac{١}{٢}$

[٢] أوجد معادلتي المماسين للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} = ٣٧ ، الموازين للمستقيم س + ٦ ص = ٠

[٣] أوجد معادلة المماسات للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٤ ، المتعامده مع المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، $-\frac{٣}{٢}$) ، (–٣ ، ٠)

بند (٧ – ٦) :

[١] أوجد معادلتي المماسين المرسومين من النقطة (١١ ، ٣) إلى الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٦٥ .

[٢] أوجد معادلة المماسات المرسومة من النقطة (٤ ، ٥) إلى الدائرة ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} – ٨ س + ١٢ ص + ٢١ = ٠

بند (٧ – ٧) :

[١] احسب طول المماس المرسوم من النقطة (–٤ ، ٣) للدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} – ٤ س + ٢ ص + ١ = ٠

[٢] أثبت أن طول المماسات المرسومة من النقطة (–١ ، ٤) للدوائر الآتية متساوية :

س^{٢} + ص^{٢} = ١٠ ، ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ١٥ ص – ٨٠ = ٠

[٣] عيِّن نقطة على محور السينات حيث طول المماس المرسوم منها للدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س = ٠ مساوياً ٤

el-online.net

تمارين ومسائل عامة

[١] النقطتان ء (٥ ، ٣) ، هـ (−٢ ، ١) نهايتا قطر في دائرة . أوجد معادلة هذه الدائرة .

[٢] اكتب معادلة الدائرة في الحالات الآتية :

أ) مركزها (أ ، − ب) ، نق = أ + ب

ب) مركزها (−أ ، ب) ، نق = $\sqrt{ب^{٢} - أ^{٢}}$

[٣] أوجد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم س + ٢ = ٠ ، وتمس كلاً من محوري الإحداثيات .

[٤] أوجد مركز ونصف قطر الدائرة : ٨س^{٢} + ٨ص^{٢} − ١٢س − ١٦ ص = ٠

[٥] أوجد معادلة الدائرة المارة برؤوس المثلث ء (−١ ، ١) ، هـ (٦ ، ٠) ، د (−٢ ، ٤)

[٦] عيِّن وضع المستقيم ص = س + ٢ بالنسبة للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٤ . عيِّن في حالة التقاطع نقطتي التقاطع ، وفي حالة التماس نقطة التماس .

[٧] احسب طول الوتر الذي تقطعه الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} + ٧ س − ٤ص + ١٠ = ٠ من المستقيم س + ٢ ص − ٣ = ٠

[٨] احسب طول الوتر الذي تقطعه الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٢ص − ٣ = ٠ من محوري الإحداثيات .

[٩] أوجد قيمة ك بحيث يكون المستقيم ص = ك س مماساً للدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ١٠س + ٦ص + ٢ = ٠

[١٠] أوجد معادلة المماس لدائرة مركزها (١ ، ٢) المرسوم من النقطة (٢ ، ٥) الواقعة عليها .

[١١] أثبت أن النقطة (−١ ، ٣) تقع على الدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ٥س + ٨ص = ٣٩ ، ثم أوجد معادلة مماس الدائرة عند تلك النقطة .

el-online.net

[١٢] أوجد معادلات المماسات للدائرة : $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س - ٢ص - ٢ = ٠$

أ) الموازية للمستقيم الواصل بين النقطتين (١ ، ٣) ، (-١ ، ١)

ب) المتعامدة مع المستقيم $س - ص - ٢ = ٠$

[١٣] أوجد معادلتي المماسين المرسومين من النقطة (٤ ، ٤) إلى الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س - ٤ص - ٩ = ٠$

[١٤] احسب طول المماس المرسوم من النقطة (-٣ ، ٢) للدائرة $س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س + ٢ص - ٦ = ٠$

[١٥] أثبت أن طول المماسات المرسومة من النقطة (٠ ، ٤) للدوائر الآتية متساوية :

$س^{٢} + ص^{٢} - ٥س + ٩ ص - ٤٦ = ٠$

$٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ١٥ ص - ٨٠ = ٠$

اختبار الوحدة

[١] أ) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (أ ، ب) ، ونصف قطرها نق

ب) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط ء (١ ، ٠)، هـ (٥ ، ٤) ، د (٧ ، ٢)، ومعادلة المماس لها عند النقطة هـ

[٢] أ) اكتب طول المماس المرسوم من النقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) للدائرة $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ أ س - ٢ ب ص + جـ = ٠$

ب) أوجد مركز ونصف قطر الدائرة : $س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س - ٨ ص = ٠$ ، وطول المماس المرسوم من النقطة (١ ، -١) لهذه الدائرة .

el-online.net

(٨ - ١) المستوى والفضاء :

[١] إذا كان $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ مستقيمان متقاطعان $\overleftrightarrow{ل_٢}$ // $\overleftrightarrow{ل_٣}$. فما هي الأوضاع الممكنة لكلٍ من المستقيمين $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٣}$ ؟

[٢] ل$_١$ ، ل$_٢$ مستقيمان متخالفان ، $\overleftrightarrow{ل_١}$ // $\overleftrightarrow{ل_٢}$ فما علاقة $\overleftrightarrow{ل_٢}$ بـ $\overleftrightarrow{ل_٣}$ ؟

[٣] إذا كان المستقيم ل يشترك مع المستوى ك بنقطة . فما علاقة $\overleftrightarrow{ل}$ بـ ك ؟

[٤] إذا كان المستقيم ل يشترك مع المستوى س بأكثر من نقطة . فما علاقة $\overleftrightarrow{ل}$ بـ س ؟

[٥] إذا اشترك مستويان س ، ص بأكثر من نقطة . فما علاقة س بـ ص ؟

[٦] أ نقطة خارج المثلث ب جـ ء ، والمطلوب تحديد الفصل المشترك لكلٍ من أزواج المستويات التالية :

١ ■ (ب جـ ء) ، (أ ب ء) ٢ ■ (أ ب جـ) ، (ء جـ ب)

[٧] س نقطة خارج مستوى المربع أ ب جـ ء ، والمطلوب تحديد الفصل المشترك بين أزواج المستويات التالية :

١ ■ (أ ب س) ، (أ ء س) ٢ ■ (أ ب س) ، (جـ ء س)

٣ ■ (أ ء س) ، (ب جـ س) ٤ ■ (أ ء س) ، (ب ء س)

(٨ - ٢) المستقيمات المتوازية :

