تم تحميل الملف
من موقع بداية

بداية
beadaya.com | موقع بداية التعليمي

للمزيد اكتب
في جوجل
Google

موقع بداية التعليمي كل ما يحتاجه **الطالب والمعلم**
من ملفات تعليمية، حلول الكتب، توزيع المنهج،
بوربوينت، اختبارات، ملخصات، اختبارات إلكترونية،
أوراق عمل، والكثير...

حمل التطبيق

GET IN ON Google Play

Download on the App Store

الفصل الثالث المتطابقات والمعادلات المثلثية

اختبار سريع:

حلل كل عبارة فيما يأتي تحليلاً تاماً، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فأكتب " أولية ".

(1) $-4a(4a-1)$

(2) $5(x+2)(x-2)$

(3) أولية

(4) $(2y+5)(y-3)$

(5) هندسة:

$$\frac{x^2+6x+8}{x+4}=\frac{(x+2)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=x+2$$

حل كلاً من المعادلات الآتية بإستعمال التحليل:

(6) $x^2+6x=0$

$$x^2+6x=0$$
$$\therefore\ x(x+6)=0$$
$$\therefore\ x=0\ ,\ x+6=0$$
$$\therefore\ x=0\ ,\ x=-6$$

(7) $x^2+2x-35=0$

$$x^2+2x-35=0$$
$$\therefore (x+7)(x-5)=0$$
$$\therefore\ x=-7\ ,\ x=5$$

$$x^2-9=0 \quad (8)$$

$$x^2-9=0$$
$$\therefore (x-3)(x+3)=0$$
$$\therefore \ x=3 \ , \ x=-3$$

$$x^2-7x+12=0 \quad (9)$$

$$x^2-7x+12=0$$
$$\therefore (x-3)(x-4)=0$$
$$\therefore \quad x=3 \ , \ x=4$$

---

(10) حدائق:

$$x(x+1)=42$$
$$\therefore \ x^2+x=42$$
$$\therefore \ x^2+x-42=0$$
$$\therefore (x+7)(x-6)=0$$
$$\therefore \quad x=-7 \ , x=6$$

قيمة x الممكنة هي $x=6 \ ft$ حيث لا يوجد طول بالسالب.

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (11)$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2} \quad (12)$$

$$\frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3} \quad (13)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (14)$$

(15) قصر المصمك:

$$36 \sin 30 = 36 \times \frac{1}{2} = 18\,m$$

■ **تحقق من فهمك:**

(1)

(1A

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\therefore \sin^2\theta+\frac{1}{3}=1$$

$$\therefore \sin^2\theta=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

وحيث θ تقع في الربع الرابع فإن $\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

(1B

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\therefore \frac{-2}{7}+\cos^2\theta=1$$

$$\therefore \cos^2\theta=1+\frac{2}{7}=\frac{9}{7}$$

$$\therefore \cos\theta=\pm\frac{3}{\sqrt{7}}$$

وحيث θ تقع في الربع الثالث فإن $\therefore \cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{7}}=-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

■ **تحقق من فهمك:**

(2)

(2A

$$\frac{\tan^2\theta\csc^2\theta-1}{soc^2\theta}=\frac{\frac{\cancel{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta}\square\frac{1}{\cancel{\sin^2\theta}}-1}{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}\square\cancel{\cos^2\theta}=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$$

(2B

$$\frac{\sec\theta}{\sin\theta}\left(1-\cos^2\theta\right)=\frac{\sec\theta}{\cancel{\sin\theta}}\square\sin^{\cancel{2}}\theta$$

$$=\sec\theta\square\sin\theta=\frac{1}{\cos\theta}\square\frac{\sin\theta}{1}=\tan\theta$$

■ تحقق من فهمك:

(3)

$$T=fr\sin\theta$$

$$\frac{T}{\mathrm{r}\sin\theta}=\frac{\mathrm{fr}\sin\theta}{r\sin\theta}$$

$$f=\frac{T}{\mathrm{r}\sin\theta}$$

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية:

(1)

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} = \frac{1}{2}$$

(2)

$$\boldsymbol{csc}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

(3)

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{-12}{13}$$

(4)

$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$$

$$\therefore \sec^2\theta = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore \sec\theta = \sqrt{2}$$

(5)

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(6)

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

$$\therefore \frac{1}{16} + \frac{16}{16} = \csc^2\theta$$

$$\therefore \csc^2\theta = \frac{17}{16}$$

$$\therefore \csc\theta = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

(7)

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\therefore \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\therefore \cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{3}{5}$$

(8)

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$$

$$\therefore = \frac{2}{9}\sin^2\theta$$

$$\therefore \cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{\sqrt{27}}{9}$$

بسط كل عبارة مما يأتي:

(9)

$$\tan\theta\cos^2\theta = \frac{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}\cancel{\cos}\cos^{\cancel{2}}\theta$$

$$= \sin\theta\cos\theta$$

(10)

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 1$$

(11)

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta\times\dfrac{1}{\sin\theta}}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\cot^2\theta$$

(12)

$$\sec\theta\tan^2\theta+\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^3\theta}=\frac{1}{\cos^3\theta}=\sec^3\theta$$

(13)

$$\sin\theta\left(1+\cot^2\theta\right)=\sin\theta\left(1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$$=\sin\theta\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)=\cancel{\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\cancel{^2}\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$$

(14)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sec\theta=\cancel{\cos\theta}\times\frac{1}{\cancel{\cos\theta}}=1$$

(15)

$$\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

(16)

$$(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$$

(17)

$$2-2\sin^2\theta$$
$$= 2(1-\sin^2\theta) = 2\cos^2\theta$$

(18)

$$\csc\theta - \cos\theta\cot\theta$$
$$= \frac{1}{\sin\theta} - \cos\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta} = \sin\theta$$

(19) بصريات:

(a $I = I_\circ \cos^2\theta$

(b $I = \frac{3}{4} I_\circ$ أي أن شدة الضوء تساوي ثلاث أرباع شدة الضوء قبل مرورها بالعدسة الثانية.

(20) الشمس:

(a $W = \frac{eAS}{\sec\theta} = eAS\cos\theta$

$$W = eAS\cos\theta = 0.8\times 0.75\times 1000\times\cos 40^\circ$$
$$= 459.63w$$

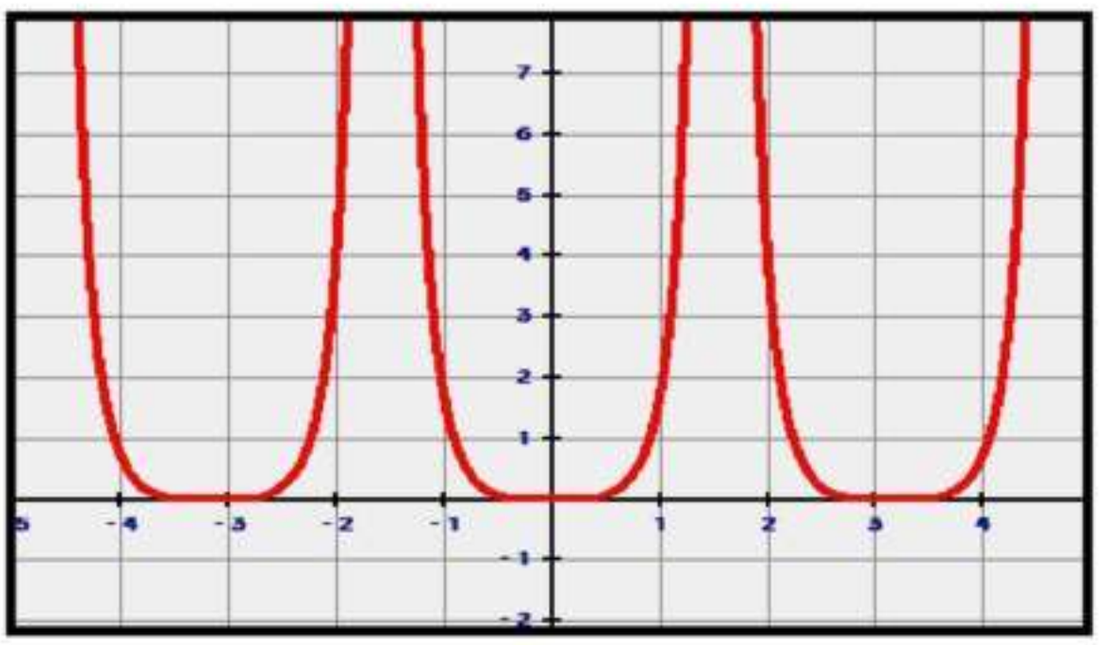
(b

(21) تمثيلات متعددة:

a) جدولياً:

θ	60°	45°	30°	0°
$\tan^2\theta-\sin^2\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0
$\tan^2\theta\sin^2\theta$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0

b) بيانياً:



متطابقان

c) تحليلياً:

نعم التمثيلان متطابقان.

d) تحليلياً:

نعم تمثل متطابقة.

(22) التزلج على الجليد:

$$\mu_k = \frac{mg\sin\theta}{F_n} = \frac{\cancel{mg}\sin\theta}{\cancel{mg}\cos\theta} = \tan\theta$$

بسط كلاً مما يأتي:

(23)

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}=\frac{\sin\theta-1}{1-\sin\theta}=-1$$

(24)

$$\frac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}=\frac{\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta+\sin\theta}{1+\frac{1}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+1}=\frac{\sin\theta\cancel{(1+\cos\theta)}}{\cancel{\cos\theta+1}}=\sin\theta$$

(25) إكتشف الخطأ:

أحمد،

لم يبرهن سعيد صحة المتطابقة عند جميع قيم θ، وقد يكون هناك قيم أخرى لا تحقق المعادلة.

(26) تحد:

ليست متطابقة عتد $x=45^\circ$

(27) تبرير:

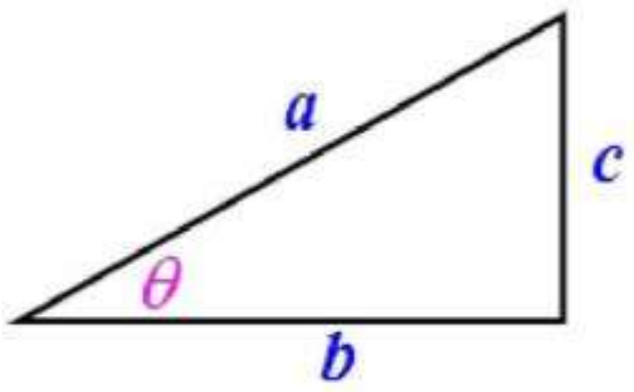
$$\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$$

$$\therefore \frac{1}{\cos\theta} = \frac{I}{ER^2}$$

$$\therefore I\cos\theta = ER^2$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{ER^2}{I}$$

(28) أكتب:



$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 + b^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2}{a^2} = 1$$

(29) برهان:

$$\tan\theta(-a) = \frac{\sin(-a)}{\cos(-a)} = \frac{-\sin a}{\cos a} = -\tan a$$

(30) مسألة مفتوحة:

$$\tan\theta\sin\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin^2\theta\sec\theta$$

(31) تبرير:

أقسم جميع الحدود على $\sin^2\theta$

(32) **إكتشف الخطأ:**

إجابة سامي هي الصحيحة: لأن علاء إستخدم علاقة خاطئة.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل مما يأتي، اكتب قياس الزاوية بالراديان، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا:

(33) 2.09

(34) 0.60

0.50 (35)

0.80 (36)

(37)

$K + x^2 = 3x + 2$

$\therefore K + 25 = 15 + 2$

$\therefore K = 17 - 25 = -8$

(38)

$2^x = 32^{x-2}$

$\therefore 2^x = 2^{5x-10}$

$\therefore x = 5x - 10$

$\therefore 10 = 4x$

$\therefore x = 2.5$

تدرب على إختبار

(39)

$5 \leftarrow A$

(40)

$\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2} \leftarrow B$

(3-2) إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

■ **تحقق من فهمك:**

(1)

(1)

$$\cot^2\theta-\cos^2\theta$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-\cos^2\theta=\cos^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)$$

$$=\cos^2\theta\left(\csc^2\theta-1\right)=\cos^2\theta\cot^2\theta$$

■ **تحقق من فهمك:**

(2) $\cos^2\theta \leftarrow c$

$$\tan^2\theta\left(\cot^2\theta-\cos^2\theta\right)$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-\cos^2\theta\right)=\frac{\cancel{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta}\left(\frac{\cos^2\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cancel{\sin^2\theta}}\right)$$

$$=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$$

■ **تحقق من فهمك:**

(3)

$$\csc^2\theta-\cot^2\theta$$

$$=\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)=\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=1$$

$$\cot\theta\tan\theta$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\square\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=1$$

تدرب وحل المسائل

اثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة.

(1)

$$\cos^2\theta+\tan^2\theta\cos^2\theta$$

$$=\cos^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}\square\cancel{\cos^2\theta}$$

$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

(2)

$$\cot\theta\left(\cot\theta+\tan\theta\right)$$

$$=\cot^2\theta+\cot\theta\tan\theta=\cot^2\theta+1$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+1=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}=\csc^2\theta$$

(3)

$$1+\sec^2\theta$$

$$=1+\frac{1}{\cos^2\theta}\sin^2\theta$$

$$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$$

(4)

$$\sin\theta\sec\theta\cot\theta$$

$$=\sin\theta\frac{1}{\cos\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta\sin\theta}=1$$

(5)

$$(\sec\theta-\cot\theta)^2$$

$$=\sec^2\theta-2\sec\theta\cot\theta+\cot^2\theta$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}-2\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1-2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}=\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\cancel{(1-\cos\theta)}(1-\cos\theta)}{\cancel{(1-\cos\theta)}(1+\cos\theta)}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

(6)

$$\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{(1-\cos^2\theta)-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\tan\theta\cot\theta$$

(7)

$$\frac{\sec\theta}{\csc\theta}$$

$$=\frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

(8)

$$\sin\theta\cot\theta$$

$$=\cancel{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\cancel{\sin\theta}}=\cos\theta$$

(9)

$$(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta)$$

$$= \sin\theta\tan\theta + \sin\theta\sec\theta - \tan\theta - \sec\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta - 1}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} = \cos\theta$$

(10)

$$\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta)$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

(11) إختيار من متعدد:

$\csc^2\theta \leftarrow D$

اثبت أن كل معادلة مما يأتى تمثل متطابقة.

(12)

$$\sec\theta - \tan\theta$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

(13)

$$\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=\frac{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\cancel{\cos\theta+\sin\theta}}{\cos\theta\cancel{(\sin\theta+\cos\theta)}}$$

$$\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

(14)

$$\sec\theta\csc\theta$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$\tan\theta+\cot\theta$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

(15)

$$\frac{2\sin^2\theta-1}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin^2\theta-\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\cancel{(\sin\theta-\cos\theta)}(\sin\theta+\cos\theta)}{\cancel{\sin\theta-\cos\theta}}$$

$$=\sin\theta+\cos\theta$$

(16)

$$\frac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$$

$$=\frac{2+\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta\sin\theta}}=2\cos\theta\sin\theta+1$$

$$=2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)^2$$

(17)

$$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$=\frac{\cos\cancel{^2}\theta}{\cancel{\cos}\theta(1-\sin\theta)}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

(18)

$$\frac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$$

$$=\frac{\csc^2\theta-1}{\csc\theta+1}=\frac{(\csc\theta-1)\cancel{(\csc\theta+1)}}{\cancel{\csc\theta+1}}$$

$$=\csc\theta-1$$

(19)

$$\csc^2\theta-\cot^2\theta$$

$$=1$$

$$\sec^2\theta-\tan^2\theta$$

$$=1$$

(20)

$$\sin\theta\cos\theta\tan\theta+\cos^2\theta$$

$$=\sin\theta\cos\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\cos^2\theta$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

(21)

$$\sec\theta - \cos\theta$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - \cos\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$\sec\theta - \cos\theta$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \sin\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

(22)

$$\cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$$

$$= \cot^2\theta + \sin\theta \square \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

(23)

$$\frac{\sec\theta - \csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$$

$$= \frac{1}{\csc\theta} - \frac{1}{\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$$

(24) ألعاب:

$$L=\frac{g\tan\theta}{w^2\sin\theta}=\frac{g\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{w^2\sin\theta}=\frac{g\dfrac{1}{\cos\theta}}{w^2}=\frac{g\sec\theta}{w^2}$$

نعم الصيغة $L=\dfrac{g\tan\theta}{w^2\sin\theta}$ تمثل علاقة بين L ، θ

(25) جرى:

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

$$\therefore \cos\theta=0.968 \quad \therefore \tan\theta=0.258$$

$$v^2=gR\tan\theta=9.8\times16.7\times0.258=42.22$$

$$\therefore v=6.5 \quad m/s$$

بسط كلاً من العبارات الآتية لتحصل على الناتج 1 أم 1– .

(26) 1

(27) 1–

(28) 1

(29) 1

(30) 1

(31) –1

(32) 1

(33) –1

بسط كل مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

(34)

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cancel{\csc\theta}}{\csc\cancel{^{2}}\theta}=\frac{\cot\theta}{\csc\theta}=\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}}=\cos\theta$$

(35)

$$\frac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}=\frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}=\frac{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

(36)

$$\frac{\sec^2\theta-\tan^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1}{1}=1$$

(37)

$$\tan\theta\cos\theta$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}\square\cancel{\cos\theta}=\sin\theta$$

$$\cot\theta\tan\theta=1$$ **(38)**

(39)

$$\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\cancel{\cos\theta}}\square\cancel{\cos\theta}=1$$

(40)

$$\left(\sec^2\theta+\csc^2\theta\right)-\left(\tan^2\theta+\cot^2\theta\right)=\left(\sec^2\theta-\tan^2\theta\right)+\left(\csc^2\theta-\cot^2\theta\right)$$
$$=1+1=2$$

(41) فيزياء:

$$y=\frac{-gx^2}{2w_\circ^{\,2}}\left(1+\tan^2\theta\right)+x\tan\theta$$

(42) إلكترونيات:

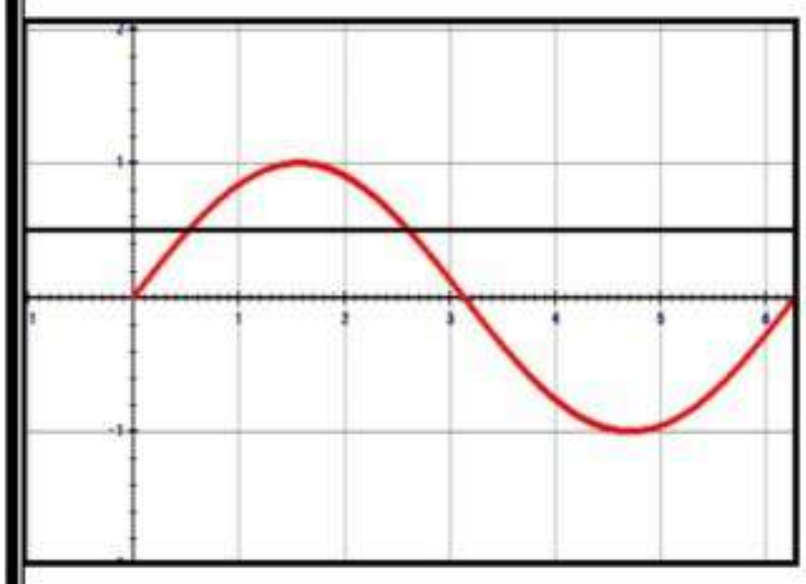
$$P=I_\circ^{\,2}R\left(1-\cos^2 2\pi ft\right)$$ *(a*

$$P=\frac{I_\circ^{\,2}R}{\csc^2 2\pi ft}$$ *(b*

(43) تمثيلات متعددة:

a) جبريا: $\sin x=0.5$

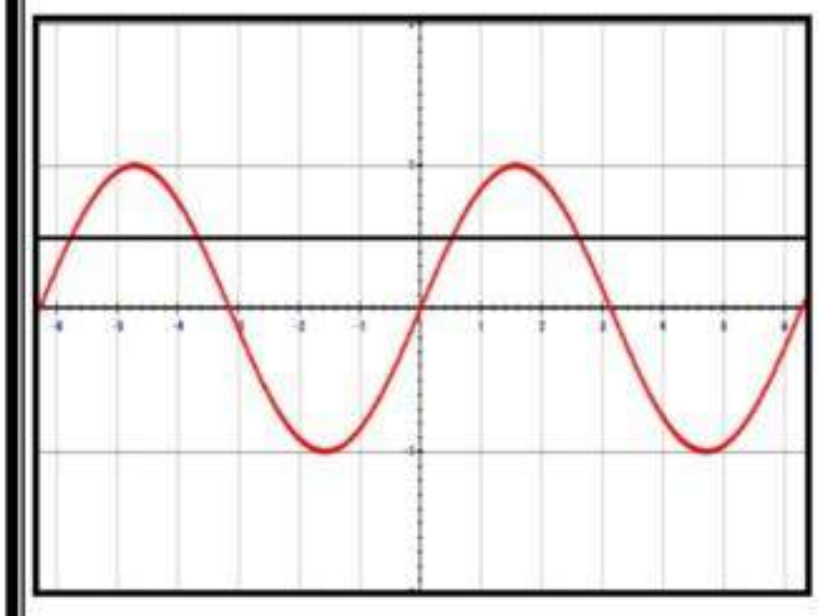
b) بيانيا:



يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y=\sin x$ ، $y=0.5$

عند النقاط $x=\frac{\pi}{6}$ ، $x=\frac{5\pi}{6}$ على الفترة $[0,2\pi)$

c) بيانيا:



يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y=\sin x$ ، $y=0.5$

عند النقاط $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{-7\pi}{6}$ ، $\frac{-11\pi}{6}$

على الفترة $[-2\pi,2\pi)$

d) بما أن الجيب دالة دورية تكون حلول المعادلة هي $x=\frac{\pi}{6}+2n\pi$ ، $x=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$

حيث عدد n صحيح.

(44) إكتشف الخطأ:

$\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2\sin^2\theta$، باقي المعادلات هي متطابقة فيثاغورس ولكن هذة المعادلة ليست منها.

(45) تبرير:

لأن $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ هي متطابقة فيثاغورس أما الدالة $\sin\theta = \sqrt{1-\cos\theta}$ فليست منها

(46) أكتب سؤالاً:

هل استعملت المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$؟

(47) أكتب:

لأنهما أكثر دالتين مثلثيتين شيوعاً في الإستخدام.

(48) تحد:

α , β زاويتين متتامتين لذا فإن

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

(49) تبرير:

$$1+\tan^2\theta = 1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$$

$$1+\cot^2\theta = 1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} = \csc^2\theta$$

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(50) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(51) $\frac{5}{4}$

(52) $\frac{3}{5}$

(53) هندسة معمارية:

$\theta = 30^\circ$

بسط العبارتين الآتيتين:

(54)

$$\sin\theta\cos\theta(1+\cot^2\theta) = \sin\theta\cos\theta\csc^2\theta = \cancel{\sin\theta}\cos\theta\frac{1}{\sin^{\cancel{2}}\theta} = \cot\theta$$

(55)

$$\frac{\sin^4\theta-\cos^4\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\frac{\cancel{\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)}\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)}{\cancel{\sin^2\theta-\cos^2\theta}}$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=\mathbf{1}$$

تدرب على إختبار

(56)

$\tan\theta\csc\theta$ ***D***

(57) سؤال ذو إجابة قصيرة:

$$\sin^3\theta\cos\theta-\cos^3\theta\sin\theta=\sin\theta\cos\theta\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)$$

$$=\sin\theta\cos\theta\times\mathbf{1}=\sin\theta\cos\theta$$

(3-3) المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين و الفرق بينهما

■ **تحقق من فهمك:**

(1)

(1A

$$\sin(15) = \sin(60-45) = \sin 60\cos 45 - \cos 60\sin 45$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(1B

$$\cos(-15) = \cos(45-60) = \cos 60\cos 45 + \sin 60\sin 45$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

■ **تحقق من فهمك:**

(2)

(2A

$$2\sin(245t) = 2\sin(315t-30t)$$

(2B

$$2\sin(245) = 2\sin(315-30) = 2\left(\sin 315\cos 30 - \cos 315\sin 30\right)$$

$$= \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

تحقق من فهمك:

(3)

(3A

$$\sin(90-\theta) = \sin 90\cos\theta - \cos 90\sin\theta$$

$$= 1\times\cos\theta = \cos\theta$$

(3B

$$\tan(\frac{\pi}{4}+\theta) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$$

$$= \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(1)

$$\cos 165 = \cos(120+45) = \cos 120\cos 45 - \sin 120\sin 45$$
$$= \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(2)

$$\cos 105 = \cos(60+45) = \cos 60\cos 45 - \sin 60\sin 45$$
$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

(3)

$$\cos 75 = \cos(30+45) = \cos 30\cos 45 - \sin 30\sin 45$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(4)

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(45-30) = \cos 45\cos 30 + \sin 45\sin 30$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

(5)

$$\sin(-30) = \sin(60-90) = \sin 60\cos 90 - \cos 60\sin 90$$

$$= -1\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

(6)

$$\sin(-210) = \sin(60-270) = \sin 60\cos 270 - \cos 60\sin 270$$

$$= 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(7)

$$\cos(135) = \cos(180-45) = \cos 180\cos 45 + \sin 180\sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(8)

$$\tan 195 = \tan(90+105) = \frac{\tan 90 + \tan 105}{1-\tan 90(\tan 105)}$$

$$= \frac{\tan 90 + \left[\dfrac{\tan 60 + \tan 45}{1-\tan 60\tan 45}\right]}{1-\tan 90\left[\dfrac{\tan 60 + \tan 45}{1-\tan 60\tan 45}\right]} = 2-\sqrt{3}$$

(9) كهرباء:

(a

$$C = 2\sin[90t + 30t]$$

(b

$$C = 2\sin(90+30) = 2(\sin 90\cos 30 + \cos 90\sin 30)$$

أمبير

$$= \cancel{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3}$$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

(10)

$$\sin(90+\theta) = \sin 90\cos\theta + \cos 90\sin\theta$$

$$= 1 \times \cos\theta = \cos\theta$$

(11)

$$\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{3\pi}{2}\sin\theta$$

$$= \sin\frac{3\pi}{2} \times \sin\theta = \sin\theta$$

(12)

$$\tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(\theta + \frac{\pi}{2})}{\cos(\theta + \frac{\pi}{2})} = \frac{\sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\cos\theta \times 1}{-\sin\theta \times 1} = -\cot\theta$$

(13)

$$\sin(\theta+\pi)=\sin\theta\cos\pi+\cos\theta\sin\pi$$
$$=\sin\theta\times-1=-\sin\theta$$

(14)

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta$$
$$=-1\times\sin\theta=-\sin\theta$$

(15)

$$\tan(\theta+45)=\frac{\tan\theta+\tan 45}{1-\tan\theta\tan 45}$$
$$=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

(16) إلكترونيات:

$$y_1+y_2=10\sin[2t+210+2t+30]$$
$$=10\sin[4t+240]=0$$

تداخل هدام أي أن كلاً من الموجتين تلاشي الأخرى.

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(17)

$$\tan 165 = \tan(120+45) = \frac{\tan 120 + \tan 45}{1 - \tan 120 \tan 45}$$

$$= -2+\sqrt{3}$$

(18)

$$\sec 1275 = \frac{1}{\cos 1275} = \frac{1}{\cos 195} = \frac{1}{\cos(135+60)}$$

$$= \frac{1}{\cos 135 \cos 60 - \sin 135 \sin 60} = \sqrt{2}-\sqrt{6}$$

(19)

$$\sin 735 = \sin(360+375) = \sin 360 \cos 375 + \cos 360 \sin 375$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(20)

$$\tan(\frac{23\pi}{12}) = -2+\sqrt{3}$$

(21)

$$\csc(\frac{5\pi}{12}) = \frac{1}{\sin(\frac{5\pi}{12})} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

(22)

$$\cot(\frac{113\pi}{12}) = \frac{\cos(\frac{113\pi}{12})}{\sin(\frac{113\pi}{12})} = 2-\sqrt{3}$$

(23)

$$\frac{\sin A + \tan\theta \cos A}{\cos A - \tan\theta \sin A}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin A}{\cos A} + \tan\theta\right)}{1 - \tan\theta \frac{\sin A}{\cos A}}$$

$$= \frac{\left(\tan A + \tan\theta\right)}{1 - \tan\theta \tan A}$$

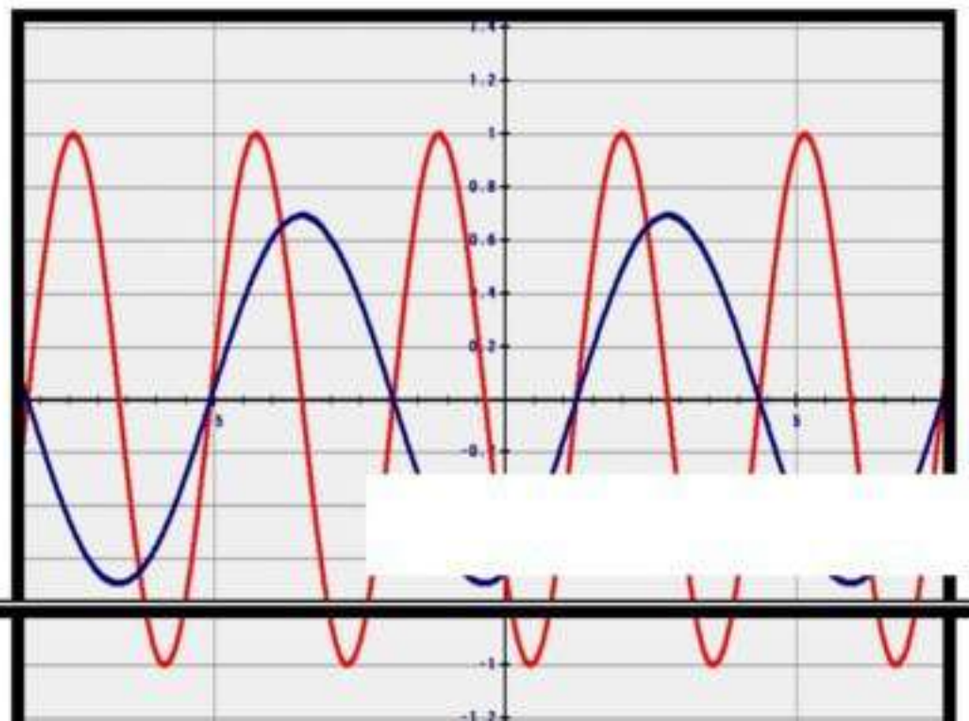
$$= \tan(A + \theta)$$

(24) تمثيلات متعددة:

a) جدولياً:

A	B	$\sin A$	$\sin B$	$\sin(A+B)$	$\sin A + \sin B$
30	90	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$
45	60	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
90	30	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

b) بيانياً:



c) **تحليلياً:**

$$\sin(30+45)=\sin(30)+\sin(45)$$

الطرف الأيمن $=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$ **أي** 1.21 **تقريباً، وبما أن قيمة جيب أي زاوية لا يمكن أن يكون أكبر من** 1 **فإن هذة المعادلة خطأ.**

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(25)

$$\frac{\tan A+\tan B}{\sec A\sec B}=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\square\frac{1}{\cos B}}$$

$$=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)$$

(26)

$$\frac{1-\tan A\tan B}{\sec A\sec B}=\frac{1-\frac{\sin A}{\cos A}\square\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\square\frac{1}{\cos B}}$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)$$

(27)

$$\frac{\sec A \sec B}{1+\tan A \tan B}=\frac{\dfrac{1}{\cos A}\dfrac{1}{\cos B}}{1+\dfrac{\sin A}{\cos A}\dfrac{\sin B}{\cos B}}$$

$$=\frac{1}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$

$$=\frac{1}{\cos(A-B)}=\sec(A-B)$$

(28)

$$\sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$$

$$=(\sin A\cos B)^2-(\cos A\sin B)^2$$

$$=\sin^2 A\cos^2 B-\sin^2 B\cos^2 A$$

$$=\sin^2 A\cos^2 B+\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 B\cos^2 A$$

$$=\sin^2 A(\cos^2 B+\sin^2 B)-\sin^2 B(\sin^2 A+\cos^2 A)$$

$$=\sin^2 A\times 1-1\times\sin^2 B=\sin^2 A-\sin^2 B$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

(29) تبرير:

$$\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)\cos(\frac{\pi}{3}+\theta)-\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)\sin(\frac{\pi}{3}+\theta)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta-\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\sin(-2\theta)$$

(30) تحد:

$$\cot(A+B)=\frac{1}{\tan(A+B)}=\frac{1}{\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}}$$

$$=\frac{1-\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{1-\frac{1}{\cot A}\frac{1}{\cot B}}{\frac{1}{\cot A}+\frac{1}{\cot B}}$$

$$=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$$

(31) برهان:

$$d=\sqrt{(\cos A-\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2}$$

$$\therefore d^2=\cos^2 A-2\cos A\cos B+\cos^2 B+\sin^2 A-2\sin A\sin B+\sin^2 B$$

$$\therefore d^2=1+1-2\cos A\cos B-2\sin A\sin B$$

$$\therefore d^2=2-2[\cos A\cos B+\sin A\sin B]$$

$$\therefore d^2=2-2\cos(A+B)$$

(32) أكتب:

قد تختلف الإجابات من فرد لآخر تبعاً لوجهة نظره.

(33) مسألة مفتوحة:

$A = 35\ ,\ B = 60\ ,\ C = 85$

$0.7002 + 1.7321 + 11.4301 = 13.86$

بسط كل من العبارتين الآتيتين:

(34)

$$\sin\theta\csc\theta-\cos^2\theta$$

$$=\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}-\cos^2\theta$$

$$=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$$

(35)

$$\cos^2\theta\sec\theta\csc\theta$$

$$=\frac{\cos^{\cancel{2}}\theta}{\sin\theta\cancel{\cos\theta}}=\cot\theta$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(36) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(37) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

(38) $\frac{\sqrt{193}}{12}$

(39) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$

(40) $\frac{\sqrt{39}}{4}$

أثبت صحة كل من المتطابقتين الآتيتين:

(41)

$$\frac{\sin\theta}{\tan\theta}+\frac{\cos\theta}{\cot\theta}=\frac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}+\frac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$=\frac{\cos\theta\,\cancel{\sin\theta}}{\cancel{\sin\theta}}+\frac{\sin\theta\,\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\cos\theta}}$$

$$=\cos\theta+\sin\theta$$

(42)

$$\sec\theta(\sec\theta-\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)=\frac{1}{\cos^2\theta}-1$$

$$=\sec^2\theta=\tan^2\theta$$

تدرب على إختبار

(43)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow B$$

(44)

$$\cos\theta=-0.3\qquad\therefore\sin\theta=\frac{\sqrt{91}}{10}\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{3\sqrt{91}}{91}$$

إختبار منتصف الفصل

بسط كل عبارة مما يأتي:

(1)

$$\cot\theta\sec\theta$$

$$=\frac{\cancel{\cos\theta}}{\sin\theta}\square\frac{1}{\cancel{\cos\theta}}=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$$

(2)

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=1$$

(3)

$$\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}=\cos\theta$$

(4)

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)\csc\theta=\cancel{\sin\theta}\square\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}=1$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(5) $\frac{4}{5}$

(6) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

(7) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

(8) **إختيار من متعدد:**

$\sec\theta$ ←←←← ***D***

(9) **مدينة ألعاب:**

(a $\theta = 11.5^\circ$ **تقريباً**

(b $\nu = 4 \ \ m/\sec$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(10)

$$\frac{\cot\theta}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{\cancel{\cos\theta}}{\sin\theta\cancel{\cos\theta}\sin\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} = \csc^2\theta$$

(11)

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\cos\theta\square\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} = \frac{\frac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\sin\theta}}}{\frac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\sin\theta}}} = 1$$

(12)

$$\frac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}}{1-\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\cos\theta)}=\frac{\cancel{(1-\cos\theta)}(1+\cos\theta)}{\cos\theta\cancel{(1-\cos\theta)}}$$

$$=\frac{(1+\cos\theta)}{\cos\theta}=(1+\cos\theta)\square\frac{1}{\cos\theta}=(1+\cos\theta)\square\sec\theta$$

(13)

$$\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}=\frac{\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cancel{\cos\theta}\sin\theta(1-\sin\theta)}{\cos^{\cancel{2}}\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1-\sin\theta)=\tan\theta(1-\sin\theta)$$

(14) حاسوب:

(a

$$h=\sqrt{225-144}=\sqrt{81}=9 \text{ in}$$

(b

$$\cot\theta=\frac{9}{12}$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{12}{15}\div\frac{9}{15}=\frac{12}{9}$$

$$\therefore \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(15)

$$\frac{\sin\theta\sec\theta(\sec\theta+1)}{(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)}=\frac{\sin\theta\frac{1}{\cos\theta}(\sec\theta+1)}{\sec^2\theta-1}$$

$$=\frac{\cancel{\tan\theta}\,(\sec\theta+1)}{\tan^{\cancel{2}}\theta}=\frac{\sec\theta+1}{\tan\theta}=(\sec\theta+1)\cot\theta$$

(16)

$$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$$

(17)

$$\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\cos\theta\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}=\frac{\cos\theta\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta\,\cancel{\sin\theta}\,(1-\cos\theta)}{\sin^{\cancel{2}}\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(1-\cos\theta)$$

$$=\cot\theta(1-\cos\theta)$$

دون استخدام الألة الحاسبة أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(18) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(19) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(20) $2-\sqrt{3}$

(21) $2-\sqrt{3}$

(22) **إختيار من متعدد:**

C) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ←←←←

(23)

$$\cos 30 \cos\theta + \sin 30 \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\sin 60 \cos\theta + \cos 60 \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$$

(3-4) المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

■ **تحقق من فهمك:**

(1)

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{-1}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

■ **تحقق من فهمك:**

(2)

(2A

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$= 1 - 2\left(\frac{8}{9}\right) = -\frac{7}{9}$$

(2B

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

■ **تحقق من فهمك:**

(3)

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$$

■ **تحقق من فهمك:**

(4)

(4A

$$g=978+5.17\sin^2 L-0.014\sin L\cos L$$

$$=978+5.17(1-\cos 2L)-0.014(\frac{\sin 2L}{2})$$

$$=978+5.17-5.17\cos 2L-0.028\sin 2L$$

$$=g=983.17-5.17\cos 2L-0.028\sin 2L$$

$$g=983.17-5.17\cos 90-0.028\sin 90$$

(4B

$$g=983.17-0.028\sin 90$$

$$=983.142$$

■ **تحقق من فهمك:**

(5)

$$4\cos^2 x-\sin^2 2x$$

$$=4\cos^2 x-4\sin^2 x\cos^2 x=4\cos^2 x\left(1-\sin^2 x\right)$$

$$=4\cos^2 x\cos^2 x=4\cos^4 x$$

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الألة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل من $\cos\frac{\theta}{2}$ ، $\sin\frac{\theta}{2}$ ، $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ إذا كان:

(1)

$$\sin\theta=\frac{1}{4}\ ,\ \therefore\sin^2\theta=\frac{1}{16}\ ,\ \therefore\cos^2\theta=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}\ ,\ \therefore\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\frac{1}{16}=\frac{7}{8}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{15}}{4}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{15}}{4}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}$$

(2)

$$\sin\theta=\frac{4}{5}\ ,\ \therefore\sin^2\theta=\frac{16}{25}\ ,\ \therefore\cos^2\theta=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}\ ,\ \therefore\cos\theta=-\frac{3}{5}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\left(\frac{16}{25}\right)=-\frac{7}{25}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{-3}{5}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{-3}{5}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

(3)

$$\cos\theta=\frac{3}{5}\ ,\ \therefore\cos^2\theta=\frac{9}{25}\ ,\ \therefore\sin^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\ ,\ \therefore\sin\theta=-\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\left(\frac{16}{25}\right)=-\frac{7}{25}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\left(\frac{-4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$$

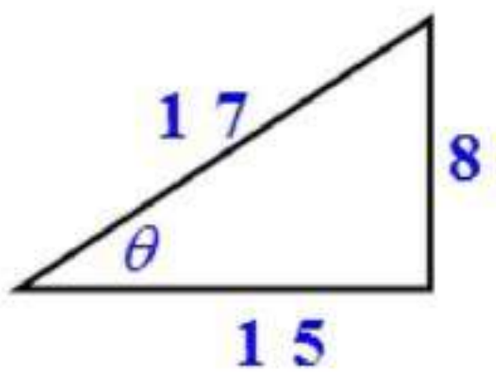
$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

(4)

$$\tan\theta=\frac{-8}{15}\quad\therefore\cos\theta=-\frac{15}{17}\quad,\therefore\sin\theta=\frac{8}{17}\quad,\quad\therefore\sin^2\theta=\frac{64}{289}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\square\frac{64}{289}=\frac{161}{289}$$



$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\square\frac{8}{17}\square\frac{-15}{17}=-\frac{240}{289}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{-15}{17}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{17}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{-15}{17}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{16}{17}}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

(5)

$$\sin\theta=\frac{2}{3}\quad,\quad\therefore\sin^2\theta=\frac{4}{9}\quad,\quad\therefore\cos^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\quad,\therefore\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\square\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\square\frac{2}{3}\square\frac{-\sqrt{5}}{3}=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{-\sqrt{5}}{3}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{-\sqrt{5}}{3}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$$

(6)

$$\sin\theta=-\frac{15}{17}\ ,\ \therefore\sin^2\theta=\frac{225}{289}\ ,\ \therefore\cos^2\theta=1-\frac{225}{289}=\frac{64}{289}\ ,\ \therefore\cos\theta=-\frac{8}{17}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\square\frac{225}{289}=-\frac{161}{289}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\square\frac{-15}{17}\square\frac{-8}{17}=\frac{240}{289}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{-8}{17}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{9}{14}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{-8}{17}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{25}{14}}$$

(7)

$$\tan\theta=-2\ \therefore\tan^2\theta=4\ \therefore\sec^2\theta=5\ \therefore\sec\theta=-\sqrt{5}$$

$$\therefore\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\therefore\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\ ,\ \therefore\sin^2\theta=\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\square\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{-1}{\sqrt{5}}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{-1}{\sqrt{5}}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(8)

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(9)

$$\cos 15 = \sqrt{\frac{1+\cos 30}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

(10)

$$\sin 75 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

(11)

$$\sin 165 = \sqrt{3}-2$$

(12)

$$\sin 165 = 2+\sqrt{3}$$

(13) كرة قدم:

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g} \qquad (a$$

$d = 81\ ft$ تقريباً (b

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(14)

$$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1-\left(1-2\sin^2\theta\right)}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\cancel{2}\sin^2\theta}{\cancel{2}\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

(15)

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

(16)

$$\frac{2}{\cot\theta-\tan\theta}=\frac{2}{\cot\theta-\tan\theta}\frac{\tan\theta}{\tan\theta}=\frac{2\tan\theta}{\cot\theta\tan\theta-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta$$

(17)

$$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2}$$

$$=\frac{\sin 2(\frac{\theta}{2})}{2}=\frac{\sin\theta}{2}$$

(18) العدد ماخ:

(a

$$\frac{1}{M}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

(b

$$M=6$$

(19) إلكترونيات:

$$P=I_{\circ}^{2}R\sin^2 t\theta=\frac{1}{2}I_{\circ}^{2}R-\frac{1}{2}I_{\circ}^{2}R\cos 2t\theta$$

(20) كرة قدم:

إذا كانت $\theta=45+\alpha$

$$d = \frac{v^2 \sin 2(45+\alpha)}{g} = \frac{v^2 \sin(90+2\alpha)}{g}$$

$$= \frac{v^2(\sin 90\cos\alpha + \cos 90\sin\alpha)}{g}$$

$$= \frac{v^2 \cos 2\alpha}{g}$$

إذا كانت $\theta = 45 - \alpha$

$$d = \frac{v^2 \sin 2(45-\alpha)}{g} = \frac{v^2 \sin(90-2\alpha)}{g}$$

$$= \frac{v^2(\sin 90\cos\alpha - \cos 90\sin\alpha)}{g}$$

$$= \frac{v^2 \cos 2\alpha}{g}$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل من $\tan 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ إذا كان:

(21)

$$\cos\theta = \frac{4}{5} \ , \ \therefore \cos^2\theta = \frac{16}{25} \ , \ \therefore \sin^2\theta = \frac{9}{25} \ , \ \therefore \sin\theta = \frac{3}{5} \ , \ \therefore \tan\theta = \frac{3}{4}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\square\frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{24}{7}$$

(22)

$$\sin\theta = \frac{1}{3}\ ,\ \therefore \sin^2\theta = \frac{1}{9}\ ,\ \therefore \cos^2\theta = \frac{8}{9}\ ,\ \therefore \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ ,\ \therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-2\cdot\frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

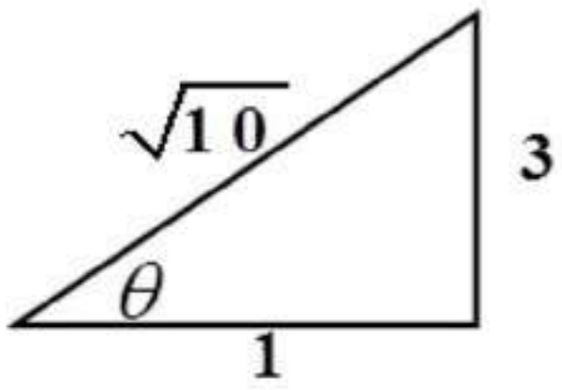
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}}{1-\frac{2}{16}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

(23)

$$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}\ ,\ \therefore \sin^2\theta = \frac{9}{10}\ ,\ \therefore \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ ,\ \therefore \tan\theta = -3$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{9}{10}\right) = -\frac{4}{5}$$



$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2(-3)}{1-9} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

(24)

$$\cos\theta = -\frac{3}{4}\ ,\ \therefore\cos^2\theta = \frac{9}{16}\ ,\ \therefore\sin^2\theta = \frac{7}{16}\ ,\ \therefore\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}\ ,\ \therefore\tan\theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{7}{16}\right) = \frac{1}{8}$$

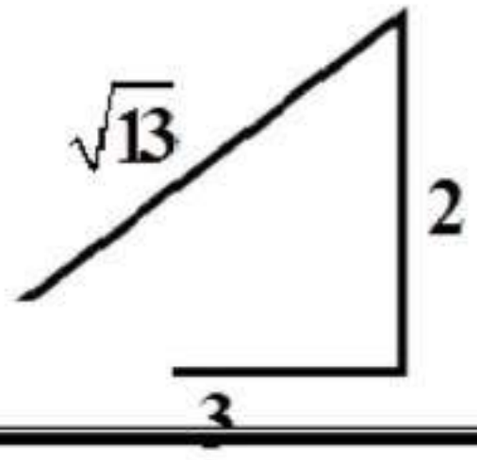
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3\sqrt{7}}{8}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\left(\frac{-\sqrt{7}}{3}\right)}{1-\frac{7}{9}} = -3\sqrt{7}$$

(25)

$$\sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}\ ,\ \therefore\sin^2\theta = \frac{4}{13}\ ,\ \therefore\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}\ ,\ \therefore\tan\theta = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{4}{13}\right) = \frac{5}{13}$$



$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{12}{13}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{4}{9}} = \frac{12}{5}$$

(26) تمثيلات متعددة:

تختلف الإجابات من شخص لآخر حسب وجهة نظره.

مسائل مهارات التفكير العليا:

(27) إكتشف الخطأ:

كلاهما أخطأ، حيث طرح سعيد الجذور التربيعية بطريقة غير صحيحة، كما استعمل سلمان متطابقة نصف الزاوية، ولاكنة أخطأ في إيجاد قيمة $\cos 30$ في المتطابقة كلها فكتبها $\frac{1}{2}$ بدلاً من $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(28) تحد:

الزاوية $\angle PBD$ هي زاوية محيطية تقابل القوس نفسة الذي تقابلة الزاوية المركزية $\angle POD$ لذا فإن $m\angle(PBD) = \frac{1}{2}m\angle(PoD)$

وباستعمال المثلث القائم نجد أن

$$\tan\frac{\theta}{2} = \tan(\mathrm{PBA}) = \frac{PA}{BA} = \frac{PA}{1+OA}$$

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\frac{AP}{OP}}{1+\frac{OA}{OP}}=\frac{AP}{1+OA}$$

(29) أكتب:

إذا أعطيت فقط قيمة $\cos\theta$ فإن $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها.
وإذا أعطيت فقط قيمة $\sin\theta$ فإن $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها.
وإذا أعطيت كلا من $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ فإن $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها.

