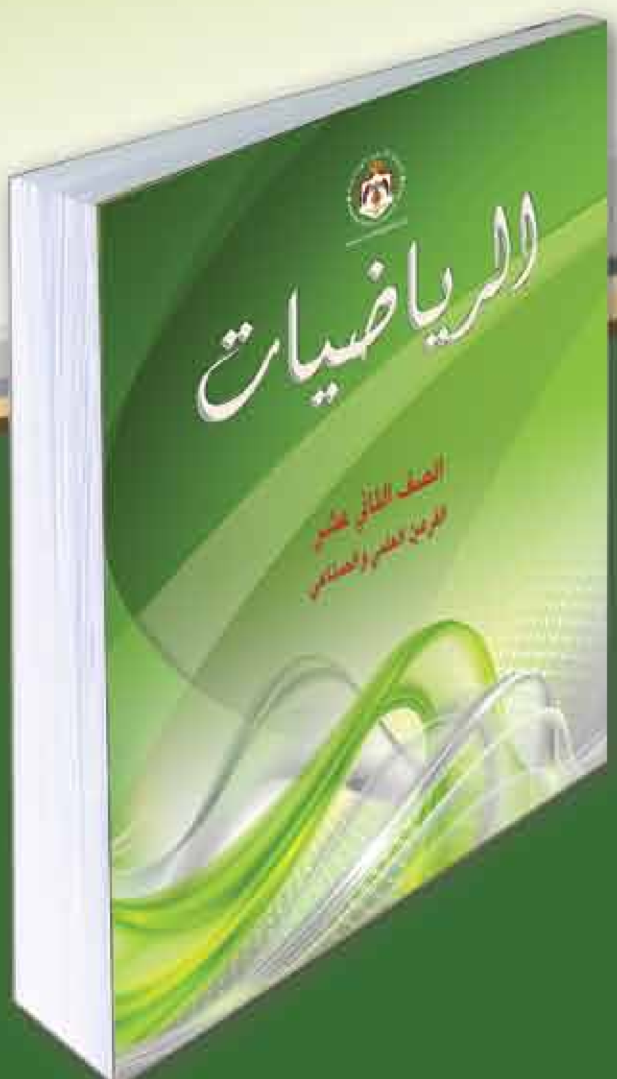
المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

دليل المعلم

الرياضيات



الصف الثاني عشر

الفرعان: العلمي، والصناعي

دليل المعلم/ الرياضيات

الصف الثاني عشر

الفرعان: العلمي والصناعي

الطبعة الأولى ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

ISBN : 978-9957-84-853-8
9 789957 848538

إدارة المناهج والكتب المدرسية

دليل المعلم

الرياضيات

الصف الثاني عشر

الفرعان العلمي، والصناعي

الناشر
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الدليل عن طريق العناوين الآتية:
هاتف: ٤٦١٧٣٠٤/٥٠٨ فاكس: ٤٦٣٧٥٦٩ ص.ب (١٩٣٠) الرمز البريدي: ١١١١٨
أو بوساطة البريد الإلكتروني: E-mail: scientific.division@moe.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم استخدام هذا الدليل في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم (٦٤/ ٢٠١٨) تاريخ ٢٥/٩/٢٠١٨م بدءًا من العام الدراسي ٢٠١٩م/٢٠٢٠م.

عمّان – الأردن / ص . ب ١٩٣٠

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(٢٠١٨/١٠/٥٥٣٦)
ISBN: 978-9957-84-853-8

اللجنة الفنية المتخصصة للإشراف على تأليف الدليل

أ. د. حسن زارع هديب
د. معاذ محمود الشياب
د. خولة صالح أبو الهيجاء
نفين أحمد جوهر

وقام بتأليفه كل من:

د. لانا كمال عرفة
إبراهيم أحمد عمايرة
د. يوسف محمد صبح
د. حسين عسكر الشرفات
د. أكرم عواد الديات
أمل حسني الخطيب