[١] أ ب جـ ء هرم ثلاثي رأسه أ أُخذت النقطة م على الحرف $\overline{أب}$ ثم مررنا بالنقطة م المستوى ك بحيث يوازي مستوى القاعدة (ب جـ ء) وقاطعاً الحرفين $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أء}$ في د ، هـ على الترتيب . المطلوب : أثبت أن :

١ ■ $\overline{مد}$ // $\overline{بجـ}$ ٢ ■ $\overline{دهـ}$ // $\overline{ءجـ}$ ٣ ■ $\overline{مهـ}$ // $\overline{بء}$

[٢] إذا كان س // ص ، $\overleftrightarrow{ل_١}$ // $\overleftrightarrow{ل_٢}$ حيث س ، ص يقطعان $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ وفق (أ ، ب) ، (ء ، جـ)

المطلوب : أثبت أن الشكل أ ب جـ ء متوازي الأضلاع .

el-online.net

[٣] ا نقطة خارجة عن مستوى المثلث ب جـ ء والنقاط ب١ ، جـ١ ، ء١ منتصفات الحروف ا ب ، ا جـ ، ا ء على الترتيب .

أثبت أن : المستويان (ب جـ ء) ، (ب١ جـ١ ء١) متوازيان .

[٤] أضلاع الشكل الرباعي ا ب جـ ء غير واقعة في مستوٍ واحد أخذنا على ا ب ، ا و ، ا ء النقاط ل ، م ، د على الترتيب بحيث يكون ل م // ب جـ ، ثم مددنا ل د ، ب ء تلاقيا في هـ ومددنا م د ، جـ ء تلاقيا في و المطلوب : أثبت أن : و هـ // ل م

(٨ - ٣) المستويات المتوازية :

[١] ا ، ب ، جـ ، ء أربع نقاط غير واقعة في مستوٍ واحد، نُصِّفت الحروف ا ب ، ا جـ ، ا ء بالنقاط س ، ص ، ع على الترتيب .

المطلوب :

١■ أثبت أن المستويين (ب جـ ء)، (س ، ص ع) متوازيان .

٢■ أثبت أن Δ Δ (س ص ع) (ب جـ ء) متشابهان .

٣■ إذا كانت د ، م منتصفي الضلعين ء ب ، ء جـ فأثبت أن الشكل س ص م هـ متوازي الأضلاع .

[٢] ا ب جـ ء مستطيل والنقطة م غير واقعة في مستويه لتكن النقاط س ، ص ، ع ، د منتصفات الأضلاع ا م ، م ب ، م جـ ، م ء على الترتيب. والمطلوب :

١■ أثبت أن الشكل س ص ع د شبه منحرف .

٢■ أثبت أن المستويين (ا ب جـ ء) ، (س ص ع د) متوازيان .

[٣] ا ب جـ ، ء ب جـ مثلثان غير واقعان في مستوٍ واحد ، فإذا كانت س منتصف ء ا مرّ بالنقطة س المستوى سـ بحيث يوازي المستوى (ا ب جـ) ويقطع الضلعين ء ب ، ء جـ في ص ، ع على الترتيب . المطلوب :

١■ أثبت أن : س ص // ا ب

٢■ أثبت أن : سـ (∢ ا ب جـ) = سـ (س ص ع)

el-online.net

[٤] ا ب جـ ء ، ا١ ب١ جـ ء مستطيلان غير واقعين في مستوى واحد . المطلوب :

■ ١ أثبت أن الشكل ا ا١ ب١ ب مستطيل .

■ ٢ إذا كان |ا ا١| = |ا ب| فأثبت أن الشكل ا ا١ ب١ ب مربع .

■ ٣ أثبت أن المستويين (ب جـ ب١) ، (ا ء ا١) متوازيان .

تمارين عامة

[١] أكمل العبارات الآتية :

أ) يتعين المستوى بمستقيم و ... . ب) يتوازى مستقيمان إذا ... .

جـ) إذا اشترك مستويان بنقطة فإنهما ..... .

د) أضلاع الشكل الرباعي تقع في مستوى واحد إذا ..... أو ..... .

هـ) إذا قطع مستوى ك مستويين متوازيين فإن الفصول المشتركة ..... .

و) المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث ..... .

ز) المستويان الموازيان لمستوى ثالث ..... .

ح) إذا كان $\overleftrightarrow{ل} // \overleftrightarrow{ق}$ ، $\overleftrightarrow{ق} \subset ح$ فإن ..... .

ط) إذا كان $ح \cap ك = \varnothing$ فإن ..... .

ى) المستقيم الموازي لمستويين متقاطعين ..... .

ك) يتساوى قياس زاويتين في الفضاء إذا ..... .

ل) من نقطة خارج مستوى ..... .

[٢] أي العبارات الآتية صائبة وأيها خطأ مع تصويب الخطأ (أينما وجد) :

أ) المستقيمان المتخالفان يجمعهم مستوى واحد .

ب) إذا وازى مستقيم مستويين كان المستويان متوازيين .

جـ) لايمكن أن يمر بنقطة معلومة مستويان موازيان لمستوى ثالث .

د) جميع النقاط التى على أبعاد متساوية عن مستوى معلوم تقع في مستوى يوازى المستوى المعلوم .

هـ) إذا وازى مستقيمان متوازيان مستوى ك فإن مستوى المستقيمين يوازى المستوى ك .

el-online.net

و) إذا كان $\overleftrightarrow{ل_1} \cap \overleftrightarrow{ل_2} = \varnothing$ فإن $\overleftrightarrow{ل_1} // \overleftrightarrow{ل_2}$

ز) إذا كان $\overleftrightarrow{ل} // ح$ ، $\overleftrightarrow{ق} // ح$ ، فإن $\overleftrightarrow{ل} // \overleftrightarrow{ق}$

ح) إذا كان $ح_1 // ح_2$ والمستقيم ل يقطع $ح_1$ فإنه $\overleftrightarrow{ل}$ يقطع $ح_2$

ط) إذا كان $ح // ك$ فإن $ح \cap ك = \varnothing$

ى) إذا كان $ح \cap ك = \varnothing$ فإن $ح // ك$

ك) إذا توازى مستقيمان وكان أحدهما موازياً لمستوى معلوم كان الآخر منطبقاً على هذا المستوى .

ل) $\overleftrightarrow{ل_1}$ ، $\overleftrightarrow{ل_2}$ متقاطعان ، $ل_1 // ح$ فإن $\overleftrightarrow{ل_2}$ يقطع ح .