(30) برهان:

$$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta)$$
$$= \sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta)$$
$$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

(31) تبرير:

$$2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$$
$$\theta = \frac{A}{2} \quad \therefore 2\theta = A$$
$$\therefore 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \cos A$$
$$\therefore \cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}$$
$$\therefore \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$1 - 2\sin^2\theta = \cos 2\theta$$
$$\theta = \frac{A}{2} \quad \therefore 2\theta = A$$
$$\therefore \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$$
$$\therefore \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

(32)

$$d = \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v^2\sin 2\theta}{g}$$

تكون أكثر قيمة لـ d عند $\sin 2\theta = 1$ ويكون هذا عند $2\theta = 90$ أو عند $\theta = 45$

مراجعة تراكمية

أثبت صحة كل ن المتطابقات الآتية:

(33)

$$\frac{\cos^2\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos^{\cancel{2}}\theta}{\sin\theta\,\cancel{\cos\theta}}+\frac{\cancel{\sin\theta}}{\cancel{\sin\theta}\,\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\cot\theta+\sec\theta$$

(34)

$$\left(1-\cos^2\theta\right)+\frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}=$$

$$\sin^2\theta+\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\sin^2\theta}}=\sin^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\sin^2\theta+\tan^2\theta$$

(35)

$$\left(\sin\theta-\cos\theta\right)^2=$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$$

$$=1-2\sin\theta\cos\theta$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$\sin 135=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (36)$$

$$\cos 105=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad (37)$$

$$\sin 285=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad (38)$$

$$\cos(210)=-\frac{\sqrt{3}+2}{4} \quad (39)$$

$$\sin(-240)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (40)$$

$$\cos(-120) = -\frac{1}{2} \quad (41)$$

$$\cos 78\cos 18 + \sin 78\sin 18 = \cos(78-18) = \cos 60 = \frac{1}{2} \quad (42)$$

تدرب على إختبار

(43)

$\sqrt{3}-2 \longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow B$

(44)

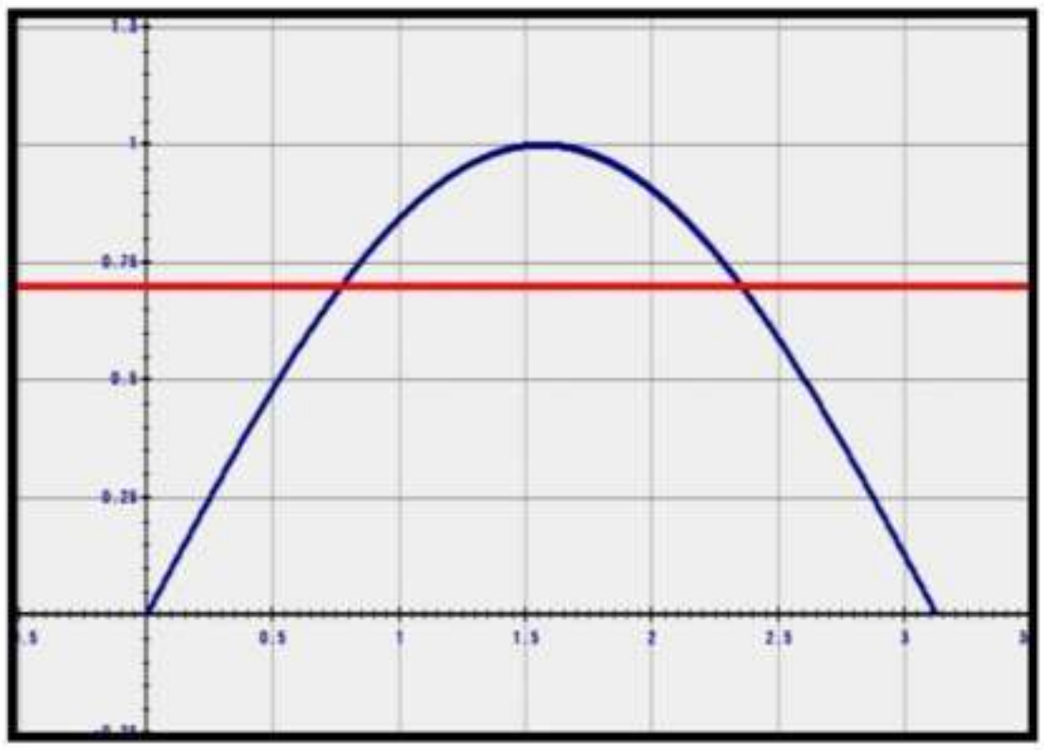
$y = \frac{1}{3}\cos 2B \longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow B$

ستكشاف (3 – 5) معمل الحاسبة البيانية

حل المعادلات المثلثية

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلات الآتية لقيم x جميعها الموضحة بجانب كل منها:

(1)

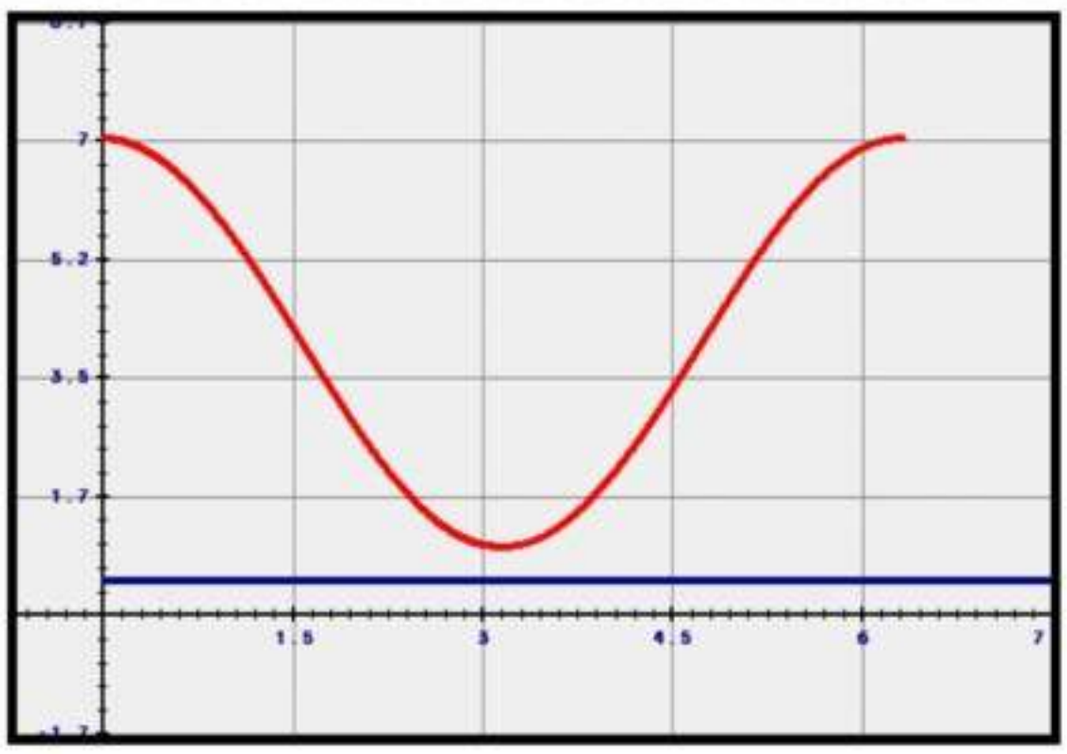


$x = 44.4$, $x = 135.6$

(2)

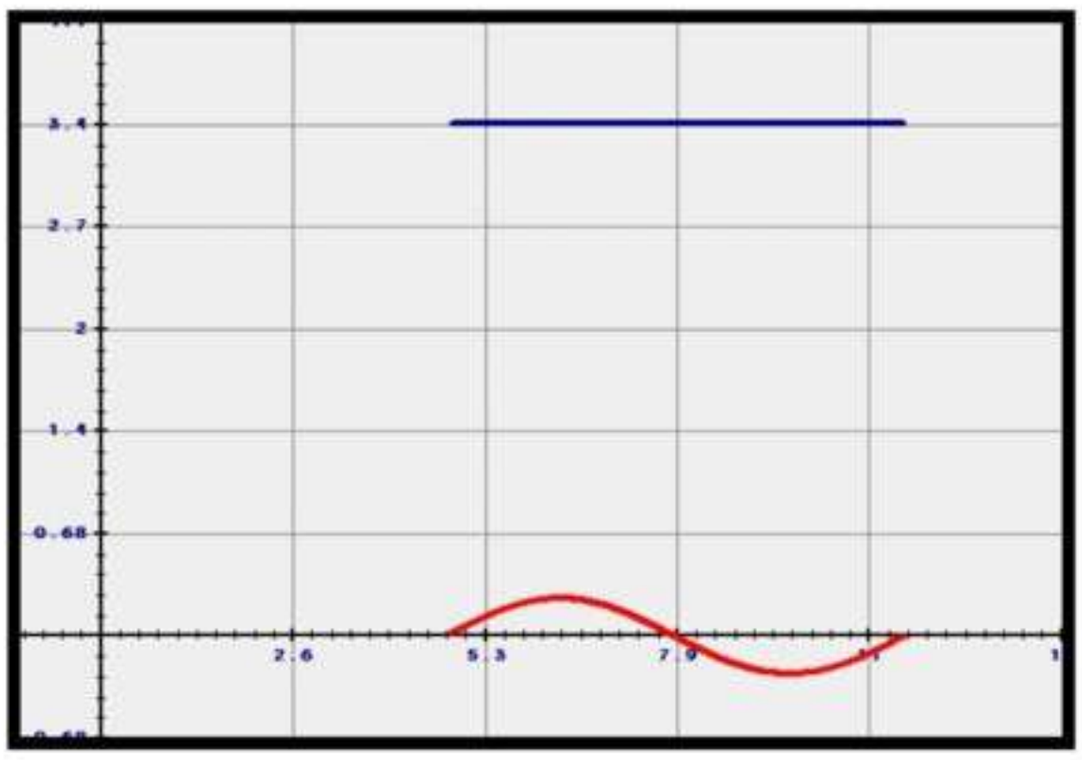
$$x = \{53.43\ ,137.81\}$$

(3)



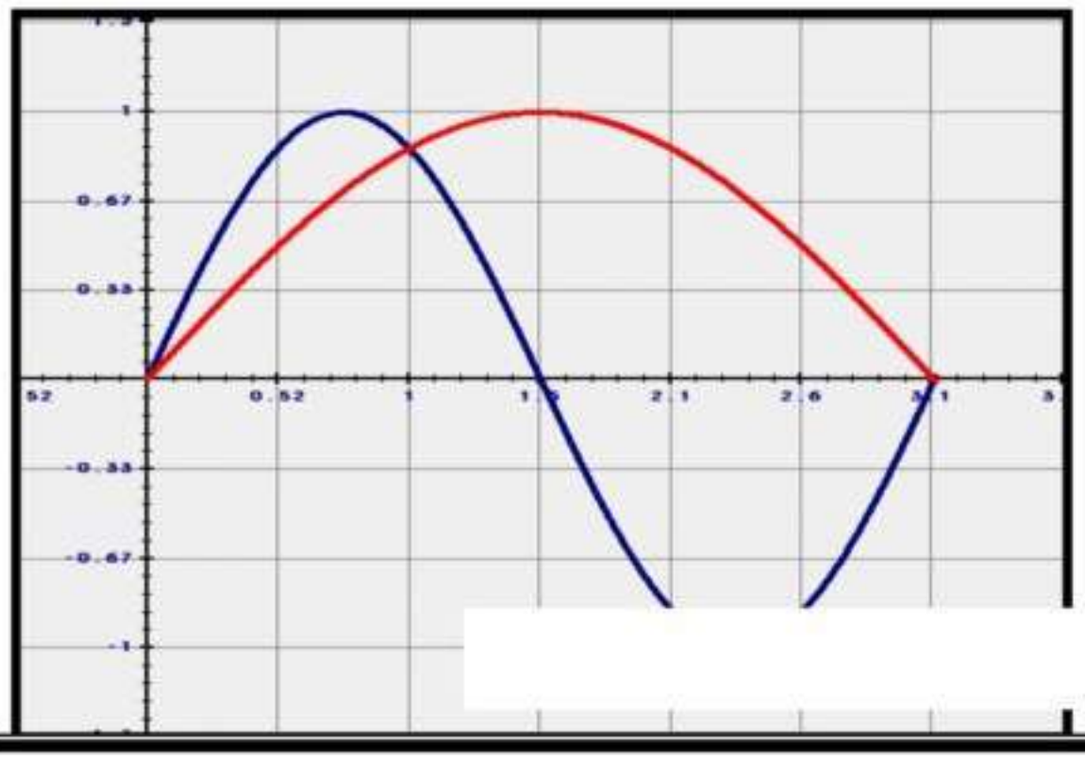
لا يوجد حل حقيقي

(4)

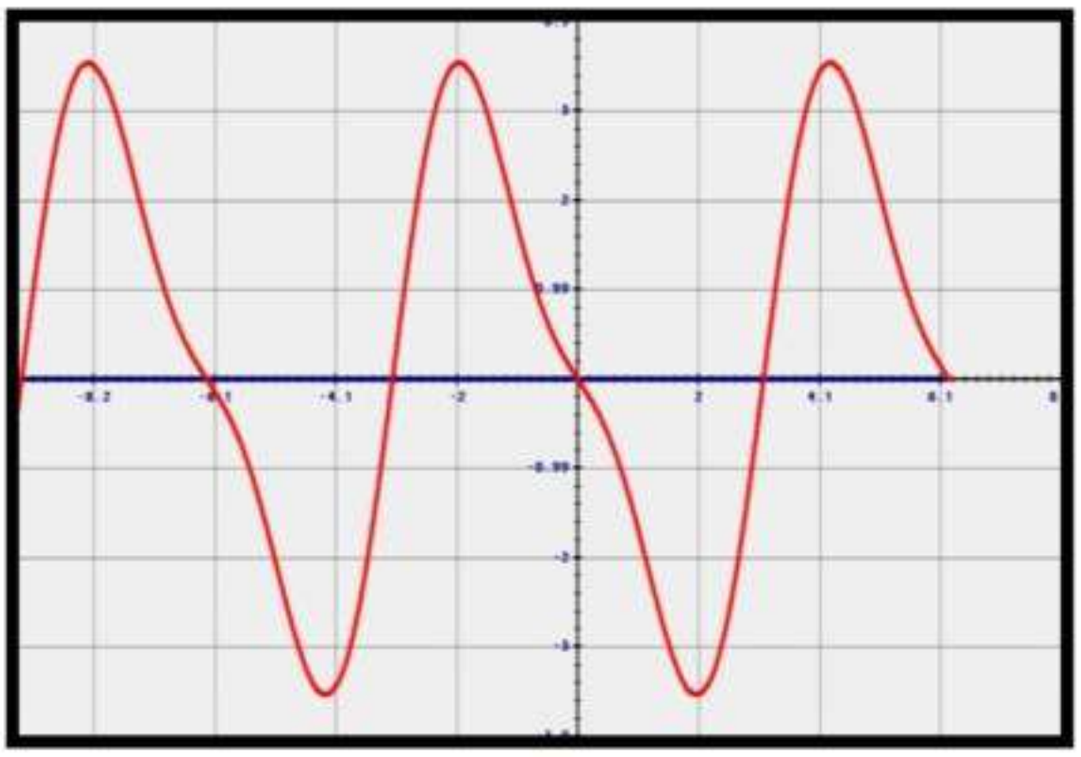


لا يوجد حل حقيقي

(5)



$$x = \{0\ ,\ 115.38\}$$



(6)

$$x = \{-360, -180, 0, 180\}$$

(3-5)حل المعادلات المثلثية

■ **تحقق من فهمك:**

(1)

(1A)

$$\cos x \sin x = 3\cos x$$

$$\therefore \cos x \sin x - 3\cos x = 0$$

$$\therefore \cos x(\sin x - 3) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = 0 \quad , \quad (\sin\theta - 3) = 0 \rightarrow$$ لها حل

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \left\{ \frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2} \right\}$$

(1B

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\sin^2\theta + (1 - \sin^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$2\sin\theta\cos\theta = 1$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 30^\circ \quad , \quad \theta = 60^\circ$$

■ تحقق من فهمك:

(2A

$$4\sin x = 2\sin + \sqrt{2}$$

$$\therefore 4\sin x - 2\sin x = \sqrt{2}$$

$$\therefore 2\sin x = \sqrt{2}$$

$$\therefore \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 45^\circ$$

(2B

$$2\sin\theta = -1$$

$$\therefore \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ , \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

■ تحقق من فهمك:

(3)

$$h = 21 - 20\cos 3\pi t$$

$$\therefore 41 = 21 - 20\cos 3\pi t$$

$$\therefore 20\cos 3\pi t = -20$$

$$\therefore \cos 3\pi t = -1$$

$$\therefore 3\not{\pi} t = (2k+1)\not{\pi}$$

$$\therefore t = \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}$$

$$\therefore t = 20\ s$$

■ تحقق من فهمك:

4) متطابقة، ولها عدد لانهائي من الحلول

$$\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta + 3 = \left(1 - \sin^2\theta\right) + 3 = 4 - \sin$$

■ **تحقق من فهمك:**

(5)

5A) لا يوجد لها حل حيث:

$$\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$$

$$\therefore \cancel{\sin\theta}\,\frac{\cos\theta}{\cancel{\sin\theta}} - \cos^2\theta = 0$$

$$\therefore \cos\theta - \cos^2\theta = 0$$

$$\therefore \cos\theta\left(1 - \cos\theta\right) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = 0 \quad or \quad \cos\theta = 1$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$$

(5B

$$\frac{\cos\theta}{\cot\theta}+2\sin^2\theta=0$$

$$\therefore \frac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\sin^2\theta=0$$

$$\therefore \sin\theta+\sin^2\theta=0$$

$$\therefore \sin\theta(1+\sin\theta)=0$$

$$\therefore \sin\theta=0 \quad or \quad \sin\theta=-1$$

$$\therefore \theta=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad or \quad \theta=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$$

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ الموضحة بجانب كل منها.

(1)

$$\cos^2\theta+2\cos\theta+1=0$$

$$\therefore(\cos\theta+1)^2=0$$

$$\therefore \cos\theta=-1$$

$$\therefore \theta=80^\circ$$

(2)

$$2\cos^2\theta+\cos\theta=1$$

$$\therefore(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$$

$$\therefore \cos\theta=-1 \quad \cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta=180^\circ,60^\circ,300^\circ$$

(3)

$$-2\sin^2\theta=7-15\sin\theta$$

$$\therefore 2\sin^2\theta-15\sin\theta+7=0$$

$$\therefore (2\sin\theta-1)(\sin\theta-7)=0$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2} \quad \sin\theta=7$$

$$\therefore \theta=150^\circ,30^\circ$$

(4)

$$\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$\therefore \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta=150^\circ,30^\circ$$

حل كل معادلة مما يأتى لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان.

$$4\sin^2\theta - 1 = 0$$

$$\therefore \sin^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \left\{ \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

$$2\cos^2\theta = 1$$

$$\therefore \cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 0$$

$$\sin\frac{\theta}{2}(1 - 2\sin\frac{\theta}{2}) = 0$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = 0 \qquad 1 - 2\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

$$\frac{\theta}{2} = 0, 180 \qquad \sin\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = 0^\circ, 360^\circ \qquad \frac{\theta}{2} = 30$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$\therefore 2\cos^2\theta + 4\cos\theta = -2$$

$$\therefore \cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$$

$$\therefore (\cos\theta + 1)^2 = 0$$

$$\therefore \cos\theta = -1$$

$$\therefore \theta = \{\pi + 2k\pi\}$$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

(9)

$$\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$$

$$\therefore 1 - 2\sin^2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$$

$$\therefore 3 - 3\sin^2\theta = 0$$

$$\therefore \sin^2\theta = 1$$

$$\therefore \sin\theta = 1$$

$$\therefore \theta = \{90^\circ + k\,180^\circ\}$$

(10)

$$\sin^2\theta - \sin\theta = 0$$

$$\therefore \sin\theta(1 - \sin\theta) = 0$$

$$\therefore \sin\theta = 0 \quad , \quad \sin\theta = 1$$

$$\therefore \theta = \{k\,180^\circ,\ 90^\circ + k\,360^\circ\}$$

$$2\sin^2\theta - 1 = 0$$

$$\therefore \sin^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \{\, 45^\circ + k\,90^\circ \,\}$$

(12)

$$\theta = \{30^\circ + k\,360^\circ \;,\; 150^\circ + k\,360^\circ \;,\; 90^\circ + k\,180^\circ\}$$

(13) الليل والنهار:

a) عدد ساعات النهار 10.5 ساعة، ويكون ذلك بعد 213 أو 335 يوماً بعد يوم 21 مارس.
وهذا يعني أن ساعات النهار ستكون في 20 اكتوبر أو 19 اكتوبر. ستكون عدد ساعات النهار 10.5 ساعة.

b) كل يوم منذ 19 فبراير إلى 20 اكتوبر. بما أن أطول نهار في السنة يحدث تقريباً يوم 22 يونيو، لذا فإن الأيام بين 19 فبراير إلى 20 اكتوبر تتزايد في الطول حتى يوم 22 يونيو، ثم يبدأ النهار بالنقصان إلى يوم 20 اكتوبر.

حل كل معادلة مما يأتي:

(14)

$$\sin^2 2\theta + \sin^2\theta = 0$$

$$\therefore 4\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^2\theta = 0$$

$$\therefore \sin^2\theta\left(4\cos^2\theta + 1\right) = 0$$

$$\therefore \sin\theta = 0 \quad , \quad \cos^2\theta = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \theta = \left\{ 90^\circ + k\left(180^\circ\right) \right\}$$

(15)

$$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$$

$$\therefore 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$$

$$\therefore \cos\theta\left(2\sin\theta - 1\right) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = 0 \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \left\{ k(180^\circ),\ 30^\circ + k\left(360^\circ\right),\ 150^\circ + k\left(360^\circ\right) \right\}$$

(16)

$$\tan\theta = 1$$

$$\therefore \theta = \left\{ \ 45^\circ + k180^\circ \ , 45^\circ + k\left(180^\circ\right) \right\}$$

(17)

$$\cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \left\{ 60^\circ , 120^\circ , 240^\circ , 300^\circ , 135^\circ , 225^\circ \right\}$$

(18)

$$2\sin^2\theta = 1$$

$$\therefore \sin^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \left\{ 135^\circ , 225^\circ \right\}$$

(19)

$$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$$

$$\therefore 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$$

$$\therefore \cos\theta\left(2\sin\theta - 1\right) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = 0 \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

(20)

$$4\sin^2\theta - 1 = 0$$

$$\therefore \sin^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \{210^\circ \ , 330^\circ\}$$

(21)

$$\tan\theta - \sin\theta = 0$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \sin\theta = 0$$

$$\therefore \frac{\sin\theta - \cos\theta\sin\theta}{\cos\theta} = 0$$

$$\therefore \sin\theta - \cos\theta\sin\theta$$

$$\therefore \sin\theta(1 - \cos\theta) = 0$$

$$\therefore \sin\theta = 0 \ , \cos\theta = 1$$

$$\therefore \theta = \{0^\circ + k\ 180^\circ\}$$

(22)

$$\theta = \{30^\circ + k\ 360^\circ \ , 150^\circ + k\ 360^\circ\}$$

(23) ناطحات سحاب:

$$\tan\theta = \frac{876}{685} = 1.28$$

$$\therefore \theta = 21^\circ$$

(24) أنهار:

(a

$$y = 11\ m$$

b) في الساعة 7 صباحاً، 7 مساءً.

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان.

(25)

$$\cos\theta\sin 2\theta - 2\sin\theta + 2 = 0$$

$$\therefore \cos\theta\left(2\sin\theta\cos\theta\right) - 2\sin\theta + 2 = 0$$

$$\therefore 2\sin\theta\cos^2\theta - 2\sin\theta + 2 = 0$$

$$\therefore \sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta + 1 = 0$$

$$\therefore \sin\theta\left(\cos^2\theta - 1\right) + 1 = 0$$

$$\therefore \sin\theta\left(-\sin^2\theta\right) + 1 = 0$$

$$\therefore -\sin^3\theta = -1$$

$$\therefore \sin\theta = 1$$

$$\therefore \theta = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\,\pi\right\}$$

(26)

$$\theta = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\,\pi\ ,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\,\pi\right\}$$

(27)

$$2\sin\theta = \sin 2\theta$$

$$\therefore\ 2\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore\ 2\sin\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta = 0$$

$$\therefore\ 2\sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right) = 0$$

$$\therefore \sin\theta = 0 \quad , \quad \therefore \sin\theta = 1$$

$$\therefore \theta = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\,\pi\ ,\ \frac{7\pi}{4} + 2k\,\pi\right\}$$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

(28)

$$\theta = \left\{30^\circ + 360^\circ k\ ,\ 150^\circ + 360^\circ k\ ,\ 330^\circ + 360^\circ k\right\}$$

(29)

$$\theta = \left\{120^\circ + 360^\circ k\ ,\ 240^\circ + 360^\circ k\ \right\}$$

(30) الماس:

a) حوالي 13.71°

b) بقياس زاوية السقوط للضوء وإنعكاساتها لتحديد معامل إنكسار الضوء، فإذا كان معامل الإنكسار يساوي 2.42 يكون ماساً نقياً.

مسائل مهارات التفكير العليا:

(31) اكتشف الخطأ:

قسمت **حلا** كلاً من الطرفين على $\sin\theta$ وهذا خطأ، بينما طرحت **شهد** $\sin\theta$ من الطرفين بشكل خطأ أيضاً.

(32) تحد:

$$\sin 2x < \sin x$$

$$\therefore \sin 2x - \sin x < 0$$

$$\therefore 2\sin x\cos x - \sin x < 0$$

$$\therefore \sin x\left(2\cos x - 1\right) < 0$$

$$\therefore \sin x < 0 \quad , \quad \cos x > \frac{1}{2}$$

$$or \quad \sin x > 0 \quad , \quad \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi \quad or \quad \frac{\pi}{3} < x < \pi$$

(33) أكتب:

كل نوع من المعادلات يحتاج إما إلى جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة كل طرف على العدد نفسة تحل المعادلات التربيعية والمثلثية على الأغلب بإستعمال التحليل ولا تحتاج المعادلات الخطية والتربيعية إلى متطابقات لحلها، ويمكن حلها جبرياً في حين يمكن تمثيل بعض المعادلات المثلثية بيانياً بسهولة باستعمال الحاسبة البيانية، أما المعادلات الخطية فلها على الأكثر حل وحيد.
والمعادلة التربيعية لها على الأكثر حلان. أما المعادلات المثلثية فلها عادة عدد لانهائى من الحلول إلا إذا كانت قيم المتغير مقيدة أو مشروطة.

(34) تبرير:

لأن الدوال المثلثية دورية، فإضافة دورة كاملة لأي حل للمعادلة ينتج حلاً لها.

(35) مسألة مفتوحة:

المعادلة هي: $2\cos\theta = 0$ والحلان هما 270° , $\theta = 90^\circ$

(36) تحد:

نعم لأن

$$\cot x + 1 = 2$$

$$\therefore \sec^2 x = 2 \quad \therefore \sec x = \sqrt{2}$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

$$\csc x = \sqrt{2}$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{\csc x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

$$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad (37)$$

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad (38)$$

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad (39)$$

$$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad (40)$$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي متطابقة:

(41)

$$\sin(270-\theta)$$
$$= \sin 270\cos\theta - \cos 270\sin\theta$$
$$= -1\times\cos\theta - 0 = -\cos\theta$$

(42)

$$\cos(90+\theta)$$
$$= \cos 90\cos\theta - \sin 90\sin\theta$$
$$= 0 - 1\times\sin\theta = -\sin\theta$$

(43)

$$\cos(90-\theta)$$
$$= \cos 90\cos\theta + \sin 90\sin\theta$$
$$= 0 + 1\times\sin\theta = \sin\theta$$

(44)

$$\sin(90-\theta)$$
$$= \sin 90\cos\theta - \cos 90\sin\theta$$
$$= 1\times\cos\theta - 0 = \cos\theta$$

(45)

$$\frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta} = \frac{v^2\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{2g\dfrac{1}{\cos^2\theta}} = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$$

(a

$$h = \frac{(110)^2\sin^2 80}{2\times 9.8} = 598.73\ m$$

(b

(46)

المجال: $(\infty\ ,\ -5]$

المـــدى: $(\infty\ ,\ -2]$

تدرب على إختبار

(47)

$$\frac{5\pi}{2} \longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow A$$

(48)

300° أو 240° $\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow D$

دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك:

اكتب المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) متطابقة الزاويتين المتتامتين
2) المتطابقات النسبية
3) المتطابقة المثلثية
4) متطابقات ضعف الزاوية
5) المتطابقات
6) المتطابقات المثلثية لجمع زاويتين أو الفرق بينهما
7) متطابقات المقلوب
8) متطابقات مجموع زاويتين
9) متطابقات فيثاغورث

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية:

(10

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$= (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \sin^2\theta = 1$$

$$\frac{2}{4} + \sin^2\theta = 1$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(11

$$\sec\theta = \sqrt{\frac{6}{2}}$$

(12

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}$$

(13

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta + \frac{9}{25} = 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{16}{25}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

(14

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

$$\frac{16}{25} + 1 = \csc^2\theta$$

$$\csc^2\theta = \frac{41}{25}$$

$$\csc\theta = \frac{\sqrt{41}}{5}$$

15) كرة قدم:

$$\sin\theta = \frac{75}{133}$$

بسط كل عبارة مما يأتي:

(16

$$1-\tan\theta\sin\theta\cos\theta$$

$$1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta\cos\theta$$

$$1-\sin^2\theta$$

$$=\cos^2\theta$$

(17

$$\tan\theta\csc\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=\sec\theta$$

(18

$$\sin\theta+\cos\theta\cot\theta$$

$$=\sin\theta+\cos\theta\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=\sec\theta$$

(19

$$\cos\theta(1+\tan^2\theta)$$

$$=\cos\theta(\sec^2\theta)$$

$$=\cos\theta\times\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$=\sec\theta$$

أثبت أن كل معادلة مما يأتى تمثل متطابقة:

(20

$$\tan\theta\cos\theta+\cot\theta$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\cos\theta+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\sin\theta$$

$$=\sin\theta+\cos\theta$$

(21

$$\frac{\cos\theta}{\cot\theta}+\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$$

$$=\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\sin\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\sin\theta+\cos\theta$$

(22

$$\sec^2\theta-1$$

$$=\tan^2\theta$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$

23) **هندسة:**

$$\cos\theta = \frac{3}{4}, \sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{4}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{7}{9}$$

$$\tan\theta + 1 = \frac{16}{9}$$

$$\sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{16}{9}$$

دون التعمال الألة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتى:

24)

$$\cos(-135) = \cos(45 - 180)$$

$$= \cos 45 \cos 180 + \sin 45 \sin 180$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(25

$$\cos(15) = \cos(45 - 30)$$
$$= \cos 45 \cos 30 + \sin 45 \sin 30$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(26

$$\sin(210) = \sin(180 + 30)$$
$$= \sin 180 \cos 30 + \cos 180 \sin 30$$
$$= 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

(27

$$\sin(105) = \sin(60 + 45)$$
$$= \sin 60 \cos 45 + \cos 60 \sin 45$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(28

$$\tan(75) = \tan(45+30)$$

$$= \frac{\tan 45 + \tan 30}{1 - \tan 45 \tan 30}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

(29

$$\cos(105) = \cos(60+45)$$

$$= \cos 60 \cos 45 - \sin 60 \sin 45$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(30

$$\sin(\theta + 90)$$

$$= \sin\theta \cos 90 + \cos\theta \sin 90$$

$$= \sin\theta \times 0 + \cos\theta \times 1$$

$$= \cos\theta$$

(31

$$\sin(\frac{3\pi}{2}+\theta)$$
$$=\sin\frac{3\pi}{2}\cos\theta+\cos\frac{3\pi}{2}\sin\theta$$
$$=-1\times\cos\theta-0\times\sin\theta$$
$$=-\cos\theta$$

(32

$$\tan(\theta-\pi)$$
$$=\frac{\tan\theta-\tan\pi}{1+\tan\theta\tan\pi}$$
$$=\frac{\tan\theta-0}{1+0}$$
$$=\tan\theta$$

أوجد القيم الدقيقة لكل من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ إذا علمت أن:

(33

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$\sin \theta = \frac{12}{13}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2\left(\frac{4}{5} \times \frac{3}{5}\right)$$

$$\sin 2\theta = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 2\left(\frac{16}{25}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{7}{25}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

(34

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{9}{25}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{16}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\left(-\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

$$\sin 2\theta = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 2\left(\frac{15}{16}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{14}{16}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = 2 - \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = 2 + \frac{\sqrt{15}}{4}$$

(35

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{5}{9}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2(\frac{\sqrt{5}}{3}\times -\frac{2}{3})$$

$$\sin 2\theta = \frac{-4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 2(-\frac{2}{3})^2 - 1$$

$$= -\frac{1}{9}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

36) ملاعب:

a) طول القطر = 127 ft

b) $\cos 45 = \frac{90}{127}$

c) $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{74}{127}}$$

$$\frac{\theta}{2} = 22.5$$

حل كل معادلة مما يأتى لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

(37

$$2\cos\theta - 1 = 0$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$
$$\theta = 60^\circ, 300^\circ$$

(38

$$4\cos^2\theta - 1 = 0$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$
$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

(39

$$\cos 2\theta + \cos\theta = 0$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$
$$\theta = 90^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ$$

(40

$$\theta = 270$$

(41

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

(42

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{145}}{145}$$
$$\cos\theta = \frac{12\sqrt{145}}{145}$$

(43

$$I = I_0\left(\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)$$

(44

$$r = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$
$$= \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \bullet \frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$
$$= \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$$
$$= \frac{1+\cos\alpha}{\sin}$$

45) موجات:

$$y_1 + y_2 = 0$$

إذن التداخل هدام

46) هندسة:

$$\sin 2 = 2 \sin N \cos N$$

$$= 2 \frac{n}{m} \square \frac{l}{m}$$

$$= \frac{2nl}{m^2}$$

أثبت أن كل من المعادلتين الآتيتين تمثل متطابقة:

(47

$$\frac{\sin 2\theta}{2\sin^2 \theta} = \cot \theta$$

$$\frac{2\sin \theta \cos \theta}{2\sin^2 \theta} = \cot \theta$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$

(48

$$1+\cos^2\theta=\frac{2}{1+\tan^2\theta}$$

$$1+2\cos^2\theta-1=\frac{2}{\sec^2\theta}$$

$$2\cos^2\theta=2\cos^2\theta$$

49) مقذوفات:

الزاوية التي قذفت بها الكرة = 60

اختبار الفصل

(1) إختيار من متعدد:

$\cos\theta \leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow D$

(2)

$$\cos(30-\theta)$$
$$=\cos 30\cos\theta+\sin 30\sin\theta$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$$
$$\sin(60+\theta)$$
$$=\sin 60\cos\theta+\cos 60\sin\theta$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$$

(3)

$$\cos(\theta-\pi)$$
$$=\cos\theta\cos\pi+\sin\theta\sin\pi$$
$$=-1\cos\theta+0$$
$$=-\cos\theta$$

(4) إختيار من متعدد:

$$\frac{4}{5}\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow D$$

بدون استعمال الألة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(5) $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

(6) $-\sqrt{3}$

(7) $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$

(8) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي متطابقة:

(9)

$$\sin\theta(\cot\theta+\tan\theta)$$
$$=\sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$
$$=\cos\theta+\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

(10)

$$\frac{\cos\theta}{\sec\theta-\tan\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\cos\theta}{\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$$

(11)

$$(\tan\theta+\cot\theta)^2$$

$$=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2=\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$$

$$=\sec^2\theta\csc^2\theta$$

(12)

$$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta}=\frac{1}{\sec\theta}+\frac{\sec\theta}{\sec\theta}=\cos\theta+1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}\square\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\cancel{\sin^2\theta}\,(1+\cos\theta)}{\cancel{\sin^2\theta}}=1+\cos\theta=\cos\theta+1$$

(13) إختيار من متعدد:

$\sqrt{2}-1$ ←←←←←B

(14) تاريخ:

a) بفرض أن إرتفاع المثلث يساوي a

$$a^2+9^2=18^2$$

$$\therefore a^2=18^2-9^2$$

$$\therefore a=\sqrt{243}=9\sqrt{3}$$

(b

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore \sin 2(30) = 2\sin 30\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(15)

$$\cos(-225)$$

$$= \cos(-225+360) = \cos 135 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(16)

$$\sin 480$$

$$= \sin(480-360) = \sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(17)

$$\cos 75$$

$$= \cos(120-45) = \cos 120 \cos 45 + \sin 120 \sin 45 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(18)

$$\sin 165$$

$$= \sin(120+45) = \sin 120 \cos 45 + \cos 120 \sin 45 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

حل كل من المعادلتين الآتيتين لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

(19)

$$\frac{\pi}{6} + k\,\pi$$

(20)

$$\frac{\pi}{18} + k\,\frac{2\pi}{3}$$

حل كل من المعادلتين الآتيتين حيث $0 \le \theta \le 360$:

(21)

$$\theta = \{0^\circ\ ,\ 360^\circ\}$$

$$\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=0$$

$$\therefore \sin\theta\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\therefore \sin\theta=0 \quad , \quad \cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\theta=\{0^\circ\ , 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ, 360^\circ\}$$

الفصل الرابع: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

اختبار سريع:

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي:

(1)

محور التماثل $x = 1$

المقطع y $(0\ ,\ -12)$

الرأس $(1,\ -13)$

---

(2)

محور التماثل $x = -1$

المقطع y $(0\ ,\ 6)$

الرأس $(-1,\ 5)$

---

(3)

محور التماثل $x = -1$

المقطع y $(0\ ,\ -8)$

الرأس $(-1,\ -10)$

---

(4)

محور التماثل $x = 3$

المقطع y $(0\ ,\ 3)$

الرأس $(3,\ -15)$

---

(5)

محور التماثل $x = 2$

المقطع y $(0\ ,\ -4)$

الرأس $(2,\ -16)$

---

(6)

محور التماثل $x = -1$

المقطع y $(0\ ,-1)$

الرأس $(-1,-5)$

---

(7) أعمال:

محور التماثل $x = 25$ ، المقطع y $(0\ ,550)$ ، الرأس $(25,\ 543.75)$

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

(8)

$b^2 - 4ac = 25 - 4\square 2\square 3 = 25 - 24 = 1$

(9)

$b^2 - 4ac = 108$

(10)

$b^2 - 4ac = -8$

$b^2 - 4ac = 100$ (11)

(12)

$b^2 - 4ac = 121$

(13)

$b^2 - 4ac = -172$

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن:

(14)

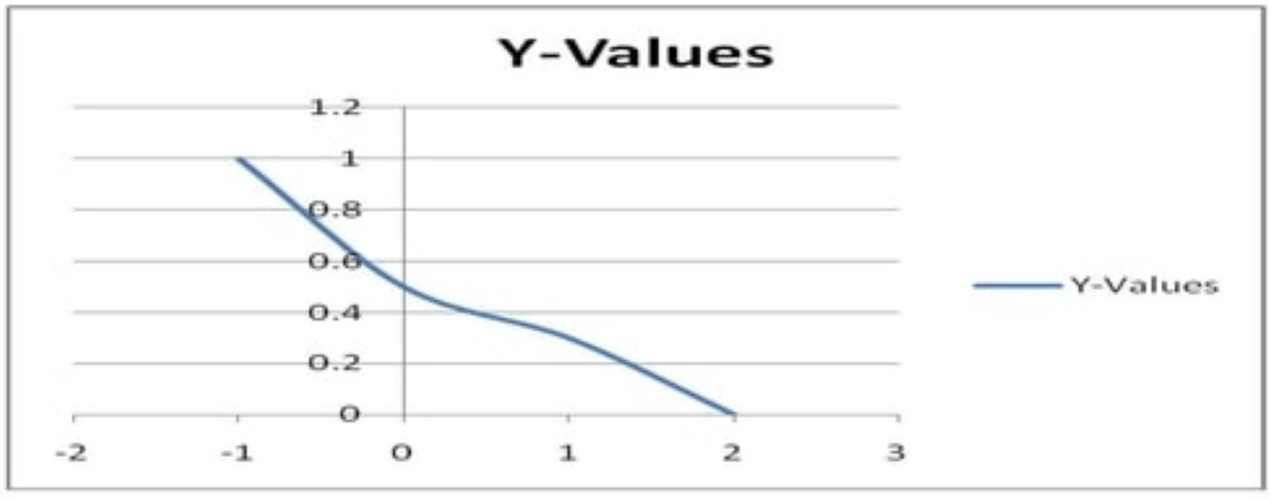
$$(x^2 + 8x + 16) - 16 = 0$$

(15)

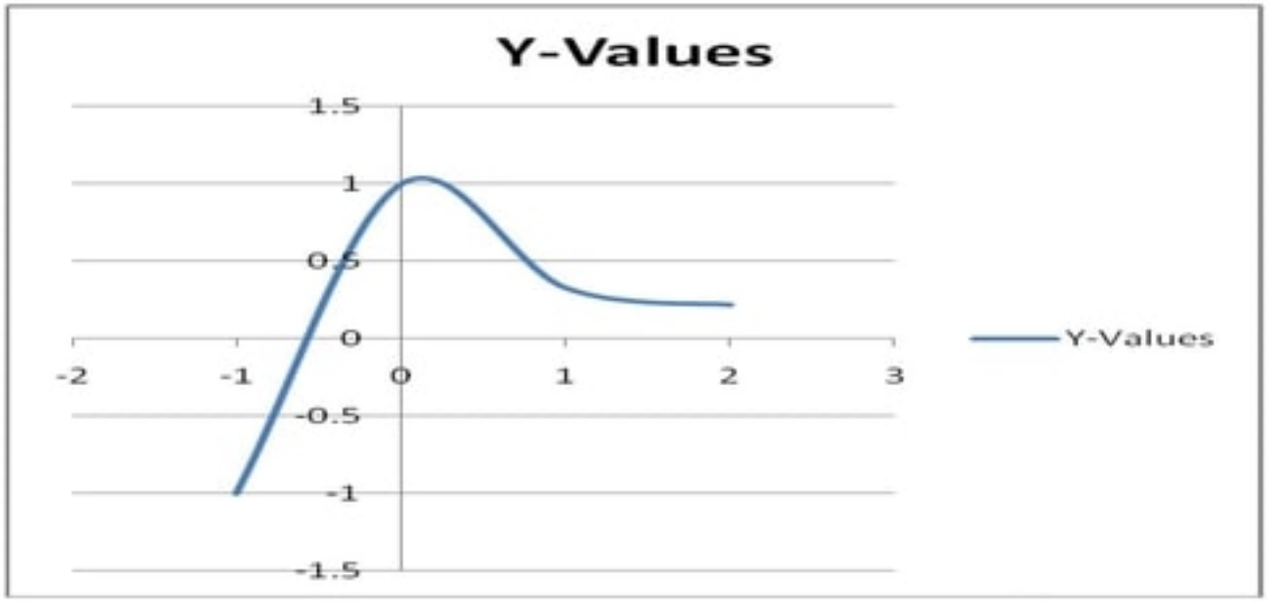
$$(x^2 - 18x - 81) + 81 = 0$$

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا

(16)

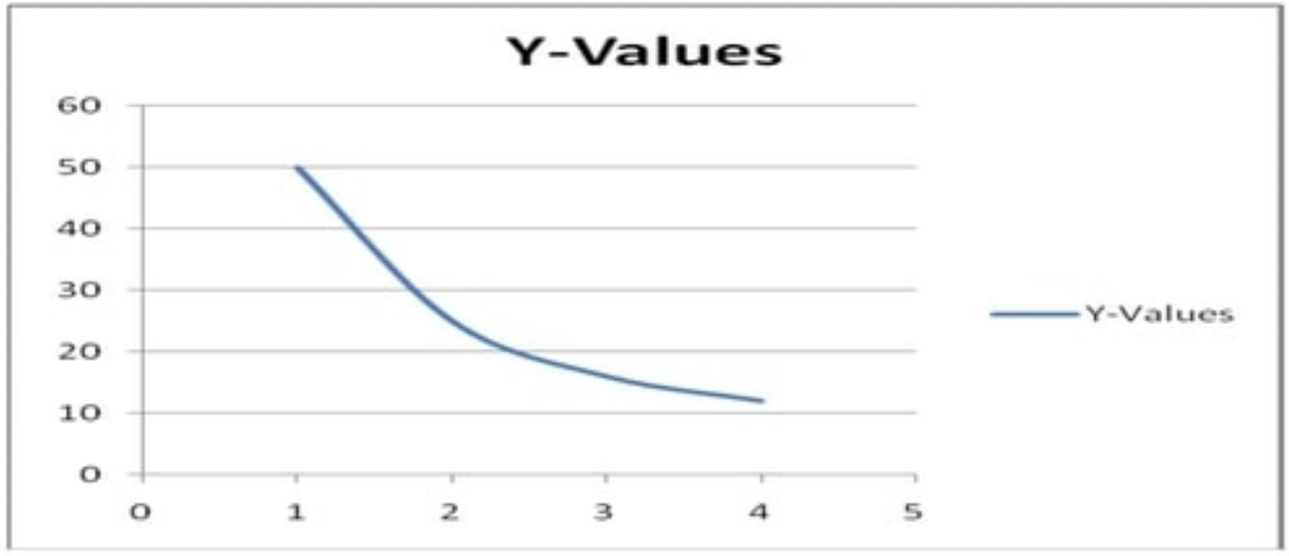


(17)



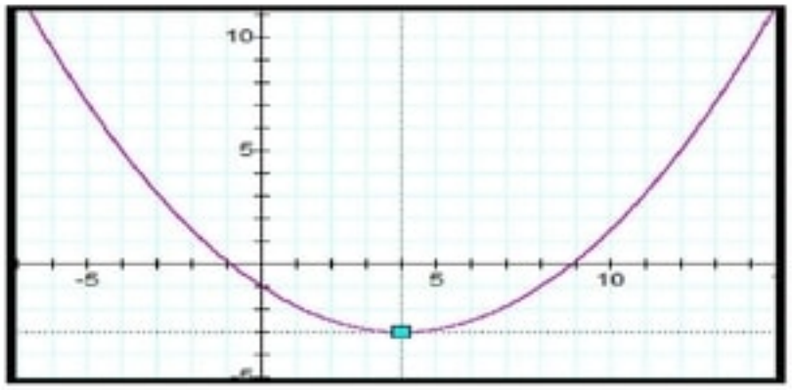
(18) هدية:

F(x)= 50/x



(4-1)القطوع المكافئة.

■ تحقق من فهمك:



(1)

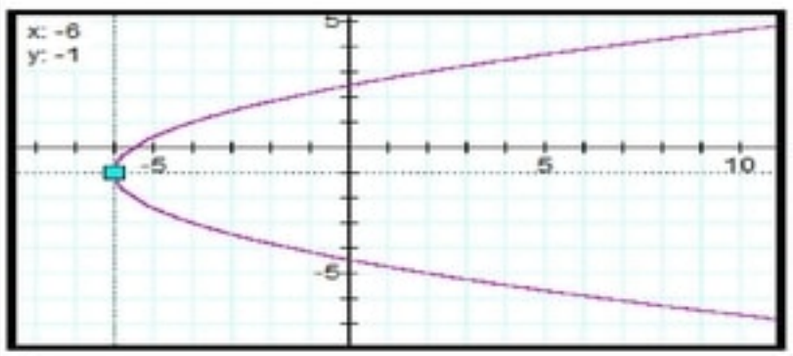
(1A) المنحني مفتوح رأسيا إلى أعلى

الرأس $(4,-3)$

البؤرة $(4,-1)$

الدليل $y=-5$

معادلة محور التماثل $x=4$



(1B) المنحني مفتوح أفقيا إلى اليمين

الرأس $(-6,-1)$

البؤرة $(-5.5,-1)$

الدليل $y=-6.5$

معادلة محور التماثل $x=-6$

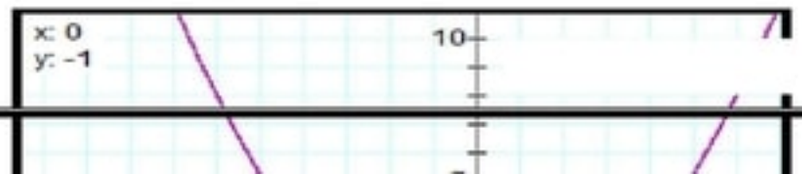
■ تحقق من فهمك:

(2) فلك:

$x^2=44.8(y-6)$ $\quad -5\le x\le 5$

أقصر مسافة هي $11.2\ ft$

■ تحقق من فهمك:



(3)

(3A $x^2 = 4(y+1)$

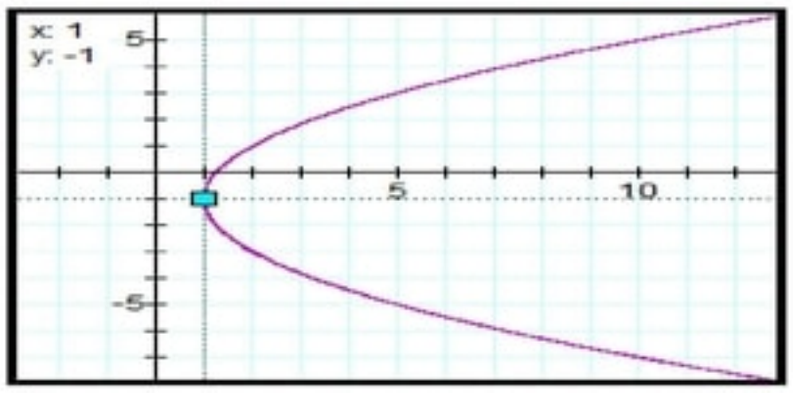
الرأس $(0,-1)$

البؤرة $(0,0)$

الدليل $y = -2$

معادلة محور التماثل $x = 0$

طول الوتر البؤري $= 4$



(3B $(y+1)^2 = 4(x-1)$

الرأس $(1,-1)$

البؤرة $(2,-1)$

الدليل $x = 0$

معادلة محور التماثل $y = -1$

طول الوتر البؤري $= 4$

■ تحقق من فهمك:

(4)

(4A

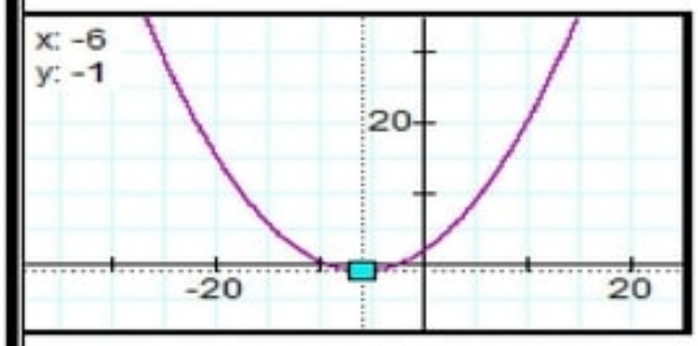
بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي x فإن المنحني مفتوح رأسياً

البؤرة $(h, k+p) = (-6, 2)$ ، الرأس $(h, k) = (-6, -1)$

لذا فإن $h = -6$ ، $k = -1$ ، $p = 2+1 = 3$

إذن معادلة القطع المكافئ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

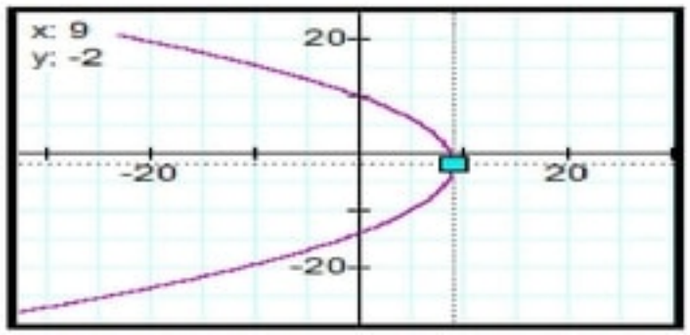
هي $(x+6)^2 = 12(y+2)$



(4B

بما أن الدليل مستقيم أفقيا فإن المنحني مفتوح أفقياً

$$h = x - c$$



البؤرة $(h+p\ ,k) = (5,-2)$ ، الرأس $(h\ ,k) = (9,-2)$

لذا فإن $h = 9$ ، $k = -2$ ، $p = 5-9 = -4$

إذن معادلة القطع المكافئ $(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$

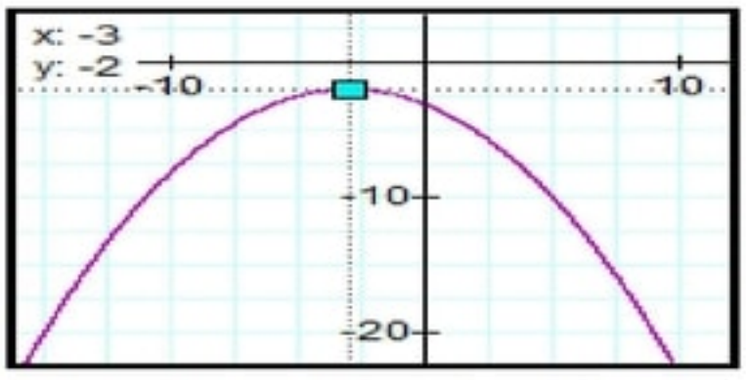
هي $(y+2)^2 = -16(x-9)$

(4C

المنحني مفتوح لأسفل

البؤرة $(h\ ,k+p) = (-3,-4)$ لذا $h = -3$ ، $k = -4-p$

المنحني يمر بالنقطة $(5,-10)$ إذن:



$$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$$

$$\therefore (5+3)^2 = 4p\,(-10+4+p)$$

$$\therefore 64 = 4p^2 - 24p$$

$$\therefore p^2 - 6p - 16 = 0$$

$$\therefore (p-8)(p+2) = 0$$

$$\therefore p = 8 \quad , \quad p = -2$$

المنحنى مفتوحاً لأسفل $p = -2$ إذن $k = -2$

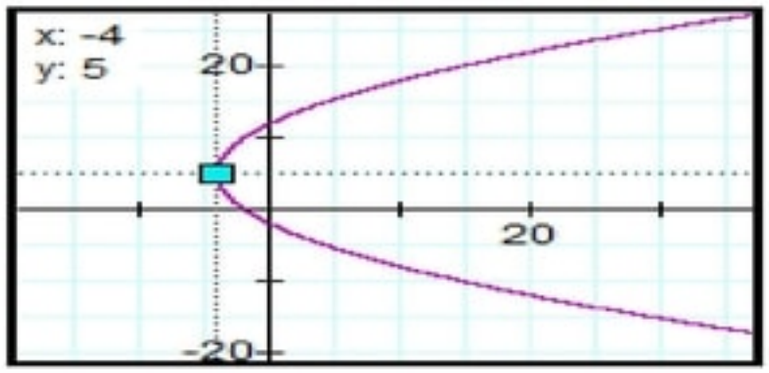
إذن معادلة المنحنى هي $(x+3)^2 = -8(y+2)$

(4D

المنحني مفتوح الي اليمين

البؤرة $(h+p\ ,k\ )=(-1,5)$ لذا $k=5$ ، $h=-1-p$

المنحني يمر بالنقطة $(8,-7)$ إذن:



$$(y-k)^2=4p\,(x-h)$$

$$\therefore(-7-5)^2=4p\,(8+1+p)$$

$$\therefore 144=4p^2+36p$$

$$\therefore p^2+9p-36=0$$

$$\therefore(p+12)(p-3)=0$$

$$\therefore p=-12\quad,\ p=3$$

المنحنى مفتوحاً لليمين $p=3$ إذن $h=-4$

إذن معادلة المنحنى هي $(y-5)^2=12(x+4)$

■ تحقق من فهمك:

(5)

(5A

$y=4x^2+4\quad,\ (-1\ ,\ 8)$

$$(x-0)^2=\frac{1}{4}(y-4)$$

$$h=0\ ,\ k=4\ ,\ p=\frac{1}{16}=0.0625$$

البؤرة $=(0\ ,\ 4.0625)$

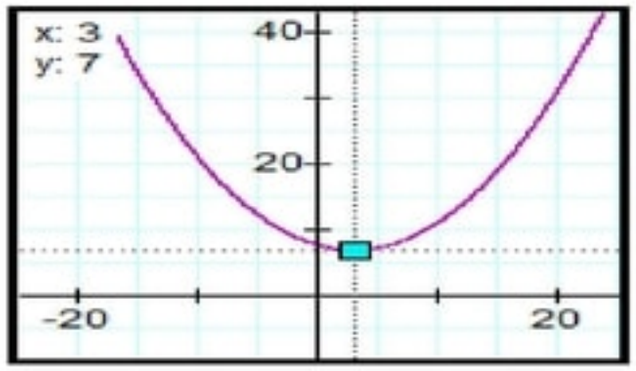
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-1-0)^2 + (8-4.0625)^2} = 4.0625$$
$$A = (0\ , 4.0625 - 4.0625) = (0,0)$$
$$m = \frac{8-0}{-1-0} = -8$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 8 = -8(x+1)$$
$$y = -8x$$

(5B

$$x = 5 - \frac{y^2}{4} \quad , \ (1\ , -4)$$
$$(y-0)^2 = -4(x-5)$$
$$h = 5\ , \ k = 0\ , \ p = -1$$
البؤرة = $(4\ ,\ 0)$
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(1-4)^2 + (-4-0)^2} = 5$$
$$A = (4-5\ , 0) = (-1,0)$$
$$m = \frac{-4-0}{1+1} = -2$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 4 = -2(x-1)$$
$$y = -2x - 2$$

تدرب وحل المسائل.