التحرير العلمي: نفين أحمد جوهر

التحرير اللغوي : ميساء عمر الساريسي
التحرير الفني : أنس خليل الجرابعة
التصميم : عمر أحمد أبوعليان
الرسم : فايزة فايز حداد

الإنتاج : سليمان أحمد الخلايلة

دقّق الطباعة : د. لانا كمال عرفة
راجعها : نفين أحمد جوهر

الطبعة الأولى
١٤٤٠هـ / ٢٠١٩م

قائمة المحتويات

الموضوع | الصفحة

الفصل الدراسي الأول

الموضوع	الصفحة

الفصل الدراسي الثاني

الموضوع	الصفحة

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على رسوله الأمين، وعلى آله وصحبه أجمعين.

أخي المعلم/أختي المعلمة،

يسرنا أن نقدم دليل المعلم إلى كتاب الرياضيات للصف الثاني عشر العلمي والصناعي، آملين أن يكون مرشدًا لكم في تدريس المفاهيم والمهارات الرياضية المتضمنة في الكتاب المدرسي، وداعمًا في تقويم تعلم الطلبة؛ بما يحقق النتاجات التعلمية المطلوبة منه.

ولعل من الأسس المهمة التي بني عليها هذا الدليل أنه أحد الركائز لتحقيق المنهاج، آملين أن يكون مرشدًا وموردًا في تخطيط الدروس بما يتلاءم ومستويات الطلبة والبيئة الصفية وأهداف المبحث، كما نأمل تحقيق التكامل بين النظرية والتطبيق؛ حيث ارتبط هذا الدليل بالمفاهيم الواردة في كتاب الطالب على نحو مباشر وبالنتاجات التعليمية واستراتيجيات التدريس والتقويم، التي تنسجم وأهداف المنهج، ومعاييره (NCTM، 2000) العالمية للرياضيات للمحتويات والعمليات التي روعيت في أثناء إعداد الكتاب وتأليفه، إضافة إلى اهتمامه بتفعيل دور تكنولوجيا المعلومات والاتصالات بوصفها أداة لتفعيل التعلم الإيجابي تنفيذًا وتقويمًا، كذلك روعي توضيح الخطوات الرئيسة في أثناء تنفيذ خطة الدرس، وهي:

التمهيد للدرس، ثم إجراءات تنفيذه، ومن ثم ختم الدرس.

ونحن إذ نضع هذا الدليل بين يديك، فإننا نقدم لك أمثلة واجتهادات تركز على أهمية استيعاب المفاهيم أولًا قبل الانطلاق إلى الإجراءات والخوازميات اللازمة للحلول، ولا نتوقع منك الوقوف عندها فحسب، بل أن تعدّها منطلقًا لتنمية خبرتك وإبراز قدراتك الإبداعية في وضع البدائل والأنشطة المتنوعة، وإضافة الجديد بما يخدم المحتوى، وبناء أدوات تقويم بمعايير جديدة تستطيع عن طريقها تقويم تعلم طلبتك على نحو فعّال.

والله ولي التوفيق

إرشادات التعامل مع الدليل

نتاجات التعلم

نتاجات خاصة يتوقع أن يحققها الطلبة بعد انتهاء التعلم والتعليم، وتتميز بشموليتها وتنوعها (معارف، ومهارات، واتجاهات)، وتعدّ مرجعًا للمعلم، إذ يبنى عليها المحتوى، وهي الركيزة الأساسية للمنهاج، وتسهم في تصميم نماذج المواقف التعلمية المناسبة، وفي اختيار استراتيجيات التدريس، وبناء أدوات التقويم المناسبة لها.

عدد الحصص

المدة الزمنية المتوقعة لتحقيق نتاجات التعلم.

التكامل الرأسي والأفقي

التكامل الرأسي يعني ربط المفهوم بمفاهيم أخرى ضمن مستويات المبحث نفسه، أما التكامل الأفقي فيعني الربط في المباحث الأخرى.