[٣] أ ب جـ ، و ب جـ مثلثين غير واقعين في مستوى واحد نُصِّف $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ في س ، ص على الترتيب . المطلوب :

أولاً : أوجد الفصول المشتركة لأزواج المستويات الآتية :

أ) (أ ب جـ) ، (و ب جـ) ب) (أ ب جـ) ، (و س ص)

جـ) (و س ص) ، (و ب جـ)

ثانياً : أثبت أن : $\overline{ب جـ} //$ المستوى (و س ص)

[٤] أثبت أن المستويين الموازيين لمستوى ثالث متوازيان .

[٥] أ ب جـ و ، أ ب س ص متوازيا أضلاع لايجمعهم مستوى واحد .

أثبت أن : و جـ س ص متوازي أضلاع .

[٦] أ ب جـ و رباعي وجوه . برهن أن المستقيم الواصل بين منتصفي $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ يوازي المستقيم الواصل بين منتصفي $\overline{و ب}$ ، $\overline{و جـ}$.

[٧] أ ب جـ ، أ و هـ مثلثان غير واقعين في مستوى واحد . أوجد الفصل المشترك بين مستويي المثلثين في كلٍ من الحالات الآتية :

أولاً : إذا كان $\overline{ب جـ} // \overline{و هـ}$

ثانياً : إذا كان $\overline{ب جـ}$ يقطع $\overline{و هـ}$ في نقطة د

[٨] ب جـ و هـ متوازي أضلاع فيه الضلع $\overline{ب جـ}$ واقع في المستوى ك ، والضلع $\overline{و هـ}$ خارج المستوى ك ، برهن أن : $\overline{و هـ} \cap ك = \varnothing$

el-online.net

[٩] م ب جـ ء رباعي وجوه قطعناه بمستوى ك يوازي مستوى القاعده ب جـ ء وينصف $\overline{م ب}$. أثبت أن :

أ) ك ينصف كلاً من $\overline{م جـ}$ ، $\overline{م ء}$ في نقطتين ولتكن جـ ، ء

ب) $\Delta\Delta$ ب جـ ء ، ب جـ ء متشابهان .

[١٠] المستويان $ح_1$ ، $ح_2$ متقاطعان في $\overleftrightarrow{ل}$ من نقطة ب خارج المستويين نرسم المستويين $ك_1$ ، $ك_2$ بحيث $ك_1 // ح_2$ ، $ك_2 // ح_2$ أثبت أن الفصل المشترك للمستويين $ك_1$ ، $ك_2$ يوازي $\overleftrightarrow{ل}$

[١١] ا ب جـ ء رباعي وجوه لتكن س ، ص ، ع ، م منتصفات $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{ا ء}$ ، $\overline{ا ب}$ على الترتيب . المطلوب :

أولاً : أثبت أن : $\overline{س ص} // \overline{م ع}$

ثانياً : أثبت أن : الشكل س ص ع م متوازي أضلاع .

ثالثاً : أثبت أن : $\overline{ب ء}$ // المستوى س ص ع م

رابعاً : نفرض أن ط منتصف $\overline{ب ء}$ ، وأن هـ منتصف $\overline{ا جـ}$ ، بين نوع الرباعي س ط ع هـ ، ثم أوجد الفصل المشترك بين المستويين س ط ع هـ ، س ص ع م .

[١٢] تقع دائرة (د) في المستوى ك . أوجد عدد المماسات للدائرة (د) التي توازي مستوى $ح$ في كل من الحالات الآتية :

أولاً : ك يقطع $ح$ ثانياً : ك // $ح$

[١٣] إذا كان $ك_1$ ، $ك_2$ مستويين متوازيين ، وكان المثلث ب جـ ء واقع في المستوى $ك_1$ ، $\overline{س ص} \subset ك_2$ ، أوجد الفصل المشترك للمستويين ب ء س ، ب جـ ص في الحالات الآتية :

أولاً : $\overline{س ص} // \overline{ب ء}$

ثانياً : $\overline{س ص} // \overline{ب جـ}$

ثالثاً : $\overline{س ص} // \overline{ء جـ}$

رابعاً : $\overline{س ص}$ لايوازي أي مستقيم من مستقيمات المثلث .

el-online.net

[١٤] إذا مر من نقطة معلومة م ثلاثة مستقيمات غير واقعة في مستوى واحد إلى مستوى ح . أثبت أن المستوى ك المار من منتصفاتها يوازي المستوى ح

[١٥] أ ب جـ مثلث ، م نقطة خارجة عن مستواه مُدَّت $\overline{أم}$ ، $\overline{بم}$ ، $\overline{جـم}$ على استقامتها إلى $أ_1$ ، $ب_1$ ، $جـ_1$ على الترتيب بحيث كان $|م أ| = |م أ_1|$ ، $|م ب| = |م ب_1|$ ، $|م جـ| = |م جـ_1|$

أثبت أن المستوى أ ب جـ // المستوى $أ_1 ب_1 جـ_1$

[١٦] إذا كان $ك_1$ ، $ك_2$ مستويين متقاطعين في $\overline{أب}$ ، قطعهما مستوى ثالث $ك_3$ ، وفق $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{هـ و}$ على الترتيب فإذا كان $\overline{أب}$ // $ك_3$. أثبت أن :

$\overline{أب}$ // $\overline{جـ ء}$ // $\overline{هـ و}$

[١٧] أضلاع الشكل الرباعي أ ب جـ ء غير واقعة في مستوى واحد أخذنا على $\overline{أب}$، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أ ء}$ النقاط ل ، م ، د على الترتيب بحيث كان $\overline{ل م}$ // $\overline{ب جـ}$ ، ثم مددنا $\overline{ل د}$ ، $\overline{ب ء}$ فتلاقيا في هـ ، ومددنا $\overline{م د}$ ، $\overline{جـ ء}$ فتلاقيا في و برهن أن : $\overline{هـ و}$ // $\overline{ل م}$

[١٨] أ ب جـ مثلث ، م نقطة غير واقعة في مستواه أخذنا على $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$ النقاط $أ_1$ ، $ب_1$ ، $جـ_1$ على الترتيب بحيث كان :

$|م أ| = ∅ |م أ_1|$ ، $|م ب| = ∅ |م ب_1|$ ، $|م جـ| = ∅ |م جـ_1|$

أثبت أن : Δ أ ب جـ ~ Δ $أ_1 ب_1 جـ_1$

[١٩] أثبت أن علاقة التوازي على مجموعة المستويات في الفضاء هي علاقة تكافؤ .

[٢٠] ب جـ ء مثلث ، أ نقطة خارجة عن مستواه، ليكن $ب_1$ ، $جـ_1$ ، $ء_1$ منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أ ء}$ على الترتيب .