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلتة في كل مما يأتي ، ثم مثل منحناه بيانياً:



(1) المنحنى مفتوح رأسيا لأعلى

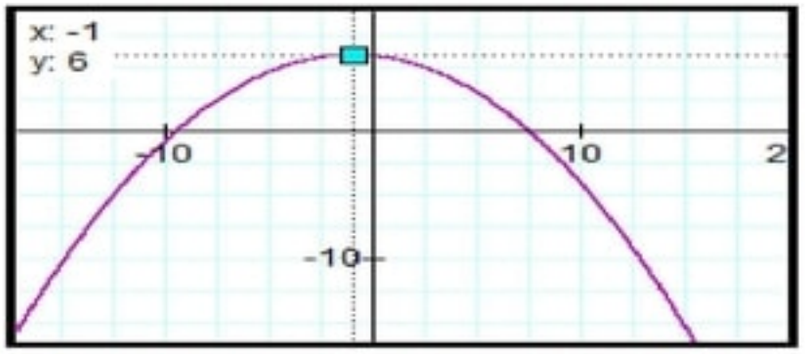
الرأس $(3,7)$

البؤرة $(3,10)$

الدليل $y = 4$

معادلة محور التماثل $x = 3$

طول الوتر البؤري $= 12$



(2) المنحنى مفتوح رأسيا لأسفل

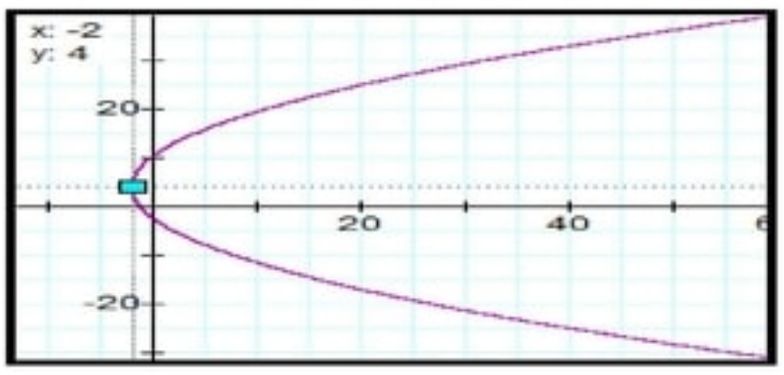
الرأس $(-1,6)$

البؤرة $(-1,3)$

الدليل $y = 9$

معادلة محور التماثل $x = -1$

طول الوتر البؤري $= 12$



(3) المنحنى مفتوح أفقيا لليمين

الرأس $(-2,4)$

البؤرة $(3,4)$

الدليل $x = -7$

معادلة محور التماثل $y = 4$

طول الوتر البؤري $= 20$

(4) المنحنى مفتوح أفقيا لليسار

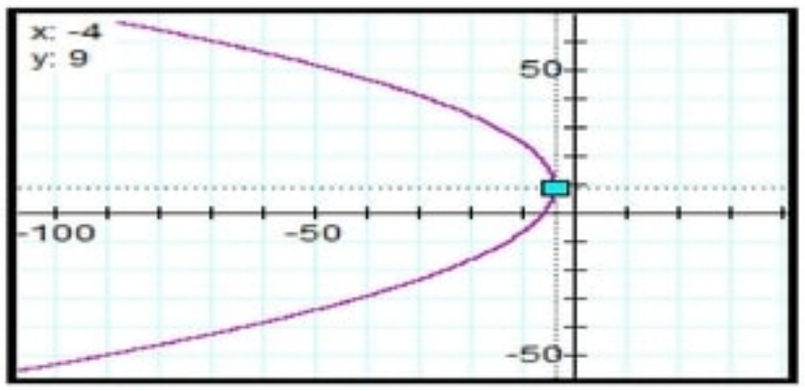
الرأس $(-4,9)$

البؤرة $(-14,9)$

الدليل $x = 6$

معادلة محور التماثل $y = 9$

طول الوتر البؤري $= 40$



---

(5) المنحنى مفتوح أفقيا لليمين

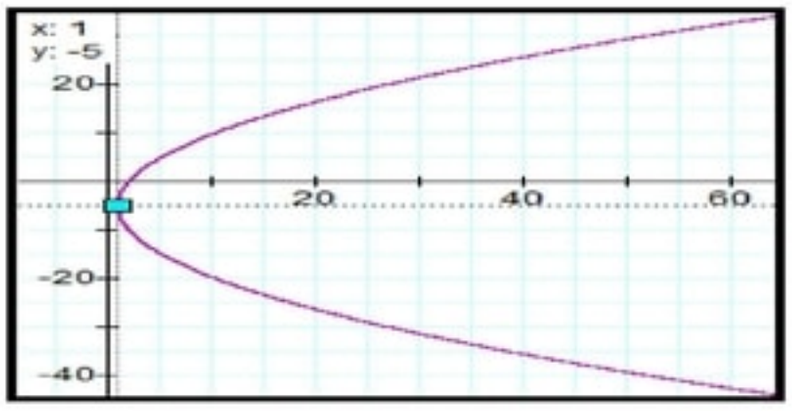
الرأس $(1,-5)$

البؤرة $(7,-5)$

الدليل $x = -5$

معادلة محور التماثل $y = -5$

طول الوتر البؤري $= 24$



(6) المنحنى مفتوح رأسيا لأسفل

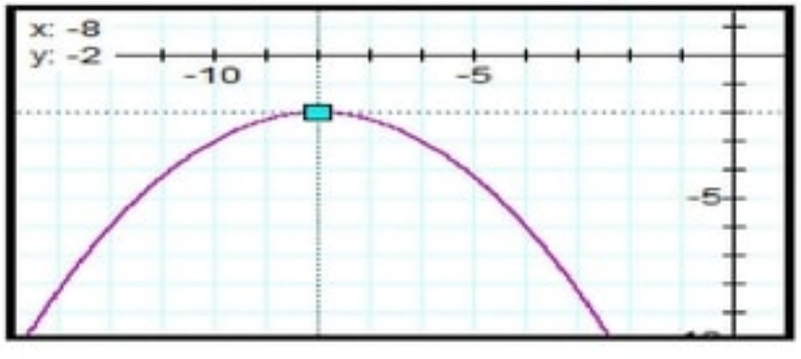
الرأس $(-8,-2)$

البؤرة $(-8,-3)$

الدليل $y = -1$

معادلة محور التماثل $x = -8$

طول الوتر البؤري $= 4$



(7) لوح تزلج:

$x^2 = 8(y-2)$ طول البعد البؤري $= 4\,ft$

---

(8) قوارب:

(a

$$y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$$

$$(y-5)^2 = 180(x-3)$$

(b طول الحبل = طول الوتر البؤري $= 45\,ft$

أكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ ، ثم حدد خصائصة ، و مثل منحناه بيانياً:

(9) $x^2 = 8(y+7)$

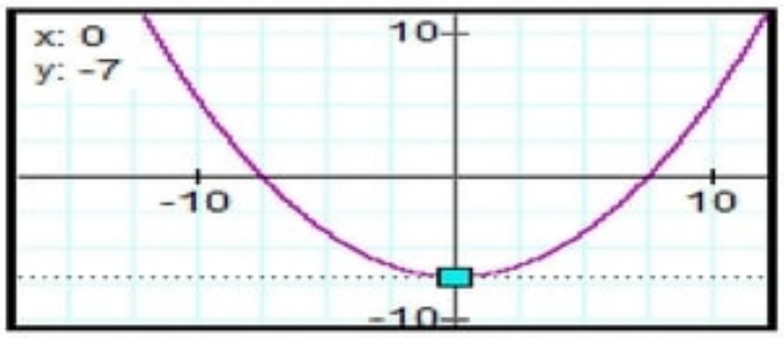
الرأس $(0,-7)$

البؤرة $(0,-5)$

الدليل $y = -9$

معادلة محور التماثل $x = -8$

طول الوتر البؤري $= 8$



---

(10)

$y^2 = -8(x+7)$

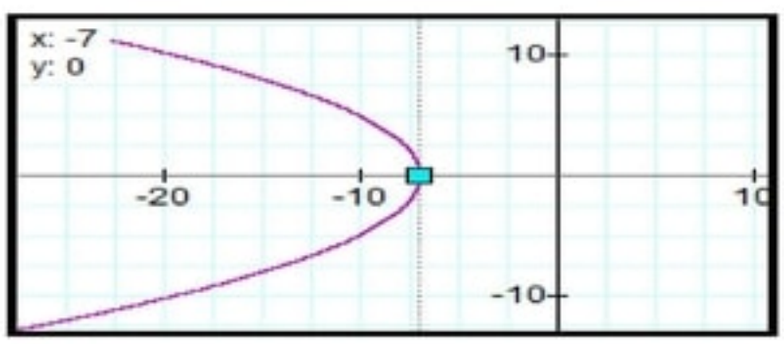
الرأس $(-7,0)$

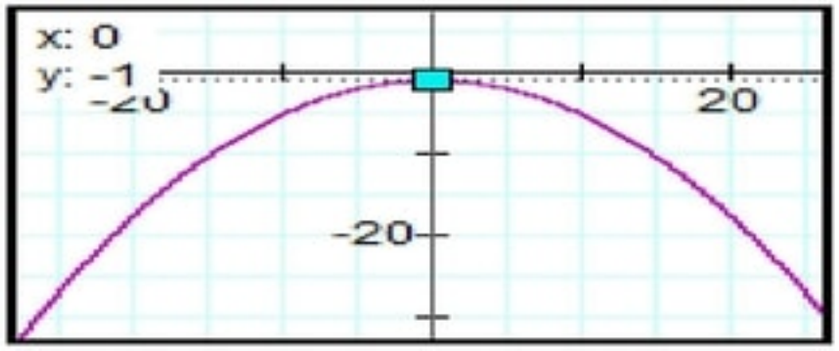
البؤرة $(-9,0)$

الدليل $x = -5$

معادلة محور التماثل $y = 0$

طول الوتر البؤري $= 8$





(11) $x^2 = -24(y+1)$

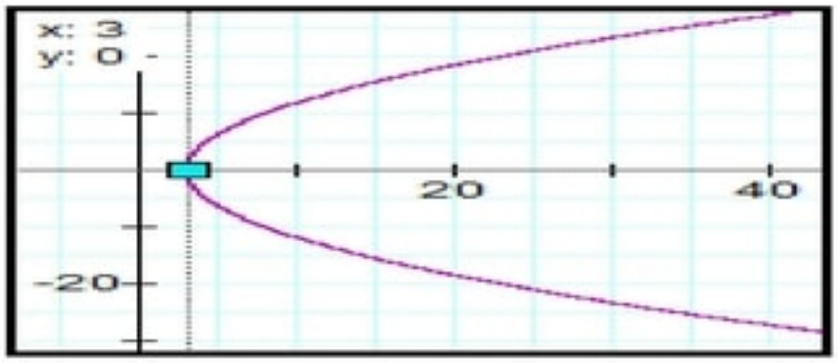
الرأس $(0,-1)$

البؤرة $(0,-7)$

الدليل $y = 5$

معادلة محور التماثل $x = 0$

طول الوتر البؤري $= 24$



(12) $y^2 = 20(x-3)$

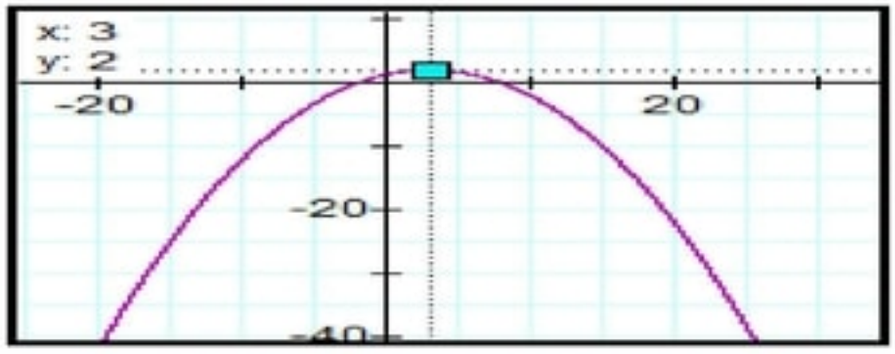
الرأس $(3,0)$

البؤرة $(8,0)$

الدليل $x = -2$

معادلة محور التماثل $y = 0$

طول الوتر البؤري $= 20$



(13) $(x-3)^2 = -12(y-2)$

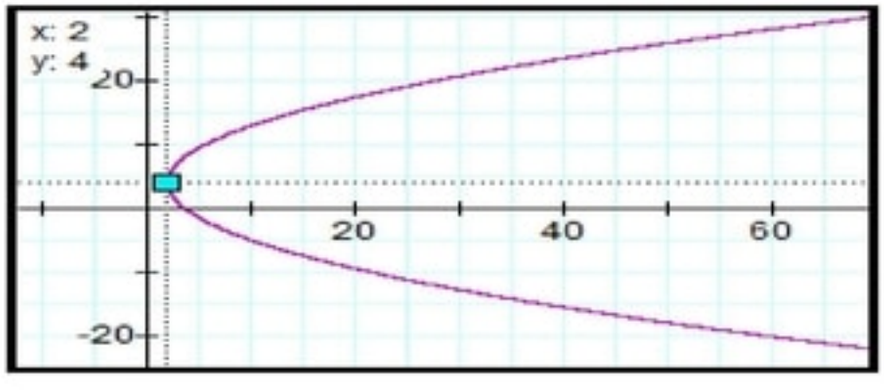
الرأس $(3,2)$

البؤرة $(3,5)$

الدليل $y = -1$

معادلة محور التماثل $x = 3$

طول الوتر البؤري $= 12$



(14) $(y-4)^2 = 10(x-2)$

الرأس $(2,4)$

البؤرة $(4.5,4)$

الدليل $x = -\frac{1}{2}$

معادلة محور التماثل $y = 4$

طول الوتر البؤري $= 10$

أكتب القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(15) بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي x فإن المنحني مفتوح رأسيا

البؤرة $(h,k+p)=(-9,-7)$ ، الرأس $(h,k)=(-9,-4)$

لذا فإن $h=-9$ ، $k=-4$ ، $p=-7+4=-3$

إذن معادلة القطع المكافئ $(x-h)^2=4p(y-k)$

هي $(x+9)^2=-12(y+4)$

---

(16)

المنحني مفتوح لأعلى

البؤرة $(h,k+p)=(3,3)$ لذا $h=3$ ، $k=3-p$

المنحني يمر بالنقطة $(23,18)$ إذن:

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

$$\therefore (23-3)^2=4p(18-3+p)$$

$$\therefore 400=4p^2+60p$$

$$\therefore p^2+15p-100=0$$

$$\therefore (p-5)(p+20)=0$$

$$\therefore p=5 \quad , \quad p=-20$$

المنحنى مفتوحا لأعلى $p=5$ إذن $k=-2$

إذن معادلة المنحنى هي $(x-3)^2=10(y+2)$

---

(17) بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y فإن المنحني مفتوح أفقيا

البؤرة $(h+p,k)=(2,-1)$ ، الرأس $(h,k)=(-4,-1)$

لذا فإن $h=-4$ ، $k=-1$ ، $p=2+4=6$

إذن معادلة القطع المكافئ $(y-k)^2=4p(x-h)$

هي $(y+1)^2=24(x+4)$

(18) المنحني مفتوح إلى اليمين

البؤرة $(h+p\,,k)=(11,4)$ لذا $k=4$ ، $h=11-p$

المنحني يمر بالنقطة $(20,16)$ إذن:

$$(y-k)^2=4p\,(x-h)$$
$$\therefore (16-4)^2=4p\,(20-11+p)$$
$$\therefore 144=4p^2+36p$$
$$\therefore p^2+9p-36=0$$
$$\therefore (p+12)(p-3)=0$$
$$\therefore p=-12 \quad , \quad p=3$$

المنحنى مفتوحا لليمين $p=3$ إذن $h=8$

إذن معادلة المنحنى هي $(y-4)^2=12(x-8)$

---

(19) بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y فإن المنحني مفتوح أفقيا

البؤرة $(h+p\,,k)=(-3,-2)$ ، الرأس $(h\,,k)=(1,-2)$

لذا فإن $h=1$ ، $k=-2$ ، $p=-3-1=-4$

إذن معادلة القطع المكافئ $(y-k)^2=4p\,(x-h)$

هي $(y+2)^2=-16(x-1)$

(20) المنحني مفتوح رأسيا إذن معادلتة الأساسية $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$

المنحني يمر بالنقطة $(6,-5)$ إذن:

$$\therefore (6-h)^2 = 4p\,(-5-k)$$

$$\therefore h^2 - 12h + 36 = -20p - 4pk \quad \rightarrow (1)$$

المنحني يمر بالنقطة $(0,-2)$ إذن:

$$\therefore (0-h)^2 = 4p\,(-2-k)$$

$$\therefore h^2 = -8p - 4pk \quad \rightarrow (2)$$

المنحني يمر بالنقطة $(-12,-14)$ إذن:

$$\therefore (-12-h)^2 = 4p\,(-14-k)$$

$$\therefore h^2 + 24h + 144 = -56p - 4pk \quad \rightarrow (3)$$

بحل الثلاث معادلات ينتج أن $h = 0$ ، $k = -2$ ، $p = -3$

إذن معادلة المنحنى هي $x^2 = -12(y+2)$

---

(21) بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي x فإن المنحني مفتوح رأسياً

البؤرة $(h,k+p) = (-3,4)$ ، الرأس $(h,k) = (-3,2)$

لذا فإن $h = -3$ ، $k = 2$ ، $p = 4-2 = 2$

إذن معادلة القطع المكافئ $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$

هي $(x+3)^2 = 8(y-2)$

---

(22) الرأس $(h,k) = (-3,2)$ لذا $k = 2$ ، $h = -3$

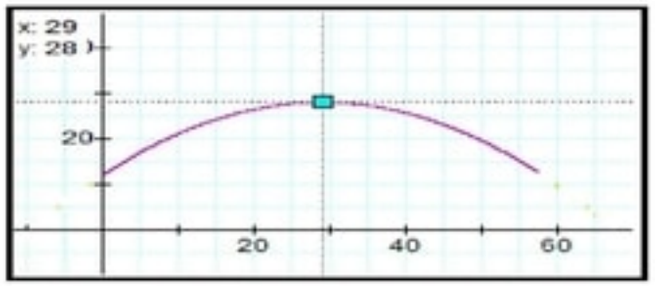
طول الوتر البؤري $|4p| = 8$ لذا فإن $p = 2$

محور التماثل $y = 2$ إذن المنحني مفتوح أفقياً

إذن معادلة المنحنى هي $(y-2)^2 = 8(x+3)$

(23) عمارة:

(a $(x-29)^2 = -52.5(7-28)$

(b 

اكتب كل معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يلي عند النقطة المعطاة:

(24) $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)$, $(-5,-5)$

$h = -7\ ,\ k = 3\ ,\ p = -\frac{1}{8} = -0.125$

البؤرة $= (-7\ ,\ 2.875)$

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$= \sqrt{(-5+7)^2+(-5-2.875)^2} = 8.125$

$A = (-7\ ,2.875-8.125) = (-7,-5.25)$

$m = \frac{-5+5.25}{-5+7} = \frac{1}{8}$

$y - y_1 = m(x-x_1)$

$y + 5 = \frac{1}{8}(x+5)$

$y = \frac{1}{8}x - \frac{35}{8}$

$$y^2 = \frac{1}{5}(x-4) \quad , \ (24\ ,\ 2) \quad (25)$$

$$(y-0)^2 = \frac{1}{5}(x-4)$$

$$h = 4\ ,\ k = 0\ ,\ p = \frac{1}{20} = 0.05$$

البؤرة $= (4.05\ ,\ 0)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(24-4.05)^2 + (2-0)^2} = 20.05$$

$$A = (4.05 - 20.05\ ,0) = (-16, 0)$$

$$m = \frac{2-0}{24+16} = \frac{1}{20} = 0.05$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{20}(x-24)$$

$$y = \frac{1}{20}x + \frac{4}{5}$$

$$(x+6)^2 = 3(y-2) \quad , \ (0\ ,\ 14) \quad (26)$$

$$h = -6\ ,\ k = 2\ ,\ p = \frac{3}{4} = 0.75$$

البؤرة $= (-6\ ,\ 2.75)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(0+6)^2 + (14 - 2.75)^2} = 12.75$$
$$A = (-6\ , 2.75 - 12.75) = (-6, -10)$$
$$m = \frac{14+10}{0+6} = 4$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 14 = 4(x - 0)$$
$$y = 4x + 14$$

$$-4x = (y+5)^2 \ , \ (0\ , -5) \quad (27)$$

$$(y+5)^2 = -4(x-0)$$
$$h = 0\ , k = -5\ , p = -1$$

البؤرة $= (-1\ , -5)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(0+1)^2 + (-5+5)^2} = 1$$
$$A = (-1-1\ , -5) = (-2, -5)$$
$$m = \frac{-5+5}{0+2} = 0$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 5 = 0(x - 0)$$
$$x = 0$$

حدد إتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ فى كل مما يأتى:

(28) مفتوح إلى الأسفل

(29) مفتوح إلى اليسار

(30) مفتوح إلى الأعلى

(31) مفتوح إلى اليمين

---

(32) جسور:

(a $x^2 = -180.3(y + 20)$

(b $30.35\ m$

أكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرتة، ويمس المستقيم المعطى منحناه في كل مما يأتي:

الحـــــــــل: يوجد عدد لانهائي من المعادلات يتوقف ذلك على نقطة التماس بين المنحنى والمماس

(33) المنحني مفتوح رأسيا

البؤرة $(h,k+p) = (0,3)$ لذا $h = 0$ ، $k = 3 - p$

المنحني يمر بالنقطة $(4,6)$ إذن:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$\therefore (4-0)^2 = 4p(6-3+p)$$

$$\therefore 16 = 4p^2 + 12p$$

$$\therefore p^2 + 3p - 4 = 0$$

$$\therefore (p-1)(p+4) = 0$$

$$\therefore p = 1 \quad , p = -4$$

المنحنى مفتوحا لأعلى $p = 1$ إذن $k = 2$

إذن معادلة المنحنى هي $x^2 = 4(y-2)$

(34) المنحني مفتوح الى اليمين

البؤرة $(h+p\ ,k)=(1,0)$ لذا $k=0$ ، $h=1-p$
المنحني يمر بالنقطة $(4,4)$ إذن:

$$(y-k)^2=4p\,(x-h)$$

$$\therefore (4-0)^2=4p\,(4-1+p)$$

$$\therefore 16=4p^2+12p$$

$$\therefore p^2+3p-4=0$$

$$\therefore (p+4)(p-1)=0$$

$$\therefore p=-4 \quad , \quad p=1$$

المنحنى مفتوحا لليمين $p=1$ إذن $h=0$
إذن معادلة المنحنى هي $y^2=4x$

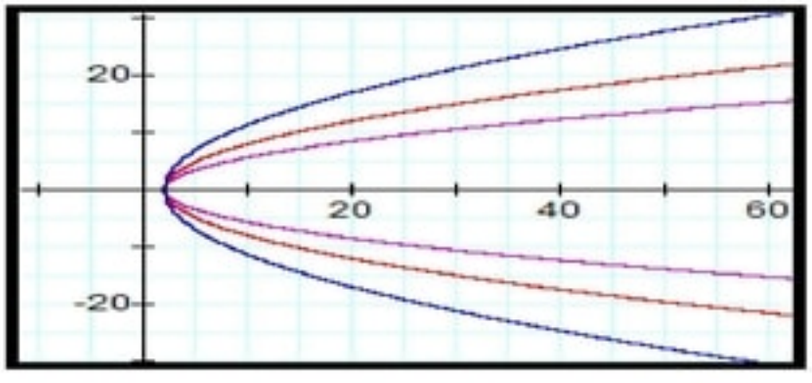
---

(35) تمثيلات متعددة:

a) **هندسياً:**

i) وحدة
ii) وحدتين
iii) أربع وحدات

b) **بيانيا:**



c) **لفظياً:**

عندما تتحرك البؤرة بعيداً عن الرأس يزداد توسع منحنى القطع المكافئ رأسيا

d) **تحليلياً:**

$$(x+1)^2 = 4(y+7)$$

e) تحليلياً:

جميع القطوع لها نفس الرأس $(0, -1)$ ومنحنياتها مفتوحة إلى أسفل ومنحنى المعادلة $x^2 = 2(y+1)$ هو الأضيق، لكن منحنى المعادلة $x^2 = -12(y+1)$ هو الأوسع.

(36) إكتشف الخطأ:

بما أن $p = 1$ فإن منحنى القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى.

---

(37) تبرير:

كل نقطة على المنحنى للقطع المكافئ بعدها عن البؤرة يساوي بعدها عن الدليل. ولأن الرأس يقع مباشرة بين البؤرة والدليل على محور التماثل فإنها هي الأقرب إلى البؤرة.

---

(38) تبرير:

الربعان الأول والرابع ، الرأس $(-2,5)$ وتقع الرأس على يسار المحور y والمنحنى مفتوح إلي اليسار لذا فإنة لا يوجد نقاط للمنحنى على يمين المحور y أو في الربعين الأول والرابع .

---

(39) تحد:

$$y^2 = \frac{15}{8}x$$

---

(40) أكتب:

إذا كان للبؤرة والرأس الإحداثي x نفسه فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى أعلى أو إلى أسفل وإذاكان الإحداثي y للرأس أصغر من الإحداثي y للبؤرة فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى الأعلى. أما إذا كان أكبر من الإحداثي y للبؤرة فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى أسفل.

وإذا كان للبؤرة والرأس الإحداثي y نفسه فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى اليمين أو إلى اليسار وإذاكان الإحداثي x للرأس أصغر من الإحداثي x للبؤرة فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى اليمين. أما إذا كان أكبر من الإحداثي x للبؤرة فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى اليسار.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

$$\log_{16} 4 = \frac{1}{2} \quad (41)$$

$$\log_4 16^x = 4x \quad (42)$$

$$\log_3 27^x = 3x \quad (43)$$

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي. ثم تحقق من صحة حلك:

(44)

$$8^{2x-1} = 2\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 2^{3(2x-1)} = 2^3$$

$$\therefore 6x - 3 = 3$$

$$\therefore 6x = 6 \qquad \therefore \ x = 1$$

---

(45)

$$\log_3(-x) + \log_3(6-x) = 3$$

$$\therefore \log_3(x^2 - 6x) = 3$$

$$\therefore x^2 - 6x = 3^3 = 27$$

$$\therefore x^2 - 6x - 27 = 0$$

$$\therefore (x-9)(x+3) = 0$$

$$\therefore \ x = 9 \ , x = -3$$

للتحقق عوض عن قيمة x

$x = -3$

$$\log_3(3) + \log_3(6+3) \stackrel{?}{=} 3$$

$$\log_3(3\square 9) = \log_3 27 = 3 \qquad c$$

إذن $x = -3$

$x = 9$

$$\log_3(-9) + \log_3(6-9) \stackrel{?}{=} 3$$

$$\log_3(-9) + \log_3(-3) \qquad d$$

(46)

$\log_3 x \le -3$

$\therefore x \le 3^{-3}$

$\therefore x \le \frac{1}{27}$

$\therefore \left\{ x \middle| 0 < x \le \frac{1}{27} \right\}$

---

(47) أوجد كل مما يأتي:

(a $h(-3) = 20$

(b $h(6x) = 16 - \frac{4}{4x+1}$

(b $h(10-2c) = 16 - \frac{12}{23-4c}$

---

(48)

$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 1 \quad \therefore \quad 2\theta = 90 \quad \therefore \quad \theta = 45$

$\therefore \quad \sin\theta + \cos\theta = \sin 45 + \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

تدرب على إختبار

(49)

$\sqrt{x^3}$ ←←←← G

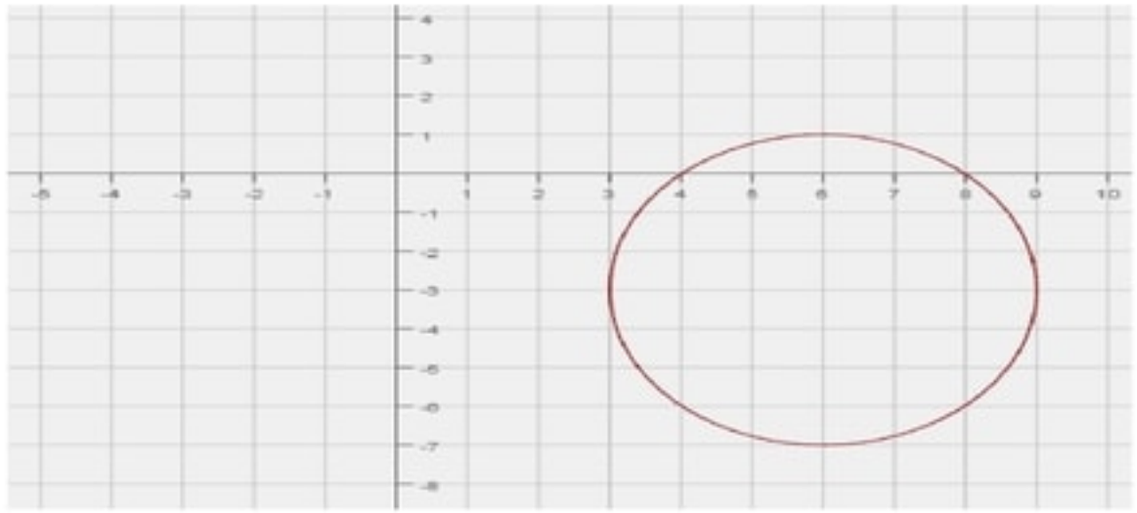
(50)

$y = x^2$ ←←←← D

(2 – 4) القطوع الناقصة والدوائر

■ تحقق من فهمك:

(1)



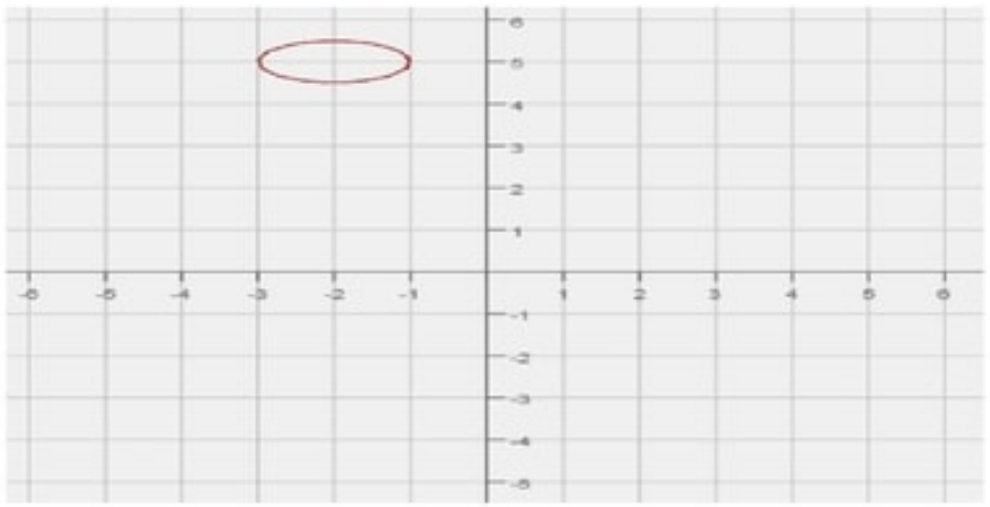
(1A) الاتجاه: رأسي، المركز: $(6,3)$

البؤرتان: $(6,-3\pm\sqrt{7})$

الرأسان: $(9,-3)$ ، $(3,-3)$

المحور الأكبر: $x=6$

المحور الأصغر: $y=-3$



(1B) الاتجاه: أفقي، المركز: $(-2,5)$

البؤرتان: $(-2\pm\frac{\sqrt{3}}{2},5)$

الرأسان: $(-1,5)$ ، $(-3,5)$

الرأسان المرافقان: $(-2,5.5)$ ، $(-2,4,5)$

المحور الأكبر: $y=5$

المحور الأصغر: $x=-2$

■ تحقق من فهمك:

(2)

$$\frac{(x-6)^2}{2.25}+\frac{(y-3)^2}{56}=1 \quad (2A)$$

$$\frac{(x=2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{36}=1 \quad (2B)$$

■ تحقق من فهمك:
(3)

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{48-18}}{\sqrt{48}}=0.79 \quad (3A$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{19-17}}{\sqrt{19}}=0.32 \quad (3B$$

■ تحقق من فهمك:
(4)

$$e=\frac{c}{a}$$

$$\therefore 0.39=\frac{c}{12.5}$$

$$\therefore c=4.875$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{12.5^2-4.875^2}=11.51$$

$$\therefore 2b=23.02\ mm$$

■ تحقق من فهمك:
(5)

$$x^2+y^2=9 \quad (5A$$

(5B $(x-5)^2+y^2=25$

■ تحقق من فهمك:

(6)

$$(h,k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{3+1}{2},\frac{-3+5}{2}\right)=(2,1)$$

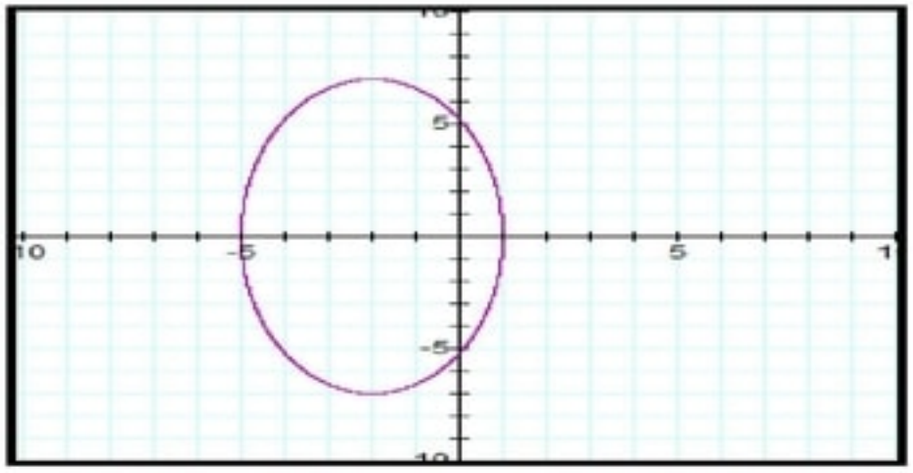
$$\therefore h=2 \quad ,k=1$$

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(2-1)^2+(1-5)^2}=\sqrt{17}$$

إذن معادلة الدائرة هي $(x-2)^2+(y-1)^2=17$

تدرب وحل المسائل.

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلتة في كل مما يأتي ، ثم مثّل منحناه بيانياً:



(1) الإتجاه: رأسي

المركز: $(-2,0)$

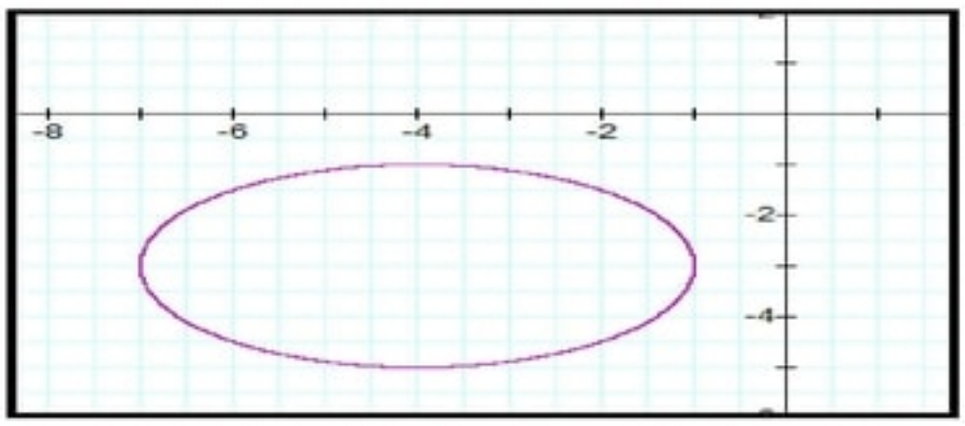
البؤرتان: $(-2,\pm 2\sqrt{10})$

الرأسان: $(-2,\pm 7)$

الرأسان المرافقان: $(-5,0)$ ، $(1,0)$

المحور الأكبر: $x=-2$

المحور الأصغر: $y=0$



(2) الإتجاه: أفقي

المركز: $(-4,-3)$

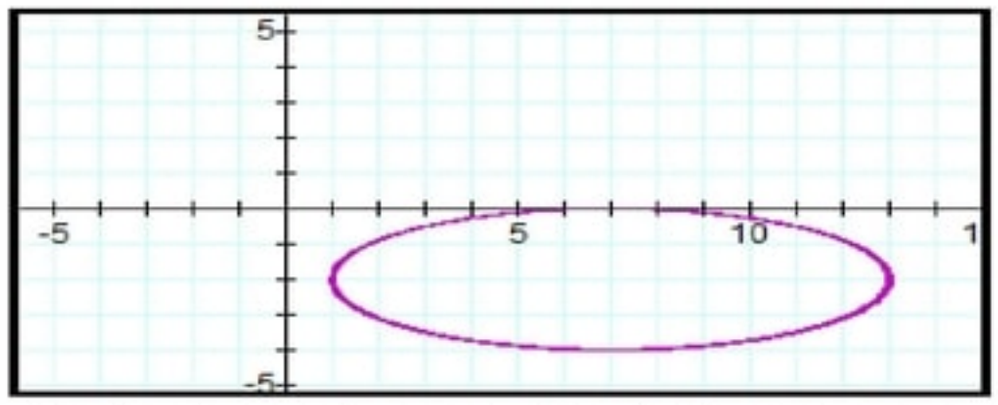
البؤرتان: $(-4\pm\sqrt{5},-3)$

الرأسان: $(-7,-3)$ ، $(-1,-3)$

الرأسان المرافقان: $(-4,-1)$ ، $(-4,-5)$

المحور الأكبر: $y=-3$

المحور الأصغر: $x=-4$



(3) الإتجاه: أفقي

المركز: $(7,2)$

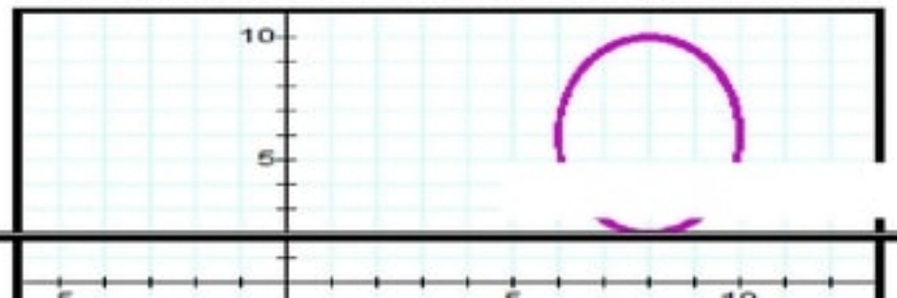
البؤرتان: $(7\pm 4\sqrt{2},-2)$

الرأسان: $(1,-2)$ ، $(13,-2)$

الرأسان المرافقان: $(7,0)$ ، $(7,-4)$

المحور الأكبر: $y=-2$

المحور الأصغر: $x=7$



(4) الإتجاه: رأسي

المركز: $(8,6)$

البؤرتان: $(8,\pm 2\sqrt{3})$
الرأسان: $(8,10)$ ، $(8,2)$
الرأسان المرافقان: $(10,6)$ ، $(6,6)$
المحور الأكبر: $x=8$
المحور الأصغر: $y=6$

أكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(5)

بما أن الرأسان $(h+a,k)=(13,-3)$ ، $(h-a,k)=(-7,-3)$

لذا فإن $k=-3$ ، $h=3$ ، $a=10$

بما أن البؤرتان $(h+c,k)=(11,-3)$ ، $(h-c,k)=(-5,-3)$

لذا فإن $c=8$ وبالتالي فإن $b=\sqrt{100-64}=6$

وبالتالي فإن معادلة القطع الناقص تكون $\frac{(x-3)^2}{100}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$

---

(6)

بما أن الرأسان $(h,k+c)=(4,3)$ ، $(h,k-c)=(4,-9)$

لذا فإن $k=-3$ ، $h=4$ ، $c=6$

بما أن طول المحور الأصغر $2b=8$ فإن $b=4$

وبالتالي فإن $a=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}$

وبالتالي فإن معادلة القطع الناقص تكون $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{20}=1$

---

(7)

نستخدم نهايتي المحور الأكبر في إيجاد a حيث $a=\frac{1-(-13)}{2}=7$

نستخدم نهايتي المحور الأصغر في إيجاد b حيث $b=\frac{4-0}{2}=2$

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر $(h,k)=\left(\frac{-13+1}{2},\frac{2+2}{2}\right)=(-6,2)$

وبما أن الإحداثي y لنهايتي المحور الأكبر متساويان فإن المحور الأكبر أفقي، ومعادلة القطع الناقص هي $\frac{(x+6)^2}{49}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

---

(8)

بما أن البؤرتان $(h,k+c)=(-6,9)$ ، $(h,k-c)=(-6,-3)$

لذا فإن $h=-6$ ، $k=3$ ، $c=6$

بما أن طول المحور الأكبر $2a=20$ فإن $a=10$

وبالتالي فإن $b=\sqrt{100-36}=8$

وبما أن الإحداثي x لنهايتي البؤرتان متساويان فإن المحور الأكبر رأسي ، ومعادلة القطع الناقص هي $\frac{(x+6)^2}{64}+\frac{(y-3)^2}{100}=1$

---

(9)

بما أن الرأسان المرافقان $(h+b,k)=(-3,7)$ ، $(h-b,k)=(-13,7)$

لذا فإن $k=7$ ، $h=-8$ ، $b=5$

بما أن طول المحور الأكبر $2a=16$ فإن $a=8$

وبما أن الإحداثي x للرأسان المرافقان متساويان فإن المحور الأكبر رأسي ، ومعادلة القطع الناقص هي $\frac{(x+8)^2}{25}+\frac{(y-7)^2}{64}=1$

<u>حدد الإختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاه معادلته في كل مما يأتي:</u>

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{72-54}}{\sqrt{72}} = 0.5 \quad (10)$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{40-12}}{\sqrt{40}} = 0.837 \quad (11)$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{33-27}}{\sqrt{33}} = 0.426 \quad (13)$$

---

(14) سباق:

(a

$$e = \frac{c}{a} \quad , \quad \therefore 0.75 = \frac{c}{500}$$

$$\therefore c = 375$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{500^2 - 375^2} = 330.72$$

$$\therefore 2b = 661.44\ ft$$

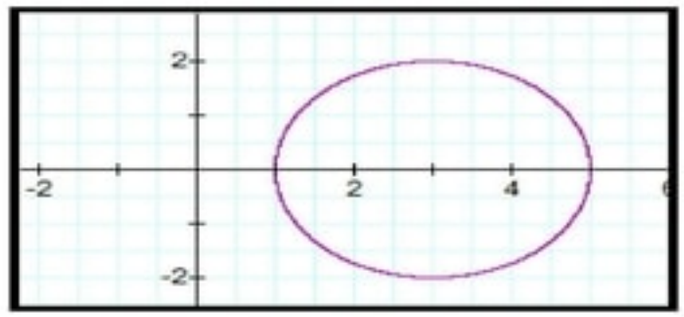
(b

$$\frac{x^2}{25000} + \frac{y^2}{109375} = 1$$

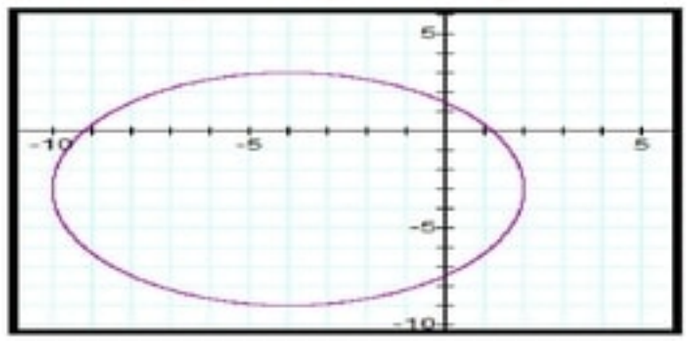
أكتب معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي ، ثم مثّل منحناها بيانياً:

(15) (16) (17)

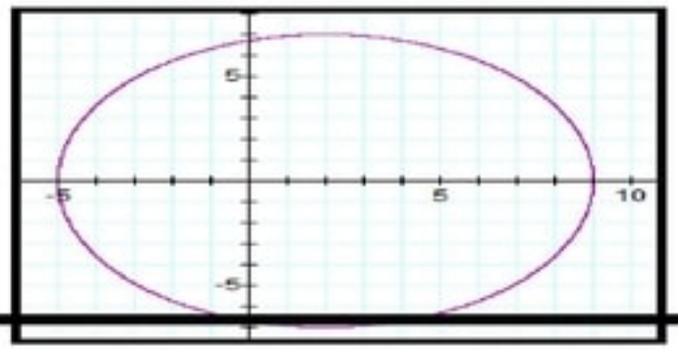
$(x-3)^2+y^2=4$



$(x+6)^2+(y+3)^2=36$



$(x-2)^2+y^2=49$



أكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي:

(18) $(x-2)^2+(y+1.5)^2=\frac{25}{4}$

(19) $x^2+(y+10)^2=16$

(20) $(x-1.5)^2+(y+8)^2=\frac{53}{4}$

(21) $(x+1)^2+(y+6)^2=29$

(22) معادلات:

إفرض أن $p(x,y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ وإحداثيات بؤرته ورؤوسه موضحه بإستعمال تعريف القطع الناقص والبعد بين أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت .

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}+\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2a$$
$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2a-\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$
$$x^2+y^2-2cy+c^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}+x^2+y^2+2cy+c^2$$
$$4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}=4a^2+4cy$$
$$a^2\left(x^2+y^2+2cy+c^2\right)=a^4+2a^2cy+c^2y^2$$
$$a^2x^2+a^2y^2+2a^2cy+a^2c^2=a^4+2a^2cy+c^2y^2$$
$$a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2=a^4+c^2y^2$$
$$a^2x^2+a^2y^2-c^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$a^2-c^2=b^2 \quad \longrightarrow\longrightarrow \quad a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

---

(23)

(a) طول المحور الأصغر **71.35** مليون ميل

(b) $e=0.203$

أوجد المركز و البؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

(24)

المركز: $(-5,0)$

البؤرتين: $(-2,0)$ ، $(-8,0)$

الرأسين: $(-1,0)$ ، $(-9,0)$

---

(25)

المركز: $(-2,1)$

البؤرتين: $(-2,-3)$ ، $(-2,5)$

الرأسين: $(-2,-4)$ ، $(-2,6)$

(26)

المركز: $(-1,0)$

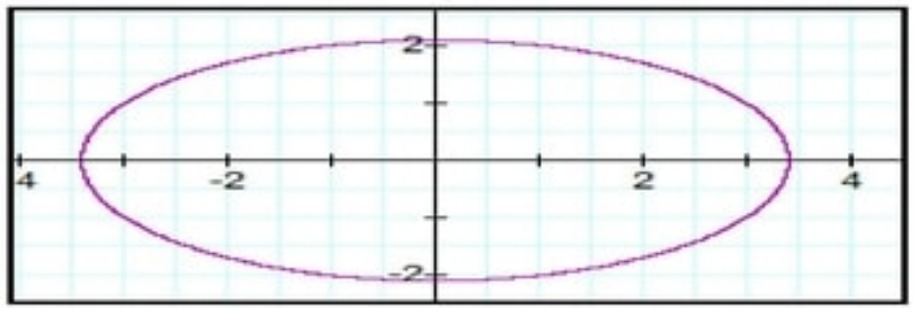
البؤرتين: $(-1,7)$ ، $(-1,-7)$

الرأسين: $(-1,\sqrt{65})$ ، $(-1,-\sqrt{65})$

---

(27) شاحنات:

(a)



$$\frac{x^2}{11.56}+\frac{y^2}{4.41}=1 \quad (b)$$

$$e=0.79 \quad (c)$$

أكتب معادلة القطع الناقص الذى يحقق الخصائص المعطاة فى كل مما يأتى:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1 \quad (28)$$

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{25}=1 \quad (29)$$

$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+4)^2}{36}=1 \quad (30)$$

(31) $\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(y-2)^2}{48}=1$

---

(32) هندسة:

$(x-6.5)^2+(y-4.5)^2=32.5$

اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التى تمر بالنقاط المعاطة فى كل مما ياتى:

(33) $(x-5)^2+(y-3)^2=9$

(34) $(x-1)^2+(y+7)^2=16$

(35) $x^2+(y-6)^2=9$

(36) $(x+1)^2+(y-4)^2=64$

مسائل مهارات التفكير العليا

(37) إكتشف الخطأ:

كلاهما إجابة صحيحة، المحور الأكبر في الشكل الأيسر الأفقي، في حين هو رأسي في الشكل الأيمن

(38) تبرير:

لا، فإذا كان $a^2 = p + r$ ، $b^2 = p$ فإن $c = \pm\sqrt{r}$ والبؤرتين للقطع $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 1$ هما $(0, \sqrt{r})$ ، $(0, -\sqrt{r})$ بينما البؤرتان للقطع $\frac{x^2}{p+r} + \frac{y^2}{p} = 1$ هما $(\sqrt{r}, 0)$ ، $(-\sqrt{r}, 0)$

تحد:

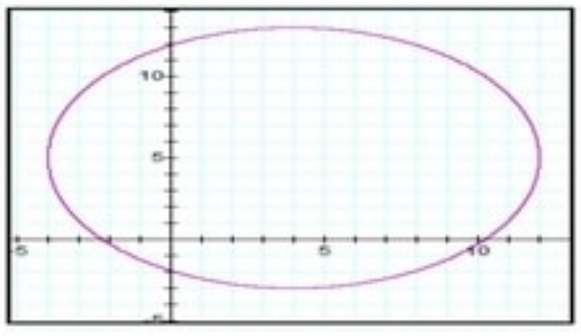
(39) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$

(40) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1$

(41) مسألة مفتوحة:

المجال: $[h - r \ , h + r]$

مجال $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 8^2$ هو: $[-4 \ , 12]$



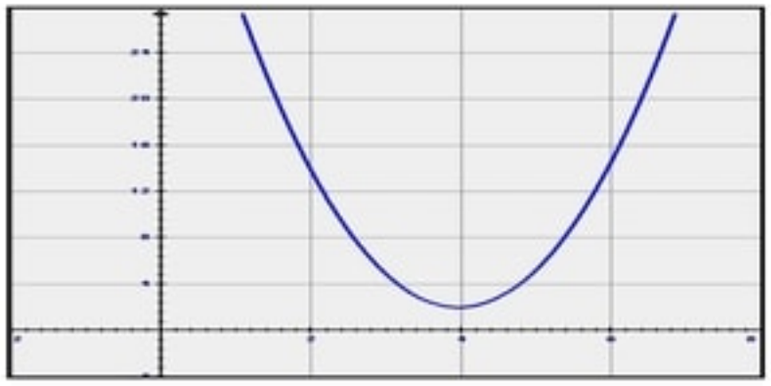
(42) اكتب:

بما أن $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ فعندما تقترب قيمة a من قيمة b فإن قيمة c تقترب من الصفر ويقترب الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$ من الصفر وتقترب البؤرتان من المركز، وبذلك يقترب شكل القطع الناقص من الدائرة

مراجعة تراكمية

حدد خصائص القطع المكافيء المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

(43)



القطع المكافيء مفتوح لأعلى

الرأس: $(4,2)$

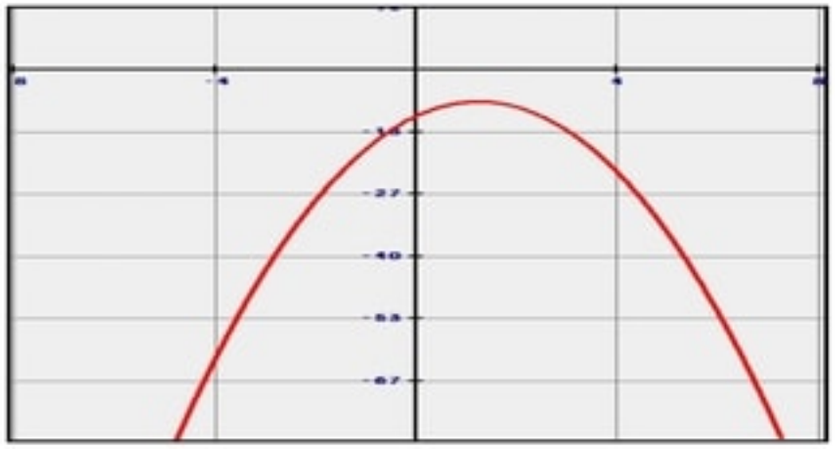
البؤرة: $(4,2.08)$

الدليل: $y=1.92$

محور التناظر: $x=4$

---

(44)



القطع المكافيء مفتوح لأسفل

الرأس: $(\frac{5}{4},\frac{-55}{8})$

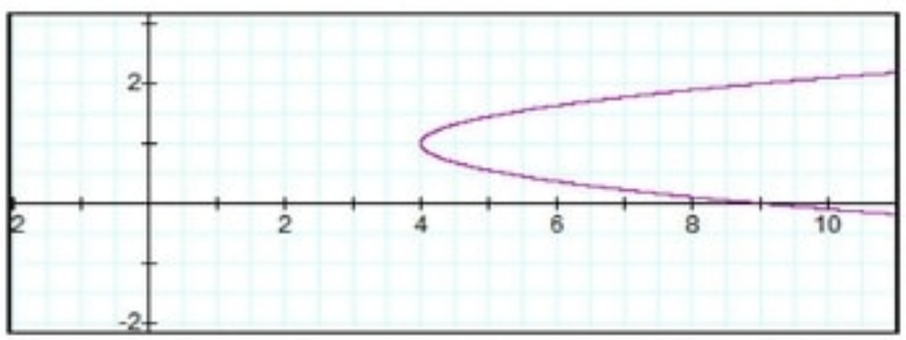
البؤرة: $(\frac{5}{4},\frac{56}{8})$

الدليل: $y=\frac{-27}{4}$

محور التناظر: $x=\frac{5}{4}$

---

(45)



القطع المكافيء مفتوح الى اليمين

الرأس: $(4,1)$

البؤرة: $(4.05,1)$

الدليل: $x=3.95$

محور التناظر: $y=1$

حدد كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، حيث $0 \le \theta \le 2\pi$:

(46) $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $\theta = \frac{5\pi}{4}$

(47) $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\theta = \pi$

(48) $\theta = \frac{11\pi}{6}$ ، $\theta = \frac{7\pi}{6}$ ، $\theta = \frac{3\pi}{2}$

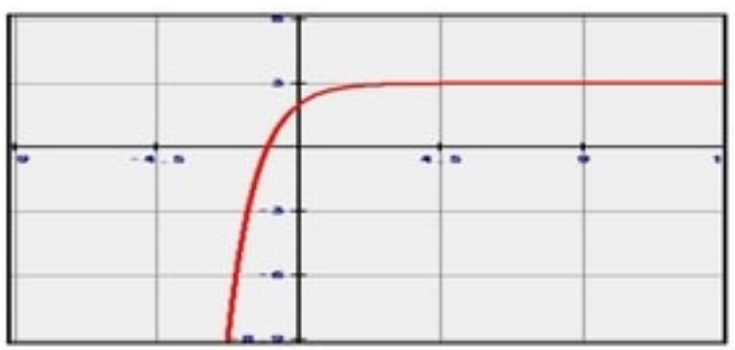
لكل دالة مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن ، وحدد مجالها :

(49) $f^{-1}(x) = \frac{-3x-2}{x-1}$ ←← المجال: $(-\infty,1) \cup (1,\infty)$

(50) $f^{-1}(x) = -x^2 + 5$ ←← المجال: $[0,\infty)$

(51) لا يمكن إيجاد f^{-1}

(52) المدى: $(-\infty, 3)$



تدريب على اختبار

(53) $8\ B$

---

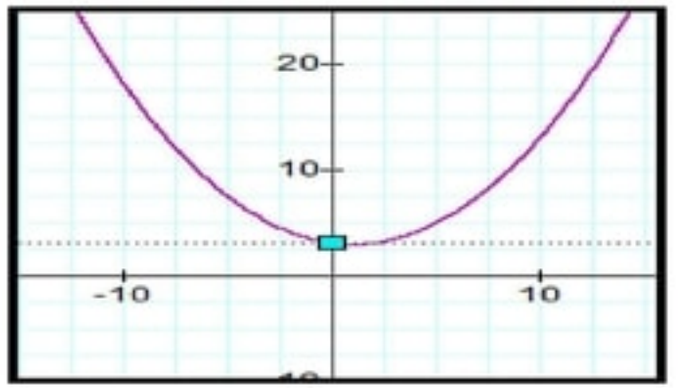
(54) $\frac{x^2}{182.25}+\frac{y^2}{56.25}=1 \quad c$

إختبار منتصف الفصل

اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين المعطاة بعض خصائصهما فيما يأتي ، ثم مثل منحناهما بيانياً:

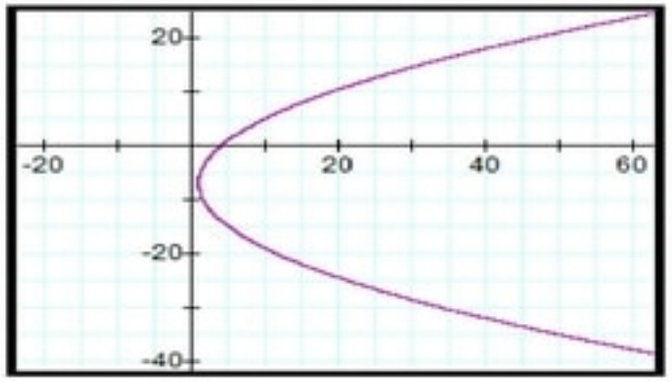
(1)

$$(x-1)^2 = 8(y-3)$$



(2)

$$(y+7)^2 = 16(x-1)$$



---

(3) إختيار من متعدد:

D

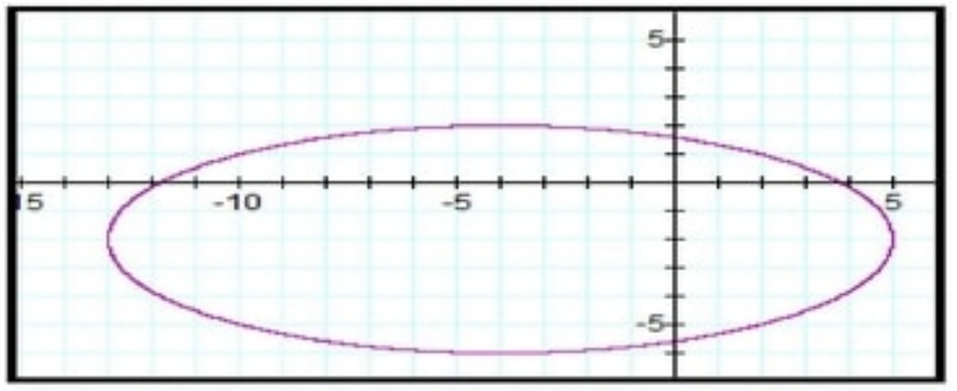
---

(4) تصميم:

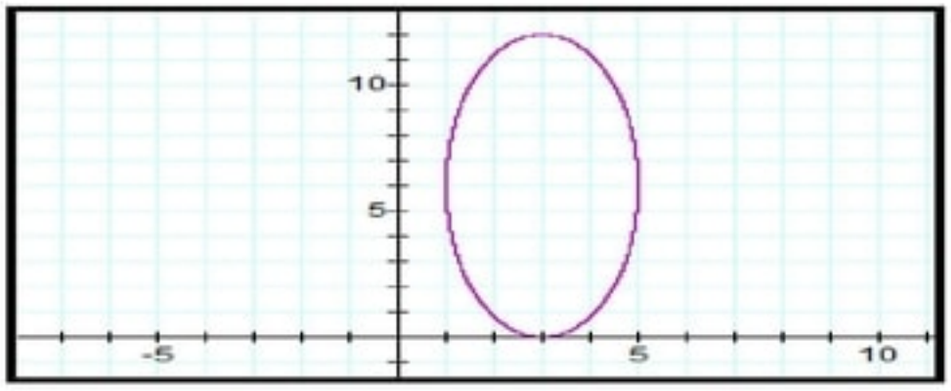
$$y = \frac{2}{625}x^2$$

مثل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي بيانياً:

(5)



(6)



اكتب معادلة كل من القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي :

(7) $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+3)^2}{20}=1$

(8) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{25}=1$

(9) $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+7)^2}{36}=1$

(10) $\frac{(x-8)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{49}=1$

---

(11) سباحة:

(a حوالي $22\ ft$

(b $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{121}=1$

---

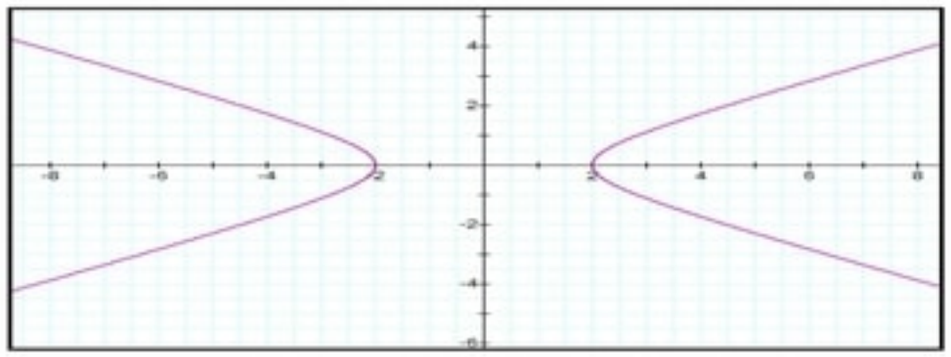
(12) اختيار من متعدد:

$C \leftarrow\leftarrow\leftarrow 1$

(3 – 4) القطوع الزائدة

■ تحقق من فهمك:

(1)

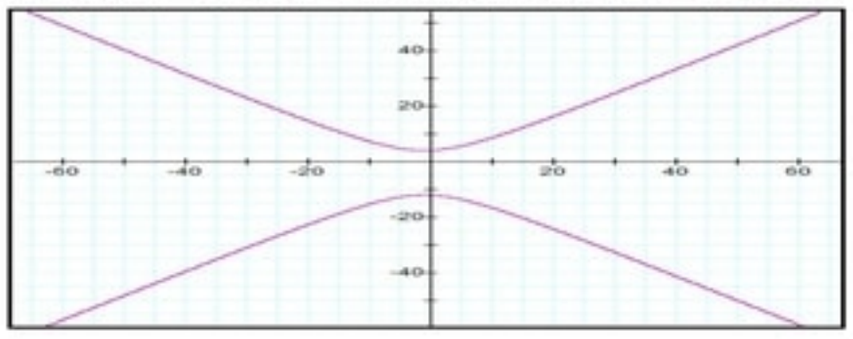


(1A) الاتجاه: أفقى، المركز: $(0,0)$

البؤرتان: $(\pm\sqrt{5},0)$

الرأسان: $(-2,0)$ ، $(2,0)$

خط التقارب: $y = \pm\frac{1}{2}x$



(1B) الاتجاه: رأسي، المركز: $(-1,-4)$

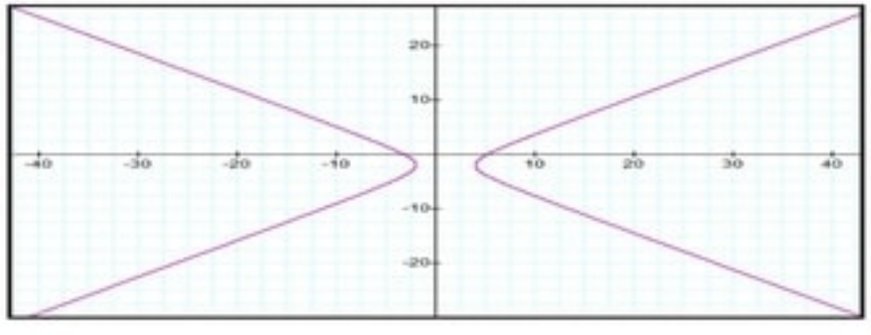
البؤرتان: $(-1,-4\pm\sqrt{145})$

الرأسان: $(-1,4)$ ، $(-1,-12)$

خط التقارب: $y+4 = \pm\frac{8}{9}(x+1)$

■ تحقق من فهمك:

(2)



(2A) الاتجاه: أفقى، المركز: $(1,-2)$

البؤرتان: $(1\pm\sqrt{13},-2)$

الرأسان: $(4,-2)$ ، $(-2,-2)$

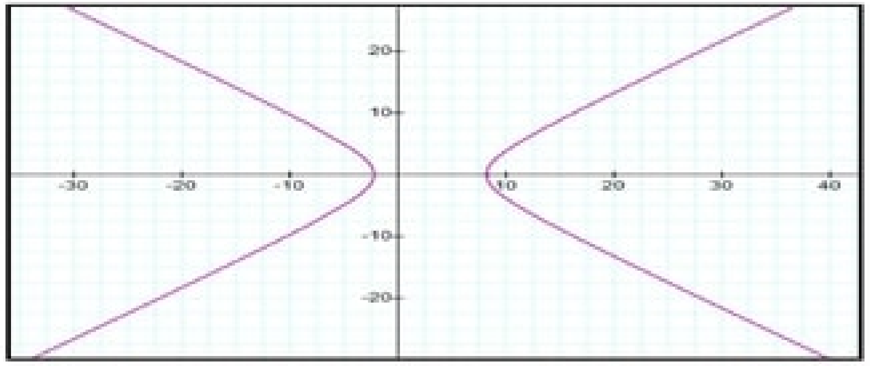
خط التقارب: $x+2 = \pm\frac{2}{3}(y-1)$

(2B) الاتجاه: أفقي، المركز: $(3,0)$

البؤرتان: $(3 \pm 3\sqrt{5}, 0)$

الرأسان: $(3 \pm 3\sqrt{3}, 0)$

خط التقارب: $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}(x-3)$



■ تحقق من فهمك:

(3)

(3A) $\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$

(3B) $\frac{(x-7)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

■ تحقق من فهمك:

(4)

(4A) $e = \frac{c}{a} = 1.5$

- . - . - . - . - . - . - . - . -

(4B) $e = \frac{c}{a} = 2.45$

■ تحقق من فهمك:

(5) ملاحة بحرية:

(4A) $\frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{8400} = 1$

(4B) $(40,0)$

تدرب وحل المسائل.

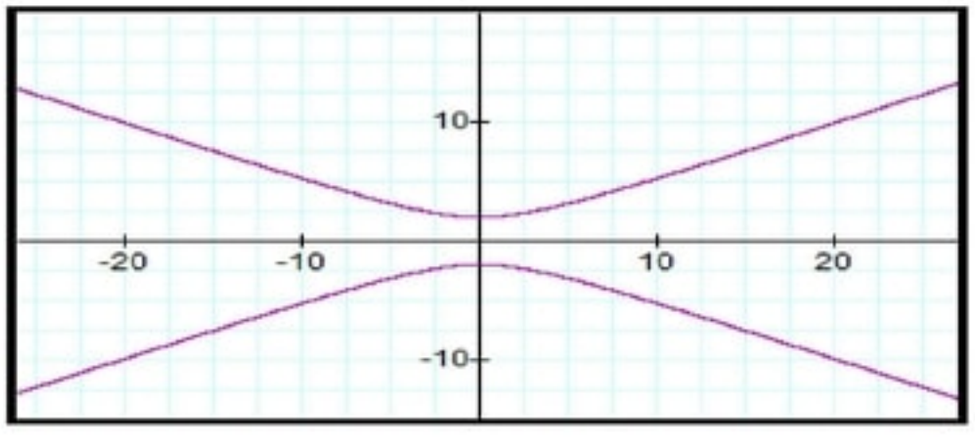
حدد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلتة في كل مما يأتي ، ثم مثل منحناه بيانياً:

(1) الاتجاه: رأسي، المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(0,-2)$ ، $(0,2)$

البؤرتان: $(0,-\sqrt{21})$ ، $(0,\sqrt{21})$

خط التقارب: $y = \pm\frac{2\sqrt{17}}{17}x$



---

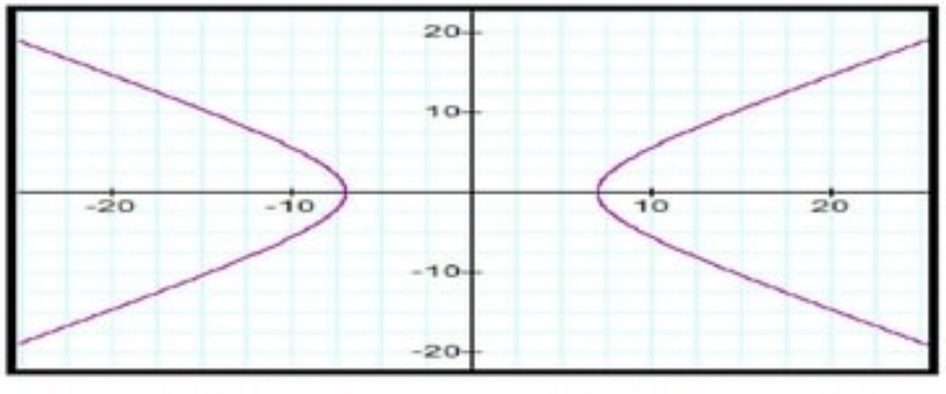
(2) الاتجاه: أفقي

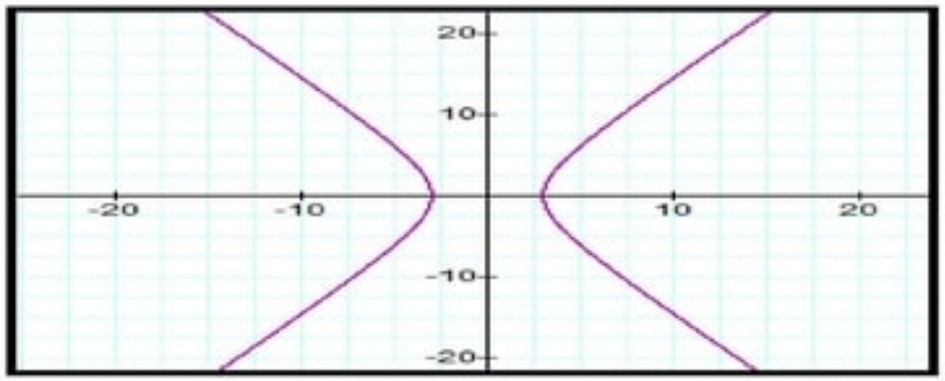
المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(\pm 7,0)$

البؤرتان: $(\mp\sqrt{79},0)$

خط التقارب: $y = \mp\frac{\sqrt{30}}{7}x$





(3)

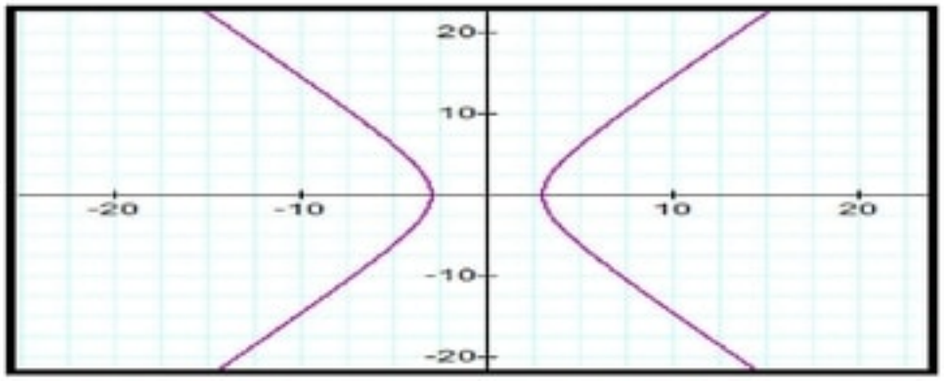
الاتجاه: أفقي

المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(\pm 3,0)$

البؤرتان: $(\mp\sqrt{30},0)$

خط التقارب: $y = \mp\frac{\sqrt{21}}{3}x$



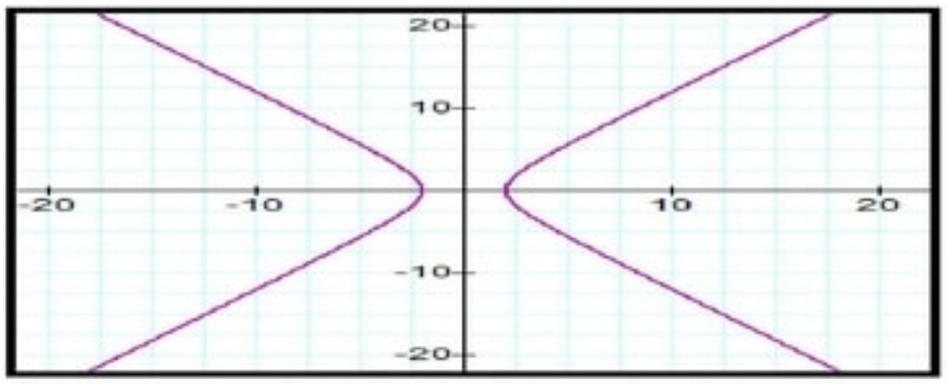
(4) الاتجاه: أفقي

المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(0,\mp 5)$

البؤرتان: $(0,\pm\sqrt{39})$

خط التقارب: $y = \pm\frac{5\sqrt{14}}{14}x$



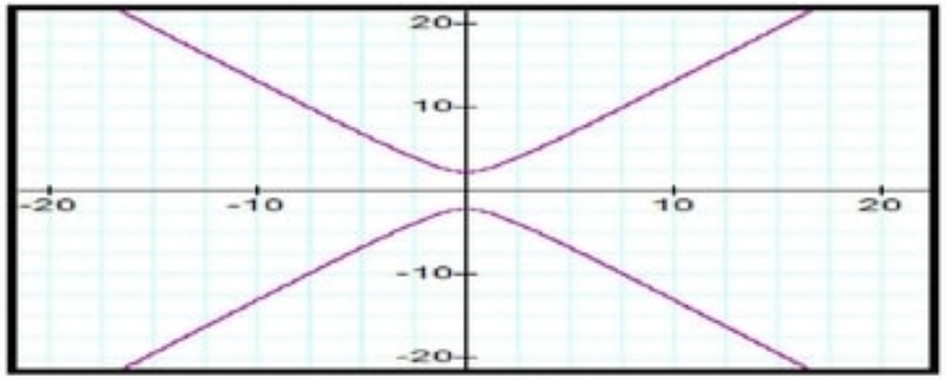
(5) الاتجاه: أفقي

المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(\pm 2,0)$

البؤرتان: $(\mp\sqrt{10},0)$

خط التقارب: $y = \mp\frac{\sqrt{6}}{2}x$



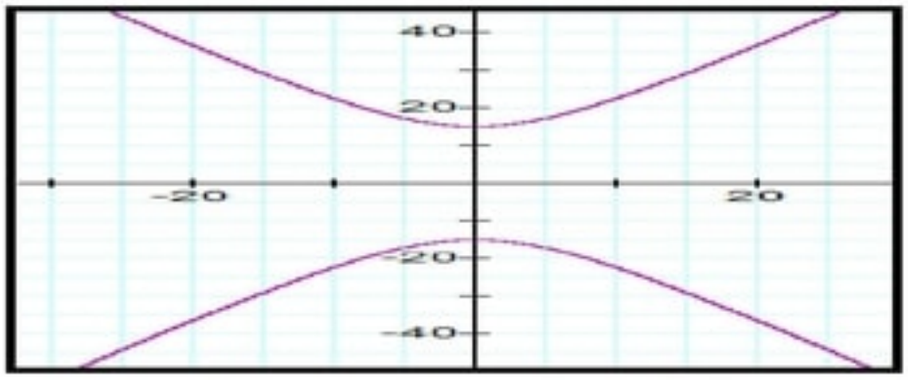
(6) الاتجاه: رأسي

المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(0,\mp\sqrt{5})$

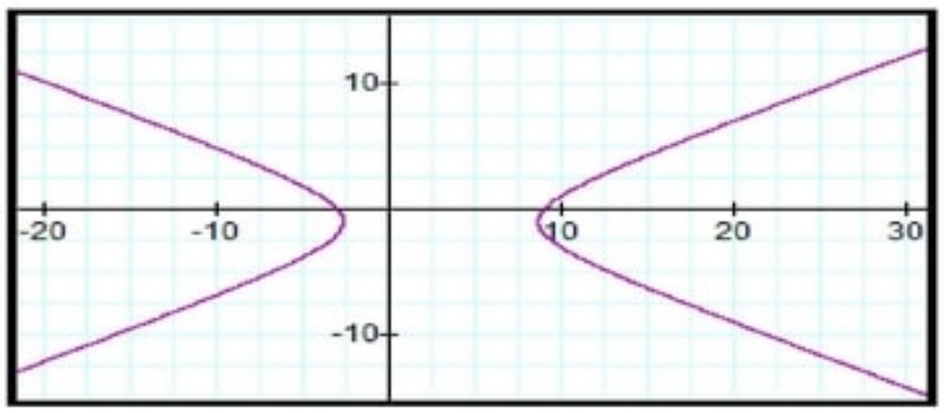
البؤرتان: $(0,\pm 2\sqrt{2})$

خط التقارب: $y = \mp\frac{\sqrt{15}}{3}x$



(7) إضاءة:

اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية ثم حدد خصائصه ثم مثل منحناه بيانياً



(8) $\frac{(x-3)^2}{32} - \frac{(y+1)^2}{8} = 1$

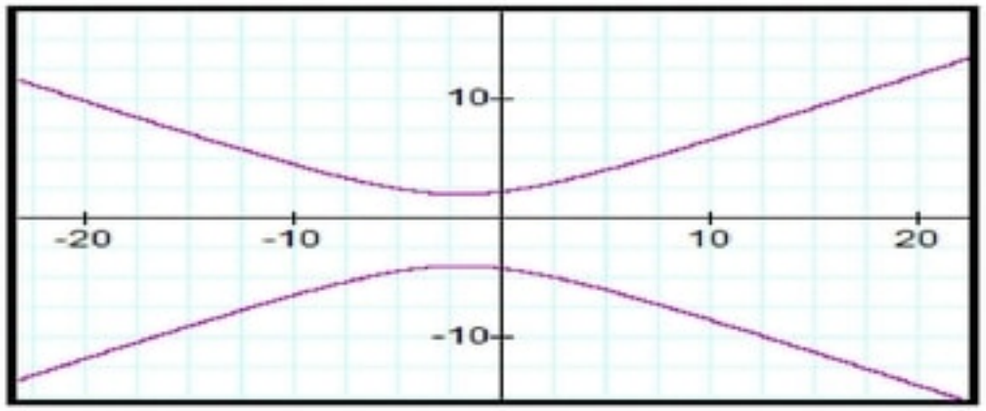
الاتجاه: أفقي

المركز: $(3,-1)$

الرأسان: $(3\pm 4\sqrt{2},-1)$

البؤرتان: $(3\pm 2\sqrt{10},-1)$

خطا التقارب: $y+1 = \mp\frac{2\sqrt{19}}{19}(x-3)$



(9) $\dfrac{(y+1)^2}{9} - \dfrac{(x+2)^2}{27} = 1$

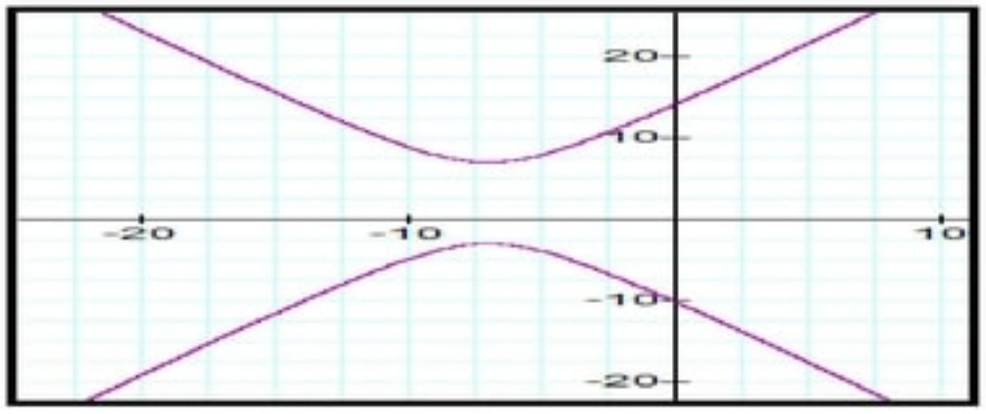
الاتجاه: رأسي

المركز: $(-2,-1)$

الرأسان: $(-2,-4)$ ، $(-2,2)$

البؤرتان: $(-2,-7)$ ، $(-2,5)$

خطا التقارب: $y+1 = \mp\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$



(10) $\dfrac{(y-2)^2}{25} - \dfrac{(x+7)^2}{10} = 1$

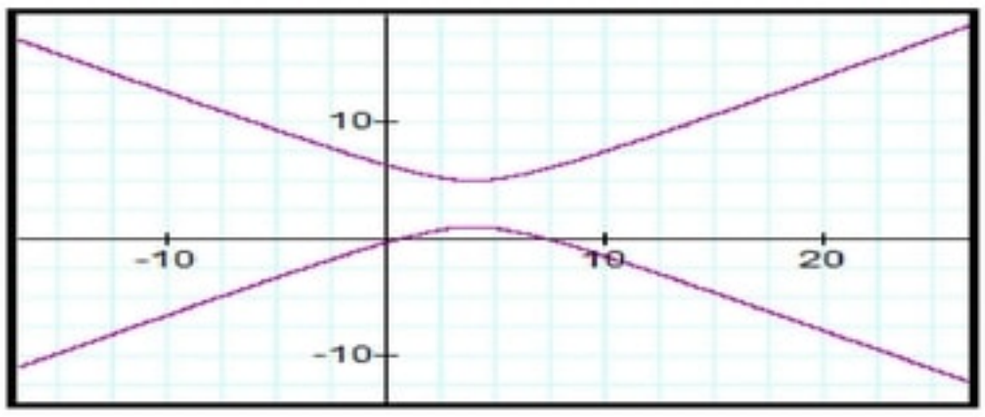
الاتجاه: رأسي

المركز: $(-7,2)$

الرأسان: $(-7,7)$ ، $(-7,-3)$

البؤرتان: $(-7,2\mp\sqrt{35})$

خطا التقارب: $y+2 = \mp\dfrac{\sqrt{10}}{2}(x+7)$



(11) $\dfrac{(y-3)^2}{4} - \dfrac{(x-4)^2}{9} = 1$

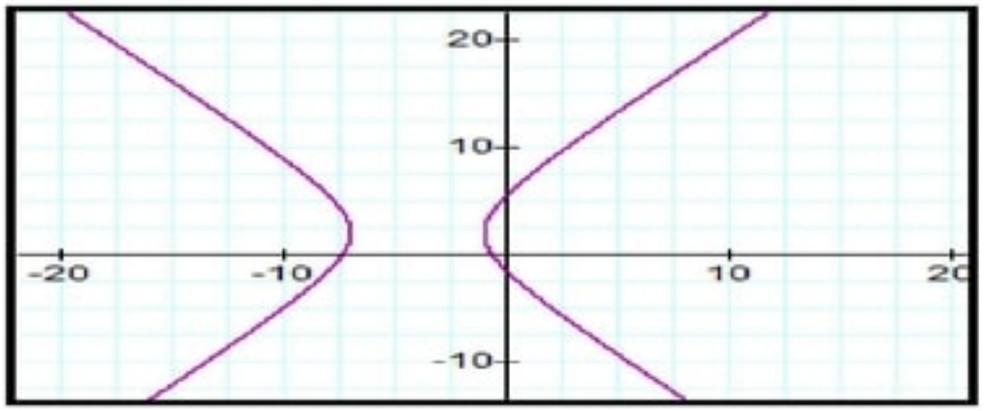
الاتجاه: رأسي

المركز: $(4,3)$

الرأسان: $(4,5)$ ، $(4,1)$

البؤرتان: $(4,3\mp\sqrt{13})$

خطا التقارب: $y-3 = \mp\dfrac{2}{3}(x-4)$



(12) $\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

الاتجاه: أفقي

المركز: $(-4,2)$

الرأسان: $(-7,2)$ ، $(-1,2)$

البؤرتان: $(1,2)$ ، $(-9,-2)$

خطا التقارب: $y-2 = \mp\frac{4}{3}(x+4)$

أكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(13) $\frac{(y-1)^2}{15} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$

(14) $\frac{(x-1)^2}{39} - \frac{(y-5)^2}{64} = 1$

(15) $\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$

(16) $\frac{(x+4)^2}{144} - \frac{(y-7)^2}{25} = 1$

(17) $\frac{(x+7)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$

(18) $\frac{(y-4)^2}{36} - \frac{(x-2)^2}{64} = 1$

(19) $\frac{(x-6)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{13} = 1$

---

(20) هندسة معمارية:

$$\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{7(x-5)^2}{225} = 1 \quad (a$$

$90\ ft$ تقريبا $(b$

حدد الإختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاه معادلته في كل مما يأتي:

$e = 1.52$ **(21)**

$e = 1.27$ **(22)**

$e = 1.06$ **(23)**

$e = 1.33$ **(24)**

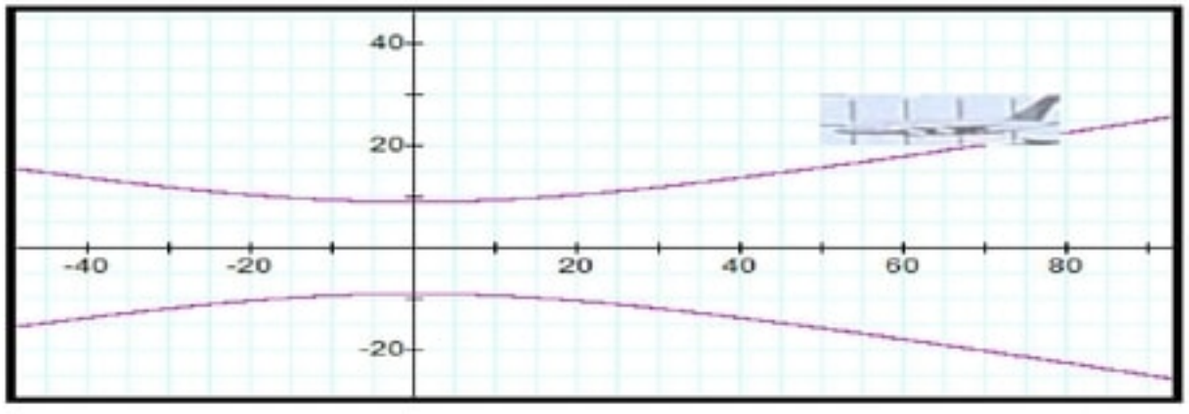
$e = 1.58$ **(25)**

$e = 2.83$ **(26)**

---

(27) طيران:

$$\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{1215} = 1 \quad (a$$



$(b$

$(40, 13.7)$ $(c$

---

(28) هندسة معمارية :

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5760} = 1$

b) نصف قطر القمة $4.3\ m$ تقريبا

نصف قطر القاعدة $5.7\ m$ تقريبا

أكتب معادلة القطع الزائد الممثل بيانياً في كل مما يأتي:

(29) $\frac{y^2}{10} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$

(30) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

---

(31) طقس:

$$\frac{x^2}{2722500} - \frac{y^2}{1277500} = 1$$

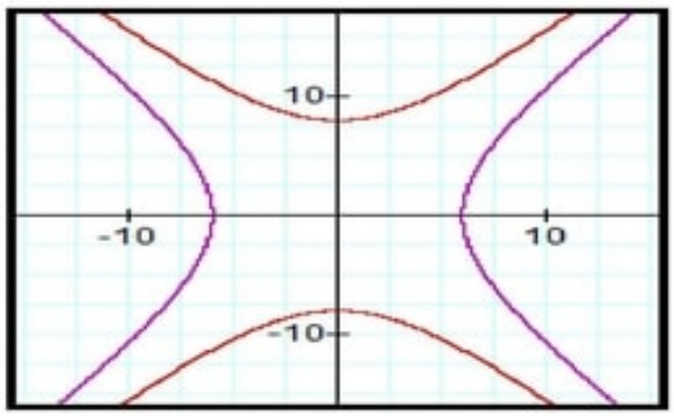
(32)

$$\frac{2x^2}{121} - \frac{2y^2}{121} = 1$$

---

(33) تمثيلات متعددة:

a) **بيانياً:**



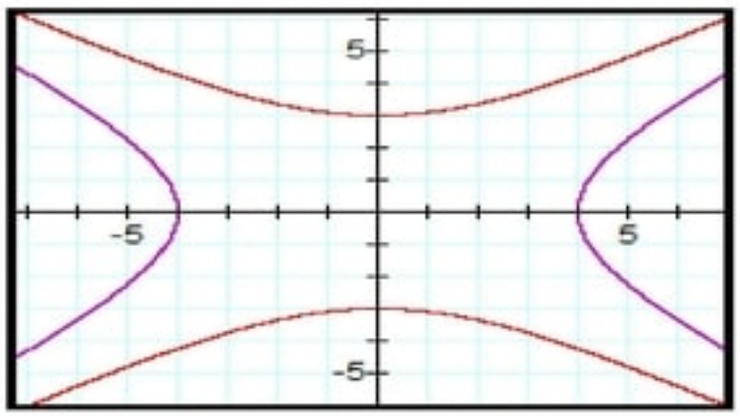
b) تحليلياً:

البؤرتان للمنحنى الأول هما: $(-10,0)$ ، $(10,0)$.والبؤرتان للمنحنى الثاني هما: $(0,-10)$ ، $(0,10)$ ، والرأسان للمنحنى الأول هما: $(-6,0)$ ، $(6,0)$.والرأسان للمنحنى الثاني هما: $(0,-6)$ ، $(0,6)$ والمنحنيان لهما نفس خطي التقارب.

c) تحليلياً:

معادلة القطع الزائد المرافق له هو $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

d) بيانياً:



e) لفظياً:

القطعان الزائدان المرافقان لهما نفس خطي التقارب ولهما نفس البعد بين المركز والبؤرتين.

مسائل مهارات التفكير العليا

(34) مسألة مفتوحة:

$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{15} = 1$$

---

(35) تبرير:

(a

قطع مكافئ، إذا كان $rs = 0$ فإن $r = 0$ أو $s = 0$. لذا فإما أن الحد x^2 يساوي صفر، أو أن الحد y^2 يساوي صفر. وبما أن المعادلة لها فقط حد مربع وحيد فإنها ستكون معادلة قطع مكافئ.

(b

قطع ناقص، إذا كان $rs > 0$ فإن r و s كلاهما أكبر من صفر أو كلاهما أقل من صفر. وفي كلتا الحالتين فإن الحدين المربعين لهما نفس الإشارة. لذا ستكون معادلة قطع ناقص.

(c

دائرة؛ إذا كان $r = s$ فإن معاملي الحدين التربيعيين المضافين متساويان، ويمكن إعادة كتابة المعادلة بحيث يصبح معامل كل منها هو 1 ، لذا فالمعادلة تمثل دائرة.

(d

قطع زائد، إذا كان $rs < 0$ فإن r و s مختلفان في الإشارة. أي أن الحدين التربيعيين مختلفان في الإشارة. لذا فالمعادلة تمثل قطعاً زائداً.

---

(36) تبرير:

أحيانا، ومثال ذلك عندما تكون إحداثيات الرأسين والبؤرتين معلومة فإنة يمكن كتابة معادلة القطع الزائد، وعندما يكون كل من الرأسين والمحور القاطع معلوماً فقط فإن من غير الممكن كتابة معادلة القطع الزائد.

---

(37) تحد:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{72} = 1$$

---

(38) برهان:

بما أن القطع الزائد متساوي الساقين فإن $a = b$ وبما أن

$$\because c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + a^2 \qquad a = b$$

$$\therefore c^2 = 2a^2$$

$$\therefore c = a\sqrt{2}$$

$$\because e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore e = \frac{\not{a}\sqrt{2}}{\not{a}} = \sqrt{2}$$

لذا فإن الإختلاف المركزي للقطع الزائد متساوي الساقين هو $\sqrt{2}$.

---

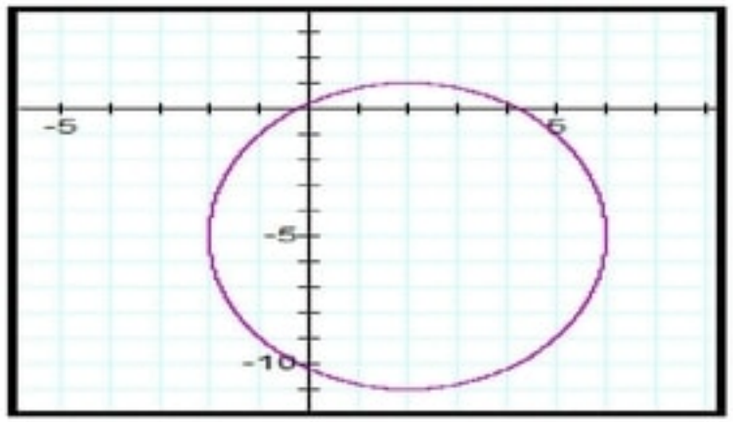
(39) اكتب:

إجابة ممكنة: أولا حدد إن كان اتجاة القطع الزائد رأسياً أو أفقياً. ثم استعمل البؤرتين لتعيين مركز القطع الزائد وتحديد قيم h, k. واستعمل طول المحور القاطع لإيجاد a^2 ، ثم أوجد c المسافة بين المركز وإحدى البؤرتين، ثم استعمل المعادلة $b^2 = c^2 - a^2$ لتجد b^2. وأخيراً استعمل الصورة القياسية لكتابة المعادلة بالاعتماد على المحور القاطع إن كان موازياً للمحور x أو المحور y.

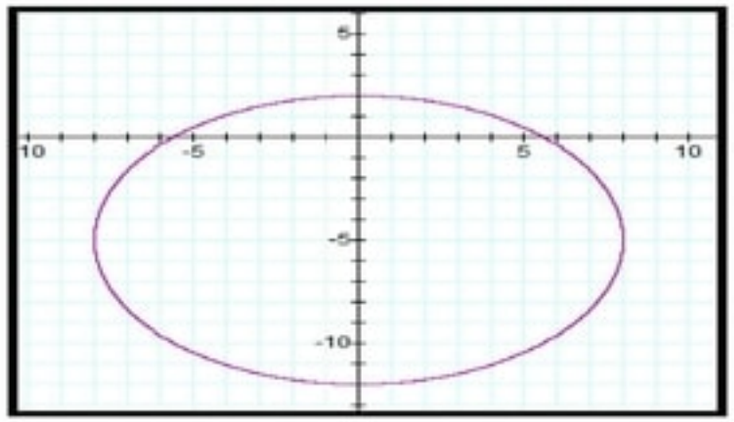
مراجعة تراكمية

مثل معادلة القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

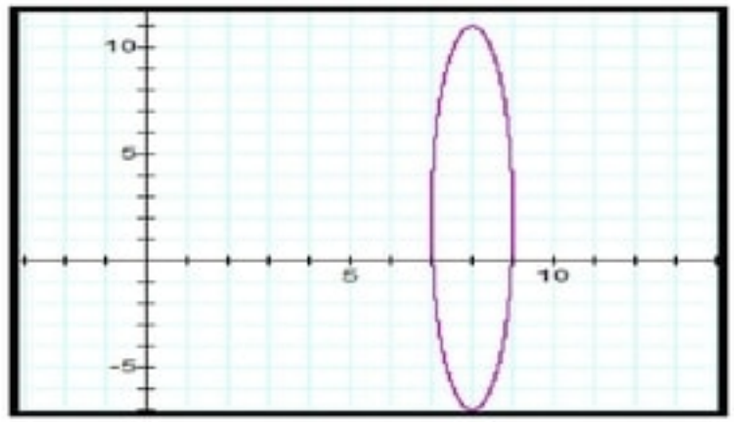
(42)



(41)



(40)



(a) $105\ ft$

(b) $5\ s$

حلّ كل معادلة مما يأتي لجميع قيم θ :

(44) $2n\pi\ ,n \in Z$

(45) $\frac{3\pi}{2}+n\pi\ ,n \in Z$

(46) ليس لها حل.

تدرب على إختبار

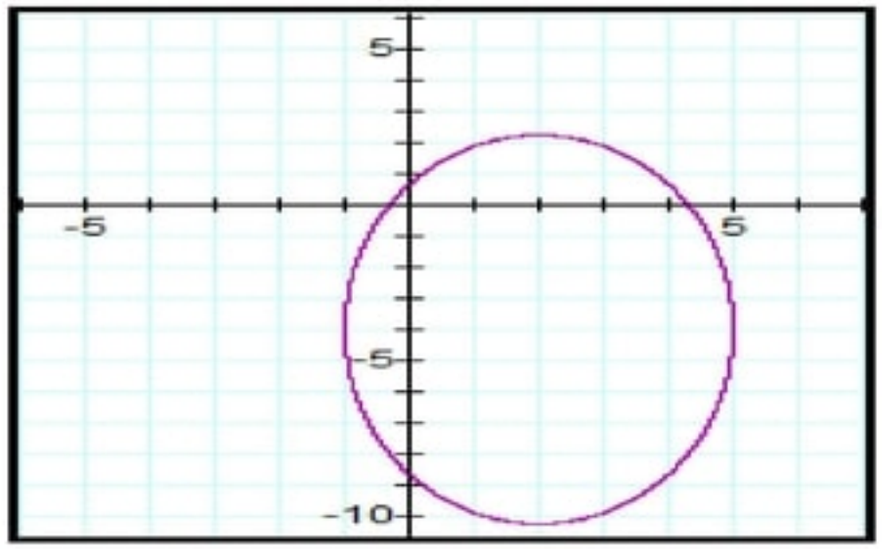
(47) مراجعة:

$H \leftarrow\leftarrow\leftarrow y=\frac{5}{4}x\ ,y=-\frac{5}{4}x$

(48) سؤال ذو إجابة قصيرة:

$$y - 1 = \pm\frac{1}{2}(x + 1)$$

(4 – 4) تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها



■ تحقق من فهمك:

(1)

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{39}=1$$

قطع ناقص

■ تحقق من فهمك:

(2)

2A) قطع زائد

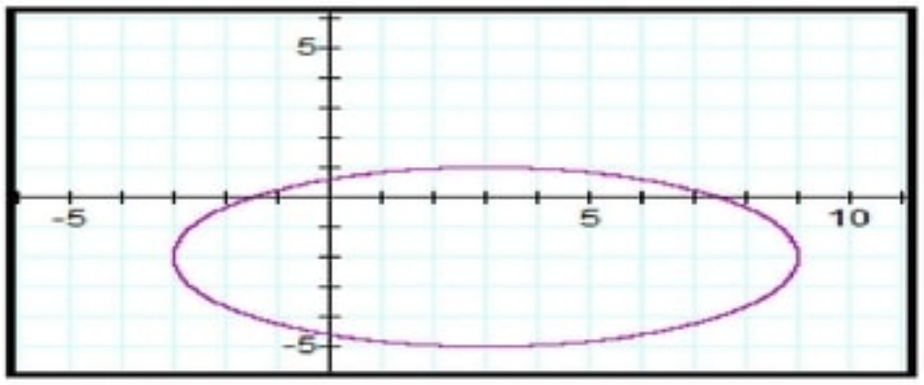
2B) قطع زائد

2C) قطع ناقص

تدرب وحل المسائل.