مصادر التعلم

مصادر تعليمية يمكن للطالب والمعلم الرجوع إليها؛ بهدف زيادة معلوماتهما وخبراتهما والمساهمة في تحقيق النتاجات، وتشمل: كتبًا، وموسوعات، ومواقع إنترنت، وأقراصًا مدمجة، ومقابلات أشخاص... إلخ.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

المفاهيم والمصطلحات والرموز الأساسية الواردة في الدرس، ويجب التركيز عليها عند تصميم الموقف التعليمي.

التعلم القبلي

المعارف والمهارات التي ترتبط بموضوع الدرس، التي تعلمها الطالب سابقًا.

استراتيجيات التدريس

الخطوات والإجراءات المنظمة التي يقوم بها المعلم وطلبته لتنفيذ الموقف التعليمي، وهي خطوات مقترحة يمكن للمعلّم تطويرها أو تغييرها بما يتلاءم وظروف الطلبة وإمكانات المدرسة، مع مراعاة توظيف تكنولوجيا المعلومات والاتصالات (ICT) عند الحاجة.

إجراءات التنفيذ

إجراءات تهدف إلى تنظيم الموقف التعليمي وضبطه، لتسهيل تنفيذ الدرس بكفاءة، ومن أمثلتها ما يأتي:

١- تنظيم جلوس الطلبة (مجموعات، حلقة دائرية، حرف U، ...).

٢- تهيئة البيئة الصفية (إنارة كافية وتهوية ونظافة ،...).

٣- تهيئة الأدوات والمواد اللازمة لتنفيذ الدرس.

٤- إثارة دافعية الطلبة للتعلم.

٥- استخدام أوراق العمل وأدوات التقويم المناسبة والأنشطة المتضمنة.

معلومات إضافية

معلومات إثرائية موجزة، ذات علاقة بالمحتوى، موجّهة إلى المعلم والطالب بغية إثراء المعرفة بالمحتوى؛ وهي غير مطلوبة من الطالب في امتحانات الثانوية العامة.

أخطاء شائعة

توقعات لأخطاء محتملة وشائعة بين الطلبة والمجتمع، تتعلق بالمهارات والمفاهيم والقيم الواردة، مع تقديم معالجة لهذه الأخطاء.

مراعاة الفروق الفردية

مجموع الأنشطة والأسئلة والإضافات في المحتوى، التي أعدت لتناسب احتياجات الطلبة وفق قدراتهم المتنوعة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

الخطوات والإجراءات المنظمة التي يقوم بها المعلم أو الطلبة لتقويم الموقف التعليمي، وقياس مدى تحقق النتاجات، وهي عملية مستمرة في أثناء تنفيذ الموقف التعليمي، ويمكن تطويرها أو بناء نماذج أخرى متشابهة ليجري تطبيقها بالتكامل مع إجراءات تنفيذ الدرس.

نموذج تحليل محتوى

المبحث: الرياضيات.

الصف: الثاني عشر.

الفرع: العلمي   **عنوان الوحدة :** تطبيقات التفاضل.   **عدد الفصول:** (٢).   **الصفحات:** (١٥٢ – ٢١٧)