أثبت أن :

أ) $\overline{أ_1 ب_1}$ // المستوى ب جـ ء

ب) المستويين $أ_1 ب_1 جـ_1$ ، ب جـ ء متوازيان

el-online.net

[٢١] ا ب جـ مثلث ، م نقطة غير واقعة في مستواه مدّ $\overline{م ا}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$ على استقامتها إلى ا١ ، ب١ ، جـ١ على الترتيب بحيث كان :

$|م ا| = |ا ا_١|$ ، $|م ب| = |ب ب_١|$ ، $|م جـ| = |جـ جـ_١|$. أثبت أن :

أولاً : $\frac{|م ا|}{|ا ا_١|} = \frac{|م ب|}{|ب ب_١|} = \frac{|م جـ|}{|جـ جـ_١|}$

ثانياً : المستوى ا ب جـ // المستوى ا١ ب١ جـ١

ثالثاً : Δ ا ب جـ ، Δ ا١ ب١ جـ١ متشابهان .

اختبار الوحدة

[١] أي العبارات التالية صائبة وأيها خطأ مع تصويب الخطأ (أينما وجد) :

أ) إذا كان ح١ // ح٢ ، فإن جميع مستقيمات ح١ توازي ح٢

ب) إذا توازي مستقيمان وكان أحدهما موازياً لمستوى معلوم كان المستقيم الآخر موازياً لهذا المستوى .

جـ) المستوى القاطع أحد مستويين متوازيين يقطع الآخر ويكون الفصلان المشتركان متوازيين .

د) من ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمكن أن يمر أكثر من مستوى .

[٢] أثبت أنه إذا قطع مستوى ك مستويين متوازيين ح١ ، ح٢ وفق الفصول المشتركة $\overleftrightarrow{ق}$ ، $\overleftrightarrow{ل}$ فإن $\overleftrightarrow{ق}$ // $\overleftrightarrow{ل}$

[٣] ب جـ ء هـ مستطيل ، ا نقطة غير واقعة في مستواه . والمطلوب :

أولاً : الفصول المشتركة لأزواج المستويات الآتية :

١ ■ ا ب جـ ، ب جـ ء هـ

٢ ■ ا ب هـ ، ا جـ ء

٣ ■ ا ب ء ، ا جـ هـ

el-online.net

ثانياً : إذا كانت ب١ ، جـ١ منتصفي $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ على الترتيب ومررنا المستوى ك يحوي $\overline{ب_١ جـ_١}$ ويقطع $\overline{ب هـ}$ ، $\overline{جـ ء}$ في هـ١ ، ء١ على الترتيب .

فأثبت أن :

١■ $\overline{ب_١ جـ_١}$ // المستوى ب جـ ء هـ

٢■ $\overline{ب_١ جـ_١}$ // $\overline{جـ_١ ء_١}$

٣■ أثبت أن الشكل ب١ جـ١ ء١ هـ١ شبه منحرف .

ثالثاً : إذا كانت س منتصف $\overline{أء}$

فأثبت أن : ق (∡ ب جـ ء) = ق (∡ ب١ جـ١ ء١)

el-online.net

البند (٩ – ٢) النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما :

[١] أوجد قيمة ما يأتي :

أ) جا (٤٥° + ٣٠°) ب) جتا ٧٥°

جـ) ظا ٤٦٥° د) ظا ٧٥° – ظا ٣٠° – ظا ٧٥° ظا ٣٠° .

[٢] أثبت أن :

أ) جا (جـ + ٣٠°) = $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ جا جـ + جتا جـ)

ب)جتا (٤٥° – أ)جتا(٤٥° – ب)–جا(٤٥° – أ)جا(٤٥° – ب)= جا (أ+ب) .

جـ) جا^{٢} أ – جا^{٢} ب = جا (أ + ب) جا (أ – ب)

د) $\frac{\text{ظا (١٥° + س) + ظا (٣٠° – س)}}{\text{١ – ظا (١٥° + س) ظا (٣٠° – س)}}$ = ١

البند (٩ – ٣) النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية ونصفها :

[١] إذا كان قياس الزاوية (أ) حادة وكان جتا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، فأوجد قيمة :

جتا ٢أ ، جا ٢أ ، ظا ٢أ

[٢] إذا كانت جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، ٠ < أ < ٩٠° ، فأوجد كلاً من :

جا $\frac{أ}{٢}$ ، جتا $\frac{أ}{٢}$ ، ظا $\frac{أ}{٢}$

[٣] أوجد قيمة $\frac{\text{٢ ظا } \frac{١}{٢} ٦٧°}{\text{١ – ظا}^{٢} \frac{١}{٢} ٦٧°}$

el-online.net

البند (٩ – ٤) تحويل مجموع (فرق) جيبي أو جيبي تمام إلى حاصل ضرب والعكس :

[١] حول كلاً مما يأتي إلى حاصل ضرب :

أ) جا ٦٤° + جا ٤٦°　　ب) جتا ٨٥° – جتا ٣٥°

جـ) جا ٨٥° – جا ٣٥°　　د) جا (أ + ب) + جا أ

[٢] أثبت أن :

أ) $\frac{\text{جتا ٢ جـ} - \text{جتا ٥ جـ}}{\text{جا ٢ جـ} - \text{جا ٥ جـ}} = \text{ظا} \frac{٣ \text{ جـ}}{٢}$

ب) $\frac{\text{جتا ٣٥° – جا ٤٥°}}{\text{جتا ٤٥° – جا ٣٥°}} = \text{ظا ٤٠°}$

البند (٩ – ٥) حل المعادلات المثلثية :

[١] أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية : $٠ \leq س \leq ٢\pi$

أ) $\sqrt{٢}$ جتاس – ١ = ٠　　ب) جتا س = –١

جـ) جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$　　د) جاس = ٠

هـ) ٢ جا س – $\sqrt{٣}$ = ٠　　و) ظا س = –١

ز) ٣ ظا س + ٢ = ٥　　ح) ٤ جا^{٢} س = ٣

ط) ٩ ظا^{٢} س – ٣ = ٠

[٢] أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :

أ) ٦ جتا^{٢} جـ + ٥ جتا جـ + ١ = صفراً

ب) ٢٠ ظا^{٢} جـ = ٣ – ٧ ظا جـ

جـ) ٢ جا^{٢} هـ = $\sqrt{٣}$ جا هـ

د) ٦ جتا جـ – قا جـ + ١ = صفراً

el-online.net

[٣] أوجد المعادلات الآتية :