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثلة ومثّل منحناه بيانياً:

(1)

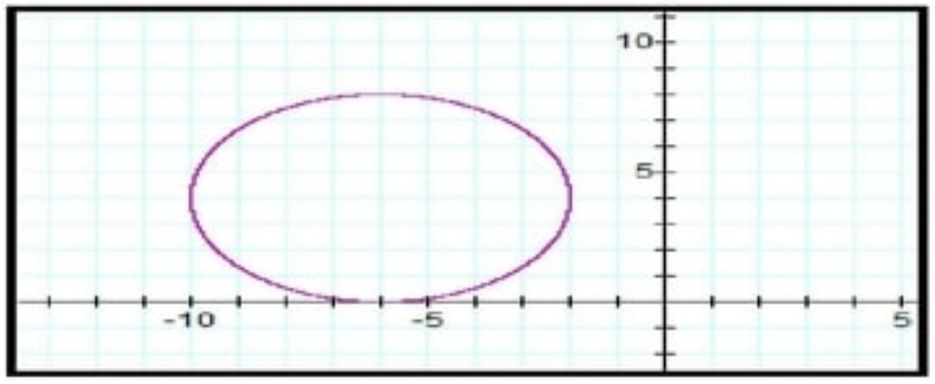


$$\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

قطع ناقص

---

(2)

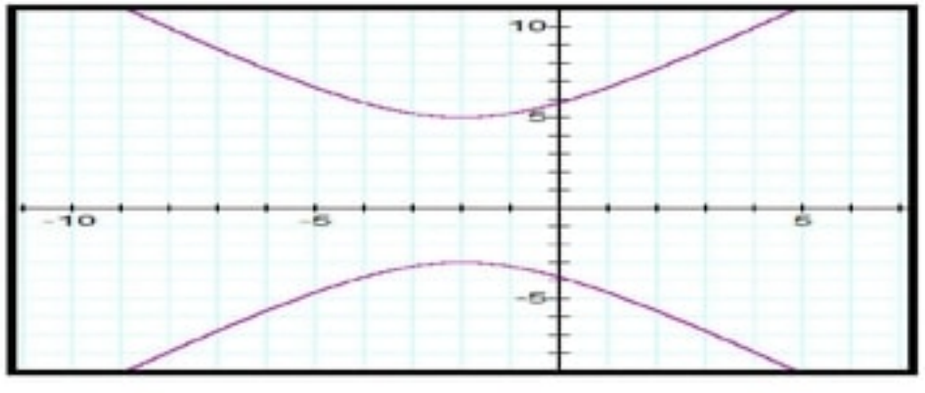


$$(x+6)^2+(y-4)^2=16$$

دائرة

---

(3)

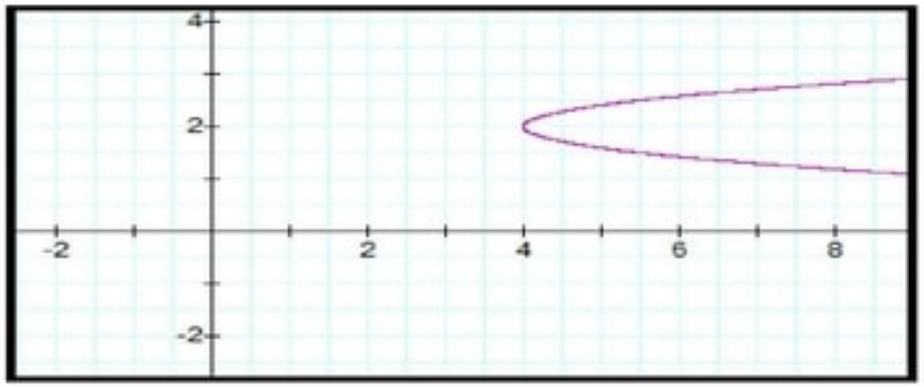


$$\frac{(y-1)^2}{16}-\frac{(x+2)^2}{9}=1$$

قطع زائد

---

(4)



$$x = 6(y-2)^2 + 4$$

قطع مكافئ

حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثلة كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية :

(5) قطع مكافئ

(6) قطع زائد

(7) دائرة

(8) قطع مكافئ

(9) قطع زائد

(10) قطع زائد

(11) قطع ناقص

---

(12) طيران:

(a $(x-660)^2 = \frac{-125}{3}(y-10500)$

قطع مكافئ

(b $x = 1320ft$

(c $y = 10500ft$

قابل بين المنحنيات أدناة والمعادلة التي تمثل كل منها:

(13) $9x^2 + 16y^2 = 72x + 64y$ (c

---

(14) $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4$ (a

---

(15) $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y = 64$ (b

قابل بين كل حالة في التمارين (16 – 19) مع المعادلة التي تمثل (a – d):

(16) حاسوب:

$x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14094 = 0$ ←←← (d)

(17) لياقة:

$25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45700 = 0$ ←←← (b)

(18) إتصالات:

$47.25x^2 + 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$ ←←← (a)

---

(19) رياضة:

$16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$ ←←← (c)

(20) تمثيلات متعددة:

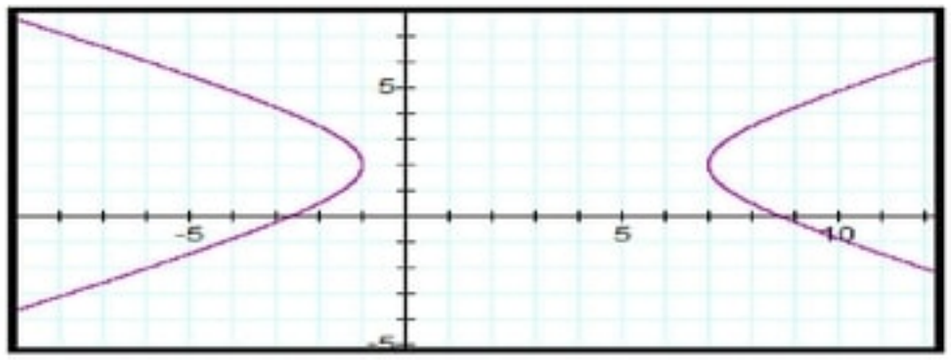
a) **تحليلياً:**

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

b) **جبرياً:**

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 9 = 0$$

c) **بيانياً:**



مسائل مهارات التفكير العليا

(21) تبرير:

صحيحة دائما، إذا كان القطع رأسياً فإن $B = 0$ ولذا تصبح المعادلة معادلة دائرة حيث $A = C$

(22) مسألة مفتوحة:

$$9x^2 + y^2 + 6xy + 2x + 2y + 8 = 0$$

(23) اكتب:

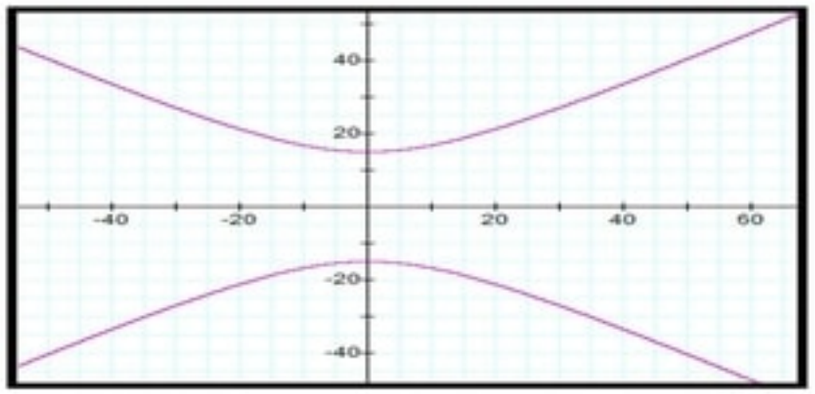
هندسياً:

القطع الناقص عبارة عن دائرة مضغوطة طولياً أو عرضيا، وكلاهما منحنيان مغلقان بعكس القطعان المكافئ والزائدفهما منحنيان مفتوحان وممتدان، لكن الفرق بينهما أن القطع المكافئ يتكون من فرع واحد، بينما القطع الزائد يتكون من فرعين كل منهما تماثل للآخرى.

جبرياً:

إذا كتبت المعادلة في الصورة القياسية بشرط $B=0$ ، فمعادلة القطع المكافئ تحوي حداً تربيعياً واحداً (إما Ax^2 أو Cy^2) أما معادلة الدائرة فتتصف بأن $A=C$ ، أما بالنسبة للقطع الناقص فأن لكل من $A\ ,C$ الإشارة نفسها و $A\neq 0\ ,C\neq 0$ ، أما في حالة القطع الزائد $A\ ,C$ متعاكستان و $A\neq 0\ ,C\neq 0$.

مراجعة تراكمية



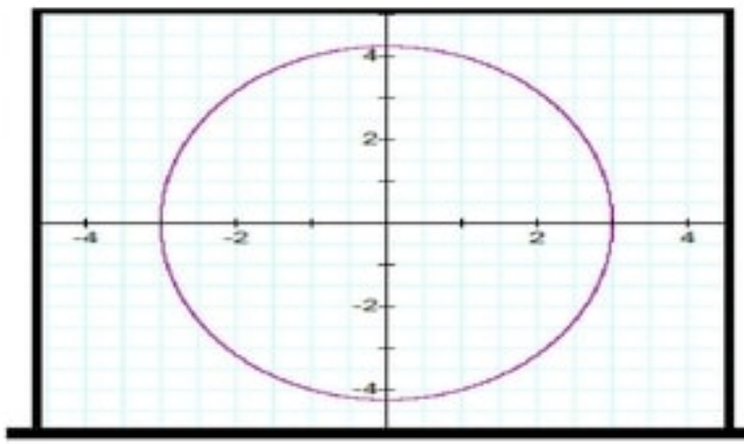
(24) فلك:

الرأسان: $(0,-15)$ ، $(0,15)$

البؤرتان: $(0,-25)$ ، $(0,25)$

خطا التقارب: $y = \pm\frac{3}{4}x$

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلتة في كل مما يأتي ، ثم مثّل منحناه بيانياً:



(25)

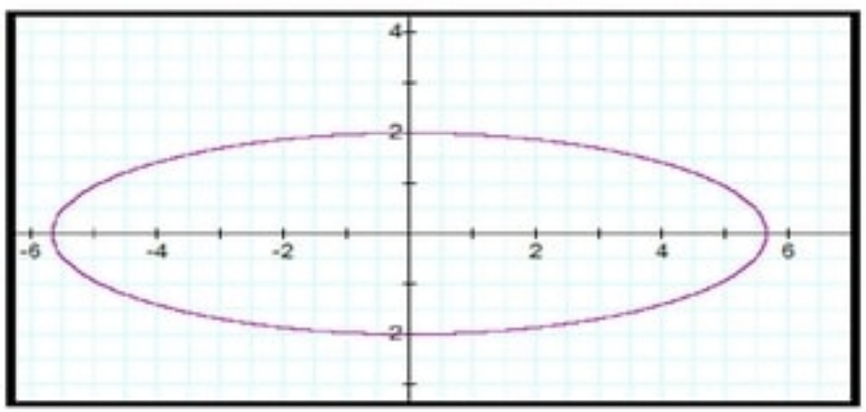
الإتجاه: رأسي

المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(0,-3\sqrt{2})$ ، $(0,3\sqrt{2})$

البؤرتان: $(0,-3)$ ، $(0,3)$

الرأسان المرافقان: $(-3,0)$ ، $(3,0)$



(26)

الإتجاه: أفقي

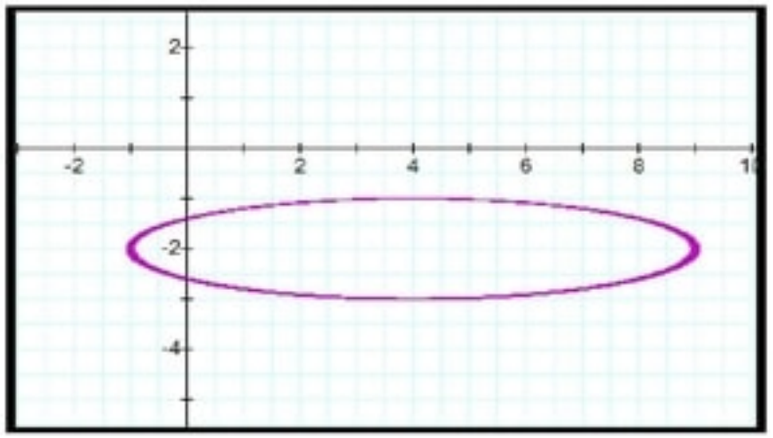
المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(2\sqrt{2},0)$ ، $(-2\sqrt{2},0)$

البؤرتان: $(-2,0)$ ، $(2,0)$

الرأسان المرافقان: $(0,-2)$ ، $(0,2)$

(27)



الإتجاه: أفقي

المركز: $(4,-2)$

الرأسان: $(-1,-2)$ ، $(9,-2)$

البؤرتان: $(4+2\sqrt{6},-2)$ ، $(4-2\sqrt{6},-2)$

الرأسان المرافقان: $(4,-1)$ ، $(4,-3)$

---

(28) **فلك:**

$$\frac{x^2}{9.006\times10^{15}}+\frac{y^2}{8.427\times10^{15}}=1$$

تدرب على إختبار

حل كل معادلة من المعادلتين الآتيتين :

(29)

$$8n(n-1)=4^2=16$$
$$8n^2-8n=16$$
$$n^2-n-2=0$$
$$n=2$$

---

(30)

$$9p\,(p+8) = 8^2 = 81$$
$$9p^2 + 72p = 81$$
$$p^2 + 8p = 9$$
$$p^2 + 8p - 9 = 0$$
$$p = 1$$

---

(31) قطع مكافئ

---

(32) $A \leftarrow\leftarrow\leftarrow y = x^2 - 4x + 6$

معمل الحاسبة البيانية أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية

حل بيانياً كل نظام معادلات فيما يأتي مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة:

(1) $(-2,-1)$ ، $(2,1)$

(2) $(1,-6.9)$ ، $(1,6.9)$

(3) $(-6,-8)$ ، $(6,8)$

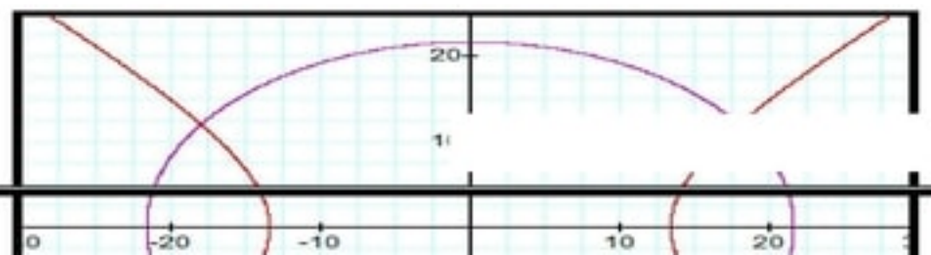
(4) $(-2,3)$ ، $(1.5,-4)$

(5) $(-1.3,-2)$ ، $(1.3,-2)$ ، $(-1.3,2)$ ، $(1.3,2)$

(6) $(-3,2)$ ، $(0,-1)$

(7) تحد:

(a



$$x^2 + y^2 = 468$$
$$x^2 - y^2 = 180$$

(b

حل كل نظام متباينات فيما يأتي بيانياً:

(8) $(1.8, 2.4)$
(9) $(1, 6.9)$
(10) $(2.5, 2.5)$

دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك:

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) القطع المخروطي

2) المحل الهندسي

3) دليل

4) القطع الناقص

5) البؤرتين

6) الاختلاف المركزي

7) مركز

8) القطع الزائد

مراجعة الدروس

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاه معادلته في كل مما يأتي:

9)

منحنى القطع مفتوح إلى الأعلى

الرأس: $(2\ ,\ -3)$ والبؤرة $(1\ ,\ -3)$

ومحور التماثل: $x=-3$ والدليل $y=-5$

وطول الوتر البؤري 2

10)

منحنى القطع مفتوح إلى الأسفل

الرأس: $(-1\ ,\ 2)$ والبؤرة $(-2\ ,\ 2)$

ومحور التماثل: $x=2$ والدليل $y=0$

وطول الوتر البؤري 4

11)

منحنى القطع مفتوح إلى اليمين

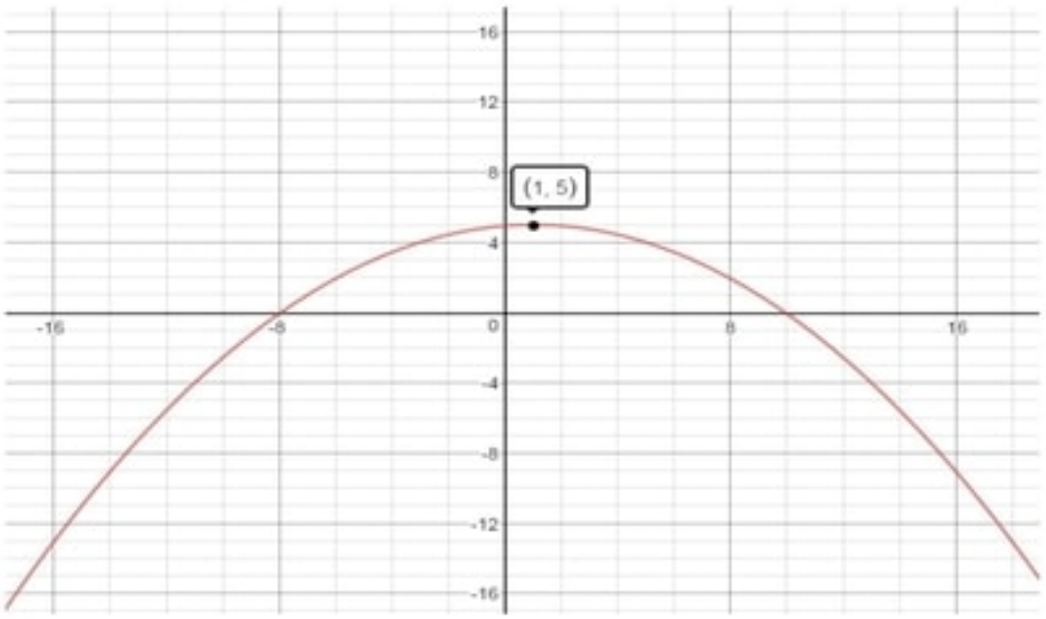
الرأس: $(3\ ,\ 5)$ والبؤرة $(\frac{241}{48}\ ,\ 3)$

ومحور التماثل: $y=3$ والدليل $x=\frac{239}{48}$

اكتب معادلة القطع المكافئ المعطاة إحداثيات رأسه وبؤرته في كل مما يأتي ثم مثل منحناه بيانيا

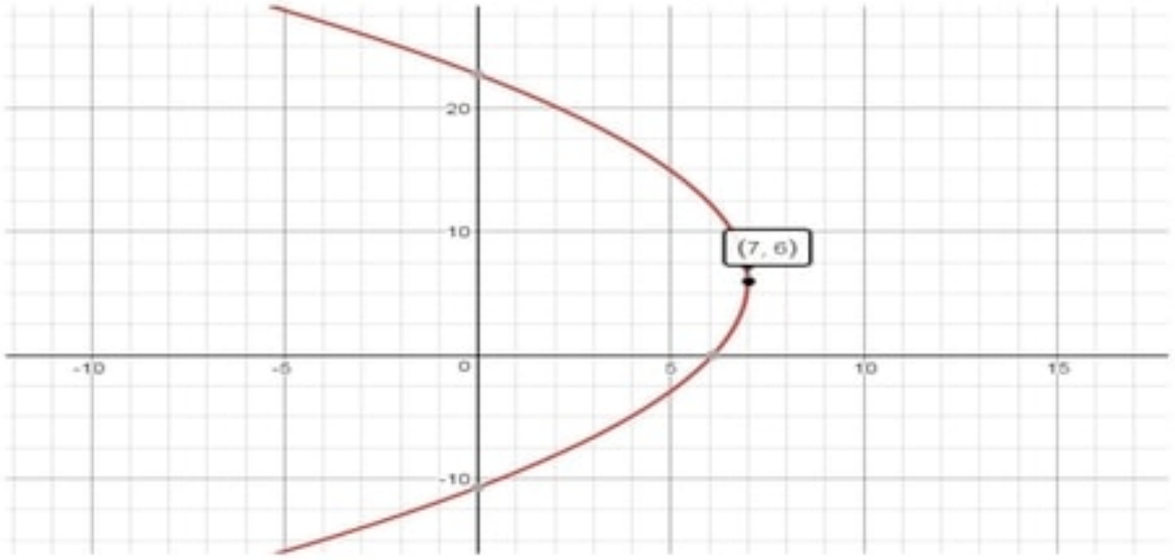
12)

$$(x-1)^2=-16(y-5)$$



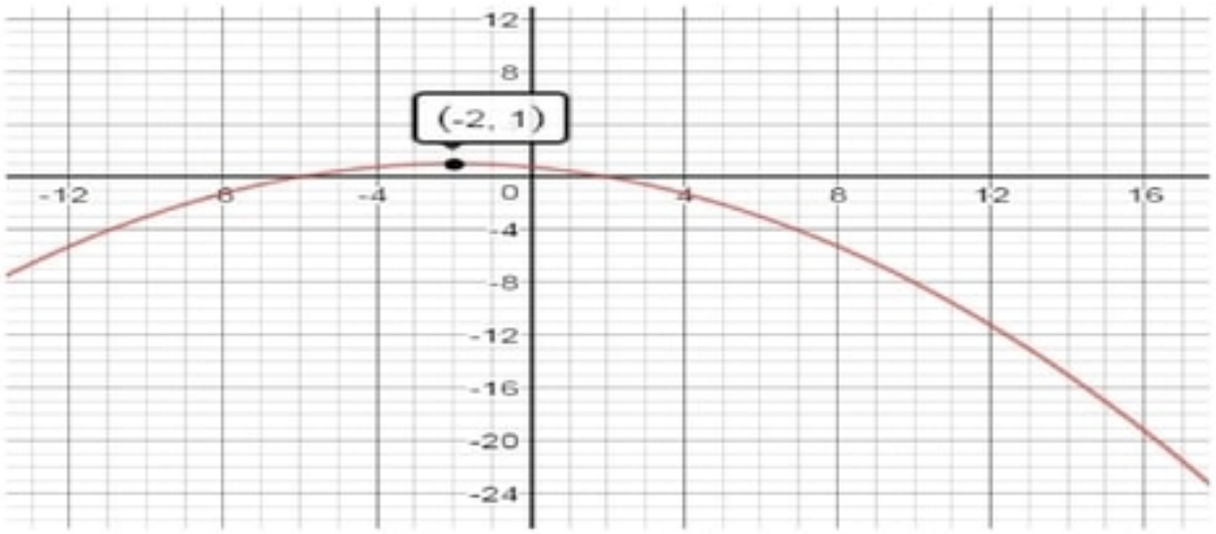
(13

$$(y-6)^2 = -40(x-7)$$



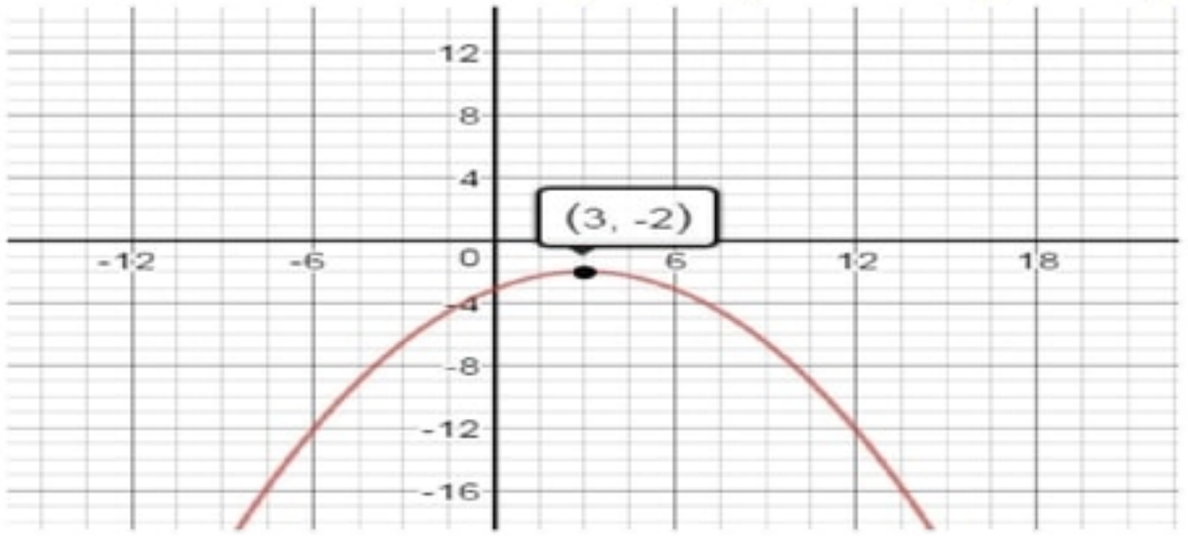
(14

$$(x+2)^2 = -16(y-1)$$



(15

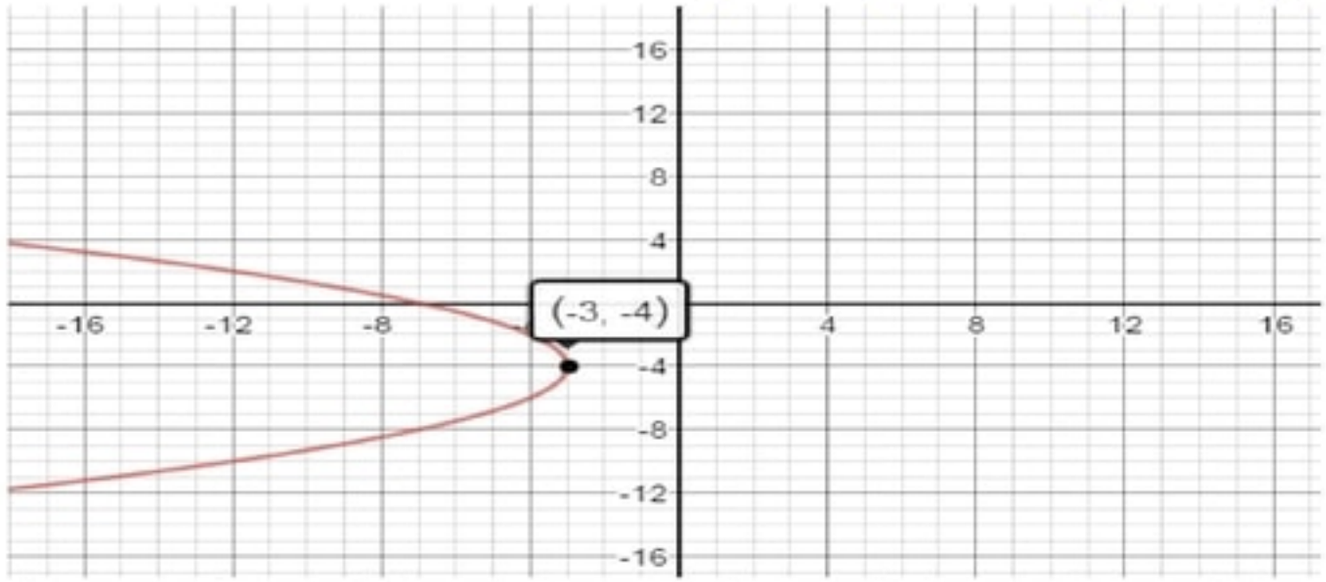
$$(x-3)^2 = -8(y+2)$$



اكتب معادلة القطع المكافئ الذى يحقق الخصائص المعطاه فى كل مما يأتى ثم مثل منحناه بيانياً:

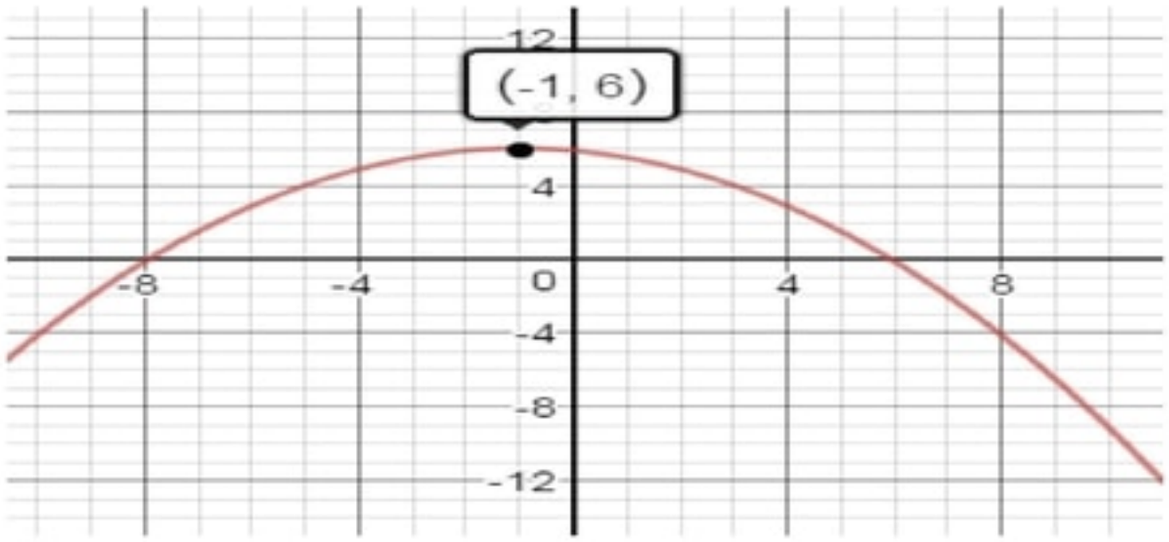
(16

$$(y+4)^2 = -4(x+3)$$



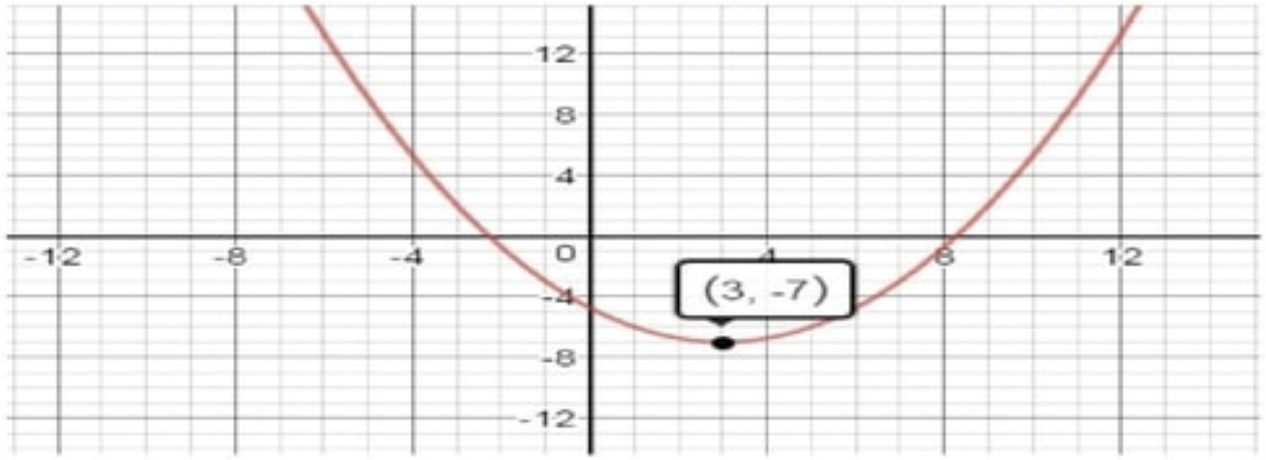
(17

$$(x+1)^2 = -8(y-6)$$



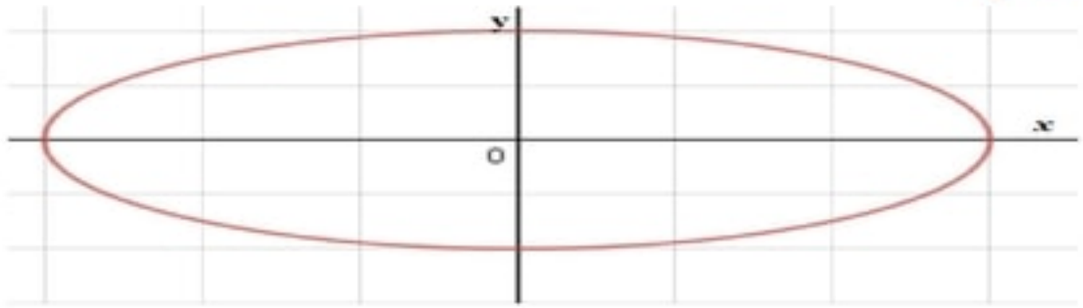
(18

$$(x-3)^2 = 4(y+7)$$

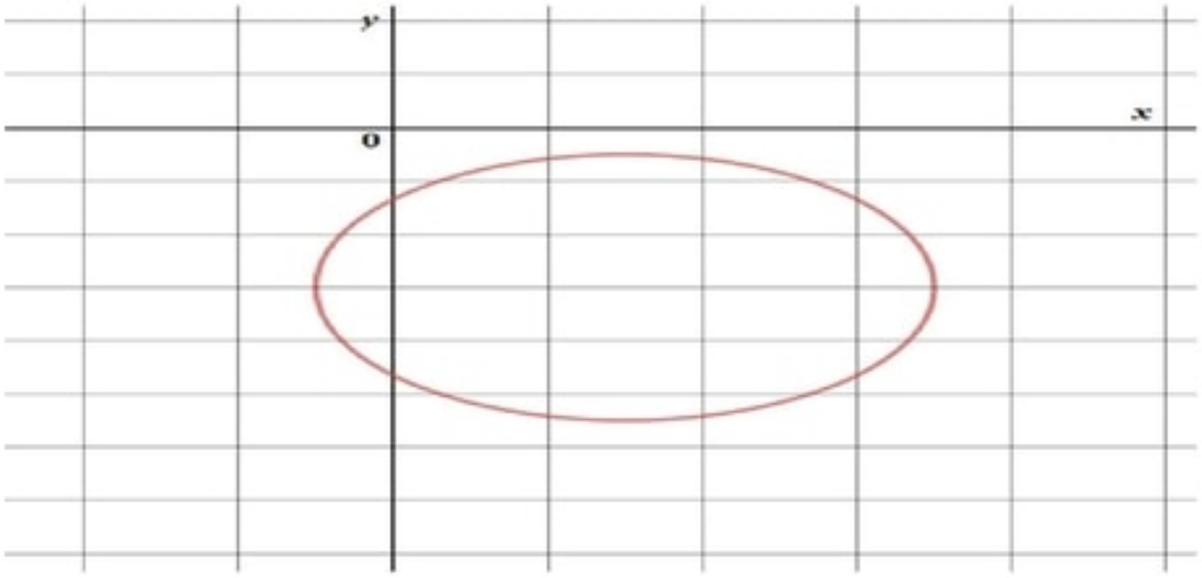


حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي ثم مثل منحناه بيانياً:

(19



(20



اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(21

$$\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{3}=1$$

(22

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

(23

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$$

أوجد معادلة كل دائرة من الدوائر في الحلات الآتية:

(24

$$(x+1)^2+(y-6)^2=9$$

(25

$$(x-1)^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{29}{4}$$

(26

$$(x-1)^2+(y+4)^2=13$$

حدد خصائص القطع الزائد المعطاه معادلته في كل مما يأتي ثم مثل منحناه بيانياً:

(27

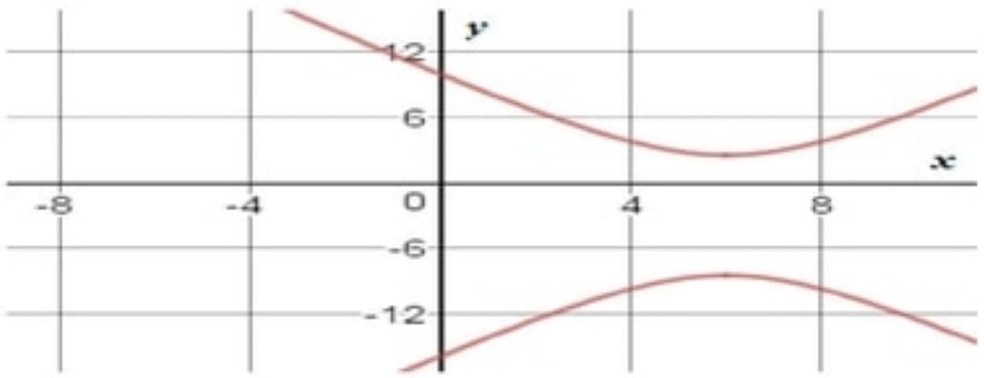
الاتجاه: رأسي

المركز $(6,-3)$ ، الرأس: $\left(6,-3\pm\sqrt{30}\right)$

البؤرتان: $\left(6,-3\pm\sqrt{30}\right)$

محور التماثل: $x=6$

خطا التقارب: $y+3=\pm\frac{2\sqrt{15}}{15}(x-6)$



(28

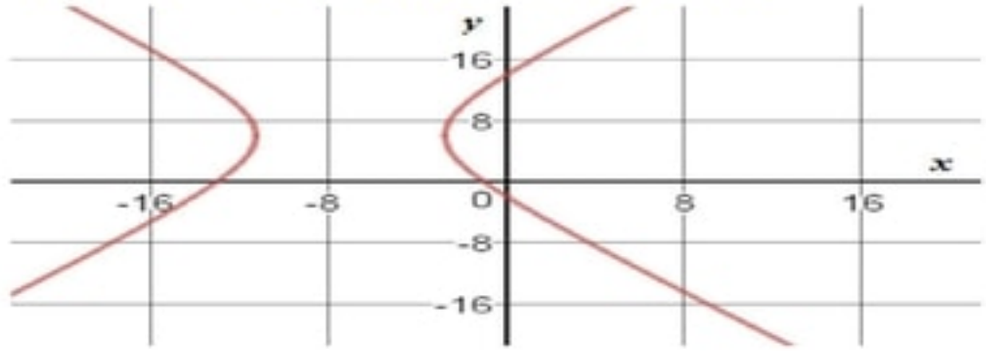
الاتجاه: أفقي

المركز $(-7, 6)$ ، الرأس: $(-7 \pm 3\sqrt{2}\ ,\ 6)$

البؤرتان: $(-7 \pm 3\sqrt{2}\ ,\ 6)$

محور التماثل: $y = 6$

خطا التقارب: $y - 6 = \pm\sqrt{2}\,(x + 7)$



29)

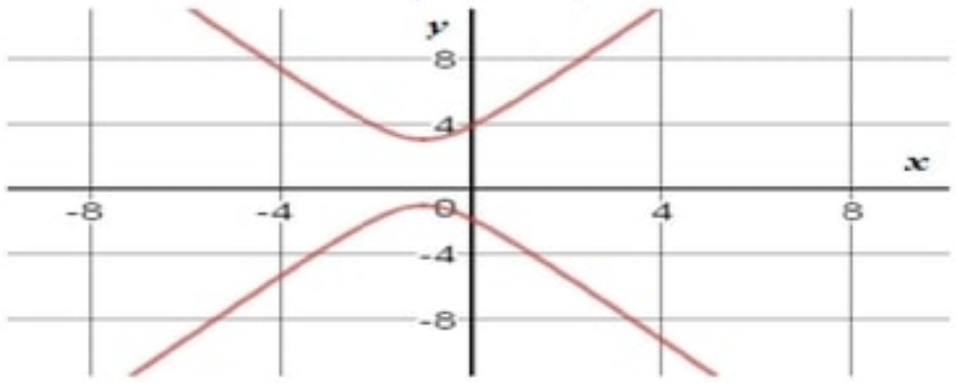
الاتجاه: رأسي

المركز $(-1\ ,\ 1)$ ، الرأسان: $(-1\ ,\ 3)$ و $(-1\ ,\ -1)$

البؤرتان: $(-1\ ,\ 1 \pm \sqrt{5})$

محور التماثل: $x = -1$

خطا التقارب: $y - 1 = \pm\ 2(x + 1)$



30)

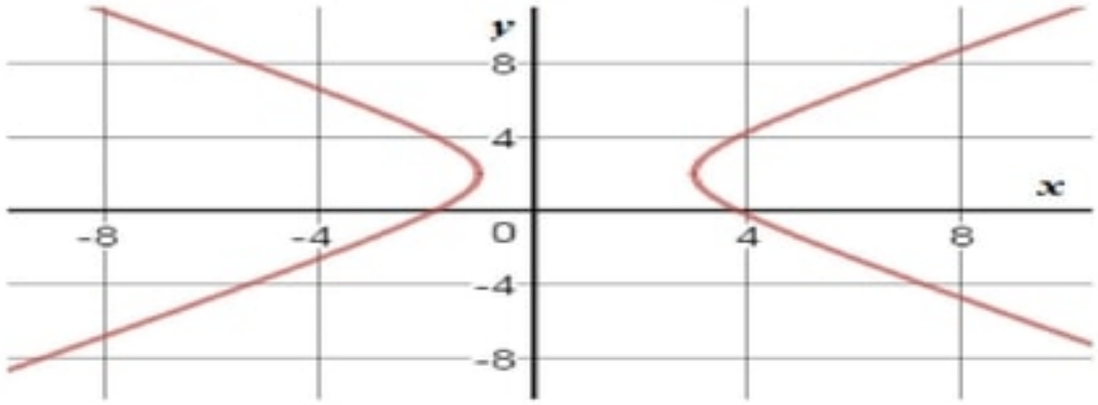
الاتجاه: أفقي

المركز $(1, 2)$ ، الرأس: $(-1, 2)$, $(3, 2)$

البؤرتان: $(1 \pm 2\sqrt{2} , 2)$

محور التماثل: $y = 2$

خطا التقارب: $y - 2 = \pm (x - 1)$



اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(31

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$$

(32

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

(33

$$\frac{(y-5)^2}{64} - \frac{(x-1)^2}{36} = 1$$

(34

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

35) قطع زائد

36) قطع مكافئ

37) قطع ناقص

تطبيقات وحل المسألة

38) أقواس:

a) $x^2 = -81y + 2025$

b) موقع البوزة $= 4.75$ أقدام فوق سطح الأرض

39) حركة الماء:

a) $x^2 + y^2 = 900$

b) عدد الثواني $= 5$ ثواني

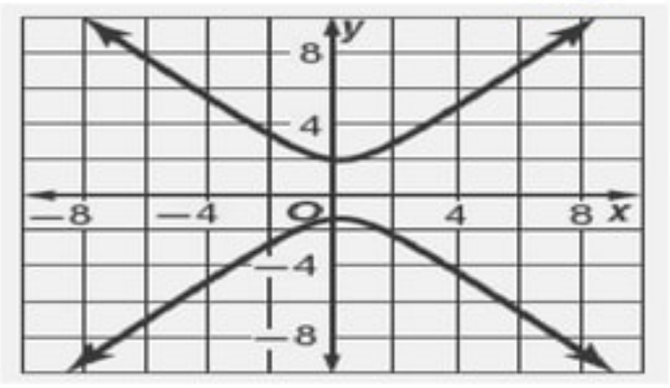
40) طاقة:

a) $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{625} = 1$

b) ستزداد نسبة المقام المرتبط بـ y إلى المقام المرتبط بـ x

41) ضوء:

قطع زائد



اختبار الفصل

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

(1)

بما أن الرأسان $(h+a,k)=(7,-4)$ ، $(h-a,k)=(-3,-4)$

لذا فإن $k=-4$ ، $h=2$ ، $a=5$

بما أن البؤرتان $(h+c,k)=(6,-4)$ ، $(h-c,k)=(-2,-4)$

لذا فإن $c=4$ وبالتالي فإن $b=\sqrt{25-16}=3$

وبالتالي فإن معادلة القطع الناقص تكون $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{9}=1$

---

(2)

بما أن البؤرتان $(h,k+c)=(-2,1)$ ، $(h,k-c)=(-2,-9)$

لذا فإن $h=-2$ ، $k=-4$ ، $c=5$

بما أن طول المحور الأكبر $2a=12$ فإن $a=6$

وبالتالي فإن $b=\sqrt{36-25}=\sqrt{11}$

وبالتالي فإن معادلة القطع الناقص تكون $\frac{(x+2)^2}{11}+\frac{(y+4)^2}{36}=1$

---

(3) اختيار من متعدد:

$C \leftarrow\leftarrow\leftarrow 4$

---

(4) جسور:

$$x^2=1492(y-5)$$

اكتب معادلة القطع الزائد الذى يحقق الخصائص المعطاة فى السؤالين الآتيين:

(5)

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

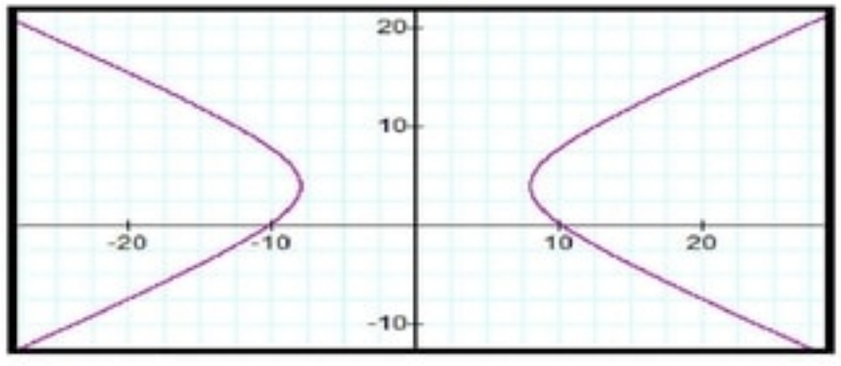
---

(6)

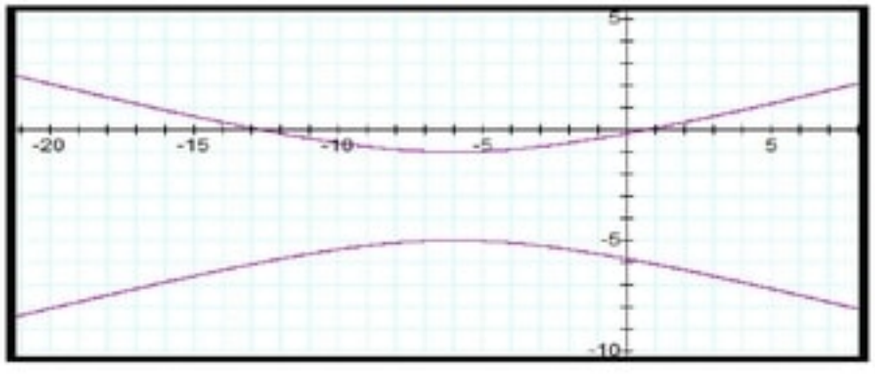
$$\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-8)^2}{12} = 1$$

مثل بيانياً منحنى القطع الزائد المعطاة معادلته فى السؤالين 11 و 12:

(7)



(8)



(9) اختيار من متعدد:

مستعملاً البؤرة F والرأس V ، اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين الآتيين ، ثم مثل منحنييهما بيانياً:

(10)

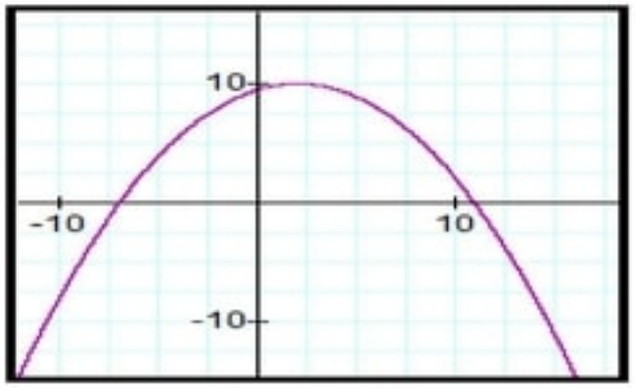
بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي x فإن المنحني مفتوح رأسياً

البؤرة $(h,k+p)=(2,8)$ ، الرأس $(h,k)=(2,10)$

لذا فإن $h=2$ ، $k=10$ ، $p=8-10=-2$

إذن معادلة القطع المكافئ $(x-h)^2=4p(y-k)$

هي $(x-2)^2=-8(y-10)$



---

(11)

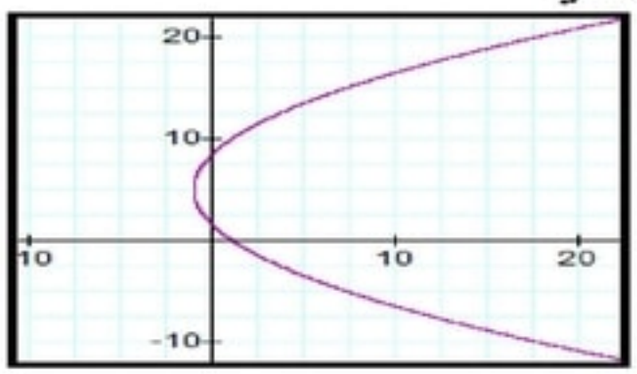
بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y فإن المنحني مفتوح أفقياً

البؤرة $(h+p,k)=(2,5)$ ، الرأس $(h,k)=(-1,5)$

لذا فإن $h=-1$ ، $k=5$ ، $p=2+1=3$

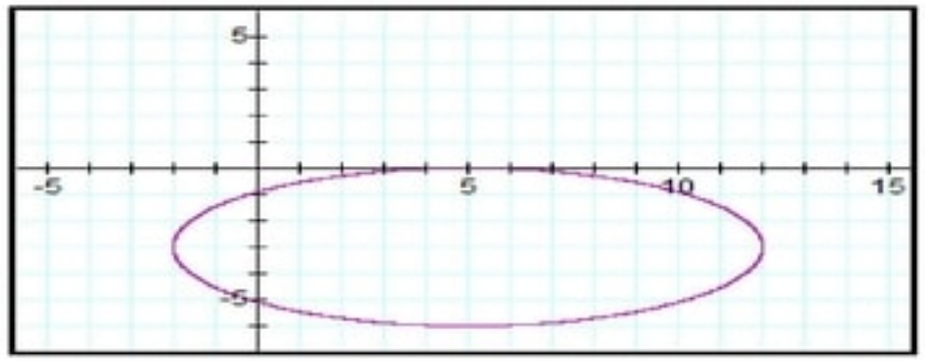
إذن معادلة القطع المكافئ $(y-k)^2=4p(x-h)$

هي $(y-5)^2=12(x+1)$

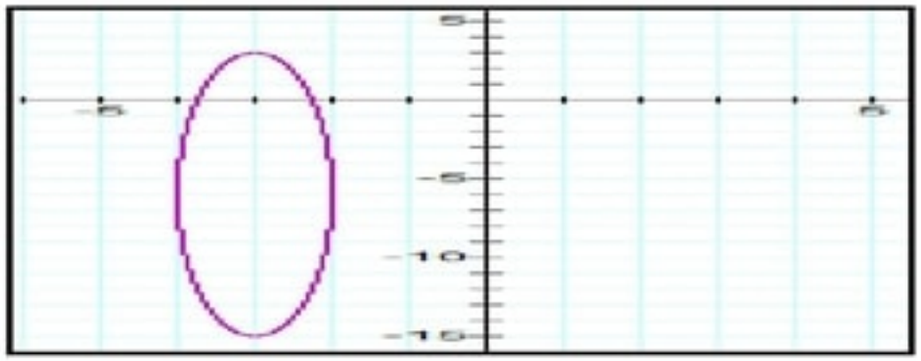


مثل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته فى السؤالين الآتيين:

(12)



(13)



التهيئة

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الاتية ثم أوجد احداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما:

1) $\left(-1, \frac{4}{2}\right)$, 3

2) $\left(-5 , \frac{11}{2}\right)$, 5

3) $\left(-1, -\frac{8}{2}\right)$, $\sqrt{29}$

4) $\left(-5 , -\frac{9}{2}\right)$, $\sqrt{53}$

أوجد قيمة x في كل مما يأتي مقربا الناتج إلى أقرب عشر:

5) 5.4

6) 11.1

7) 4.0

8) 36.1

9) بالون

22.8 ft

1-1 مقدمة في المتجهات

تحقق

1A) كمية متجهة

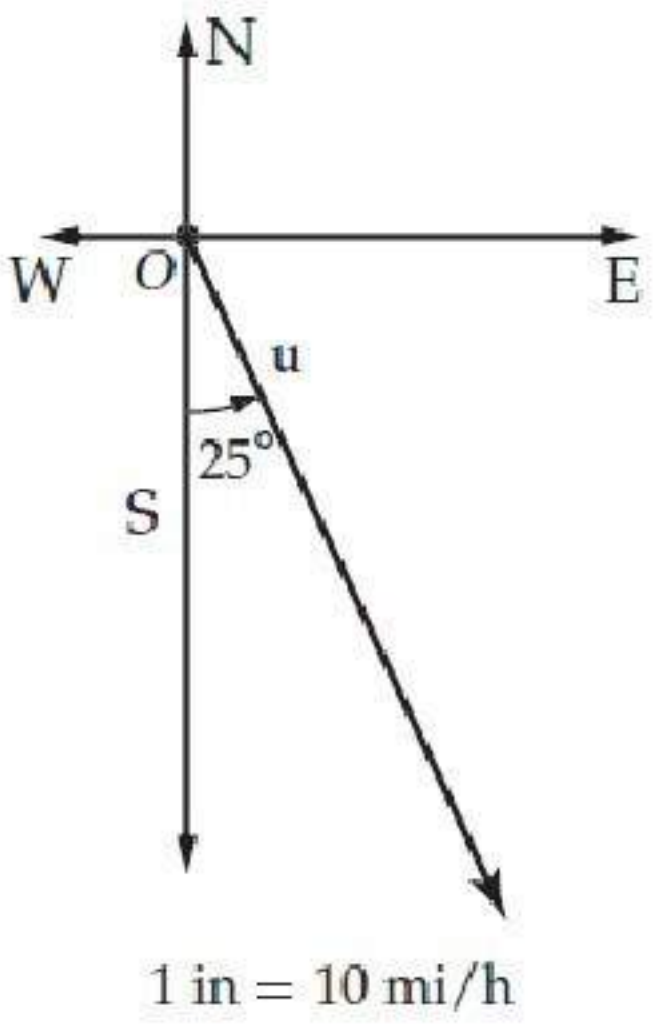
1B) كمية متجهة

1C) كمية قياسية

2A) $1in = 10ft/s$

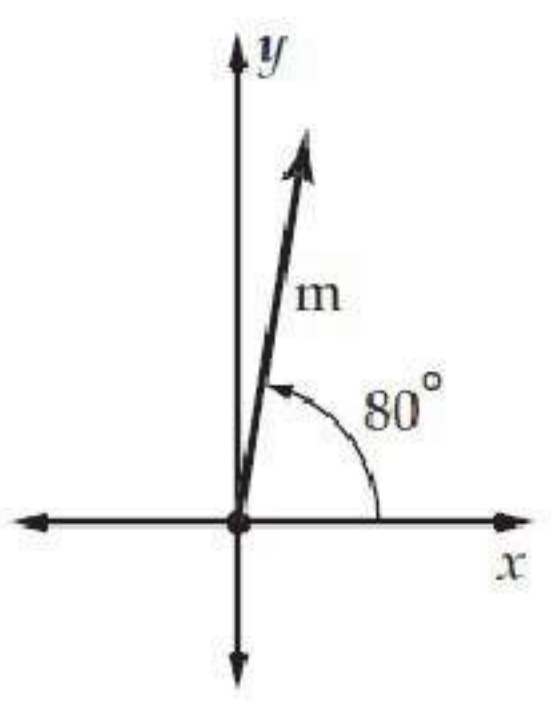
1 in = 10 ft/s

1 in = 10 mi / h (2B



1 in = 10 mi/h

1 cm = 30 N (2C



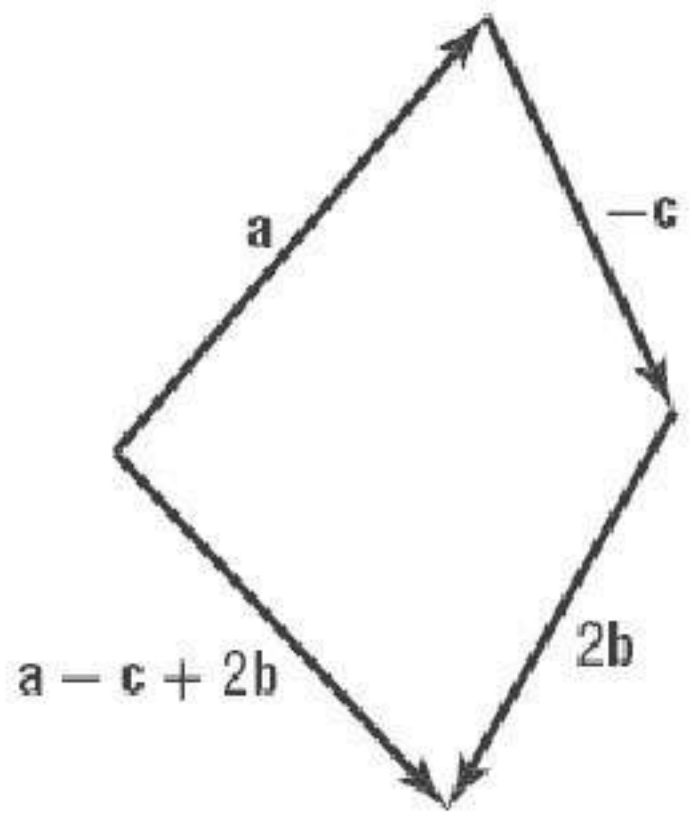
1 cm = 30 N

3 cm; 61° (3A

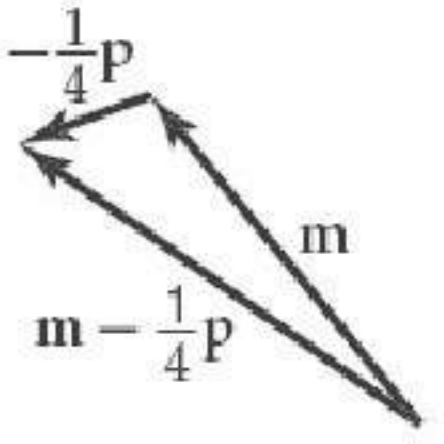
3 cm; 25° (3B

7.1 in/s; 343° :لعبة اطفال (3C

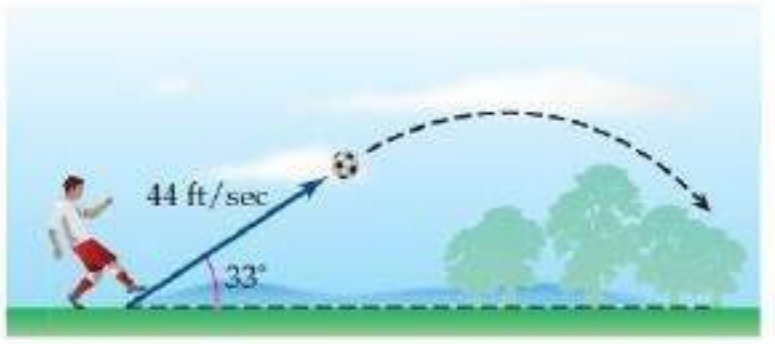
(4A



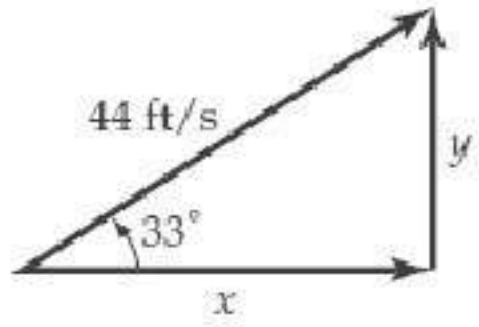
(4B



(6



(A



B) المركبة الأفقية تساوي تقريباً 36.90 ft/ s؛ المركبة الرأسية تساوي تقريباً 23.96 ft/ s.