المحتوى	المفاهيم والمصطلحات	الرموز	التعميمات	المهارات	المسائل
الفصل الأول: تطبيقات هندسية وفيزيائية. أولًا : تطبيقات هندسية. ثانياً :تطبيقات فيزيائية. ثالثًا : المعدلات المرتبطة بالزمن. **الفصل الثاني:** تطبيقات عملية على التفاضل. أولًا : النقط الحرجة. ثالثًا : التزايد والتناقص.	ميل المماس. نقطة التماس. أقصى ارتفاع. المعدل الزمني. النقط الحرجة. التزايد. التناقص. القيم القصوى المحلية القيم القصوى المطلقة. التقعر. نقط الانعطاف.	المسافة: ف(ن) السرعة اللحظية: ع(ن) التسارع اللحظي:ت(ن) المعدلات الزمنية: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$	– ميل المماس عند النقطة (س$_1$، ق(س$_1$)) = قَ(س$_1$) – معادلة المماس للاقتران ق عن النقطة (س$_1$، ص$_1$) هي: ص – ص$_1$ = قَ(س$_1$) (س – س$_1$) – معادلة العمودي على المماس للاقتران ق عن النقطة (س$_1$، ص$_1$) هي: ص – ص$_1$ = $\frac{-1}{\text{قَ(س}_1\text{)}}$ (س – س$_1$) – يكون مماس منحنى الاقتران ق (س) عموديًّا على مماس منحنى الاقتران هـ(س) عند نقطة تقاطعهما (س$_1$، ص$_1$)، إذا كانت قَ(س$_1$)، هـَ(س$_1$) موجودتين ، وكانت : – قَ(س$_1$) × هـَ(س$_1$) = –١ – ميل المماس الأفقي يساوي صفرًا. – قَ (س$_1$) = ظا هـ، حيث هـ زاوية ميل المماس عند س$_1$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. – ع (ن) = فَ (ن) – ت(ن) = عَ(ن) = فً (ن) – القوانين الواردة في الملحق (١) في الصفحتين (٢١٥، ٢١٦) – تعريف التزايد والتناقص والثبات (كما ورد في الصفحة ١٧٩). – النظرية الواردة في الصفحة (١٨٠). – (علاقة اشارة المشتقة الأولى للاقتران ق بالتزايد و التناقص والثبات للاقتران ق). – تعريف القيم القصوى بأنواعها (صفحة ١٨٦). – نظرية (اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى) صفحة (١٨٦). – تعريف التقعر كما ورد في الصفحة(١٩٣). – نظرية (اختبارالتقعر) في الصفحة (١٩٣). – اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية في الصفحة (١٩٧).	– إيجاد معادلة المماس عند نقطة. – توظيف المشتقة الأولى في حلّ مسائل هندسية. – توظيف المسافة، والسرعة والتسارع في حلّ مسائل عملية. – توظيف المعادلات المرتبطة بالزمن في حلّ مسائل وتطبيقات عملية. – تحديد النقط الحرجة لاقتران معطى. – تحديد فترات التزايد والتناقص لاقتران معطى. – استخدام اختبار المشتقة الأولى في تحديد فترات التزايد والتناقص، والقيم القصوى (إن وُجدت) لاقتران معطى. – تحديد فترات التقعر لأعلى ولأسفل لاقتران ما باستخدام المشتقة الثانية. – استخدام اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى المحلية لاقتران معطى. – توظيف القيم القصوى في حلّ مسائل عمليّة.	– المسألة (١٣) في الصفحة (١٦١). – المسائل (٨، ٩، ١٠) في الصفحة (١٦٦). – المسألة (٩) الصفحة (١٧٤). – السؤال (٣) الصفحة (١٧٨). – السؤالان (٣، ٤) في الصفحة (١٩١). – السؤال (٦) الصفحة (١٩٩). – التدريب (٥) الصفحة (٢٠٦). – السؤال (٧) الصفحة (٢٠٩). – السؤال (٩) الصفحة (٢١٠). – السؤال (٤) الصفحة (٢١١). – السؤال (٨) فرع (١١) صفحة (٢١٤).