أ) جا (س – $\frac{\pi}{٤}$) = جا ٢ س

ب) ظا ٤ س = ظا ($\frac{٣}{٨}$ س + ١)

جـ) جتا $\frac{١}{٣}$ س = جتا (–س)

البند (٩ – ٦) حل المثلث وتطبيقاته :

[١] احسب زوايا المثلث ا ب جـ إذا علمت أن :

أ) $\overline{ا}$ = ٣ ، $\overline{ب}$ = ٣ ، $\overline{جـ}$ = ٥

ب) $\overline{ا}$ = ٢$\sqrt{٣}$ ، $\overline{ب}$ = $\frac{\overline{٣٧}}{٢}$ ، $\overline{جـ}$ = ٣

[٢] حل المثلث ا ب جـ إذا علمت أن :

أ) ق(∡ ا) = ٤٥° ، ق(∡ ب) = ٧٠° ، ا = ٧سم

ب) $\overline{ا}$ = ٩سم ، $\overline{جـ}$ = ١٦سم ، ق(∡ ب) = ٨٠°

جـ) $\overline{جـ}$ = ١٣سم ، ق(∡ جـ) = ٢٥° ، ق(∡ ا) = ١١٠°

[٣] ا ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، فإذا كانت أطوال أضلاعه $\overline{ا}$ = ٦سم ، $\overline{ب}$ = ٧سم ، $\overline{جـ}$ = ٥سم . احسب محيط المثلث ونصف قطر الدائرة .

el-online.net

تمارين عامة

[١] أوجد القيم الآتية :

أ) جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

ب) جا ٤٥° جتا ٣٠° – جتا ٤٥° جا ٣٠°

جـ) جتا ٤٥° جتا ٣٠° – جا ٤٥° جا ٣٠°

د) جا^{٢} ٣٠° + ٢ جتا^{٢} ٤٥° + ٣ جا^{٣} ٩٠°

[٢] إذا كانت أ = ٦٠° ، ب = ٣٠° تحقق من أن :

أ) جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

ب) جا (أ – ب) = جا أ جتا ب – جتا أ جا ب

جـ) جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب – جا أ جا ب

د) جتا (أ – ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

هـ) ظا (أ – ب) = $\frac{\text{ظا أ – ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$

و) جتا (أ + ب) = $\frac{\text{ظتا أ ظتا ب – ١}}{\text{ظتا أ + ظا ب}}$

[٣] إذا كانت ظا أ = $\frac{٥}{٤}$ ، أوجد قيمة ما يأتي $\frac{\text{٣جا أ + ٤ جتا أ}}{\text{٣جا أ – ٤جتا أ}}$

[٤] إذا كانت ظتا أ = $\frac{٢}{٣}$ ، أوجد قيمة ما يأتي $\frac{\text{٤جا أ + ٣ جتا أ}}{\text{٤جا أ – جتا أ}}$

[٥] إذا كانت ظتا أ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ أثبت أن : $\frac{\text{جا}^{٢}\text{أ}}{\text{١ + قتا}^{٢}\text{أ}} = \frac{٣}{٥}$

[٦] إذا كانت جا أ = $\frac{٤}{٥}$ أثبت أن : $\frac{\text{٤ ظا أ – ٥جتا أ}}{\text{قا أ + ظتا أ}} = \frac{٢٨}{٢٩}$

[٧] إذا كانت جا أ = $\frac{٣}{٥}$ أثبت أن : ٤ ظا أ + ٣ جا أ – ٦ جتا أ = صفراً .

el-online.net

[٨] إذا كانت ظا ا = $\frac{٤}{٣}$ أثبت أن : $\sqrt{\frac{\text{قا ا} - \text{قتا ا}}{\text{قا ا} + \text{قتا ا}}} = \frac{١}{\sqrt{٧}}$

[٩] إذا كانت ظا ا = $\sqrt{٧}$ أثبت أن : $\frac{\text{قتا}^{٢}\text{ ا} - \text{قا}^{٢}\text{ ا}}{\text{قتا}^{٢}\text{ ا} + \text{قا}^{٢}\text{ ا}} = \frac{٣}{٤}$

[١٠] إذا كانت ظا ا = $\sqrt{٢}$ − ١ أثبت أن : جا ا جتا ا = $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$

[١١] إذا كانت ظا ا = ٢ + $\sqrt{٣}$ أثبت أن : جا ا جتا ا = $\frac{١}{٤}$

[١٢] إذا كانت ظا ا = $\frac{٥}{١٢}$ أثبت أن : ظا^{٢} ا − جا^{٢} ا = ظا^{٢} ا جا^{٢} ا

[١٣] أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

أ) جا س − ١ = صفراً ب) جتا س = −١

جـ) ٣ ظاس = −٣ د) ٢ جتا س = $\sqrt{٣}$

هـ) جا س جتا س = $\frac{١}{٤}$ و) جتا^{٢} س − جا^{٢} س = $\frac{١}{٢}$

ز) ٣ جتا^{٢} س − جتا س = ٢ ح) جا ٢ س + جتا س = صفراً

[١٤] حل المثلث ا ب جـ إذا علمت أن :

أ) ا = ٣٤١ ، ب = ٤٠٥ ، ق (∠ جـ) = ١١٦° .

[١٥] إذا كان $\overline{أ}$ = ٣٥سم ، $\overline{ب}$ = ٤٥سم ، $\overline{جـ}$ = ٥٥سم ، أوجد محيط هذا المثلث .

el-online.net

اختبار الوحدة

[١] بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد :

أ) ظا ١٥° ب) جتا ٢٨٥° جـ) $\frac{\text{ظا } ١٨^\circ + \text{ظا } ١٢^\circ}{١ - \text{ظا } ١٨^\circ \text{ ظا } ١٢^\circ}$

[٢] أوجد قيمة كل من النسب الآتية بدلالة أ ، ب :

أ) جا (أ + ب) ب) جا (أ – ب)

جـ) جتا (أ – ب) د) جتا (أ + ب)

[٣] إذا كان جا أ = $\frac{٨}{١٧}$ ، ٩٠° < أ < ١٨٠° ، أوجد قيمة جا $\frac{أ}{٢}$ ، جتا $\frac{أ}{٢}$.