حدد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كل مما يأتي:

1) قياسية

2) قياسية

3) متجهة

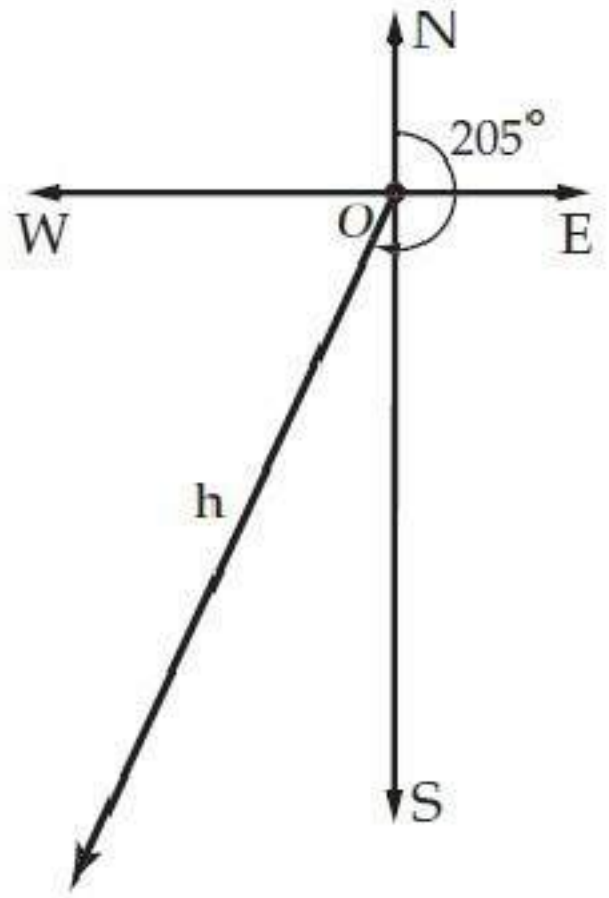
4) قياسية

5) متجهة

6) متجهة

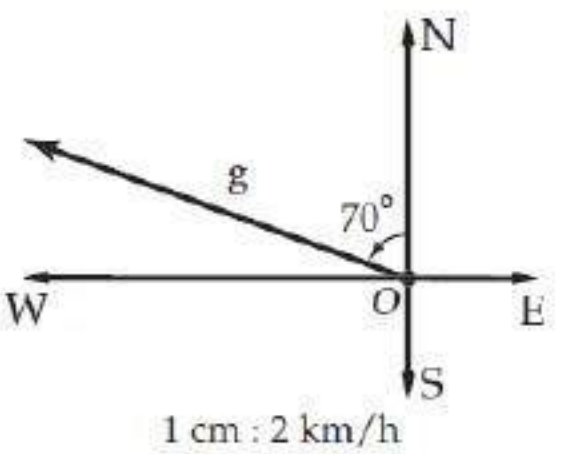
استعمل المسطرة والمنقلة لرسم متجه لكل من الكميات الاتية. واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

7) $1\,cm = 3\,in/s$



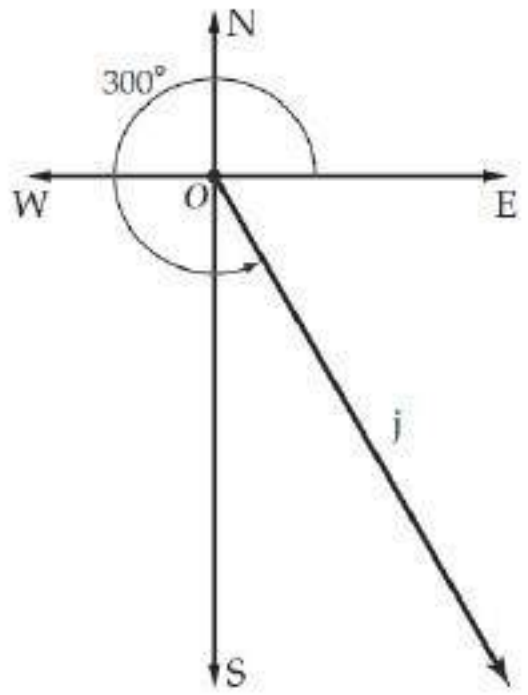
1 cm : 3 in/s

8) $1\,cm = 2\,km/h$



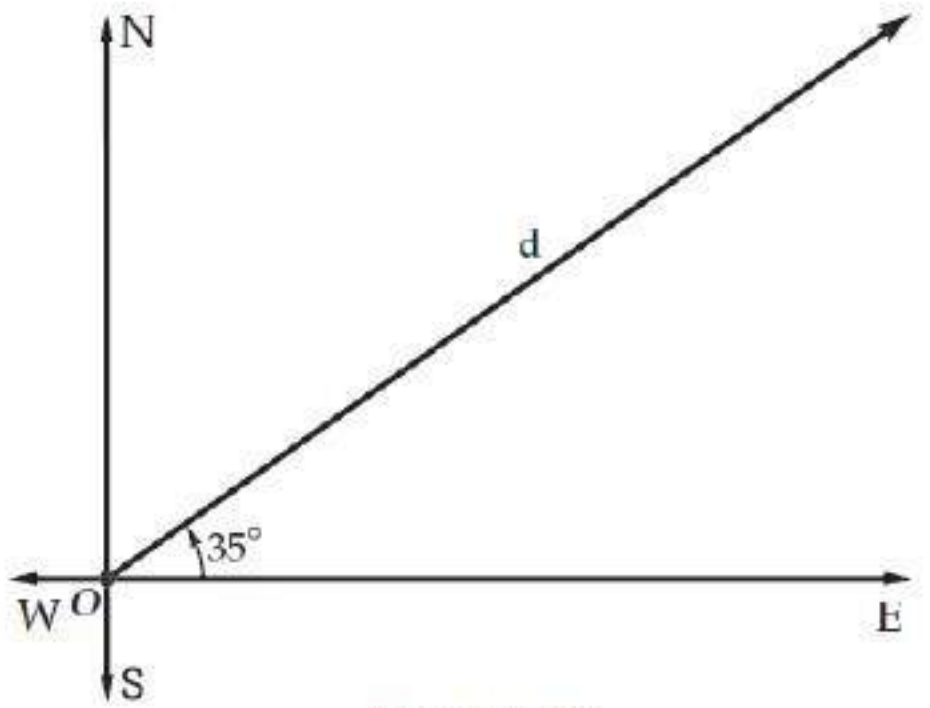
1 cm : 2 km/h

1cm = 1ft / s (9



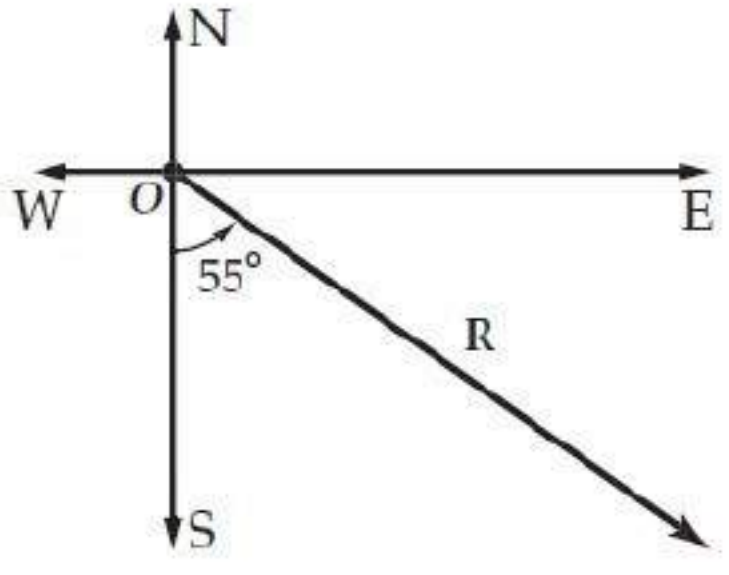
1 cm : 1 ft/s

1in = 10 km (10



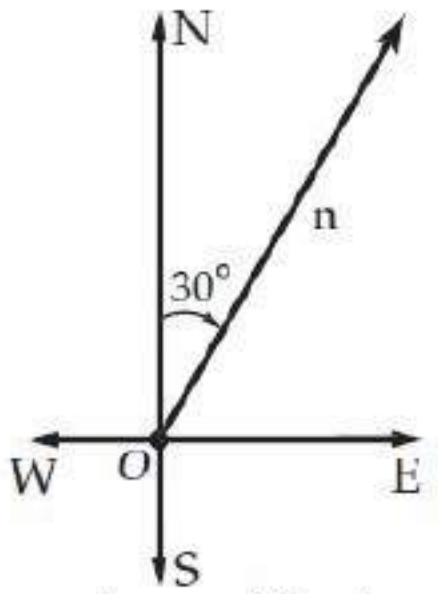
1 in = 10 km

1cm = 10 m (11



1 cm = 10 m

1cm = 10 m / s (12



1 cm = 10 m/s

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الاتية باستعمال قاعدة المثلث أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملاً المسطرة والمنقلة:

1.4 cm, 45° (13

1.0 cm, 58° (14

1.1 cm, 308° (15

16) 2.3 cm, 188°

17) 20 ميلاً بحرياً، N 11.7° W

حدد مقدار المحصلة الناتجة من جمع المتجهين واتجاهها في كل مما يأتي:

18) 2N للخلف

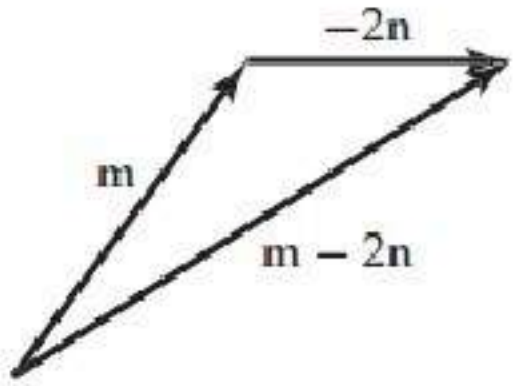
19) 250 m للجنوب

20) 23.35 mi باتجاه S 47° E

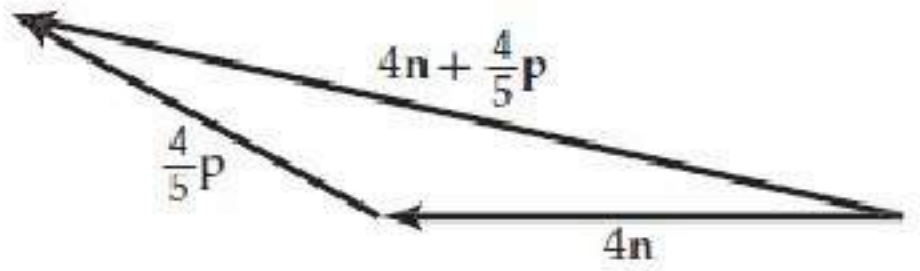
21) $8.15\ m/s^2$، 23° مع الأفقي.

استعمل المتجهات الاتية لرسم متجه يمثل كل عبارة مما يأتي:

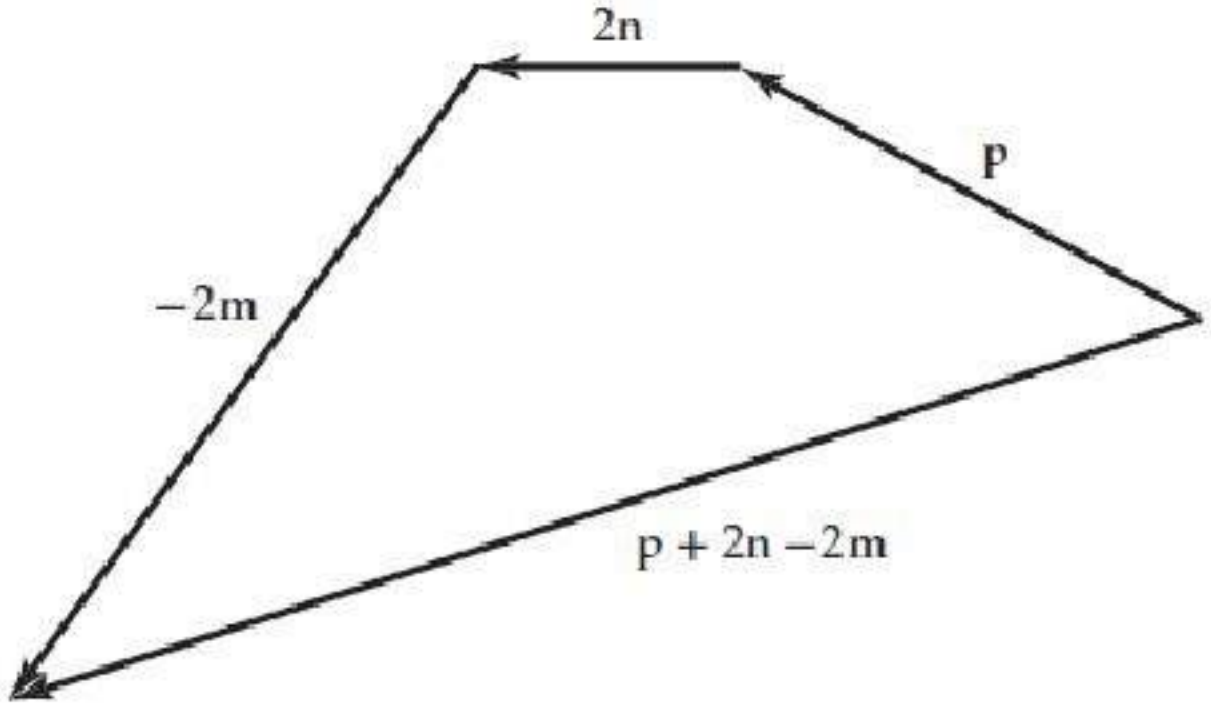
22)



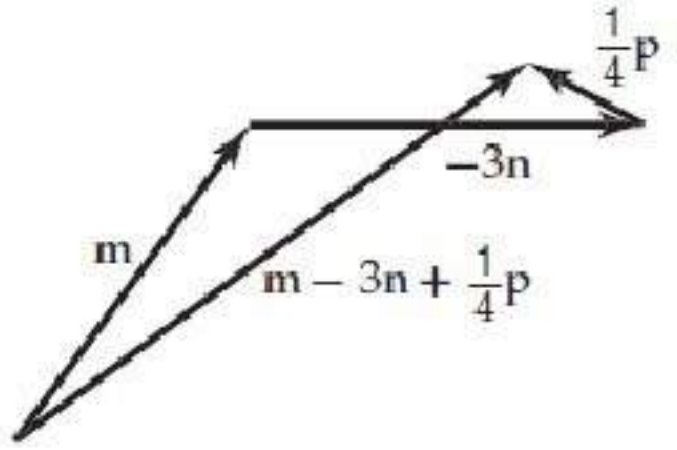
(23


$4\mathbf{n}+\frac{4}{5}\mathbf{p}$
$\frac{4}{5}\mathbf{p}$
$4\mathbf{n}$

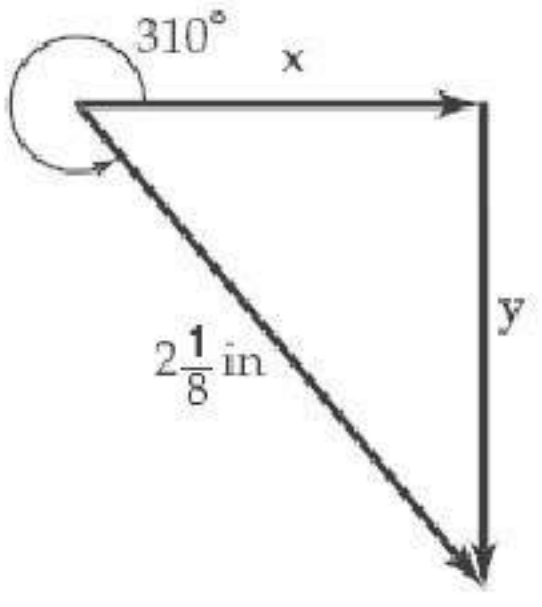
(24


$2\mathbf{n}$
$\mathbf{p}$
$-2\mathbf{m}$
$\mathbf{p}+2\mathbf{n}-2\mathbf{m}$

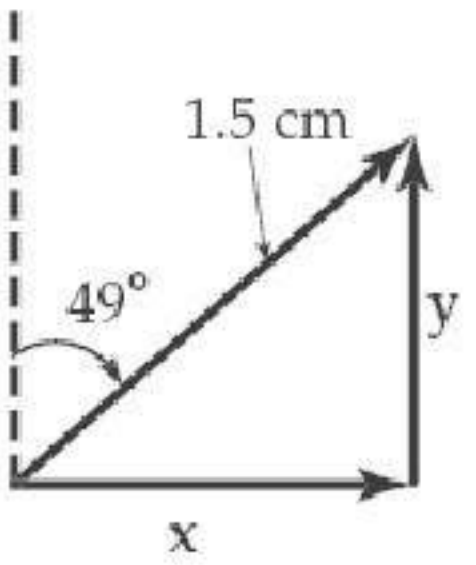
(25


$\frac{1}{4}\mathbf{p}$
$-3\mathbf{n}$
$\mathbf{m}$
$\mathbf{m}-3\mathbf{n}+\frac{1}{4}\mathbf{p}$

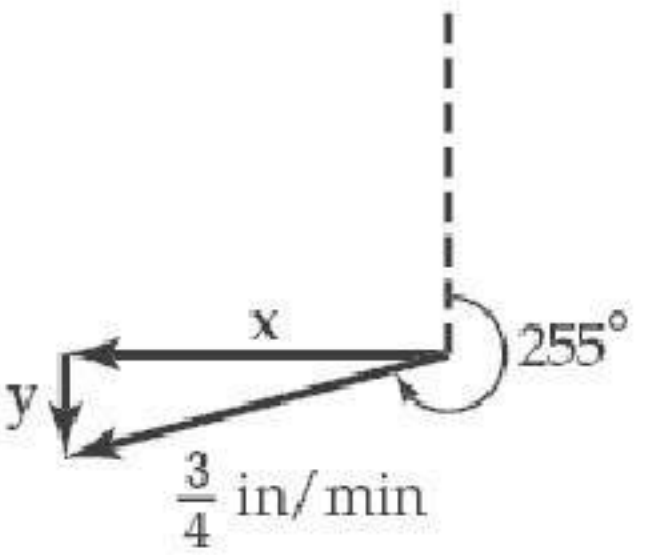
1.37 in/ s, 1.63 in/ s (26



1.13 cm, 0.98 cm (27

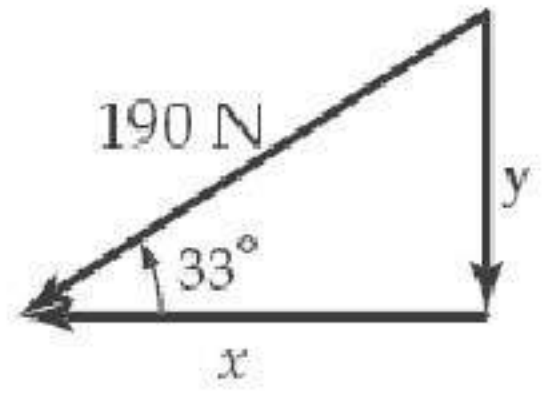


0.72 in/ min, 0.19 in/ min (28



29) تنظيف:

(a



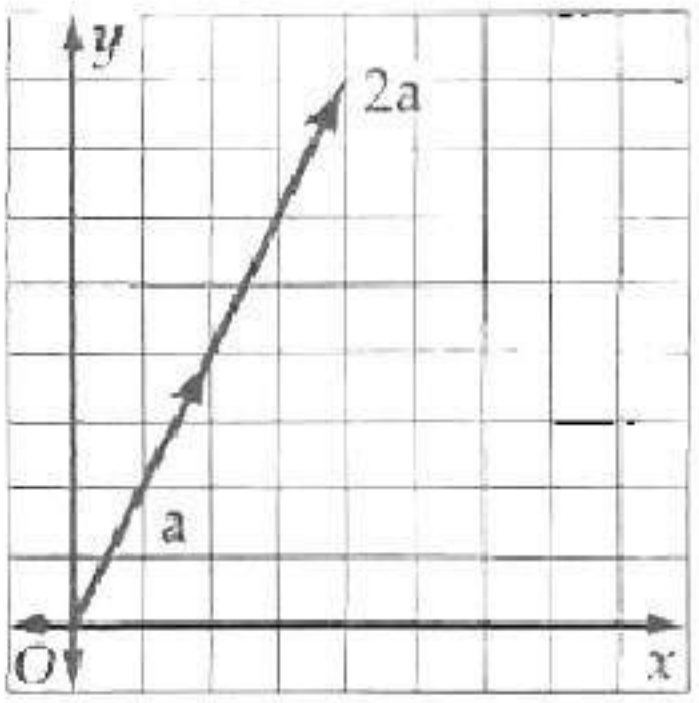
1 cm = 50 N

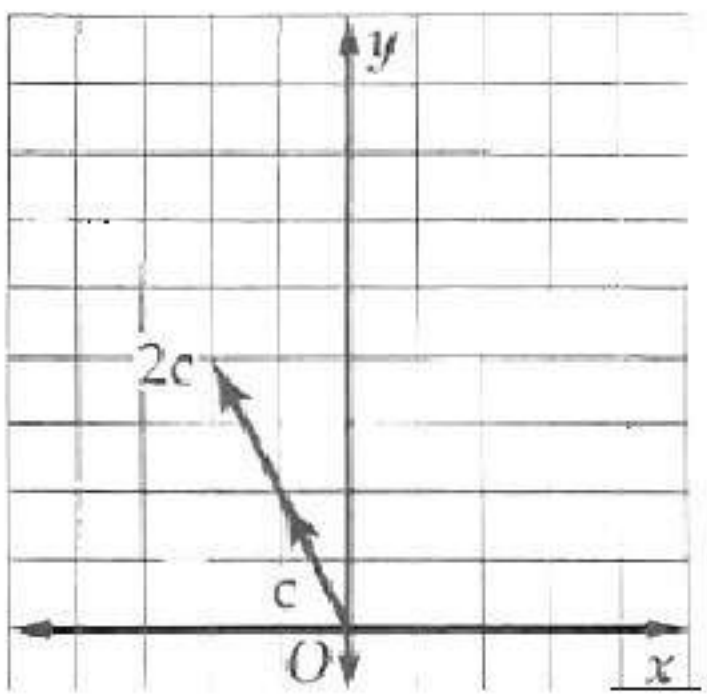
b) المركبة الأفقية: 159.3 N، والمركبة الرأسية: 103.5 N

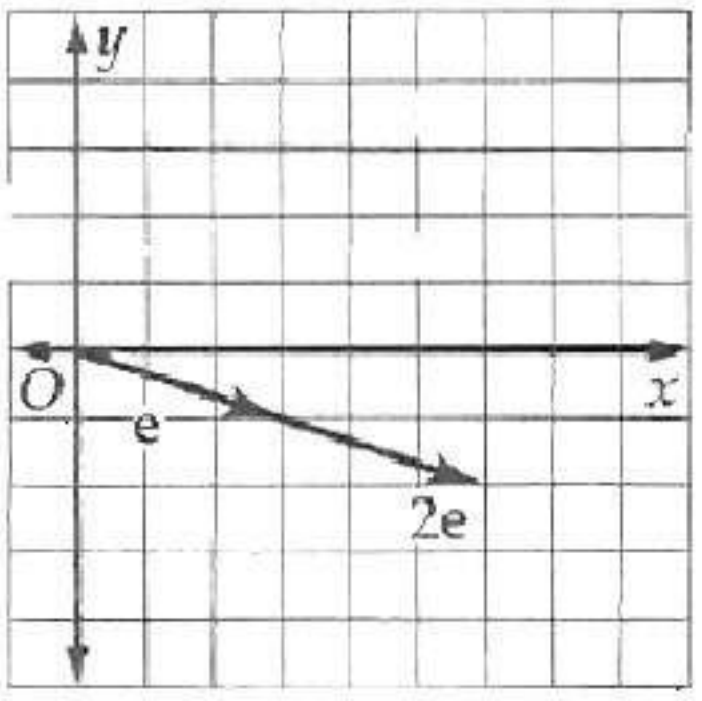
30) 52 N تقريباً

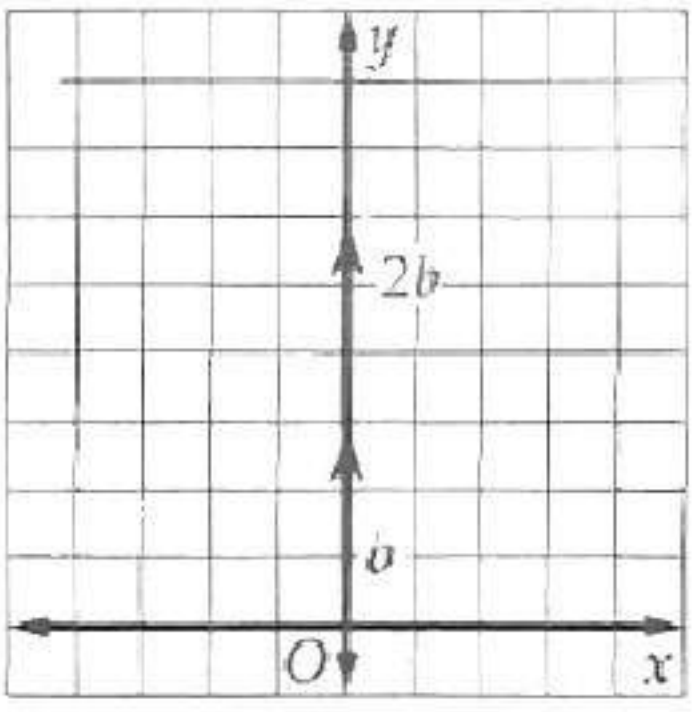
31) تمثيلات متعددة:

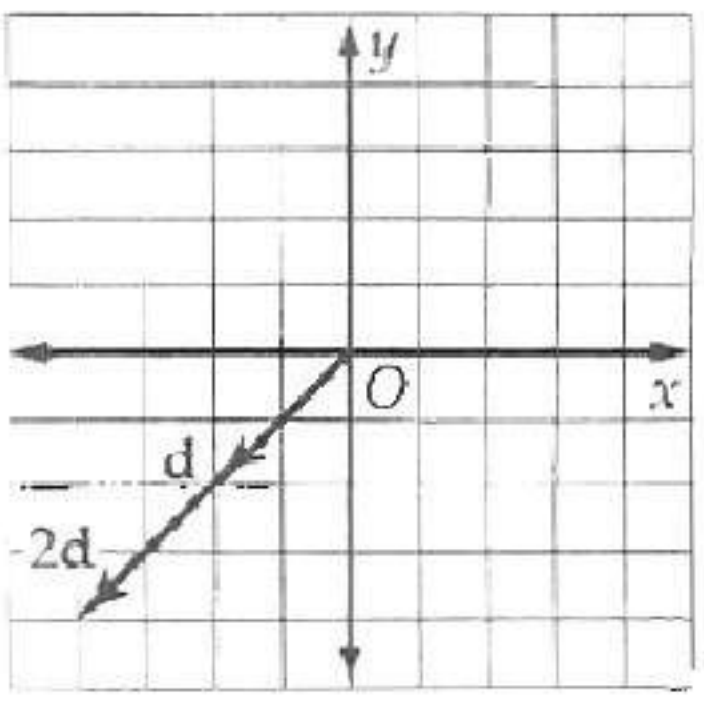
(a











(b

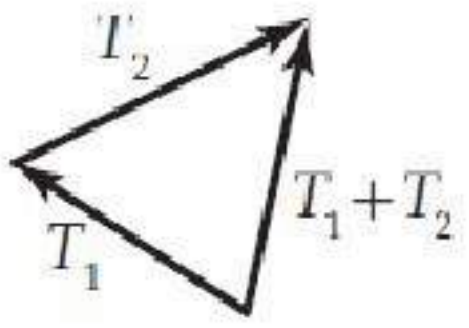
المتجه	نقطة النهاية للمتجه	نقطة النهاية للمتجه مضروباً في العدد k
a	(2, 4)	(4, 8)
b	(0, 3)	(0, 6)
c	(– 1, 2)	(– 2, 4)
d	(– 2, – 2)	(– 4, – 4)
e	(3, – 1)	(6, – 2)

(c (ka, kb)

(32 20.77 mi/ h باتجاه 270°

33) كرة حديدية:

(a



(b T_1=23.18 باوند ، T_2 = 23.18 باوند

أوجد طول كل متجه واتجاهه مما يأتي بمعلومية مركبتيه الأفقية والرأسية، والمدى الممكن لزاوية كل منها:

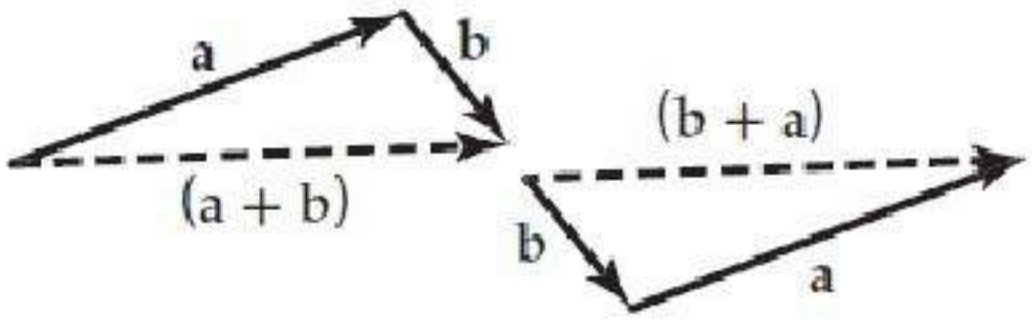
(34 2.3 in; 98°

(35 5.2 ft.; 54°

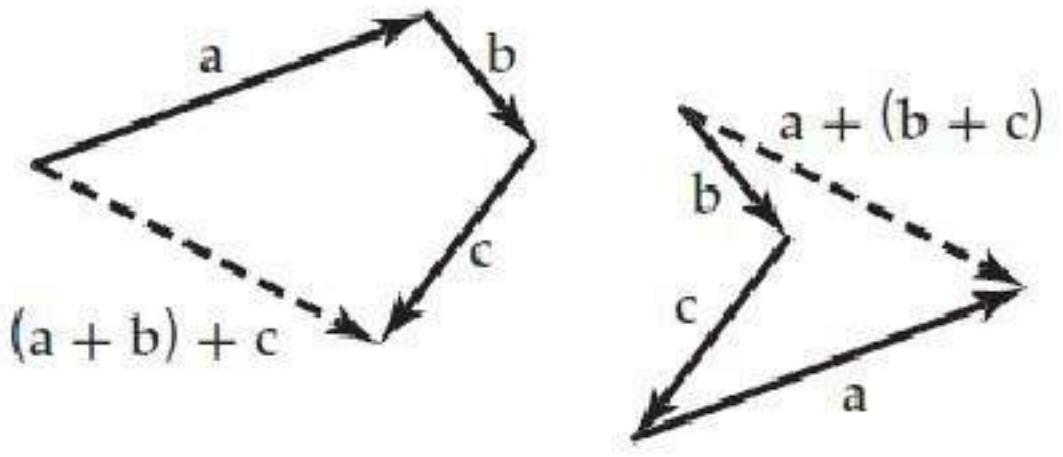
(36 10 cm; 285°

ارسم ثلاثة متجهات a,b,c، لتوضح صحة كل خاصية من الخصائص الاتية هندسياً:

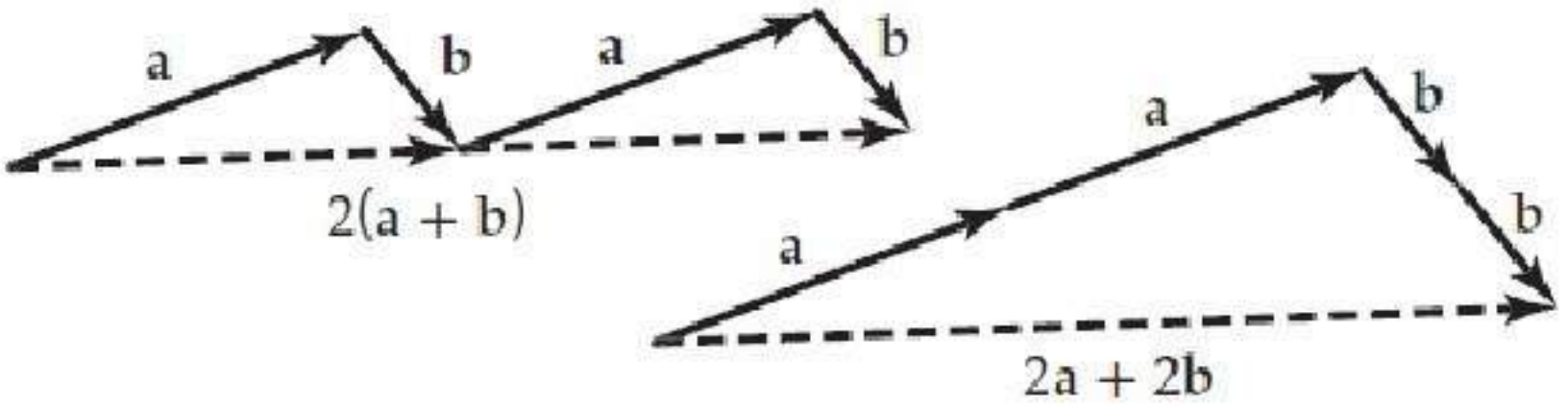
(37



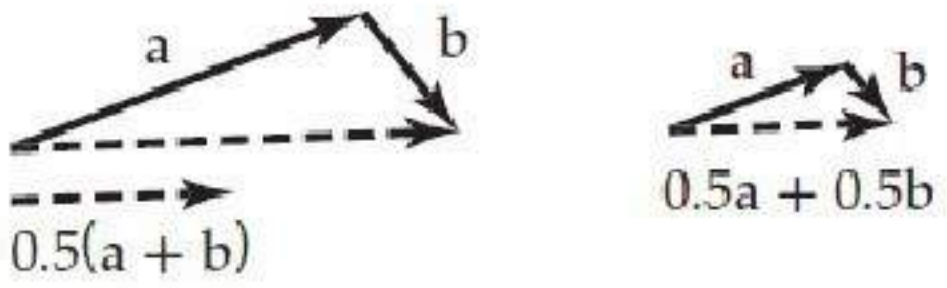
(38



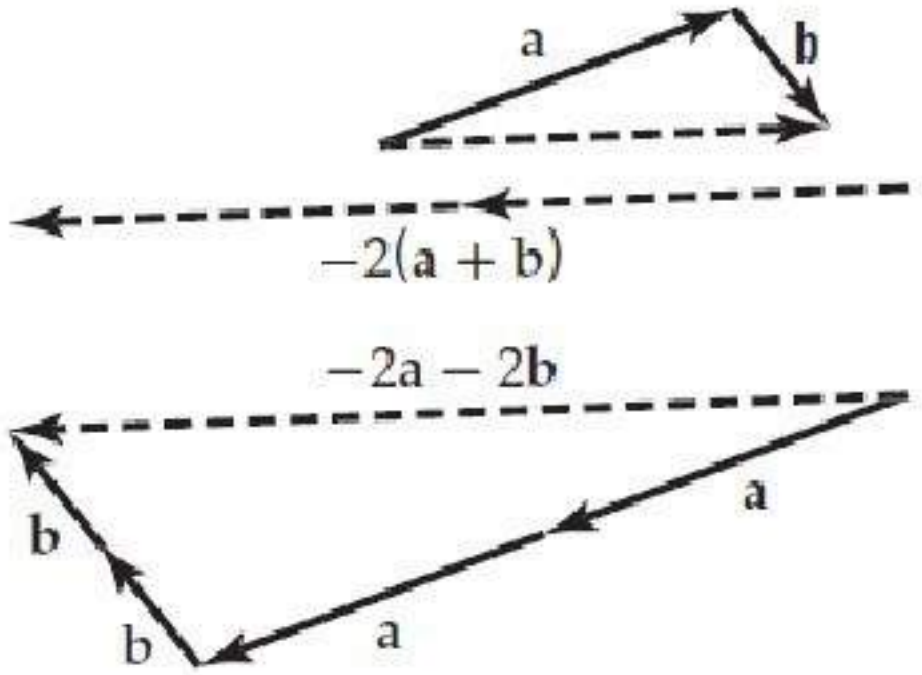
k = 2 (39



k = 0.5

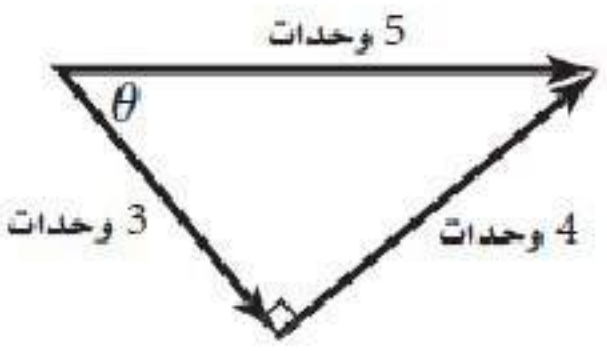


k = – 2



مسائل مهارات التفكير العليا:

40) إجابة ممكنة:



41) ليست صحيحة، إجابة ممكنة: إذا توازى متجهان، فإنهما يكونان في الاتجاه نفسه أو في اتجاهين متعاكسين. أما إذا وضع المتجهان بحيث تتطابق نقطتا بدايتهما، فعندها لا توجد زاوية بين المتجهين تسمح بتكوين متوازي أضلاع.

42) تبرير:

a) طول المتجه a مضافاً إلى طول المتجه b أكبر من أو يساوي طول المتجه الناتج من a + b.

b) صحيحة، إجابة ممكنة: المتجه الناتج من a + b يتأثر باتجاهي المتجهين وهذا قد يجعل مقدار

|a + b| صغيراً، إذا كان a، b متعاكسين في الاتجاه. ويكون مجموع المقدارين |b| + |a| أكبر قيمة ممكنة؛ لأنه لا ياخذ بعين الاعتبار اتجاهي المتجهين ويتساوى المقداران |b| + |a|، |a + b| إذا كان a، b متوازيين، ولهما الاتجاه نفسه.

43) مصطفى، إجابة ممكنة: وضع مصطفى نقطة بداية المتجه الثاني عند نقطة نهاية المتجه الأول، ثم رسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الثاني، وهي الطريقة الصحيحة لاستعمال قاعدة المثلث. أما حسين فقد وضع نقطتي بداية المتجهين معاً، وهي الخطوة الأولى لاستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، لكنه لم يكمل متوازي الأضلاع.

44) نعم، إجابة ممكنة: من الممكن أن يكون حاصل جمع متجهين يساوي أحد المتجهين، ويحدث ذلك عندما يكون أحد المتجهين هو المتجه الصفري.

45) إجابة ممكنة: عند استعمال قاعدة المثلث، تضع نقطة بداية المتجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه، وهكذا مع باقي المتجهات، ثم ترسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الأخير.

أما عند استعمال طريقة متوازي الأضلاع، فتضع نقطة بداية المتجهين عند نقطة واحدة، ثم تكمل متوازي الأضلاع وترسم المحصلة من نقطة البداية المشتركة للمتجهين إلى الرأس المقابل لمتوازي الأضلاع، يمكن استعمال كلتا القاعدتين، المثلث ومتوازي الأضلاع لإيجاد المحصلة لمتجهين أو أكثر.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كل مما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب عشر إن لزم ذلك:

46) 5.8

47) 22

48) 6

حل كل مثلث فيما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب عشر إن لزم ذلك:

49) $b = 19.8,\ a = 11.2,\ A = 32^\circ$

50) $\sin 2x - \cos x = 0$

$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$

$\cos x (2 \sin x - 1) = 0$

$\cos x = 0$ أو $\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ أو $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$

حيث n عدد صحيح.

تدريب على اختبار:

51) 6.74 km باتجاه 56.2° تقريباً مع الأفقي

52) B

1-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

تحقق

(8, 8) (1A

(– 9, – 11) (1B

$\sqrt{128} \approx 11.3$ (2A

$\sqrt{202} \approx 14.2$ (2B

(–19, 4) (3A

(12, – 3) (3B

(3, 22) (3C

$\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle$ (4A

$\left\langle \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$ (4B

$8i + 5j$ (5A

$10i + 9j$ (5B

$\langle 4\sqrt{2}\ ,\ 4\sqrt{2} \rangle$ (6A

$\langle -12\sqrt{3}\ ,\ -12 \rangle$ (6B

7A) 161.6° تقريباً

7B) 249.4° تقريباً

8) $30.75\ m/s$ وتصنع زاوية قياسها 31.6° مع الأفقي.

تدرب وحل المسائل:

أوجد الصورة الإحداثية وطول AB المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

1) $\langle 7,4\rangle, \sqrt{65} \approx 8.1$

2) $\langle -8 , 16\rangle , \sqrt{320} \approx 17.9$

3) $\langle -7 , -3\rangle , \sqrt{58} \approx 7.6$

4) $\langle 3 , 4\rangle , 5$

5) $\langle -6.5, 4.5\rangle , \sqrt{62.5} \approx 7.9$

6) $\left\langle \frac{11}{2}, \frac{23}{2} \right\rangle , \sqrt{\frac{325}{2}} \approx 12.7$

إذا كان $h = (-6 , 2)$, $g = (-3 , -5)$, $f = (8 , 0)$ فأوجد كلا مما يأتي:

7) $\langle -21, 13\rangle$

8) $\langle -4, 4\rangle$

$$\langle 31, -11 \rangle \quad (9$$

$$\langle 26, 6 \rangle \quad (10$$

$$\langle -53, -23 \rangle \quad (11$$

$$\langle -42, -18 \rangle \quad (12$$

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه v نفسه في كل مما يأتي:

$$\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2\sqrt{53}}{53}, \frac{7\sqrt{53}}{53} \right\rangle \quad (13$$

$$\mathbf{u} = \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle \quad (14$$

$$\mathbf{u} = \left\langle -\frac{8\sqrt{89}}{89}, \frac{5\sqrt{89}}{89} \right\rangle \quad (15$$

$$\mathbf{u} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right\rangle \quad (16$$

$$\mathbf{u} = \left\langle -\frac{\sqrt{26}}{26}, -\frac{5\sqrt{26}}{26} \right\rangle \quad (17$$

18) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{10} , \frac{7\sqrt{2}}{10} \right\rangle$

اكتب DE المعطاة بدايته ونهايته في كل مما يأتي على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة i , j:

19) $i - 6j$

20) $-16i + 8j$

21) $-5i - 19j$

22) $-9.5i - 8.3j$

23) $13i + 11j$

24) $-\frac{33}{8}i - \frac{19}{7}j$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه v، المعطى طوله وزاوية اتجاهه مع المحور x الموجب في كل مما يأتي:

25) $\left\langle 6 , 6\sqrt{3} \right\rangle$

26) $\left\langle 8\sqrt{3} , -8 \right\rangle$

27) $\langle -2\sqrt{2} , 2\sqrt{2} \rangle$

28) $\langle -8.6 , 12.3 \rangle$

أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهات الاتية مع المحور x الموجب:

29) 63.4° تقريباً

30) 111.8° تقريباً

31) 216.9° تقريباً

32) 119.1° تقريباً

33) ملاحة جوية:

a) 674 mi/ h

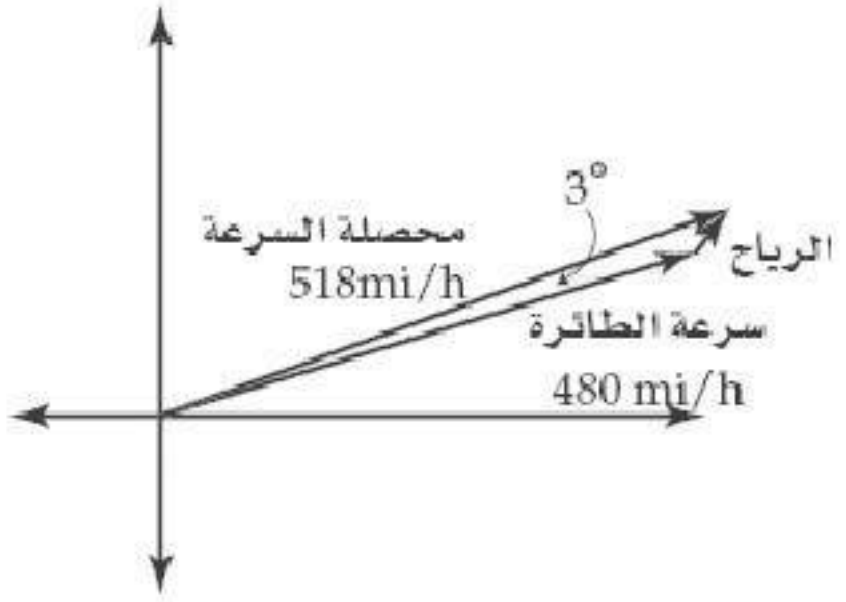
b) S 86° E

34) تجديف:

a) 5.8 mi/ h تقريباً

b) 59° تقريباً

35) ملاحة جوية:



بين إذا كان AB , CD المعطاة نقطتا البداية والنهاية لكل منهما فيما يأتي متكافئين أو لا. وإذا كانا متكافئين فأثبت أن AB = CD وإذا كانا غير ذلك فاذكر السبب.

