الثالث الثانوي العلمي

المدة : ساعتان

مركز أونلاين التعليمي

اختبار المتتاليات

رياضيات /2022/ بكالوريا

مركز أونلاين التعليمي

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول : نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $u_0 = \frac{5}{2}$ أيا كان العدد الطبيعي n :

$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$ و المطلوب :

1. أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$ أيا كان العدد الطبيعي n
2. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة

السؤال الثاني : $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية أساسها 5 وفيها $u_1 = -2$

اكتب عبارة u_n بدلالة n واستنتج قيمة المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{15}$

السؤال الثالث : لنتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = \frac{2n+3}{n+5}$ ، هذه متتالية من النمط

$u_n = f(n)$ و f هو التابع الكسري المعرف على $]0, +\infty[$

بالصيغة $f(x) = \frac{2x+3}{x+5}$

1. أثبت أن التابع متزايد تماما على $]0, +\infty[$
2. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$
3. أوجد $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$
4. أثبت أن $u_n \leq 2$

السؤال الرابع : نتأمل المتتاليتين $(X_n)_{n\geq0}$ و $(Y_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق :

$$X_{n+1} = \frac{1}{3}X_n - 2 \quad , \quad Y_n = X_n + 3 \ , X_0 = 3$$

1. أثبت أن المتتالية $(Y_n)_{n\geq0}$ هندسية ثم اكتب X_n بدلالة n
2. أثبت أن المتتالية $(X_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماما

السؤال الخامس : ليكن $n \geq 1$ عدد طبيعي بحيث $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

1. احسب S_1, S_2, S_3, S_4 ثم عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n , n
2. أثبت بالتدريج في حالة $n \geq 1$ عدد طبيعي أن $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

انتهت الأسئلة ...

مع اطيب الامنيات لكم بالنجاح

▪ السؤال الأول

- عن طريق الحد العام
  - $U_n = n$
- بالتدريج
  - $U_{n+1} = U_n$ ونعطي حدّ البدء

$(U_n)_{n \geq 0}$

$n \rightarrow$ انبة نلبش من الصفر

1 :

$$\overset{\text{حد قاصر}}{2} \leq \underbrace{U_n}_{\text{لم محدودة}} \leq \overset{\text{حد راجح}}{3}$$

البرهان

- **مراجحة**: ننطلق من ★ نجري عمليات حسابية حتى نصل U_{n+1}.
- **مساواة**: ننطلق من طرف ندخل للطرف الآخر.

الإثبات بالتدريج

- **نرمز** للقضية برمز مناسب وليكن $E(n)$.
- **نبرهن** صحة القضية من أجل أصغر عدد بالمجموعة المعطاة ← العدد الطبيعي 0 ← حدّ البدء.
- **نفرض** صحة القضية من أجل n.
- **نبرهن** صحة القضية من أجل $n+1$.

1. نرمز للقضية : $E(n) : 2 \leq U_n \leq 3$
2. نبرهن صحة القضية من أجل العدد (0) :

$$2 \leq U_0 \leq 3$$

نعوض

$$2 \leq \frac{5}{2} \leq 3$$

"محققة"

3. نفرض صحة القضية من أجل n :

$$2 \leq U_n \leq 3 \quad ★$$

"محققة"

4. نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

أي سنبرهن :

$$2 \leq U_{n+1} \leq 3$$

البرهان

- ننطلق من ★

$$2 \leq U_n \leq 3$$

- نضيف (-2)

$$0 \leq U_n - 2 \leq 1$$

- نربع

$$0 \leq (U_n - 2)^2 \leq 1$$

- نضيف (2)

$$2 \leq (U_n - 2)^2 + 2 \leq 3$$

$$\Rightarrow 2 \leq U_{n+1} \leq 3$$

2 :

إطراد متتالية

- متزايدة تماماً: $U_{n+1} > U_n$
- متزايدة: $U_{n+1} \geqslant U_n$
- متناقصة تماماً: $U_{n+1} < U_n$
- متناقصة: $U_{n+1} \leqslant U_n$
- ثابتة: $U_{n+1} = U_n$

$$U_{n+1} \leqslant U_n$$

1. نرمز للقضية : $E(n) : U_{n+1} \leqslant U_n$
2. نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$
أي سنبرهن

$$U_1 \leqslant U_0$$

بالتعويض

$$\frac{9}{4} \leqslant \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2.25 \leqslant 2.5$$

" محققة "

3. نفرض صحة القضية من أجل n :

$$U_{n+1} \leqslant U_n \quad ★$$

" محققة "

4. نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$ أي سنبرهن ،

$$U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$$

البرهان

- ننطلق من ★ :

$$U_{n+1} \leqslant U_n$$

- نضيف (-2) :

$$U_{n+1} - 2 \leqslant U_n - 2$$

- نربع :

$$(U_{n+1} - 2)^2 \leqslant (U_n - 2)^2$$

- نضيف $(+2)$:

$$(U_{n+1} - 2)^2 + 2 \leqslant (U_n - 2)^2 + 2$$

$$\Rightarrow \quad U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$$

" محققة " !