[٤] إذا كان جتا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، ٠° < أ < ٩٠° احسب قيمة :

جا أ ، جا ٢أ ، جتا ٢أ ، ظا ٢أ

[٥] أوجد مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين : ٠ < س ≤ ٢ π

أ) $\sqrt{٢}$ جا س – ١ = صفراً

ب) ١٢ جا^٢ س – ٥ جا س – ٢ = صفراً

[٦] حل المثلث أ ب جـ الذي فيه : ق (∡ أ) = ٣٥° ، ق (∡ ب) = ٧٥° ،

$\overline{أ}$ = ١٠ سم

el-online.net

البند (١٠ - ١) مراجعة :

[١] إذا كان لدينا درجات عشرة طلاب في أحد الاختبارات التحصيلية لمادة الرياضيات (الدرجة من ٦٠) مبينة كما يلي : ١٥ ، ٣١ ، ٢٨ ، ٤٣ ، ٢٢ ، ٥١ ، ١٩ ، ٣٧ ، ٢٥ ، ١٧ .

أوجد :

١ ■ الانحراف المتوسط للدرجات .

٢ ■ التباين للدرجات .

٣ ■ الانحراف المعياري للدرجات .

[٢] فيما يلي جدول التوزيع التكراري الذي يمثل ٥٠ طالباً في امتحان تحصيلي (الدرجة من ٦٠) .

الفئات	١٠ - ١٤	١٥ - ١٩	٢٠ - ٢٤	٢٥ - ٢٩	٣٠ - ٣٤	٣٥ - ٣٩	٤٠ - ٤٤	٤٥ - ٤٩	٥٠ - ٥٤
$ك_ر$	٣	٢	٥	٩	١٢	٨	٤	٢	٥

أوجد :

١ ■ الانحراف المتوسط للبيانات .

٢ ■ التباين للبيانات .

٣ ■ الانحراف المعياري للبيانات .

البند (١٠ - ٢) الارتباط وأشكال الانتشار :

[١] إذا كان الجدول التالي يوضح أوزان عينة مكونة من ١٢ أب (س) وأكبر الأبناء (ص) .

الوزن (س) للأب بالكيلو جرام	٦٥	٦٣	٦٧	٦٤	٦٨	٦٢	٧٠	٦٦	٦٨	٦٧	٦٩	٧١
الوزن (ص) للابن الأكبر بالكيلو جرام	٦٨	٦٦	٦٨	٦٥	٦٩	٦٦	٦٨	٦٥	٧١	٦٧	٦٨	٧٠

el-online.net

أ) ارسم شكل الانتشار

ب) احسب معامل بيرسون للارتباط الخطي بين س ، ص

جـ) احسب معامل سبيرمان لارتباط الرتب بين س ، ص

[٢] تقدم ٨ طلاب في امتحانين الأول في الفيزياء (س) ، والثاني في الكيمياء (ص) (الدرجة من عشرة) وكانت درجاتهم كما هي مبينة في الجدول الآتي :

س	٧	٣	٦	٤	١	٨	٢	٥
ص	٦	١	٨	٢	٣	٧	٥	٤

أوجد معامل ارتباط الرتب بين س ، ص

[٣] إذا كان مجموع نواتج ضرب العلامات المعيارية على اختبارين لمجموعة تتألف من ٨٠ طالب يساوى ٥٦ ، فما مقدار معامل الارتباط الخطي بين العلامات على هذين الاختبارين ؟

البند (١٠ - ٣) الانحدار :

[٤] الجدول التالي يوضح عدد العاملين بالزراعة (س) وغير العاملين بها (ص) لكل مليون من السكان في الجمهورية اليمنية للأعوام (٩٤ – ٢٠٠٠م) .

السنة	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	٢٠٠٠
عدد العاملين بالزراعة (س)	١٣	١٢	١١	١٠	٩	٨	٧
عدد غير العاملين بالزراعة (ص)	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤

أوجد : معادلة انحدار ص على س في الجمهورية اليمنية للأعوام (٩٤ – ٢٠٠٠م) .

[٥] إذا كان معامل الارتباط بين س ، ص هو : ر = ٠,٦٠ ، وإذا كانت

$\bar{س}$ = ١٠ ، $\bar{ص}$ = ٢٠ ، ع$_س$ = ١,٥ ، ع$_ص$ = ٢

أوجد : ١ ■ معادلة انحدار ص على س

٢ ■ معادلة انحدار س على ص

el-online.net

[٦] فيما يلي درجات ١٠ طلبه في مادتي الأحياء (س) والكيمياء (ص) (الدرجة من ٦٠) .

س	٢٠	١٨	١٦	١٥	١٤	١٢	١٢	١٠	٨	٥
ص	١٢	١٦	١٠	١٤	١٢	١٠	٩	٨	٧	٢

أوجد : ■ ١ معادلة انحدار ص على س

■ ٢ إذا كانت درجة أحد الطلبة في س = ١٣ درجة . فما درجته في ص ؟

البند (١٠ - ٤) الاحتمالات :

[٧] إذا كانت وسائل المواصلات بين الحديدة وعدن هي الطائرة والباخرة والسيارة ، والمطلوب : اكتب فضاء العينة المرتبطة بوسائل المواصلات لرحلة ذهاب من الحديدة إلى عدن ، ثم العودة إلى الحديدة .

[٨] باستخدام السؤال [٧] اكتب كلا من الأحداث التالية :

■ ١ حدث عدم استخدام السيارة .

■ ٢ حدث استخدام نفس الوسيلة في الذهاب والعودة .

■ ٣ حدث استخدام الباخرة في الذهاب وعدم استخدام الطائرة في رحلة العودة .

[٩] إذا كان (ع ، ك ، حا) فضاءً احتمالياً لتجربة عشوائية، أ ، ب حادثتين معرفتين على الفضاء ع

وكان : حا (أ) = $\frac{١}{٤}$ ، حا (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، حا (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$

أوجد :

■ ١ حا (أ ∪ ب) ■ ٢ حا ($\overline{أ}$ ∪ $\overline{ب}$)

■ ٣ ($\overline{ب}$ ∩ أ) ■ ٤ حا ($\overline{أ}$ ∩ $\overline{ب}$)

el-online.net

تمارين عامة

[١] إذا كانت نتيجة عشرة طلاب في امتحان نصف العام (س) وآخر العام (ص) في مادة الإحصاء كما هي مبينة في الجدول التالي . حيث نتيجة نصف العام من ٣٠ ، وآخر العام من ٦٠

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
امتحان نصف العام (س)	٢٠	١٩	٢١	١٨	٢٧	٢٥	٢٦	٢٣	٢٢	٢٤
امتحان آخر العام (ص)	٥٥	٥٢	٥٣	٥٤	٥٨	٥٦	٥١	٥٠	٥٧	٤٥

أوجد معامل الارتباط الخطي بين نتيجة هؤلاء الطلاب في امتحانهم نصف العام وأخر العام لمادة الإحصاء ، ثم استخدم ذلك في إيجاد معادلة انحدار ص على س .