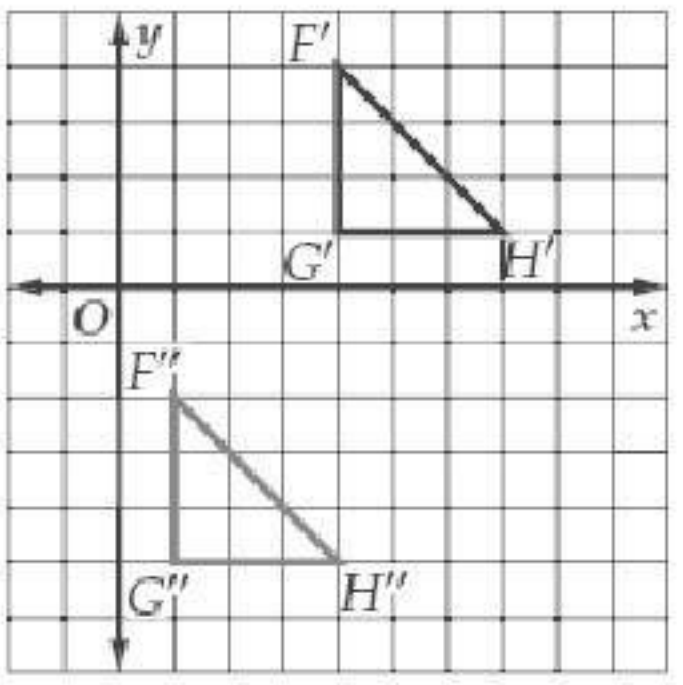
36) إجابة ممكنة: يختلف المقدار والاتجاه في كل من المتجهين؛ لذا فالمتجهان غير متكافئين.

37) نعم؛ إجابة ممكنة: للمتجهين المقدار والاتجاه نفساهما؛ لذا فهما متكافئان.

38) انسحاب:

a) (2, 5)

b)



c) (–1, –1)

أوجد نقطة نهاية ممكنة لكل متجه مما يأتي، إذا علمت طوله ونقطة بدايته:

39) إجابة ممكنة: (2 – ,0)

40) إجابة ممكنة: (1 – ,5)

41) الة تصوير:

a) (544, – 441) ; (899); (– 756)

b) (688, 930)

c) 1157 N; 54°

42) يجب أن تكون قوة الاحتكاك مساوية لمركبة الجاذبية الموازية للسطح المائل.

مسائل مهارات التفكير العليا:

43) **تبرير:** إجابة ممكنة: إذا كانت نقطة بداية المتجه هي (a, b) ، وطول المتجه m، فإن أي نقطة (x, y) تحقق المعادل $m = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. يمكن أن تكون نقطة نهاية المتجه. وهي دائرة مركزها النقط (a, b) وطول نصف قطرها m.

44) **تحد:** $x = \dfrac{y}{\tan 4y}$

برهان:

45) $a + b = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = b + a$

46) $(a + b) + c = ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3)$

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)$

$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$

$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$

$= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$

$= a + (b + c)$

47) $k\,(a + b) = k\,((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$

$= k\,(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$= (k\,(x_1 + x_2),\ k\,(y_1 + y_2))$

$= (kx_1 + kx_2,\ ky_1 + ky_2)$

$$= (kx_1, ky_1) + (kx_2, ky_2)$$

$$= k\,(x_1, y_1) + k\,(x_2, y_2)$$

$$= ka + kb$$

$$|ka| = |k\,(x_1, y_1)\,| \quad (48$$

$$= |\,(kx_1, ky_1)|$$

$$= \sqrt{\left(kx_1\right)^2 + \left(ky_1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(k^2 x_1^{\,2} + k^2 y_1^{\,2}\right)}$$

$$= \sqrt{k^2\left(x_1^{\,2} + y_1^{\,2}\right)}$$

$$= \sqrt{k^2}\sqrt{\left(x_1^{\,2} + y_1^{\,2}\right)}$$

$$= |k|\,|\,(x_1, y_1)\,|$$

$$= |k|\,|a|$$

مراجعة تراكمية

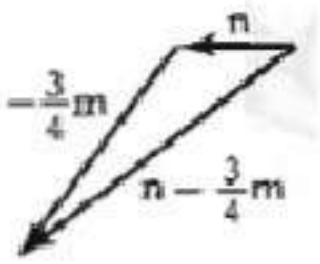
49) دمى الأطفال:

a) = 1.18 N, = 0.92 N

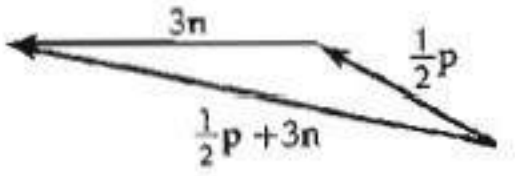
b) = 1.47 N, = 0.31 N

استعمل مجموعة المتجهات الاتية لرسم متجه يمثل كلا مما يأتي:

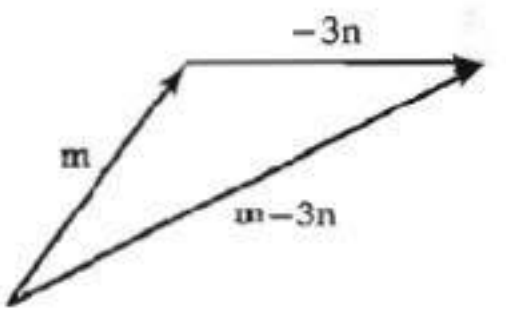
(50



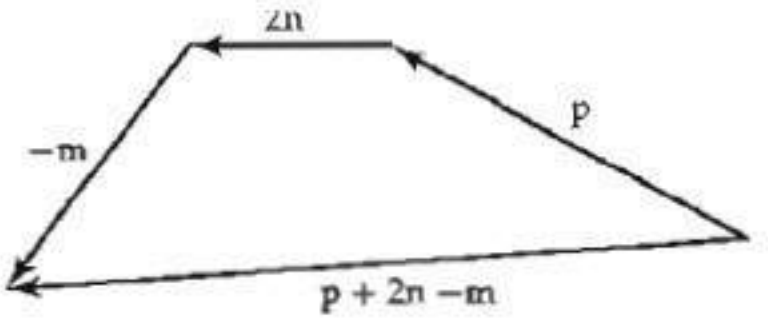
(51



(52



(53



تدريب على اختبار:

D (54

C (55

1-3 الضرب الداخلي

تحقق

1A) ليسا متعامدين

1B) 0؛ متعامدان

2A) 20

2B) $5\sqrt{2} = 7.07$

3A) 156.8°

3B) 101.5°

4) 75 جولاً

تدرب وحل المسائل:

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u ,v، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا:

1) 8؛ غير متعامدين

2) 0؛ متعامدان

3) 8؛ غير متعامدين

4) 0؛ متعامدان

5) 8؛ غير متعامدين

6) زيت الزيتون:

a) 15620

b) ثمن العلب جميعها هو 15620 ريالاً.

استعمل الضرب الداخلي، لإيجاد طول المتجه المعطى:

7) $\sqrt{130} = 11.4$

8) $\sqrt{97} = 9.8$

9) $5\sqrt{13} = 18.0$

10) $\sqrt{785} = 28.0$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u , v في كل مما يأتي وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

11) 14.0°

12) 100.0°

13) 164.7°

14) 82.9°

15) مخيم كشفي: 161.6°

16) 801 J

أوجد متجهاً يعامد المتجه المعطى في كل مما يأتي:

17) إجابة ممكنة: $(3, -12)$

18) إجابة ممكنة: $(-6, 10)$

19) إجابة ممكنة: $(8, 14)$

20) إجابة ممكنة: $(6, 1)$

21) عجلة دوارة:

(a (16.38, 11.47), (22.94, – 32.77)

(b $(20 \cos 35^\circ)(40 \cos 35^\circ) + (20 \sin 35^\circ)(-40 \sin 55^\circ) = 0$

إذا علمت كلا من $u \cdot v$, vفأوجد u في كل مما يأتي:

22) إجابة ممكنة: $u = (5, -3)$

23) إجابة ممكنة: $u = (-1, 7)$

24) مدرسة: 55.7 تقريباً

اختبر كل زوج من المتجهات في كل مما يأتي من حيث كونها متعامدة، أو متوازية او ليس كليهما:

25) بما أن $u \cdot v = 0$، فإن المتجهين متعامدان.

26) ليسا متعامدين، ولا متوازيين، حيث أن الزاوية بين المتجهين $\theta = 167^\circ$.

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كل مما يأتي. قرب الناتج إلى أقرب عشر:

27) 29.7°

28) 164.9°

29) $37.8^\circ, 60.3^\circ, 81.9^\circ$

إذا علمت كلا من $|v|$,u والزاوية θ بين المتجهين u,v، فأوجد قيمة ممكنة للمتجه v، قرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة:

30) (3.16, – 9.49)

31) (– 5.36, 0.55)

مسائل مهارات التفكير العليا:

32) العبارة خاطئة؛ إذ قد تكون نقطة بداية للمتجهات الثلاثة واحدة ولا تشكل هذه المتجهات مثلثاً مطلقاً، إذا كان الأمر كذلك، فإن الزاوية بين المتجهين d وf تكون حادة أو قائمة أو منفرجة.

33) فيصل: $u \cdot v$ عدد ثابت وعليه فإن $w \cdot (u \cdot v)$ ليس معرفاً.

34) إجابة ممكنة: لأي متجهين غير صفريين (c, b), (a, d) يكون الضرب الداخلي لهما يساوي مجموع حاصل ضرب الإحداثيين x والإحداثيين y أو

$ac + bd$.

برهان:

$u \cdot v = v \cdot u$ (35

$(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) \stackrel{?}{=} (v_1, v_2) \cdot (u_1, u_2)$

$u_1v_1 + u_2v_2 \stackrel{?}{=} v_1u_1 + v_2u_2$

$u_1v_1 + u_2v_2 = u_1v_1 + u_2v_2$

$(u_1, u_2) \cdot ((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) \stackrel{?}{=} (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) + (u_1, u_2) \cdot (w_1, w_2)$ (36

$(u_1, u_2) \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \stackrel{?}{=} (u_1v_1 + u_2v_2) + (u_1w_1 + u_2w_2)$

$u_1 (v_1 + w_1) + u_2 (v_2 + w_2) \stackrel{?}{=} u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2$

$u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 = u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2$

$k (u \cdot v) = ku \cdot v = u \cdot kv$ (37

$k ((u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2)) \stackrel{?}{=} k (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) \stackrel{?}{=} (u_1, u_2) \cdot k (v_1, v_2)$

$k (u_1v_1 + u_2v_2) \stackrel{?}{=} (ku_1, ku_2) \cdot (v_1, v_2) \stackrel{?}{=} (u_1, u_2) \cdot (kv_1, kv_2)$

$$ku_1v_1 + ku_2v_2 = ku_1v_1 + ku_2v_2 = ku_1v_1 + ku_2v_2$$

38) الزاوية بين u، v هي $\theta = 90^\circ$

$$\cos 90^\circ = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$0 = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$

بضرب الطرفين في $|u| \cdot |v|$

$$v \cdot u = 0$$

مراجعة تراكمية

أوجد كلا مما يأتي:

39) $(-12, -34.2)$

40) $\left\langle -\frac{137}{4}, 9.2 \right\rangle$

41) $\left\langle \frac{163}{4}, -18.2 \right\rangle$

أوجد الزاوية اتجاه كل من المتجهات الآتية مع المحور x الموجب:

42) 251.6°

43) 150.95°

44) 135°

تدريب على اختبار:

45) B

46) C

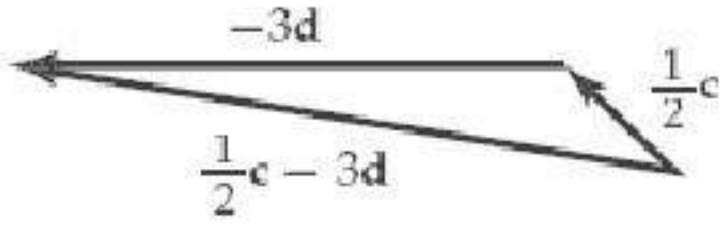
اختبار منتصف الفصل

6.2 cm, 185° (1

1.1 cm, 57° (2

40.96 N; 28.68 N (3

(4



اكتب BC المعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كل مما يأتي بدلالة متجهي الوحدة i,j :

i + – 6j (5

18i + 8j (6–

3i + – 21j (7–

10i + 20j (8

B (9

10) كرة سلة:

a) راشد: (2.5, 0)؛ الكرة: (6.5, 4.7)

b) 10.2 m/ s بزاوية قياسها 28° مع الأفقي.

أوجد الصورة الإحداثية، وطول المتجه المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي، قرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

11) (7, 4); $\sqrt{65} = 8.1$

12) (– 8, 13); $\sqrt{233} = 15.3$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u,v، وقرب الناتج إلى أقرب درجة:

13) 93°

14) 90°

15) 114°

16) B

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كل مما ياتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا:

17) 2 –؛ غير متعامدين

18) 16؛ غير متعامدين

19) 43 –؛ غير متعامدين

20) 0؛ متعامدان

21) عربة:

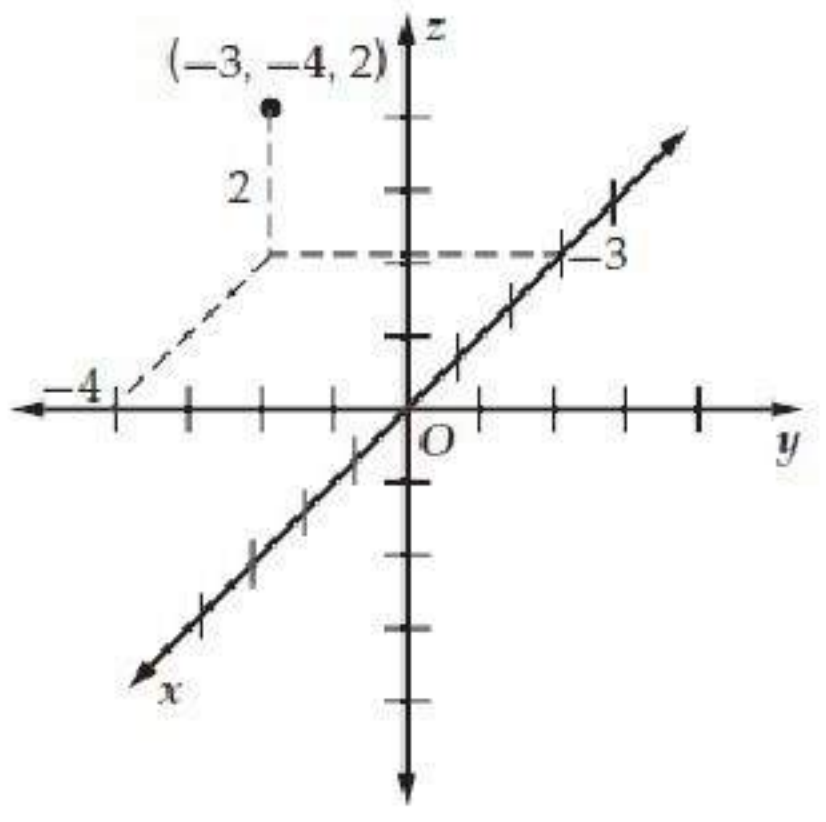
a) 3247.6 جولاً

b) أقل؛ سيبذل 2872.7 جولاً

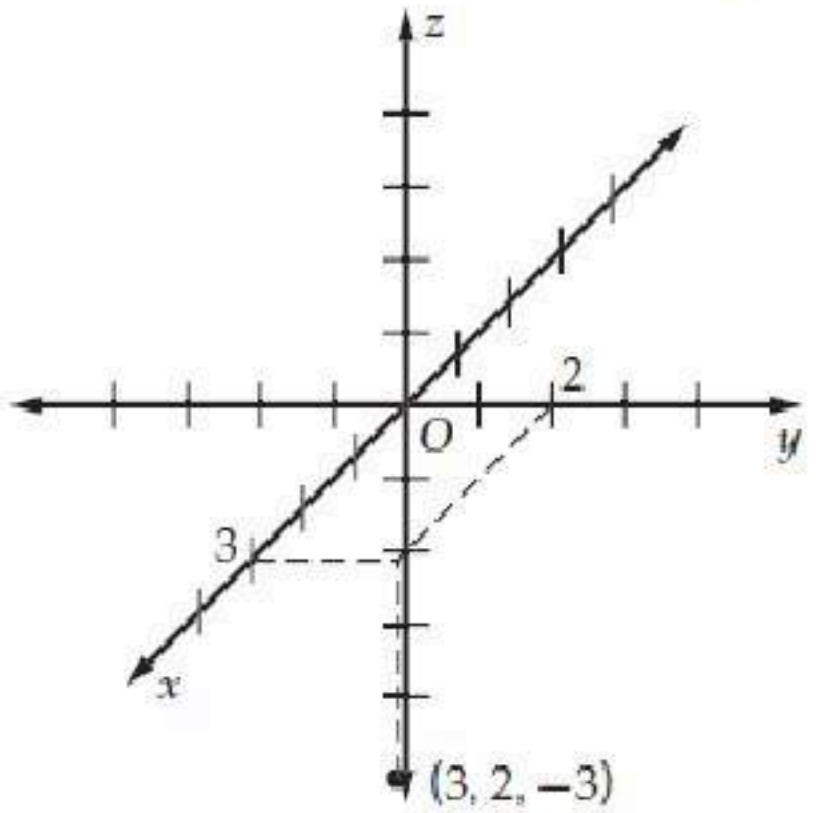
1-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

تحقق

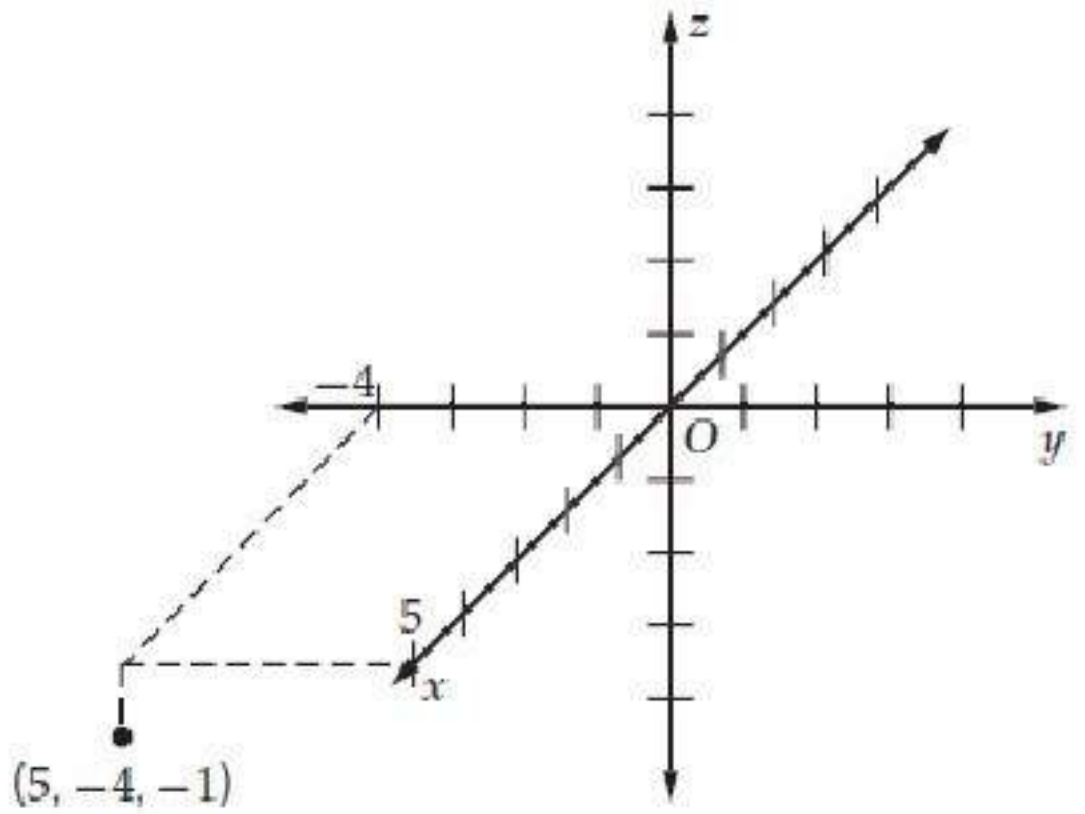
(1A



(1B



(1C

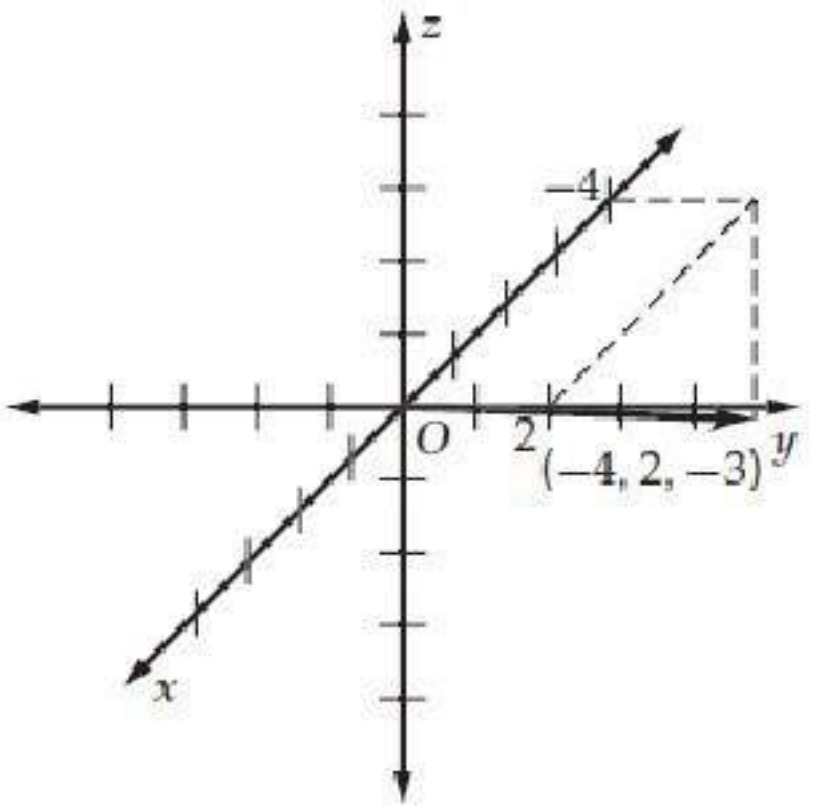


2) طائرات:

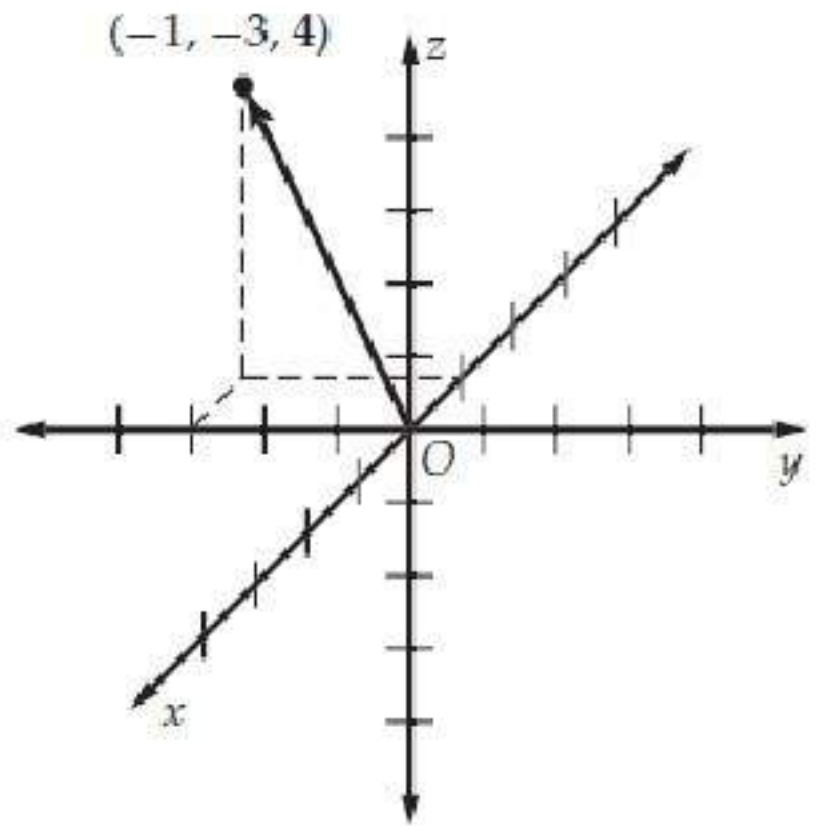
A) نعم؛ تبعد الطائرتان حوالي 2045 قدماً، وهذه المسافة أقل من المسافة المسموح بها وهي نصف ميل تقريباً.

B) (375, – 50, 29000)

(3A



(3B



(12, 16, – 56) (4A

(9, – 42, 45) (4B

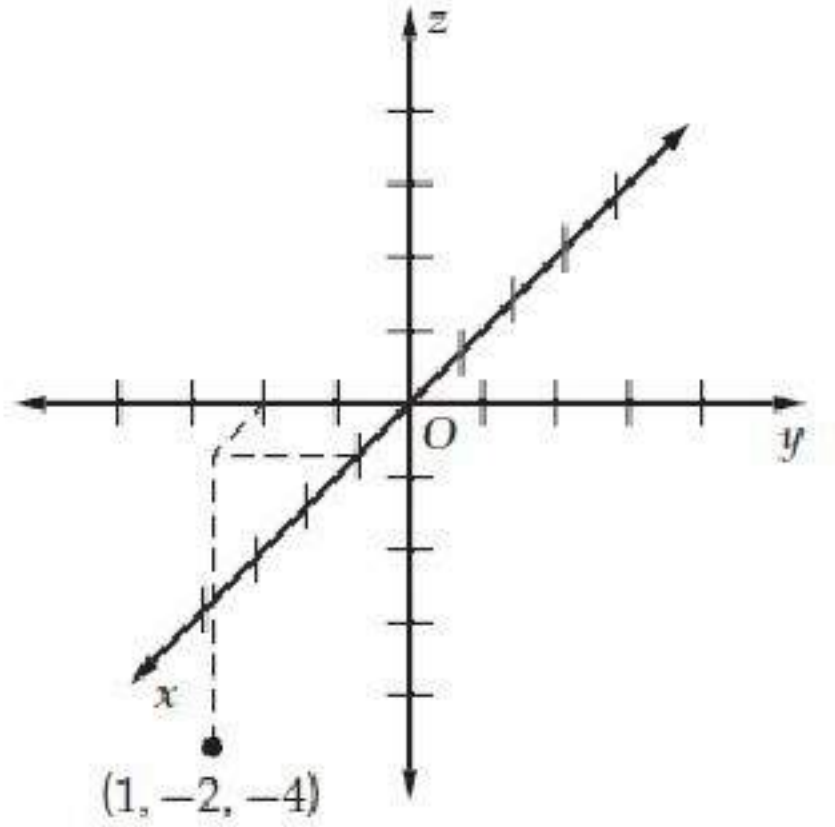
$$\langle 1,9,3\rangle ;\sqrt{91} ;\left\langle \frac{\sqrt{91}}{91},\frac{9\sqrt{91}}{91},\frac{3\sqrt{91}}{91}\right\rangle \text{ (5A}$$

$$\langle 4,-1,2\rangle ;\sqrt{21} ;\left\langle \frac{4\sqrt{21}}{21},\frac{-\sqrt{21}}{21},\frac{2\sqrt{21}}{21}\right\rangle \text{ (5B}$$

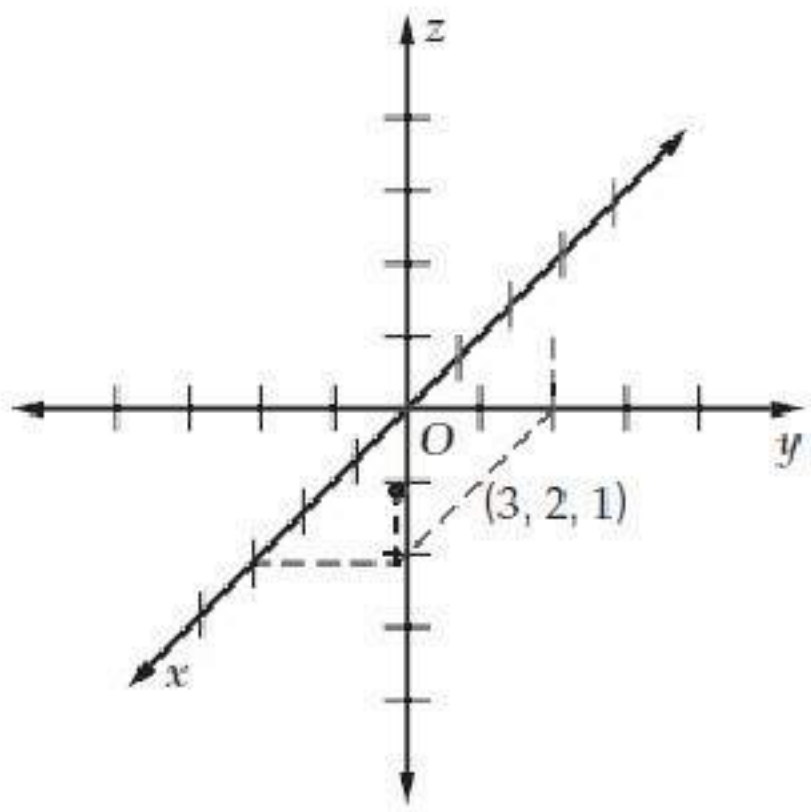
تدرب وحل المسائل:

عين كل نقطة مما يأتي في نظام الحداثيات الثلاثي الأبعاد:

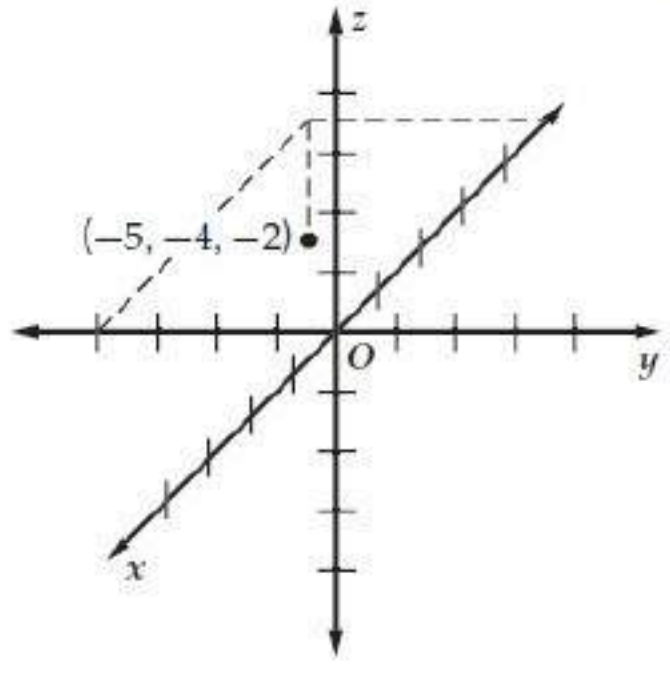
(1



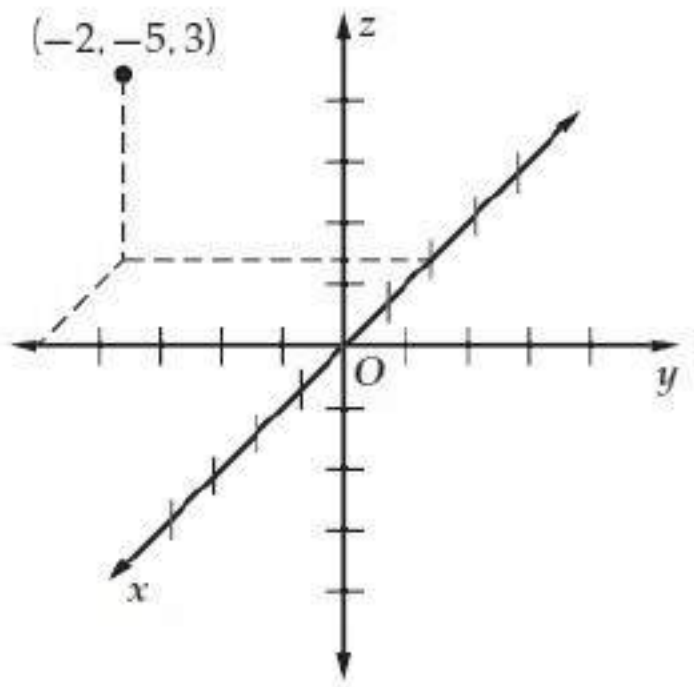
(2



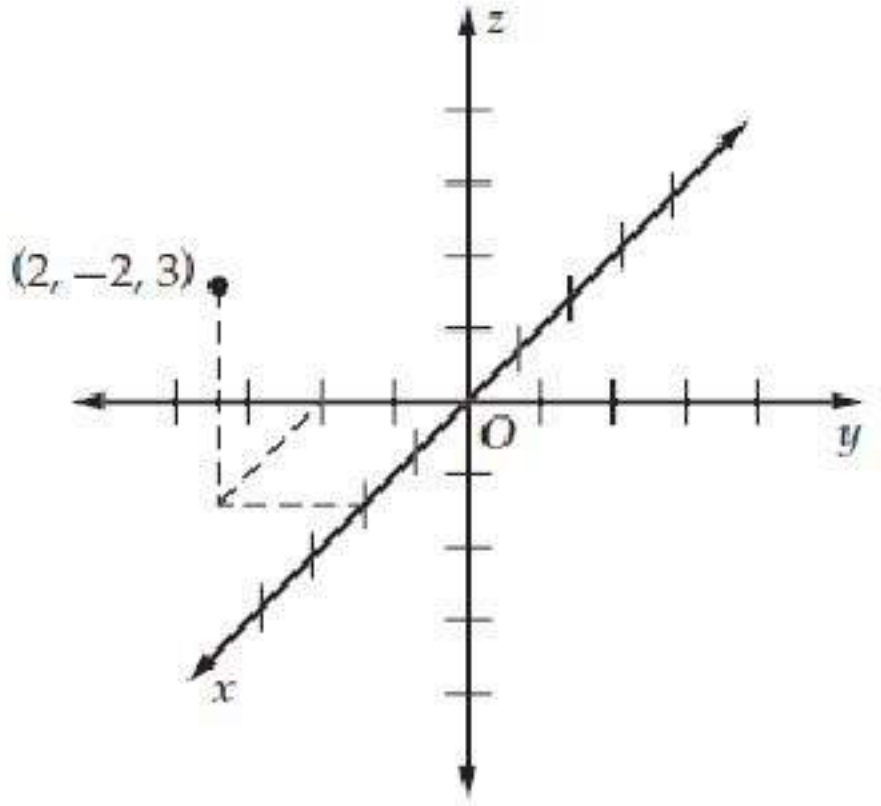
(3



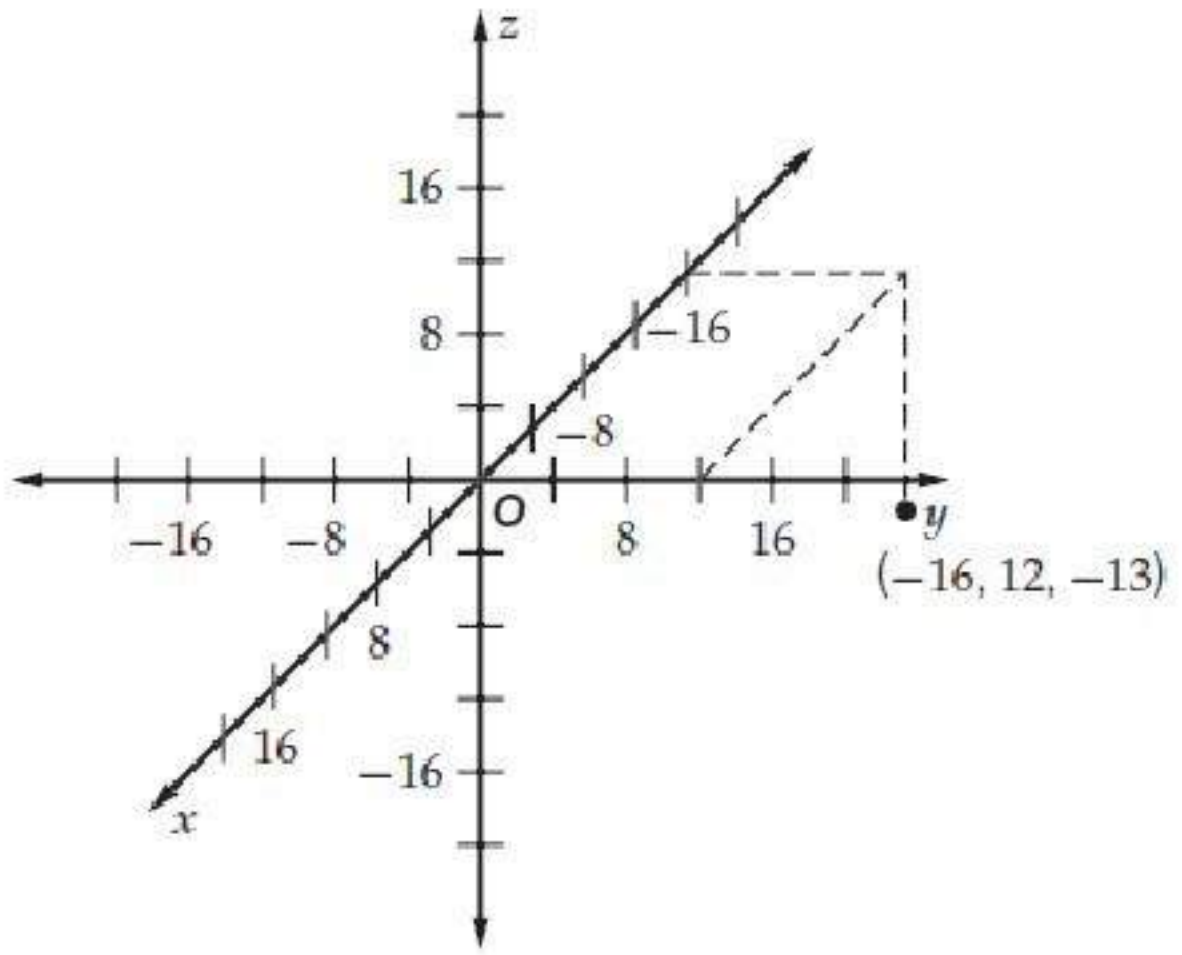
(4



(5



(6



أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كل مما يأتي:

7) $(-3, 5, 13)$, 12.25

8) $(-15, 2, 1)$, 9.90

9) $(2, -2, 9)$, 15.65

10) $(-9, -3, -13)$, 9.11

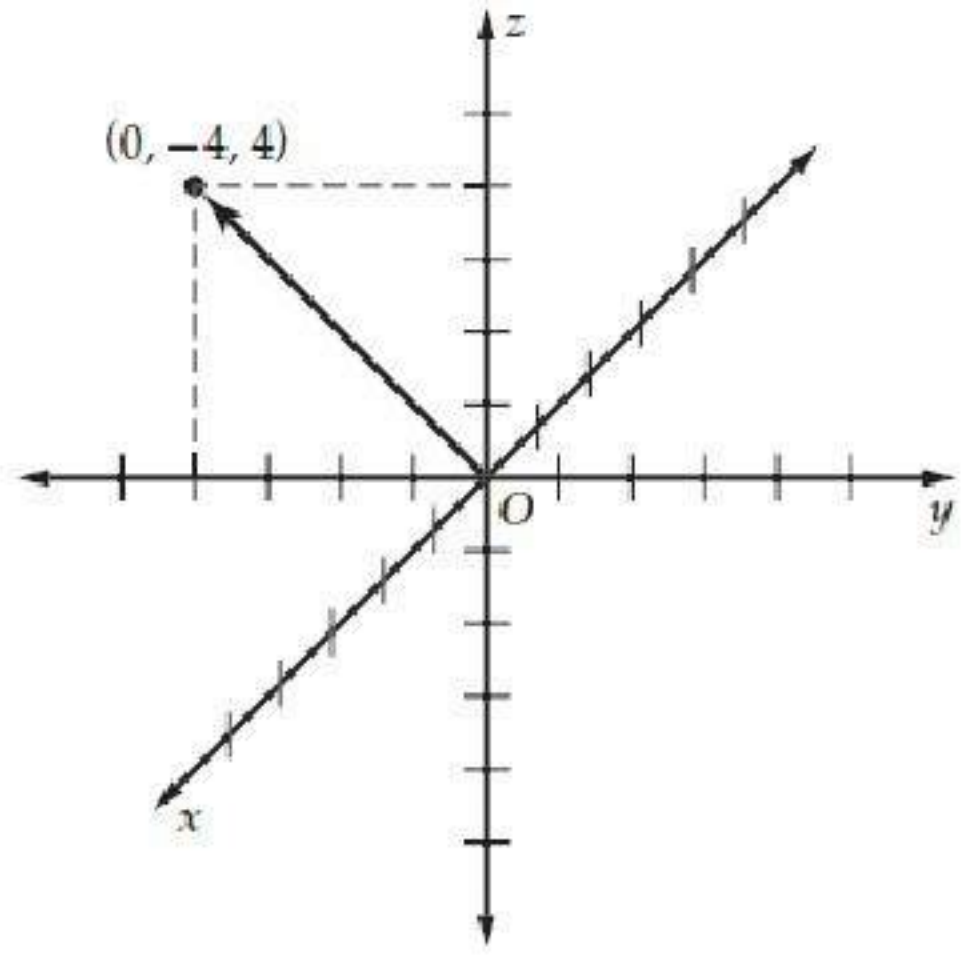
11) طيارون:

a) 3445 ft

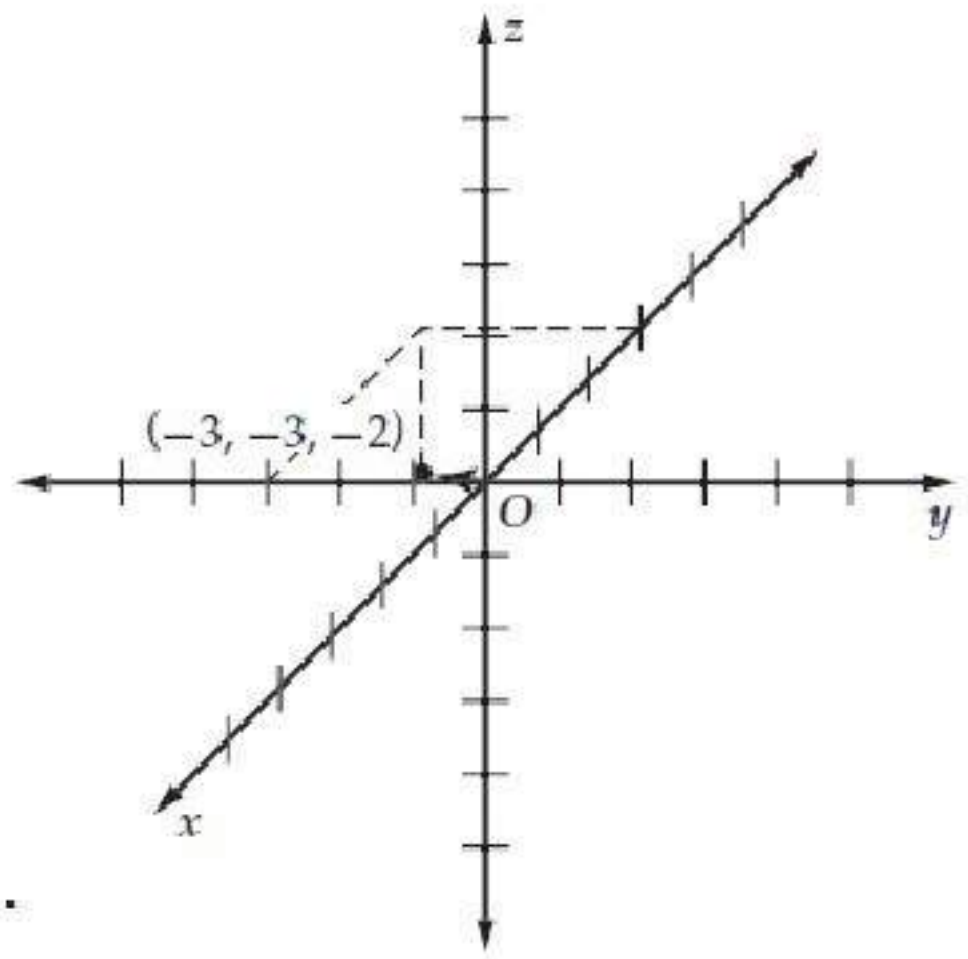
b) (193, 297, 17700)

عين موقع كل من المتجهات الآتية في الفضاء، ثم مثله بيانياً:

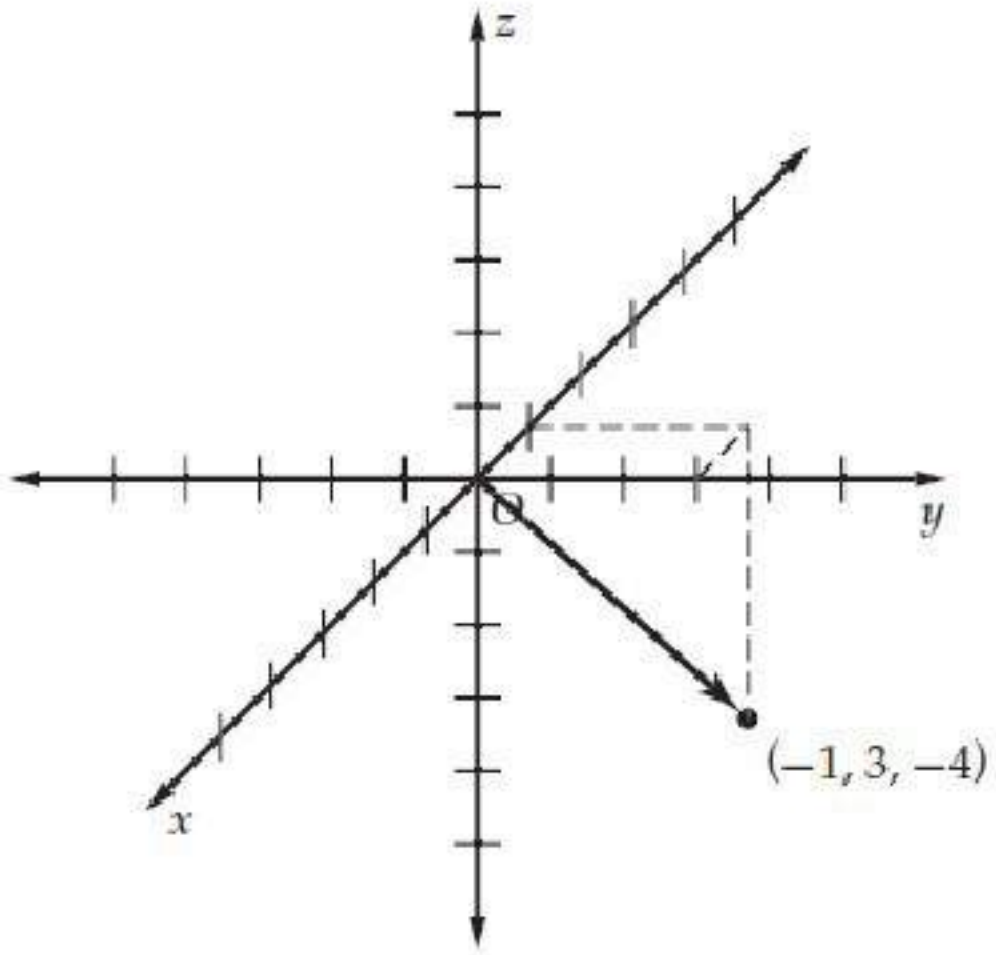
(12



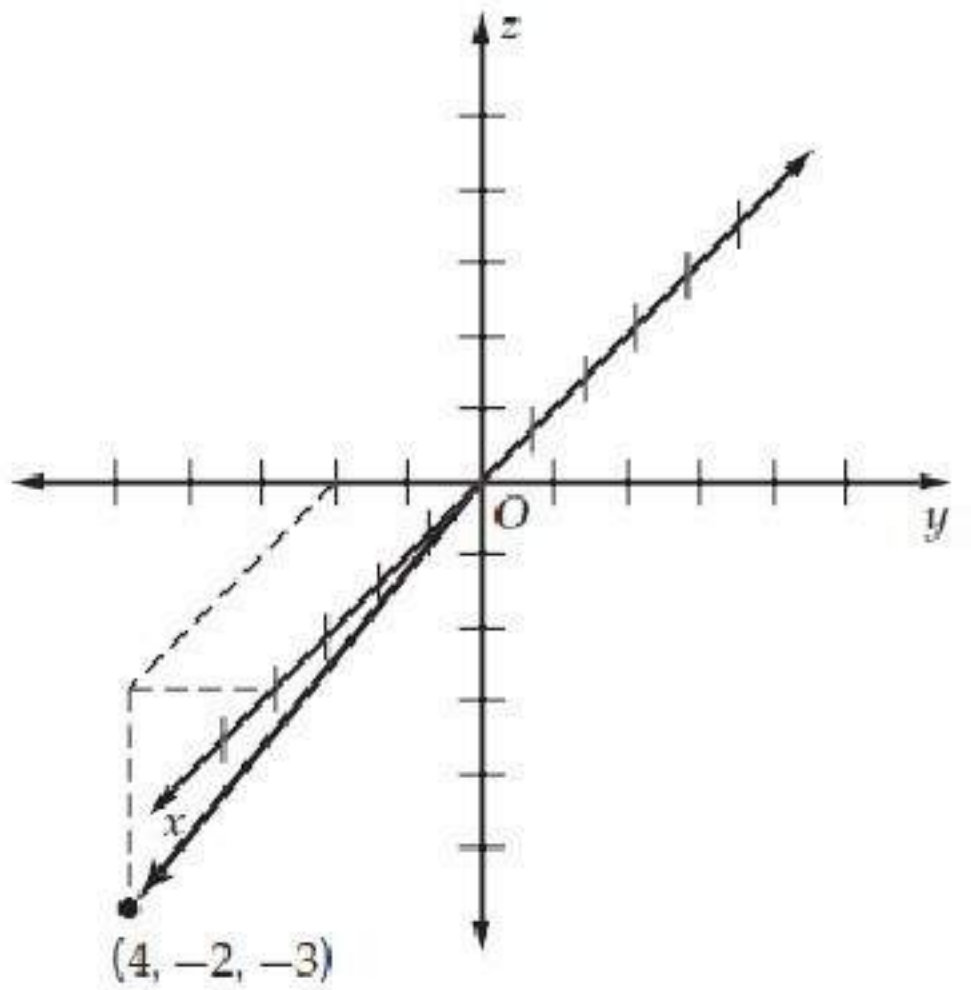
(13



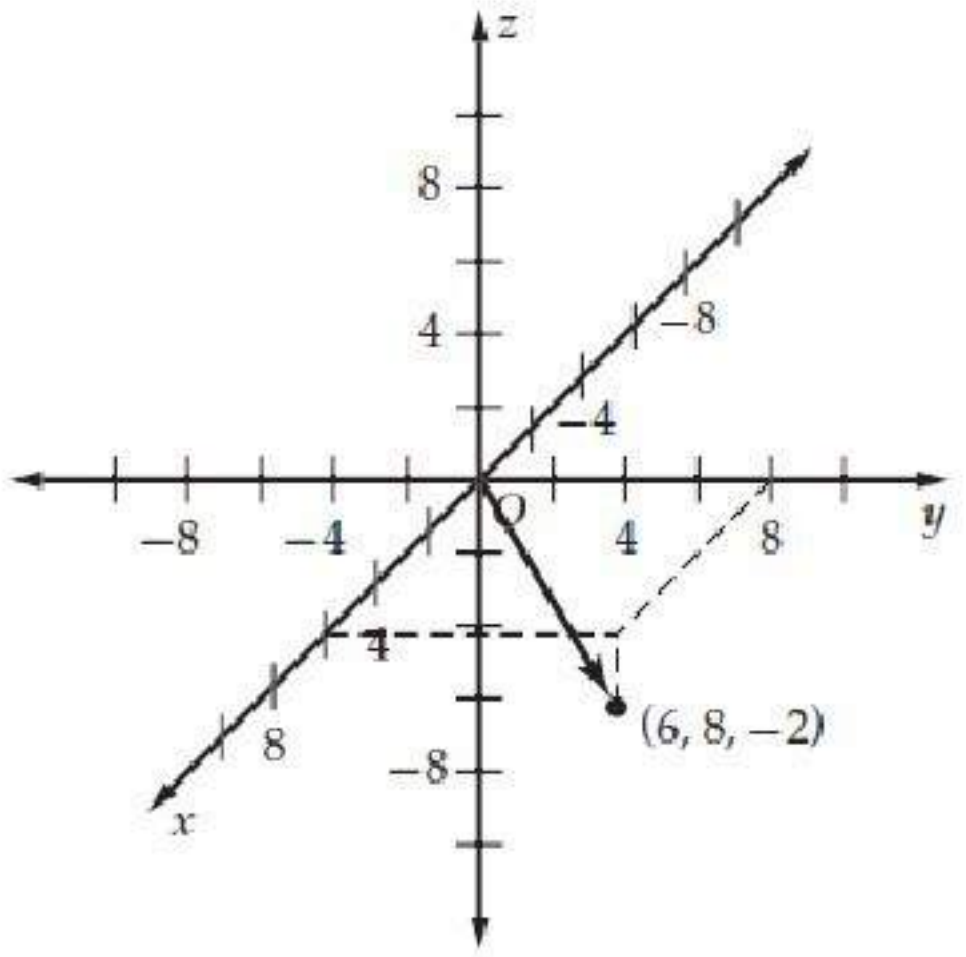
(14



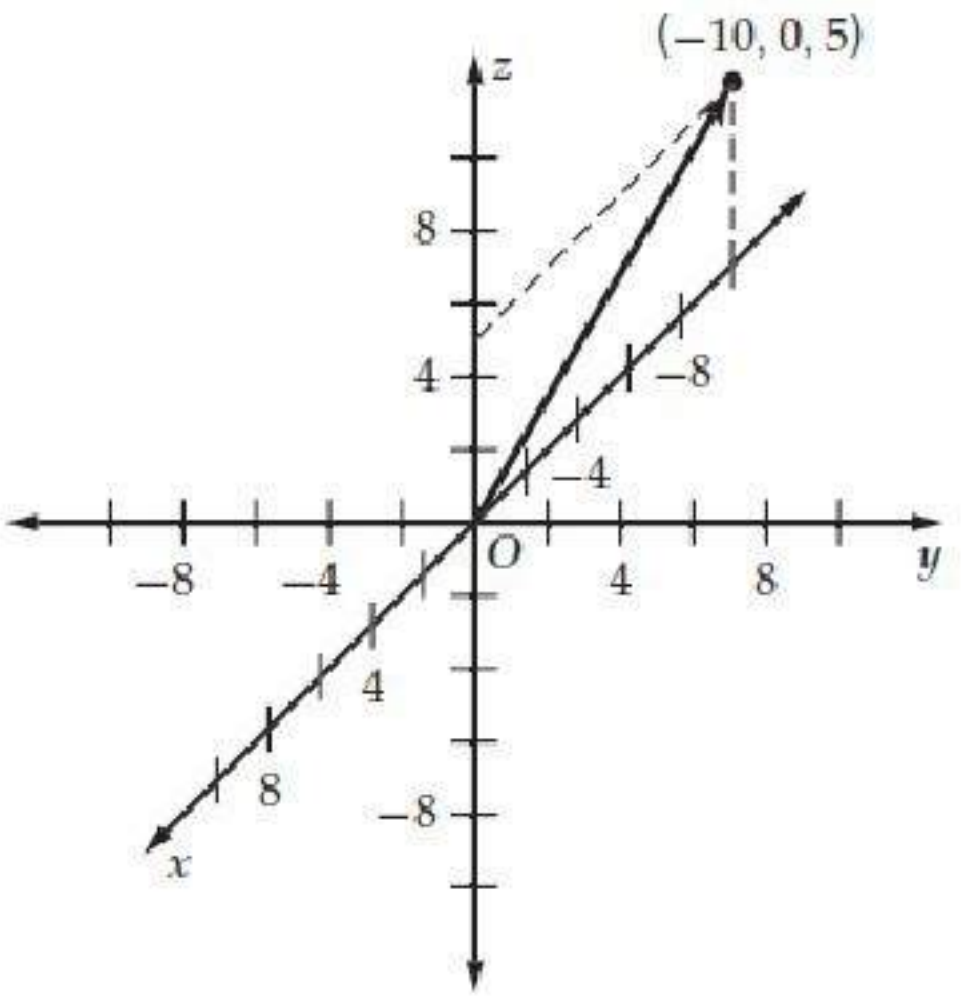
(15



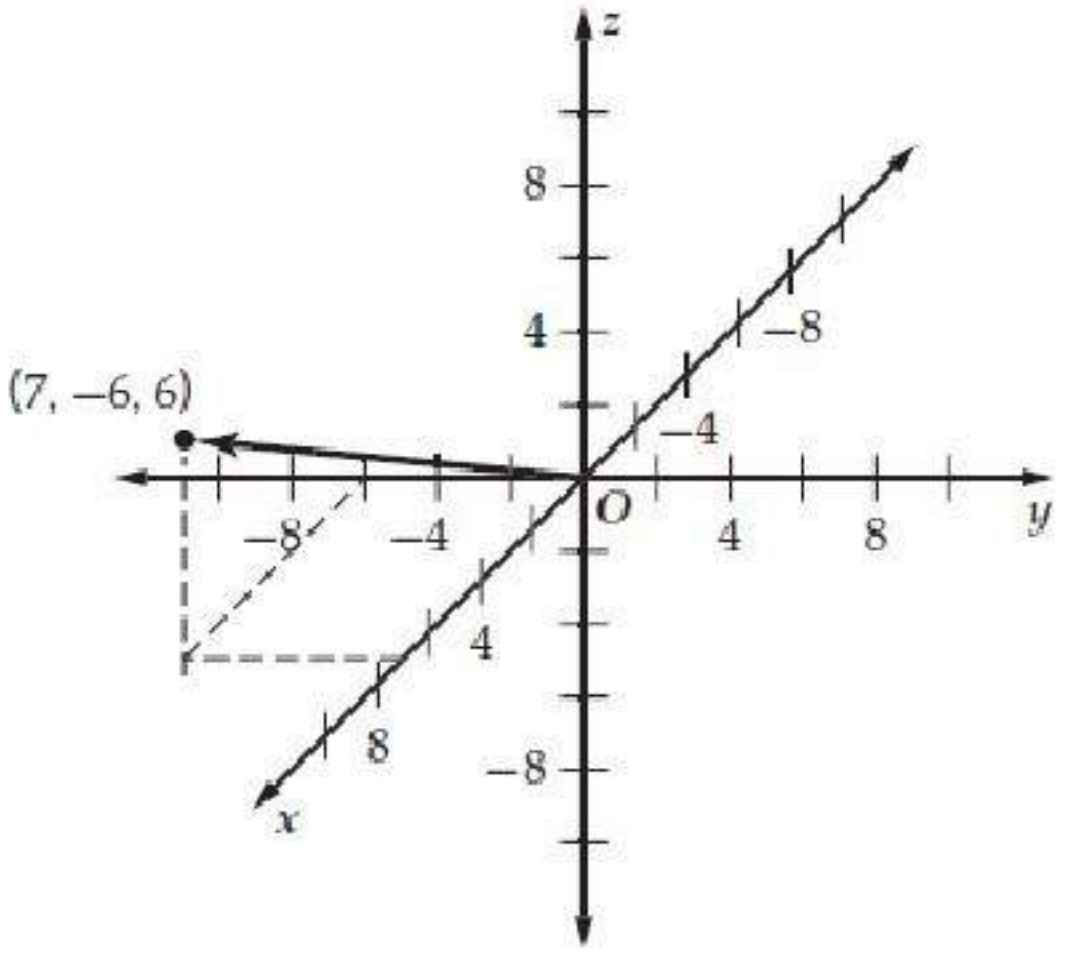
(16



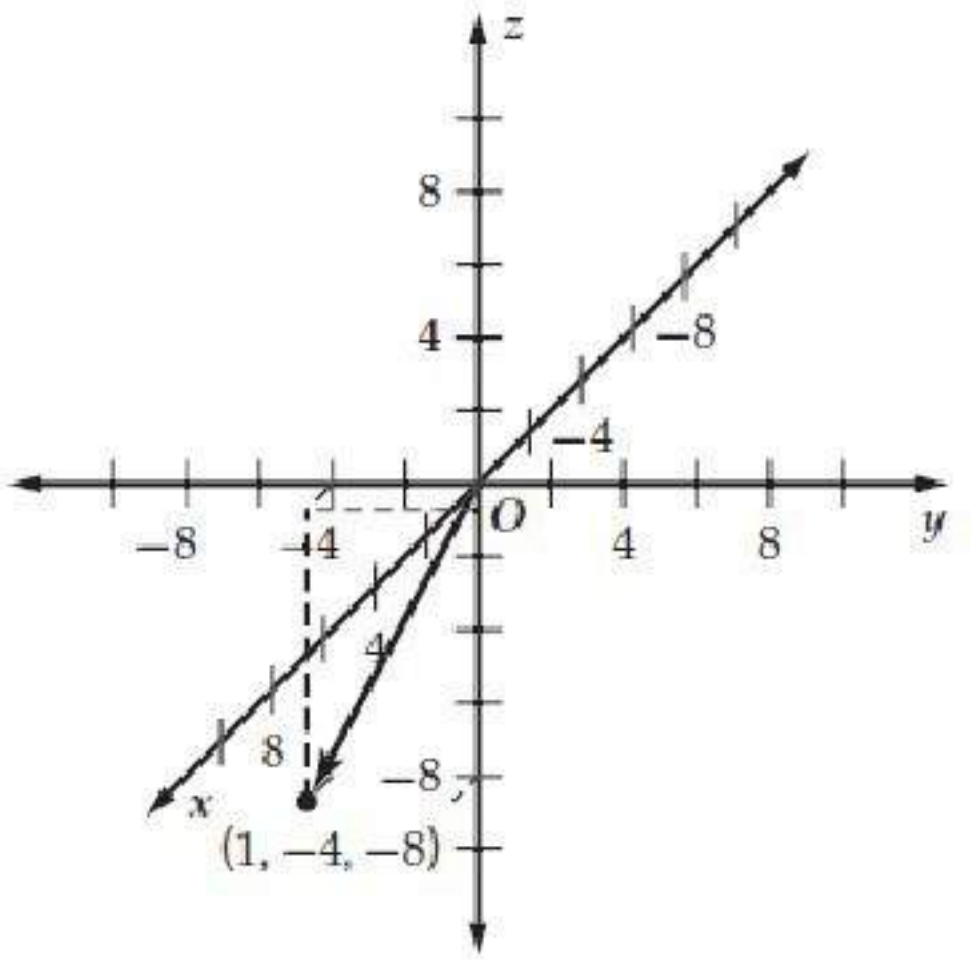
(17



(18



(19



أوجد كلا مما يأتي للمتجهات:

20) (– 88, 6, 99)

21) (– 65, – 18, 56)

22) (38, – 36, – 65)

23) (48, 12, – 38)

24) (– 68, – 24, 55)

25) (22, 36, 3)

أوجد كلا مما يأتي للمتجهات:

26) (– 27, 16, – 21)

27) (– 63, 28, 56)

28) (– 22, 14, – 1)

29) (50, – 18, 10)

30) (– 18, – 6, 6)

31) (– 13, 2, 21)

أوجد الصورة الإحداثية، وطول AB المعطاة بدايته ونهايته، في كل مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه AB:

(32 $\langle 16,2,8\rangle, 18, \left\langle \frac{8}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9} \right\rangle$

(33 $\langle 0,-8,12\rangle, \left\langle 0, -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$

(34 $\langle -3,-5,-10\rangle, \sqrt{134}, \left\langle -\frac{3\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{67} \right\rangle$

(35 $\langle -4,8,20\rangle, 4\sqrt{30}, \left\langle -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right\rangle$

(36 $\langle -1,8,-10\rangle, \sqrt{165}, \left\langle -\frac{\sqrt{165}}{165}, \frac{8\sqrt{165}}{165}, -\frac{2\sqrt{165}}{33} \right\rangle$

(37 $\langle -6,-15,4\rangle, \sqrt{277}, \left\langle -\frac{6\sqrt{277}}{277}, -\frac{15\sqrt{277}}{277}, \frac{4\sqrt{277}}{277} \right\rangle$

(38 $\langle 4,-15,5\rangle, \sqrt{266}, \left\langle -\frac{2\sqrt{266}}{133}, -\frac{15\sqrt{266}}{266}, \frac{5\sqrt{266}}{266} \right\rangle$

(39 $\langle 20,32,42\rangle, 2\sqrt{797}, \left\langle \frac{10\sqrt{797}}{797}, \frac{16\sqrt{797}}{797}, \frac{21\sqrt{797}}{797} \right\rangle$

إذا كانت N منتصف MP فأوجد إحداثيات النقطة P في كل مما يأتي:

(40 $(4, -2, -1)$

(41 $(-3, 6, -1)$

42) $(3, -2, 7)$

43) $(-\frac{11}{2}, -8, 2)$

44) تطوع: 34 ft.

حدد نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط الثلاث في كلٍّ مما يأتي (قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع):

45)

$$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (-1-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$
$$Bc = \sqrt{(1-5)^2 + (3+1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$
$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

بما أن: $AB = Ac \neq Bc$ فالمثلث متطابق الضلعين

46)

$$AB = \sqrt{(4-4)^2 + (6-3)^2 + (4-4)^2} = 3$$
$$Bc = \sqrt{(4-4)^2 + (3-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$
$$Ac = \sqrt{(4-4)^2 + (3-3)^2 + (6-4)^2} = 2$$

بما أن: $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 2^2 + 3^2$ اذن المثلث قائم الزاوية، و بما أن أطوال اضلاعه مختلفة،

إذن فهو مختلف الأضلاع

(47

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (5-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$
$$Bc = \sqrt{(0-2)^2 + (-6-5)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{4+121+25} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$$
$$Ac = \sqrt{(0+1)^2 + (-6-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{1+100+9} = \sqrt{110}$$

بما أن أطوال أضلاع المثلث مختلفة، إذن المثلث مختلف الأضلاع.

48) **كرات**: الكرة هي مجموعة النقاط في الفضاء التي تبعد عن مركز الكرةُ بعداثابتا (نصف القطر) إذن إذا كانت النقطة (z, y, x) نقطة تقع على الكرة التي مركزها (y, k, h) m ، فإنه يجب أن تكون المسافة بين A و M تساوي r

نفترض أن النقطة $A(x, y, z)$ نقطة تقع على الكرة التي مركزها $m(h, k, l)$ نستخدم صيغة المسافة بين نقطتين.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2}$$

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2$$

استعمل الصيغة العامة لمعادة الكرة التي وجدتها في السؤال48، لإيجاد معادلة الكرة المعطى مركزها، وطول نصف قطرها في كل مما يأتي:

(49 $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$

(50 $(x - 6)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = \frac{1}{4}$

$(x-5)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=3$ (51

$x^2+(y-7)^2+(z+1)^2=144$ (52

(0, 3.5, – 4) (53

54) إجابة ممكنة: يمكن استعمال بُعدين أكثر منطقية عند وصف موقع على الخارطة؛ لأن الخارطة نفسها مرسومة ببعدين. ويكون استعمال ثلاثة أبعاد أكثر منطقية عند وصف موقع على الكرة الأرضية؛ لأن للكرة الأرضية أبعاداً ثلاثة.

مراجعة تراكمية

أوجد الصورة الإحداثية وطول $\overline{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

(– 13, – 3), $\sqrt{178}$ = 13.3 (55

(5, 14), $\sqrt{221}$ = 14.9 (56

(6, 18), $\sqrt{360}$ = 19.0 (57

اكتب $\overline{DE}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته بدلالة متجهي الوحدة i,j في كل مما يأتي:

58) $\frac{21}{5}i + -\frac{2}{3}j$

59– $\frac{1}{4}i + \frac{1}{7}j$

60– $15.8i + -6.1j$

تدريب على اختبار:

61) B

1-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

تحقق

1A) 0؛ متعامدان

1B) 4؛ غير متعامدين

2) 124.6°

3A)

$$(u \times v) \cdot u = \langle 9,-21,-6\rangle \cdot \langle 4,2,-1\rangle = 9(4)+(-21)(2)+(-6)(-1) = 36+(-42)+6 = 0$$

$$(u \times v) \cdot v = \langle 9,-21,-6\rangle \cdot \langle 5,1,4\rangle = 9(5)+(-21)(1)+(-6)(4) = 45+(-21)+(-24) = 0$$

3B)

$$(u \times v) \cdot u = \langle -1,-7,3\rangle \cdot \langle -2,-1,-3\rangle = (-1)(-2)+(-7)(-1)+3(-3) = 2+7+(-9) = 0$$

$$(u \times v) \cdot v = \langle -1,-7,3\rangle \cdot \langle 5,1,4\rangle = (-1)(5)+(-7)(1)+3(4) = -5+(-7)+12 = 0$$

4) $\sqrt{545}$ أو حوالي 23.35 وحدة مربعة.

5) 86 وحدة مكعبة.

تدرب وحل المسائل:

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u,v في كل مما يأتي، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أو لا:

1) 0؛ متعامدان

2) 14؛ غير متعامدين

3) 0؛ متعامدان

4) 15 –؛ غير متعامدين

5) 8 –؛ غير متعامدين

6) 0؛ متعامدان

7) كيمياء: 109.5°

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u,v في كل مما يأتي، قرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

8) 88.9°

9) 45.4°

10) 37.5°

11) 152.3°

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u,v في كل مما يأتي، ثم بين ان $u \times v$ عمودي على كل من u,v:

12) (21, 7, 0)

$$(u \times v) \cdot v = \langle 21,7,0 \rangle \cdot \langle 2,-6,-3 \rangle = 21(2) + 7(-6) + 0(-3) = 0$$

$$(u \times v) \cdot u = \langle 21,7,0 \rangle \cdot \langle -1,3,5 \rangle = 21(-1) + 7(3) + 0(5) = 0$$

13) (25, 6, 71)

$$(u \times v) \cdot v = \langle 25,6,71 \rangle \cdot \langle -5,9,1 \rangle = 25(-5) + 6(9) + 71(1) = 0$$

$$(u \times v) \cdot u = \langle 25,6,71 \rangle \cdot \langle 4,7,-2 \rangle = 25(4) + 6(7) + 71(-2) = 0$$

14) (38, 26, 21)

$$(u \times v) \cdot v = \langle 38,26,21 \rangle \cdot \langle 1,5,-8 \rangle = 38(1) + 26(5) + 21(-8) = 0$$

$$(u \times v) \cdot u = \langle 38,26,21 \rangle \cdot \langle 3,-6,2 \rangle = 38(3) + 26(-6) + 21(2) = 0$$

15) (7, 23, 12)

$$(u \times v) \cdot u = \langle 7,23,12 \rangle \cdot \langle -2,-2,5 \rangle = 7(-2) + 23(-2) + 12(5) = 0$$

$$(u \times v) \cdot v = \langle 7,23,12 \rangle \cdot \langle 7,1,-6 \rangle = 7(7) + 23(1) + 12(-6) = 0$$

أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه u,v ضلعان متجاوران في كل مما يأتي:

16) $13\sqrt{9}$ أو 56.7 وحدة مربعة تقريباً.

17) $\sqrt{186}$ أو 13.6 وحدة مربعة تقريباً.

18) $\sqrt{6821}$ أو 82.6 وحدة مربعة تقريباً.

19) $3\sqrt{74}$ أو 25.8 وحدة مربعة تقريباً.

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه t,u,v أحرف متجاورة في كل مما يأتي:

20) 429 وحدة مكعبة

21) 85 وحدة مكعبة

22) 40 وحدة مكعبة

23) 69 وحدة مكعبة

أوجد متجهاً غير صفري يعامد المتجه المعطى في كل مما يأتي:

24) إجابة ممكنة: (4, 3, 3)

25) إجابة ممكنة:(5, 5, 3)

26) إجابة ممكنة:(1, 9, 1)

27) إجابة ممكنة: (– 8, 0, 7)

إذا علم كل من v,u.v فأوجد u في كل مما يأتي:

28) إجابة ممكنة: (3, 4, 2)

29) إجابة ممكنة: (4 ,3 – ,1 –)

30) إجابة ممكنة: (7 – ,1 ,3 –)

حدد مما إذا كانت النقاط المعطاة واقعة على استقامة واحدة:

31) ليست على استقامة واحدة

32) ليست على استقامة واحدة

حدد ما إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أو لا:

33) متوازيان

34) غير متوازيين

35) $\langle 1,4,4\sqrt{3} \rangle$

حدد مما إذا كان الشكل الرباعي ABCD المعطاة إحداثيات رؤوسه متوازي أضلاع، وإذا كان كذلك فأوجد مساحة سطحه، وحدد ما إذا كان مستطيلاً أو لا:

36) ليس متوازي أضلاع

37) متوازي أضلاع؛ 9.4 وحدة مربعة تقريباً؛ مستطيل.

38) عرض جوي:

إجابة ممكنة: لا؛ لأن الزاوية بين المتجهين لا تساوي 0° ولا 180° ، و عليه فالمتجهان غير متوازيين

إذا كان: $u = \langle 3,2,-2 \rangle, v = \langle -4,4,5 \rangle$ ، فأوجد كلا مما يأتي إن أمكن:

39) 0

40) ليس ممكناً، لأن $u \cdot v$ كمية قياسية و ليست متجهاً، و الضرب الاتجاهي يكون لمتجهين

إذا كانت u, w, v تمثِّل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي السطوح في الشكل المجاور، وكان حجمه 7 وحداٍ ت مكعبة، فما قيمة C؟

41) حجم متوازي السطوح يساوي $\left| u \cdot (v \times w) \right|$

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2i + k$$

$$u \cdot (v \times w) = \langle C, -3, 1 \rangle \cdot \langle 2, 0, 1 \rangle$$
$$= 2C + 1$$

$$|2C + 1| = 7$$

إذن $C = 3$ أو $C = -4$

مسائل مهارات التفكير العليا:

42) تبرير: دائماً صحيحة، إجابة ممكنة: الضرب الاتجاهي في الفضاء يعطي متجهاً يعامد كلاً من المتجهين الأصليين.

43) تحد: 2

44) تبرير: إجابة ممكنة: إن تعريف الضرب الاتجاهي للمتجهين a, b هو متجه عمودي على المستوى الذي يحوي كلاً من a, b. وللحصول على متجه عمودي على مستوى ثنائي الأبعاد تحتاج لبعد ثالث.

45) اكتب: إجابة ممكنة: للتحقق من توازي أو تعامد متجهين، يمكنك استعمال قاعدة حساب الزاوية بين متجهين، إذا كان قياس الزاوية 0° أو 180° ، يكونان متوازيين، وإذا كان قياسها 90° يكونان متعامدين. يمكنك كذلك إيجاد الصورة الإحداثية للمتجهين واستعمال النسب بين الإحداثيات المتناظرة للتحقق مما إذا كان المتجهان متوازيين، إذا كانت النسب بين الإحداثيات الثلاثة المتناظرة في الصيغة المركبة نفسها، يكون المتجهان متوازيين، ولا يمكن استعمال هذه الطريقة إذا كان المتجهان متعامدين. وللتحقق من تعامد متجهين يمكنك إيجاد الضرب الداخلي بينهما، فإذا كان الناتج صفراً يكون المتجهان متعامدين، لا يمكن استعمال طريقة الضرب الداخلي هذه للتحقق من التوازي.

مراجعة تراكمية

أوجد طول كل قطعة مستقيمة مما يأتي، والمعطاة نقطتا طرفيها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها:

46) $\left(-\frac{1}{2}\ ,16,\frac{7}{2}\right)$; 22.67

47) $\left(\frac{33}{2}\ ,9,-\frac{37}{2}\right)$; 23.71

48) $\left(-6\ ,17\ ,-\frac{7}{2}\right)$; 36.62

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين v,u في كل مما يأتي ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا:

49) 22 –؛ ليسا متعامدين

50) 58 –؛ ليسا متعامدين

51) 33 –؛ ليسا متعامدين

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية، مستعملاً قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع ثم حدد إتجاهها بالنسبة للأفقي:

52) 3 cm, 45°

53) 0.5 cm, 60°

تدريب على اختبار:

D (54

A (55

دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك:

حدد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) خطأ؛ ينتهي عنده

2) خطأ؛ $4(3) + 1(2) -$

3) صحيحة

4) خطأ؛ الصورة الإحداثية للمتجه

5) صحيحة

6) خطأ؛ 90°

7) صحيحة

8) صحيحة

9) خطأ؛ $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

مراجعة الدروس:

1-1: مقدمة في المتجهات:

حدد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كل مما يأتي:

10) كمية متجهة

11) كمية قياسية

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملا المسطرة والمنقلة:

12) 6.3 cm, 11°

13) 1.2 cm, 130°

14) 2.8 cm, 297°

15) 4.8 cm, 195°

16) 80 m للشرق

17) 20 N للخلف

2–1: المتجهات في المستوى الإحداثي:

أوجد الصورة الإحداثية وطول AB المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

18) $(6, 1)$; $\sqrt{37} \approx 6.1$

19) $(-16, 8)$; $\sqrt{320} = 8\sqrt{5} \approx 17.9$

20) $(14, 5)$; $\sqrt{221} \approx 14.9$

21) $(1, 5)$; $\sqrt{26} \approx 5.1$

إذا كان $t = \langle -4,2 \rangle, q = \langle -2,-3 \rangle, p = \langle 4,0 \rangle$ فأوجد كلا مما يأتي:

22) $(-8, -6)$

23) $(-4, 4)$

24) $(-18, -1)$

25) $(10, 11)$

أوجد متجه وحدة u باتجاه v في كل مما يأتي:

26) $\left\langle -\frac{7\sqrt{53}}{53}, \frac{2\sqrt{53}}{53} \right\rangle$

27) $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

$$\left\langle -\frac{5\sqrt{89}}{89}, \frac{8\sqrt{89}}{89} \right\rangle \quad (28$$

$$\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle \quad (29$$

3–1: الضرب الداخلي:

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u},\mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا:

30) 1 –؛ غير متعامدين

31) 48؛ غير متعامدين

32) 0؛ متعامدان

33) 7؛ غير متعامدين

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u},\mathbf{v}$ في كل مما يأتي:

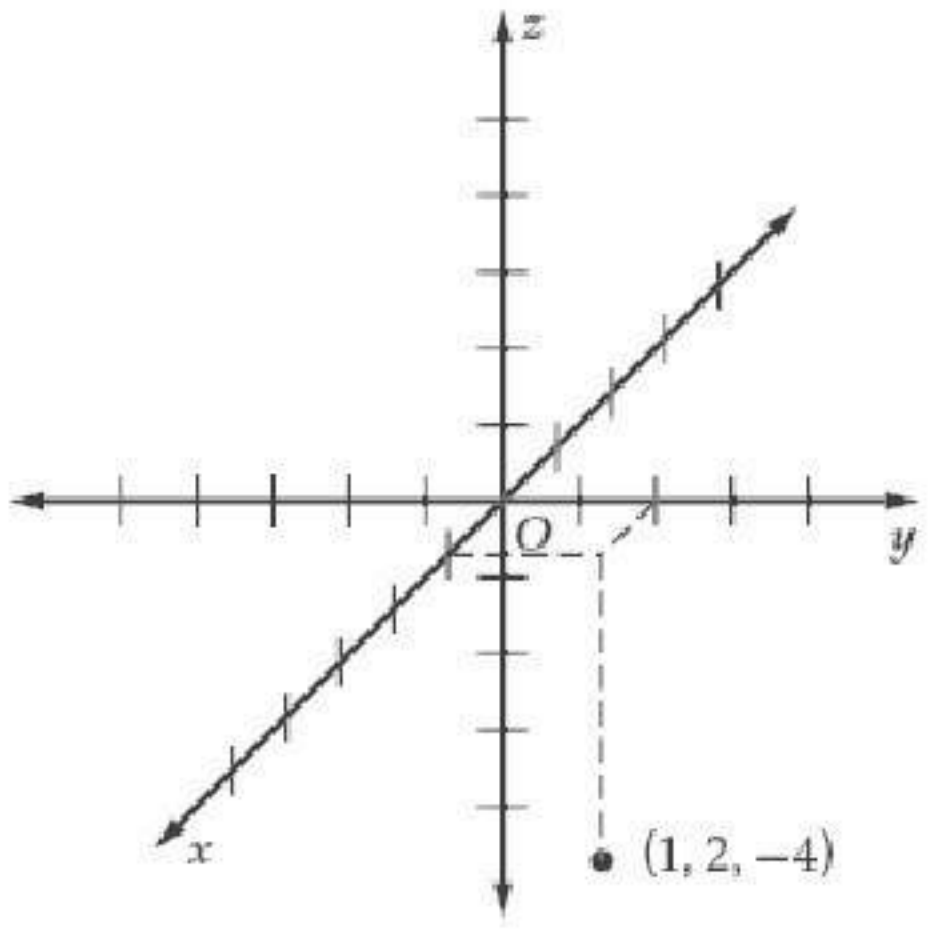
34) 135°

35) 70.6°

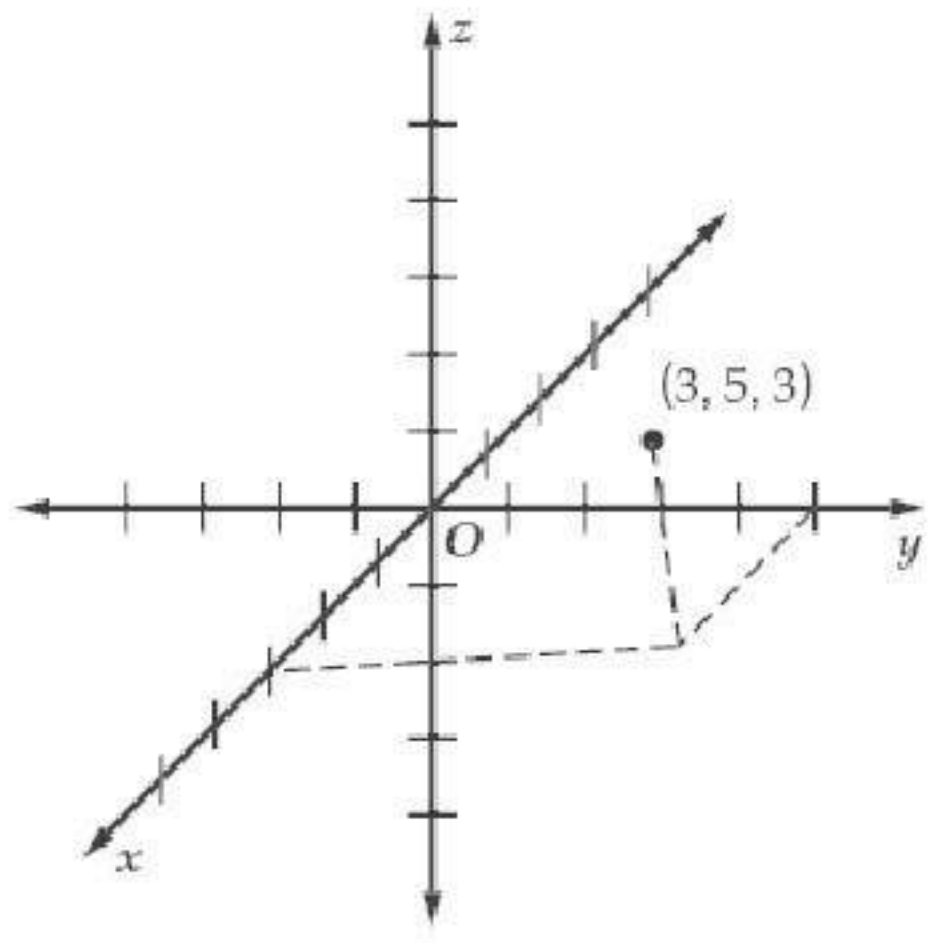
41–: المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد:

عين كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد:

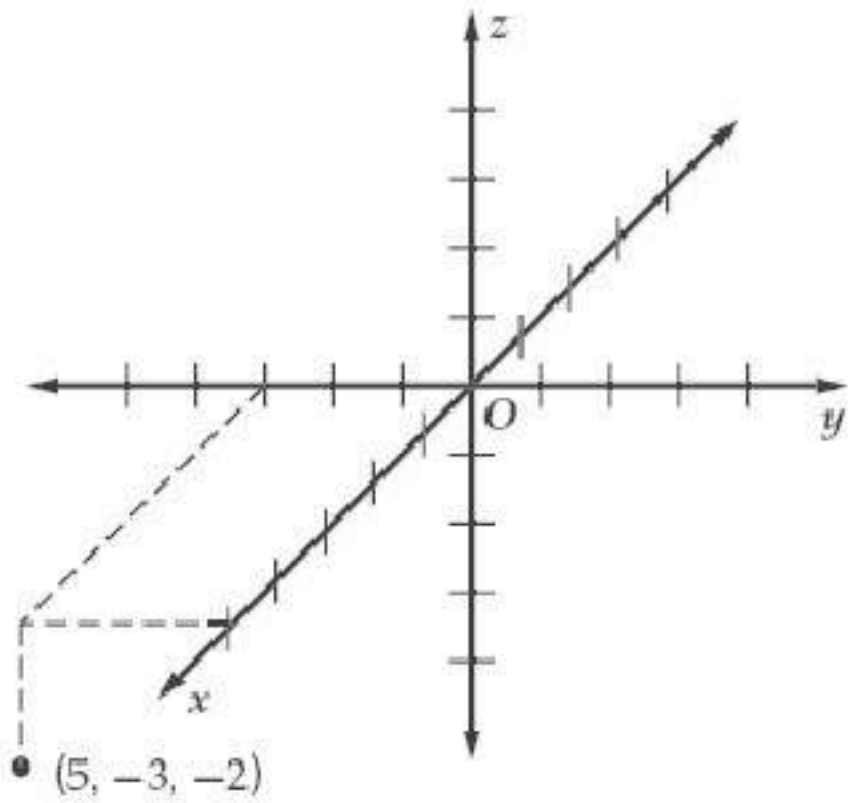
(36



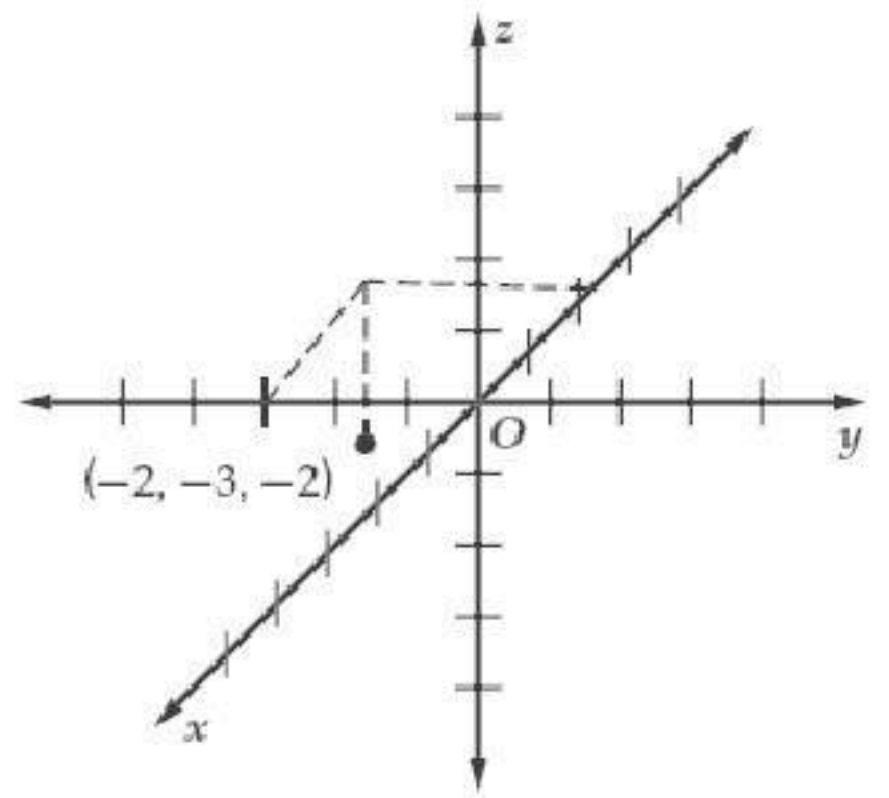
(37



(38



(39



أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا طرفيها في كل مما يأتي، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها:

(40 (– 1, 5, 6); 12.33

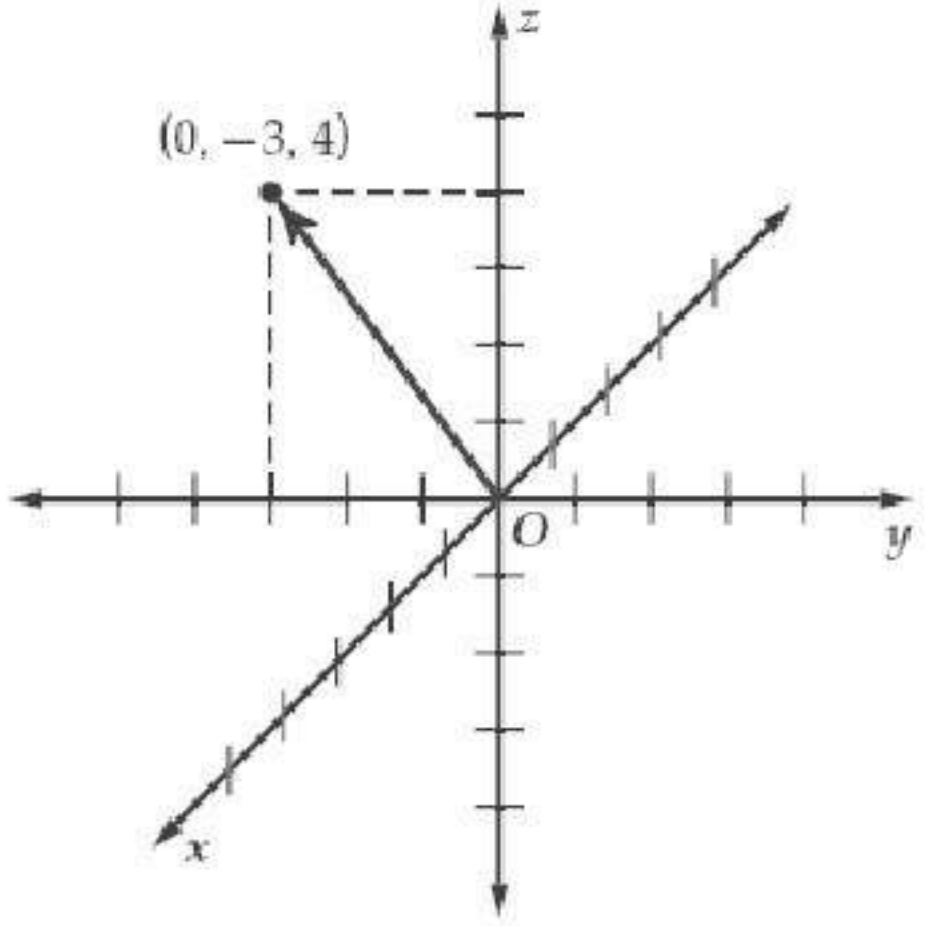
(41 (– 7, 2, 1); 10.77

(42 17.44; (– 3, – 4, 2)

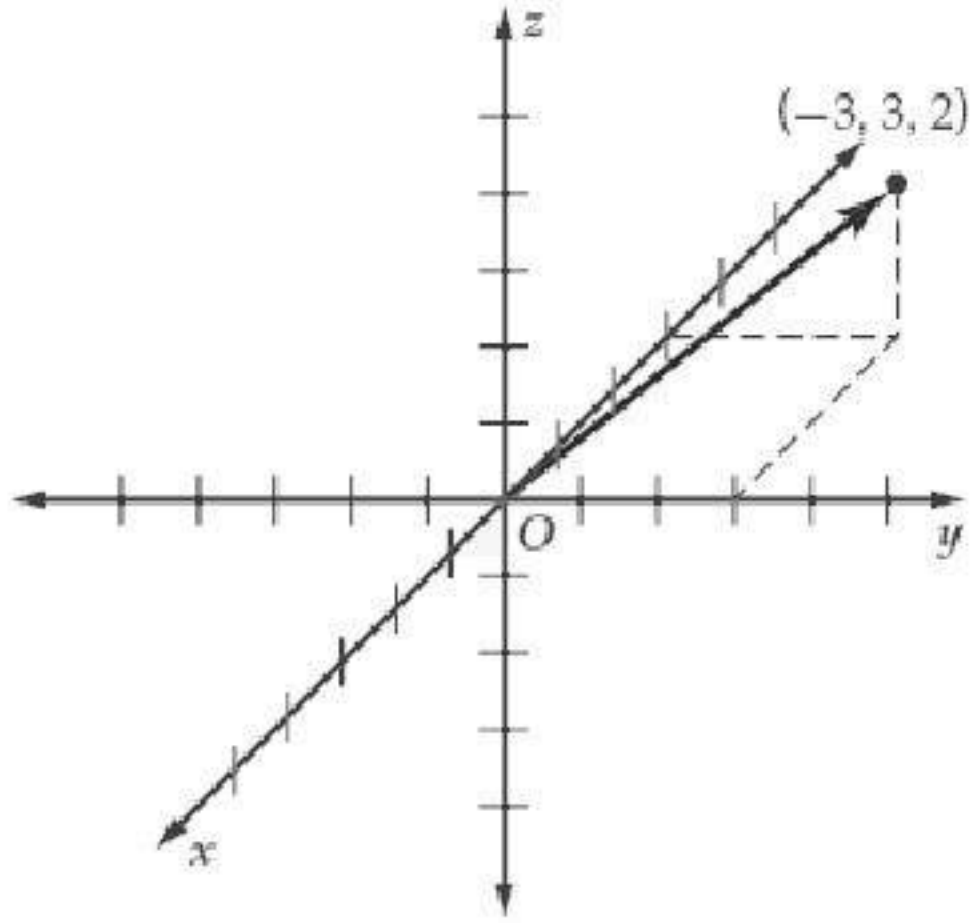
(43 15.52; (2, – 1.5, 4)

مثل بيانياً كلاً من المتجهات الآتية في الفضاء:

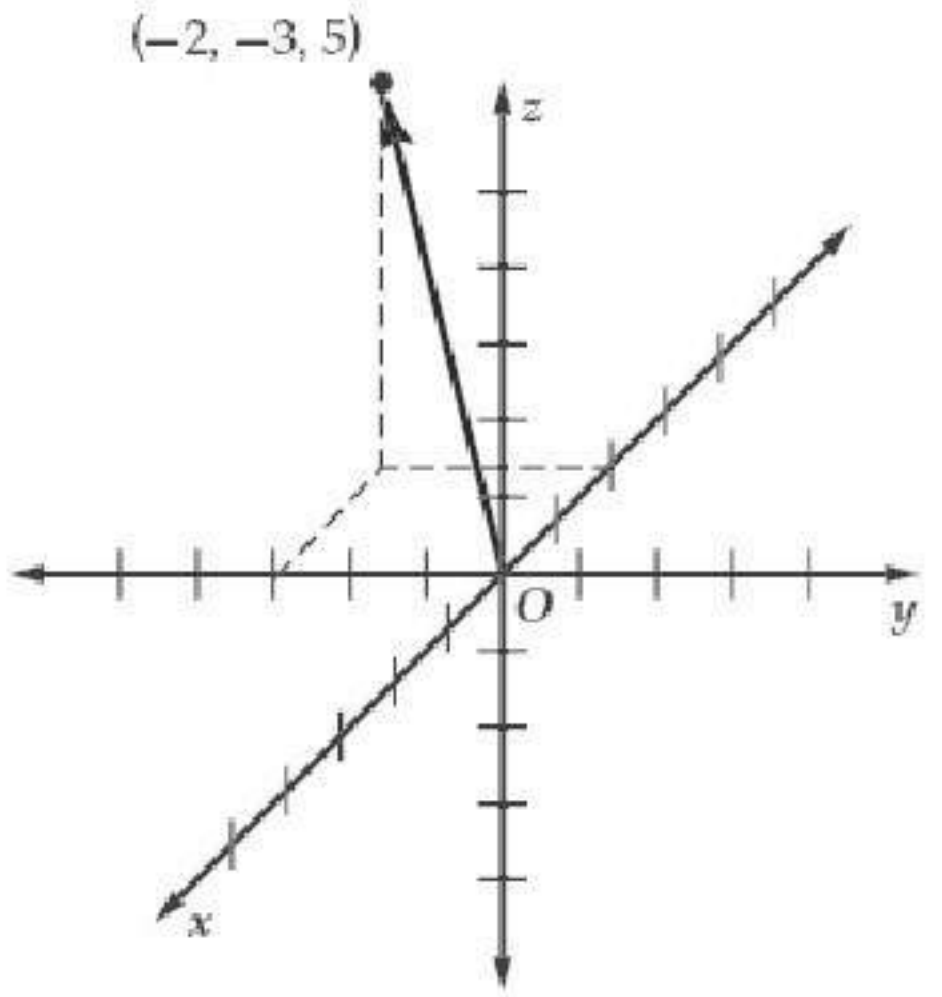
(44



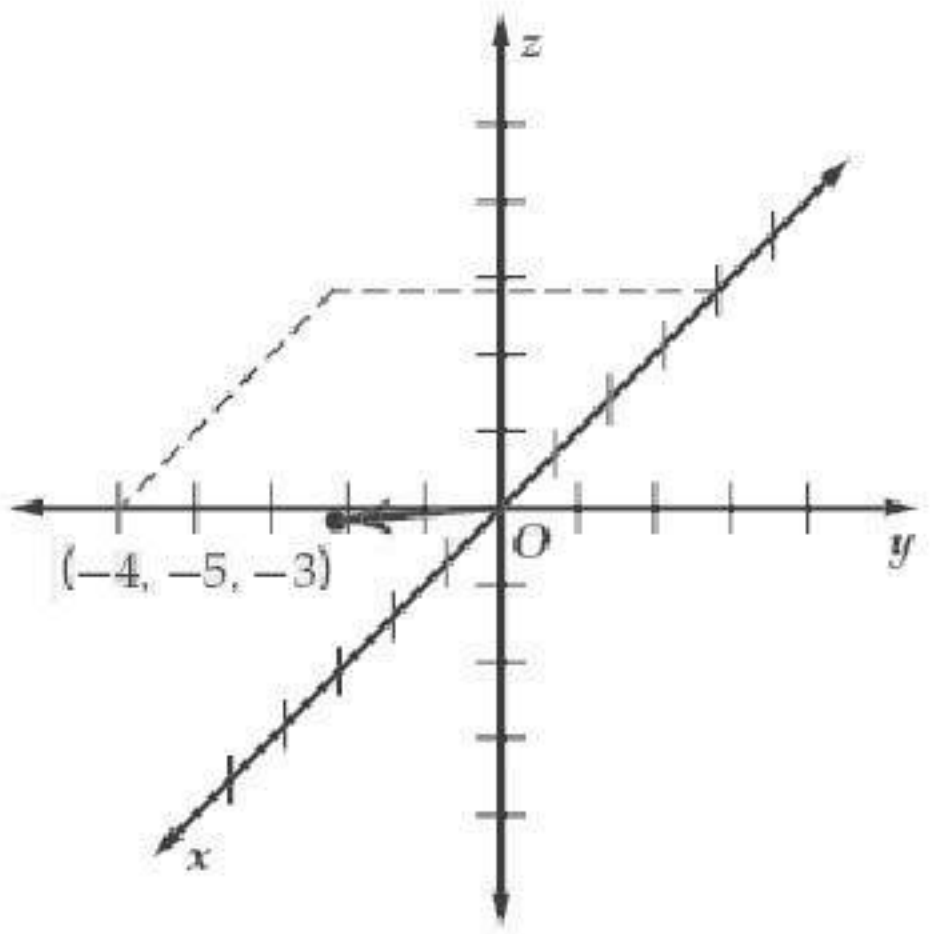
(45



(46



(47



5–1: الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء:

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u,v في كل مما يأتي، ثم حدد مما إذا كانا متعامدين أو لا:

48) 0؛ متعامدان

49) 48 –؛ غير متعامدين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u,v في كل مما يأتي ، ثم بين أن u×v يعامد كلا من u,v:

$$(17,-1,10),\ (17,-1,10)\cdot(1,-3,-2)=0 \quad (50$$

$$,\ (17,-1,10)\cdot(2,4,-3)=0$$

$$(-9,-6,-21),\ (-9,-6,-21)\cdot(4,1,-2)=0 \quad (51$$

$$,\ (-9,-6,-21)\cdot(5,-4,-1)=0$$

تطبيقات ومسائل:

52) كرة قدم: 49.8 ft/s تقريباً، 23.2 ft/s تقريباً

53) طيران: (108.3, – 19.1)

54) صناديق: 509J

55) أقمار اصطناعية:

a) 118598 mi تقريباً

b) (– 1494, 1621.5, 2294.5)

c) إجابة ممكنة: لا يمكن وجود قمر ثالث؛ لأن إحداثياته ستكون داخل الأرض؛ و ذلك لان القيمة المطلقة لجميع احداثيات موقع القمر الثالث أقل من نصف قطر الأرض

56) $\langle 3,0,0\rangle \cdot \left(\langle 0,4,0\rangle \cdot \langle 0,0,5\rangle\right) = 60\,\mathrm{m}^3$

اختبار الفصل

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، او قاعدة متوازي الأضلاع. قرب المحصلة إلىأقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملاً المسطرة والمنقلة:

1) $0.8\text{ cm}, 25^\circ$

2) $4.6\text{ cm}, 8^\circ$ تقريباً

أوجد الصورة الإحداثية وطول AB المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

3) $(-6, 4), \sqrt{52} \approx 7.2$

4) $\left\langle \frac{-3}{2}, \frac{11}{2} \right\rangle, \sqrt{32.5} \approx 5.7$

5) كرة قدم: 33.7 m/s ; 22° تقريباً

أوجد متجه وحدة باتجاه u في كل مما يأتي:

6) $\left(\frac{-\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17} \right)$

7) $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}\right)$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u,v في كل مما يأتي ثم بين ما إذا كانا متعامدين أو لا:

8) 16 –؛ غير متعامدين

9) 0؛ متعامدان

10) 14 –؛ غير متعامدين

11) D

إذا كان c=(8 , 5 , –9) , b=(–5 , –7 , 1) , a=(2,4,–3) فأوجد كلا مما يأتي:

12) (– 45, – 42, 26)

13) (– 1, – 21, 1)

14) بالونات الهواء الساخن:

a) 53.9 ft

b) $\left(-\frac{9}{2}, 20, 20\right)$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u,v في كل مما يأتي:

15) 27.9°

16) 110.8°

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u,v في كل مما يأتي ثم بين أن u×v يعامد كلا من u,v:

17) (65, 16, – 59), (1, 7, 3)

$(65, 16, -59)\cdot(1, 7, 3) = 65\,(1) + 16\,(7) + (-59)\,(3) = 0$

$(65, 16, -59)\cdot(9, 4, 11) = 65\,(9) + 16\,(4) + (-59)\,(11) = 0$

المتجه $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ يعامد كلا من المتجهين $\mathbf{u},\mathbf{v}$

18) $-7i - 17j + 8k$,

$(-7, -17, 8)\cdot(-6, 2, -1) = (-7)\,(-6) + (-17)\,(2) + 8\,(-1) = 0$

$(-7, -17, 8)\cdot(5, -3, -2) = (-7)\,(5) + (-17)\,(-3) + 8\,(-2) = 0$

المتجه $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ يعامد كلا من المتجهين $\mathbf{u},\mathbf{v}$