■ السؤال الثاني

تذكرة :

الهندسية	الحسابية
المعيار : نسمّي كل حدّين سابقه بضربه لعدد سمّي أساس المتتالية q	**المعيار :** نسمّي كل حدّين سابقه بإضافة عدد سمّي أساس المتتالية r
القاعدة العامة: $\frac{U_\star}{U_\heartsuit} = q^{\star-\heartsuit}$	**القاعدة العامة:** $U_\star - U_\heartsuit = (\star - \heartsuit).r$
قاعدة المجموع: $S =$ الحد الأول $\times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$	**قاعدة المجموع:** $S =$ عدد الحدود $\times \frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}$
برهان هندسية: $\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ عدد ثابت لا يتعلق بـ n	**برهان حسابية:** $U_{n+1} - U_n =$ عدد ثابت لا يتعلق بـ n

• إذا كانت الحدود متعاقبة فإنّ عددها هو

⇐ الدليل الأخير - الدليل الأول +1

$$U_\star - U_\heartsuit = (\star - \heartsuit).r$$

$$U_n - U_1 = (n-1).5$$

$$U_n + 2 = 5n - 5$$

$$\Rightarrow U_n = 5n - 7$$

$S =$ عدد الحدود $\times \frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}$

$$= 15 \times \frac{-2+68}{2}$$

$$= 15 \times 33$$

$$= 495$$

■ السؤال الثالث 2020

"1"

نشتق وندرس إشارة المشتق

$$f'(x) = \frac{2x+10-2x-3}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{7}{(x+5)^2} > 0$$

⇐ متزايد تماماً

السؤال الرابع

"1"

$$\frac{Y_{n+1}}{Y_n} = \text{عدد ثابت لا يتعلق بـ } n$$

$$\frac{\frac{1}{3}X_n - 2}{X_n + 3}$$

$$\frac{\frac{1}{3}(X_n + 3)}{(X_n + 3)} = \frac{1}{3} = Const$$

⟸ المتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

• نكتب Y_n بدلالة n ثم X_n بدلالة n اعتماداً على علاقة الجمع X_n و Y_n.

$$\frac{Y_*}{Y_0} = q^{*-0}$$

$$\boxed{X_n = \frac{6}{3^n} - 3}$$

$$\frac{Y_n}{Y_0} = q^{n-0} \Rightarrow \frac{Y_n}{6} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow Y_n = \frac{6}{3^n} \Rightarrow X_n = y_n - 3$$

"2"

بما أن المتتالية معرّفة عن طريق الحد العام فإن اطرادها هو نفس اطراد التابع المرفق بها: $U_n = n$

بما أن $U_n = f(n)$ و f متزايد تماماً فالمتتالية متزايدة تماماً.

"3"

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 2$$

"4"

لا نستطيع تحويل الأطراف لأنها ليست معرّفة بالتدريج إنما نستطيع الاعتماد على جدول التغيرات للتابع f أو ننقل العدد 2 ونبرهن $U_n - 2 \le 0$

ط2:

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{3}{5}$ ↗	2

$f(x) \le 2$

$U_n \le 2$

ط1:

$$\Rightarrow \frac{2n+3}{n+5} \le 2$$

$$\frac{2n+3-2n-10}{n+5} \le 0$$

$$\frac{-7}{n+5} \le 0$$

$$\Rightarrow U_n - 2 \le 0 \Rightarrow U_n \le 2$$

"2"

$$x_{n+1} < x_n$$

1. نرمز للقضية :

$$E(n) = x_{n+1} < x_n$$

2. نبرهن $E(0)$ صحيحة :

$$x_1 < x_0$$

$$-1 < 3$$

"متحققة"

3. نفرض $E(n)$ صحيحة :

$$x_{n+1} < x_n \quad \star$$

"صحيحة"

4. نبرهن $E(n+1)$ صحيحة أيّ

سنبرهن :

$$x_{n+2} < x_{n+1}$$

البرهان

• ننطلق من $\star$

$$x_{n+1} < x_n$$

• نضرب : $\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} x_{n+1} < \frac{1}{3} x_n$$

• نضيف : (-2)

$$\frac{1}{3} x_{n+1} - 2 < \frac{1}{3} x_n - 2$$

$$\Rightarrow x_{n+2} < x_{n+1}$$

السؤال الخامس

"1"

- $S_1 = 1^2 = 1$
- $S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$
- $S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$
- $S_4 = 30$

- $S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + n^2 + (n+1)^2$

$$\Rightarrow S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

1. نرمّز للقضية

$$E(n): \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. نبرهن صحة القضية من أجل $n=1$

$$\Rightarrow \quad S_1 \overset{?}{=} \frac{6}{6}$$

$$\Rightarrow \quad S_1 = 1$$

"محققة"

3. نفترض $E(n)$ صحيحة :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \star$$

"صحيحة"

4. نبرهن $E(n+1)$ أي سنبرهن :

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+2+1)}{6}$$

البرهان

$$L_1 = S_{n+1} = \underbrace{S_n}_{\text{حسب } \star} + (n+1)^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$(n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right]$$

$$= (n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Sdra imad deeb