[٢] ألقيت حجرا نرد متمايزان عشوائياً مرتين متتاليتين . اكتب فضاء العينة لهذه التجربة ومثِّل هذا الفضاء بيانياً على المستوى الديكارتي ، واذكر عدد نواتجها .

[٣] سُحبت بطاقتان الواحدة تلو الأخرى من بين ٨ بطاقات مرقمة ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ٨ مع اعادة البطاقة المسحوبة أولاً قبل سحب الثانية . ما عدد عناصر فضاء العينة ؟

وإذا كان أ = حادثة كلا البطاقتين تحمل عدداً أولياً .

ب = حادثة كلا البطاقتين تحمل عدداً زوجياً .

اكتب الحادثتين أ ، ب ، ثم أوجد أ ∩ ب

[٤] عرِّف ما يلي :

١ ■ التجربة العشوائية .

٢ ■ مجموعة حوادث فضاء العينة .

٣ ■ الحادثة .

٤ ■ الحادثة الأكيدة .

٥ ■ الحادثة المستحيلة .

٦ ■ شرط تنافي حادثتين .

٧ ■ دالة الاحتمال .

٨ ■ فضاء الاحتمال .

el-online.net

[٥] إذا كان أ ⊃ ب ، حا(أ) = $\frac{١}{٥}$ ، حا(ب) = $\frac{١}{٢}$

أوجد : حا(ب ∩ أ) ، ثم بيّن هل أ ، ب حادثتان متنافيتان ؟

[٦] إذا كانت أ ، ب حادثتين في فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان حا(أ) = $\frac{١}{٢}$ ،

حا(أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٤}$ ، حا(ب) = $\frac{٥}{٨}$. أوجد :

١ ■ حا(أ ∩ ب) ٢ ■ حا ($\overline{أ}$ ∪ $\overline{ب}$)

٣ ■ حا(ب ∩ $\overline{أ}$) ٤ ■ (أ ∩ $\overline{ب}$)

[٧] ألقى حجر نرد منتظم وملاحظة العدد الذي يظهر على الوجه العلوي الظاهر عليه . عشوائيا، فأوجد احتمال :

أ) ظهور عدد زوجي أو أولي .

ب) ظهور عدد فردي وأولي في نفس الوقت .

جـ) ظهور عدد عدد أولي .

د) هل أ ، جـ حادثتان متنافيتان ؟

[٨] إذا كان $\overline{س}$ = ٢٥ ، $\overline{ص}$ = ٥٠ ، ع$_{س}$ = ٧ ، ع$_{ص}$ = ١٠ ، ر = ٠,٤ .

اكتب معادلة الانحدار التي تتنبأ بها بقيم ص من خلال قيم س

[٩] إذا كانت : س = {١ ، ٢} ، ص = {أ ، ب ، جـ} أوجد مجموعة حاصل ضرب س × ص ، وإذا كانت هـ = {١ ، جـ} هل س ، هـ حادثتان متنافيتان؟ اذكر السبب وإذا كانت ع = س × ص احسب احتمال ظهور عدد أولي .

[١٠] إذا كانت علامات سبعة طلاب في اختبارين تحصيليين س ، ص (الدرجة من ١٠) كما هي مبينة في الجدول التالي :

س	٣	٩	٧	٨	٤	٧	٥
ص	٢	٧	٨	٦	٦	٥	٧

أوجد : ١ ■ معامل بيرسون بين س ، ص

٢ ■ معامل سبيرمان لارتباط الرتب بين س ، ص

el-online.net

[١١] سحبت بطاقة عشوائياً من بين ١٠٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ١٠٠ . أوجد احتمال أن العدد على البطاقة المسحوبة :

١■ يقبل القسمة على ١٠ . ٢■ يقبل القسمة على ١٧

٣■ يقبل القسمة على ١٠ أو ١٧

[١٢] الجدول التالي يوضح معدل المواليد (س) والوفيات (ص) بالمائة لكل ١٠٠٠ من السكان في الجمهورية اليمنية للأعوام (٩١ – ٢٠٠٠م)

السنة	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	٢٠٠٠
معدل المواليد ٪ (س)	٢٧	٢٥	٢٣	٢٤	٢٢	٢١	٢٠	١٨	١٩	١٧
معدل الوفيات٪ (ص)	١٤	١٢	١٣	١١	٩	١٠	٨	٥	٧	٦

أوجد : ١■ معامل الارتباط الخطي بين ص ، س

٢■ معادلة انحدار س على ص

٣■ إذا كان معدل المواليد في سنة ما = ٢٩٪

فما متوقع معدل الوفيات لنفس السنة؟

[١٣] تتسابق ثلاثة جياد (خيول) ا ، ب ، جـ إذا كان احتمال فوز ا هو ضعف احتمال فوز ب واحتمال فوز ب هو ضعف احتمال فوز جـ . فما هو احتمال فوز كل واحد منهما . أو بعبارة أخرى ما هي الاحتمالات حا (ا) ، حا (ب) ، حا (جـ)؟

[١٤] مجموعة من الموظفين بإحدى المؤسسات دخولها المنظوره (س) وانفاقها الاستهلاكي (ص) بالألف كما هي مبينه في الجدول التالي :

الدخل (س)	١٥	٢٠	١٧	٢٢	١٨	١٤	١٩	٢١	٢٤	١٨
الدخل (ص)	٢٥	٣٦	٢٨	٤٠	٢٧	٢٤	٣٨	٣٥	٤٢	٣٠

أوجد : ١■ معامل سبيرمان لارتباط الرتب بين س ، ص

٢■ معادلة انحدار الانفاق على الدخل

el-online.net

٣■ قدر الإنفاق الاستهلاكي للموظفين الذين دخولهم كما يلي :

أ) ١٦٠٠٠ ريال ب) ٢٣٠٠٠ ريال

جـ) ٢٥٠٠٠ ريال د) ١٣٠٠٠ ريال

اختبار الوحدة

[١] إذا كانت نتيجة امتحان ٨ طلاب في مادة اللغة العربية (س) واللغة الإنجليزية (ص) كما هي مبينة في الجدول التالي :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
امتحان اللغة العربية (س)	٧٥	٦٠	٣٥	٥٢	٧٧	٨٢	٤١	٥٥
امتحان اللغة الإنجليزية (ص)	٥١	٦١	٦٥	٨٥	٤٥	٦٣	٧٣	٨٢

أوجد :

١■ معامل الارتباط الخطي بين س ، ص

٢■ معامل سيبرمان بين س ، ص

٣■ معادلة انحدار ص على س

٤■ معادلة انحدار س على ص

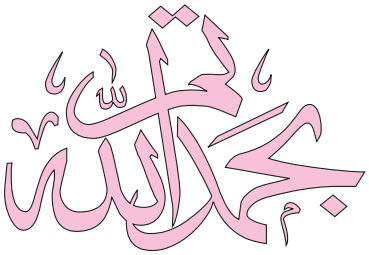
٥■ إذا كانت درجة أحد الطلاب في اللغة الإنجليزية = ٦٧ درجة . أوجد الدرجة المتوقعة التي يمكن أن يحصل عليها نفس الطالب في اللغة العربية .

[٢] في إحدى المسابقات لشغل إحدى الوظائف تقدم رجلان $ر_1$ ، $ر_2$ ، وثلاث سيدات $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، وكان احتمال فوز الرجال متساوياً واحتمال فوز السيدات متساوياً، ولكن احتمال فوز الرجل ضعف احتمال فوز السيدة . أوجد :

١■ احتمال أن تفوز إحدى السيدات بالوظيفة .

٢■ إذا كان الرجل $ر_1$ هو زوج السيدة $س_1$. فما هو احتمال أن يفوز أحدهما بالوظيفة ؟

el-online.net



el-online.net

استبانة تقويم الكتاب

بيانات المستجيب:

الاسم /.....	المؤهل وتاريخه /.....	التخصص /.....
العمل الحالي /.....	المحافظة /.....	

بيانات الكتاب:

المادة /.....	الصف /.....	اسم الكتاب /.....
الجزء /.....	الطبعة.....	السنة الدراسية /.....
تاريخ تعبئة الاستبانة.....		

نهدف من هذه الاستبانة تقويم الكتاب بغرض تحسينه في الطبعات القادمة،
نرجو التكرم بوضع علامة (✓) تحت الوصف الذي تراه مناسباً لإجابتك أمام كل بند.

البنـــد	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
أولاً- الأهداف:				
- وضوح الصياغة .				
- تقيس فكرة محددة .				
- يمكن قياسها .				
- شاملة (معرفية - مهارية - وجدانية) .				
ثانياً - المادة العلمية وأسلوب عرضها:				
- ملائمة لغة الكتاب لمستوى المتعلم .				
- سلامة ووضوح لغة الكتاب .				
- ترسيخ المحتوى للقيم الدينية والوطنية .				
- مادة الكتاب تكسب المتعلم خبرات جديدة .				
- ملامسة المادة لمشكلات المتعلم واهتماماته .				
- مادة الكتاب تساعد المتعلم على فهم المشكلات .				
- مادة الكتاب تراعي الفروق الفردية .				
- خلو الكتاب من التكرار في الموضوعات .				
- يراعي أسلوب عرض المادة الترابط والتسلسل المنطقي .				
- مراعاة مادة الكتاب للحداثة والدقة العلمية .				
- عرض المادة تحفز على القراءة والبحث والتفكير .				
- تحقيق المحتوى لأهداف المادة .				

البنـــد	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
ثالثاً - الوسائل التعليمية:				
- وضوحها ودقتها .				
- ارتباطها بموضوعات الدرس .				
- مدى ارتباطها بالأهداف .				
رابعاً -التقويم:				
- الأنشطة والتمارين تكسب المتعلم مهارات متنوعة .				
- بطاقات التفكير تثير دافعية البحث والإطلاع .				
- الأسئلة والتمرينات تقيس مدى تحقيق الأهداف .				
- مناسبة لمستوى المتعلم .				
- دقة ووضوح الصياغة .				
- تراعي الفروق الفردية .				
- متنوعة وشاملة للجوانب المعرفية .				
- تساعد المتعلم في تطبيق ما تعمله في مواقف الحياة المختلفة .				
- كفاية الأسئلة في مساعدة المتعلم على استيعاب مادة الكتاب .				
خامساً - الشكل والإخراج الفني:				
- ارتباط الغلاف بمحتوى الكتاب .				
- متانة تجليد الكتاب .				
- وضوح الألوان ومناسبتها .				
- وضوح ودقة الطباعة .				
- نوعية ورق الكتاب .				

el-online.net

أسئلة عامة، أجب بـ (نعم) أو (لا):

البنـــد	نعم	لا	
– ينسجم محتوى الكتاب مع نظام الفصلين الدراسيين .			
– عدد الحصص المقررة تكفي لا ستيعاب مادة الكتاب .			
– هل الوسائل التعليمية متنوعة وكافية ؟			
– هل هناك ضرورة لوجود قائمة بالمراجع ومصادر المعلومات ؟			
– هل هناك موضوعات ترى ضرورة حذفها (اذكرها) ؟			
– هل هناك موضوعات ترى ضرورة إضافتها (اذكرها) ؟			
إذا كان لديك ملاحظات أخرى اكتبها			

قائمة الأخطاء العلمية واللغوية والمطبعية:

الخطأ	الصفحة	السطر	الصواب

نرجو التكرم بإرسال الاستبانة إلى

الإدارة العامة للمناهج

تيلفكس: ٠١/ ٥٧٥٥٤٩

ص. ب: (٣٥٢٨) صنعاء - الجمهورية اليمنية

البريد الإلكتروني: manhg2013@hotmail.com

أو إدارة المناهج بمكتب التربية بالمحافظة

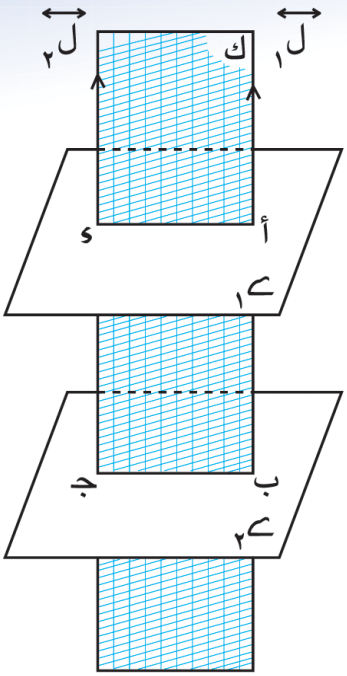
el-online.net

el-online.net

الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني

el-online.net

el-online.net


ل١
ل٢
ك
أ
ء
ح١
ب
جـ
ح٢