الخطة الفصلية

المبحث: الرياضيات.
الصف: الثاني عشر.
الفرع: العلمي

الفصل الدراسي الأول
عنوان الوحدة : تطبيقات التفاضل

عدد الفصول: (٢). الصفحات: (١٥٢ – ٢١٤) عدد الحصص: ٧ الفترة الزمنية: / / إلى : / /

المحتوى	النتاجات التعلمية	الموارد والتجهيزات (مصادر التعلم)	استراتيجيات التدريس	التقويم: الاستراتيجيات	التقويم: الأدوات	الأنشطة المرافقة	التأمل الذاتي عن الوحدة
الفصل الأول: – تطبيقات هندسية وفيزيائية. – أولًا : تطبيقات هندسية. – ثانيًا :تطبيقات فيزيائية. – ثالثًا : المعدلات المرتبطة بالزمن. **الفصل الثاني:** – تطبيقات عملية على التفاضل. – أولًا : النقط الحرجة. – ثانيًا : التزايد والتناقص. – ثالثًا : القيم القصوى. – رابعًا : التقعر. – خامسًا : تطبيقات على القيم القصوى.	– يجد معادلة المماس عند نقطة. – يحُلّ مسائل هندسية على المشتقة الأولى. – يحَل مسائل عملية على المسافة، والسرعة، والتسارع. – يفسر مفهوم المعدل الزمني. – يوظف المعدلات المرتبطة بالزمن في حلّ مسائل وتطبيقات حياتية. – يحدد النقط الحرجة لاقتران معطى. – يحدد فترات التزايد والتناقص لاقتران معطى. – يستخدم اختبار المشتقة الأولى في تحديد فترات التزايد والتناقص، والقيم القصوى (إن وُجِدت) لاقتران معطى. – يتعرّف مفهوم التقعر ونقط الانعطاف، وتحديد فترات التقعر لأعلى ولأسفل لاقتران ما باستخدام المشتقة الثانية. – يستخدم اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى المحلية لاقتران معطى. – يوظف القيم القصوى في حلّ مسائل عملية.	– كتاب الطالب. – دليل المعلم. – أوراق العمل. – أسئلة ثانوية عامة / سنوات سابقة. – شبكة الانترنت. – موقع إدراك للتعلم المدرسي.	– التدريس المباشر بفروعه. – حل المشكلات والاستقصاء. – التعلم في مجموعات. – التعلم عن طريق النشاط. – التفكير الناقد بفروعه.	– الملاحظة. – التواصل. – مراجعة الذات.	– قائمة الرصد. – سلم التقدير العددي. – سجل وصف سير التعلم.	– نشاط (فكر وناقش) صفحة (١٧٢). – نشاط (فكر وناقش) صفحة (١٨٥). – تقسيم الطلبة الى مجموعات غير متجانسة. – مناقشة اوراق العمل – حصص في مختبر الحاسوب. – عرض مواقع الكترونية تعليمية.	– أشعر بالرضا عن: ... . – التحديات التي واجهتني : .... – مقترحات التحسين: ....

معلومات عامة عن الطلبة :
إعداد المعلم:

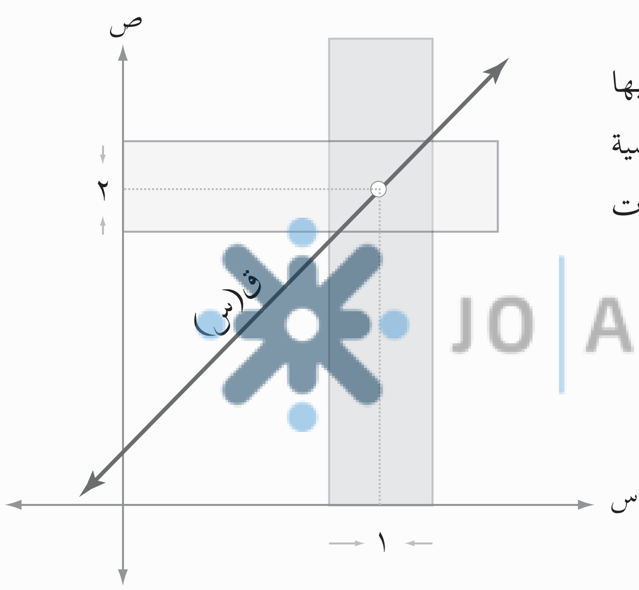
مدير المدرسة/ الاسم والتوقيع: التاريخ:
المشرف التربوي/ الاسم والتوقيع: التاريخ:

الفصل الدراسي الأول

الوحدة الأولى

١

النهايات والاتصال



نشأ علم التفاضل والتكامل لوصف الكيفية التي تتغيرفيها الأشياء، ويعتمد كلٌّ من التفاضل والتكامل بصورة أساسية على مفهوم النهاية. تتناول هذه الوحدة مفهومي النهايات والاتصال اللذين يشكلان مقدمة لعلم التفاضل.

يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تعرف مفهوم النهاية.
- إيجاد قيمة نهاية اقتران عند عدد بيانيًّا.
- تعرف نظريات النهايات وتوظيفها لإيجاد قيمة النهاية عند عدد.
- إيجاد قيمة النهاية عند عدد لاقترانات نسبية وكسرية ومتشعبة.
- إيجاد قيمة النهاية عند عدد لاقترانات مثلثية.
- تعرف مفهوم الاتصال عند نقطة، وعلى فترة.
- البحث في اتصال اقتران عند نقطة، وعلى فترة.

السؤال الأول:

جد ق(١,٥) لكل مما يأتي:

١) $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٦س} + ٢ & ، \quad \text{س} < ١ \\ ٩ - \text{س}^٢ & ، \quad \text{س} \geq ١ \end{cases}$

٢) $\text{ق(س)} = [١٠ - \text{س}]$

٣) $\text{ق(س)} = \text{س} + |\text{س}| \quad [١,٥ - \text{س}]$

السؤال الثاني:

حدد مجال كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) $\text{ق(س)} = |\text{س} - ٥|$

٢) $\text{ل(س)} = \sqrt{٩ - \text{س}}$

٣) $\text{ك(س)} = \sqrt{١٦ - \text{س}^٢}$

٤) $\text{هـ(س)} = \dfrac{\text{س}^٤ - ١}{\text{س}^٢ - ١}$

٥) $\text{ع(س)} = \sqrt{\dfrac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣}}$

٦) $\text{و(س)} = \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}}{\text{س} - ١}$

٧) $\text{ن(س)} = \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٤}}{\sqrt{\text{س} + ٢}}$

السؤال الثالث:

أعد تعريف الاقترانات الآتية، ضمن مجال كل منها:

١) $\text{ق(س)} = |\text{س} - ٥| \quad ، \quad \text{س} \in \text{ح}$

٢) $\text{ق(س)} = |\text{س}^٢ - ١٦| \quad ، \quad \text{س} \in \text{ح}$

٣) $\text{ق(س)} = |\text{س}| \, [\text{س} - ١] \quad ، \quad \text{س} \in [-٢ ، ٣]$

السؤال الرابع

أ) اكتب المقادير الآتية؛ بصورة لا يظهر فيها الجذر في المقام:

١) $\frac{١}{\sqrt{\text{س} + ٢}}$ ٢) $\frac{٣}{\sqrt{\text{س}} - ٢}$

٣) $\frac{٥}{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}$ ٤) $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س} - ١} + \sqrt{\text{س} + ١}}$

ب) اكتب ما يأتي في أبسط صورة ممكنة:

١) $\left(\frac{١}{\text{س}^٢} - \frac{٥}{\text{س}}\right) \frac{\text{س}^٢ + \text{س}^٤}{٥\text{س} - ١}$ ٢) $\frac{\text{س}^٣ - \text{س}^٢}{\text{س}^٣ - ١}$

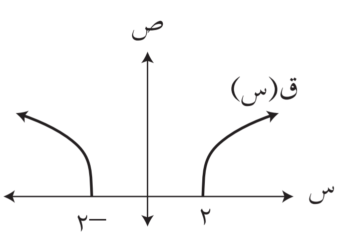
السؤال الخامس

يتكون هذا الفرع من ١٠ فقرات من نوع الاختيار من متعدد، يلي كل فقرة أربعة بدائل واحد فقط منها صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

١) إذا كان $\text{ق(س)} = \frac{٥}{\sqrt{\text{س} - ١}}$ ، فإن مجال الاقتران ق هو:

أ) ح ب) ح^+ جـ) ح − {١} د) ح^+ − {١}

٤) معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ما مجال الاقتران ق؟



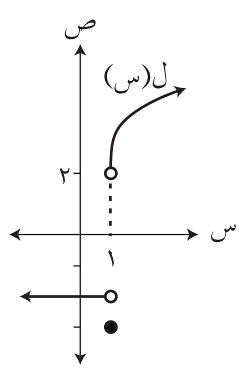
أ) [−٢ ، ٢] ب) [٢ ، ∞)

جـ) [٢ ، ∞) ، (−∞ ، −٢] د) (−∞ ، −٢]

٣) إذا كان ق(س) = [س − ٠,٥] ، فإن ق(−١) تساوي:

ب) صفرًا ب) ٠,٥ جـ) −٠,٥ د) −٢

٢) معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ل، ما قيمة ل(١)؟



أ) صفر ب) ٢

جـ) −٢ د) −٣

إجابات التهيئة

السؤال الأول

١) ٦,٧٥ ‏ ‏ ٢) ٨ ‏ ‏ ٣) ٦

السؤال الثاني

١) مجموعة الأعداد الحقيقية ‏ ‏ ٢) س ≥ ٩ ‏ ‏ ٣) [−٤، ٤]

٤) ح − {−١، ١} ‏ ‏ ٥) [−٣، ٣)، (٣، ∞)

٦) (−∞، −٥]، [٥، ∞) ‏ ‏ ٧) [٢، ∞)

السؤال الثالث

١) $$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٥} - \text{س} & \text{،} \quad \text{س} < \text{٥} \\ \text{س} - \text{٥} & \text{،} \quad \text{س} \geq \text{٥} \end{cases}$$

٢) $$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{١٦} - \text{س}^{\text{٢}} & \text{،} \quad |\text{س}| \leq \text{٤} \\ \text{س}^{\text{٢}} - \text{١٦} & \text{،} \quad |\text{س}| > \text{٤} \end{cases}$$

٣) $$\text{ق(س)} = \begin{cases} -\text{٣س} & \text{،} \quad -\text{٢} \leq \text{س} < -\text{١} \\ -\text{٢س} & \text{،} \quad -\text{١} \leq \text{س} < \text{٠} \\ -\text{س} & \text{،} \quad \text{٠} \leq \text{س} < \text{١} \\ \text{٠} & \text{،} \quad \text{١} \leq \text{س} < \text{٢} \\ \text{س} & \text{،} \quad \text{٢} \leq \text{س} < \text{٣} \\ \text{٢س} & \text{،} \quad \text{س} = \text{٣} \end{cases}$$

السؤال الرابع

أ) ١) $\dfrac{\sqrt{\text{س} + \text{٢}}}{\text{س} + \text{٢}}$ ‏ ‏ ٢) $\dfrac{\text{٣}\left(\sqrt{\text{س}} + \text{٢}\right)}{\text{س} - \text{٤}}$

٣) $\dfrac{\text{٥}\left(\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}}} + \sqrt[\text{٣}]{\text{س}} + \text{١}\right)}{\text{س} - \text{١}}$ ‏ ‏ ٤) $\dfrac{\text{س}\left(\sqrt{\text{س} - \text{١}} - \sqrt{\text{س} + \text{١}}\right)}{-\text{٣}}$

ب) ١) $-(\text{١} + \text{س}^{\text{٢}})$ ‏ ‏ ٢) $\dfrac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} + \text{١}}$

السؤال الخامس

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤
رمز الإجابة	د	جـ	د	د

أولاً مفهوم النهاية | **عدد الحصص** حصتان

نتاجات التعلم

- يتعرف مفهوم النهاية.
- يجد قيمة نهاية اقتران عند عدد بيانيًا.

التكامل الرأسي والأفقي

- خصائص منحنيات الاقترانات. (الصفوف الثامن وحتى الحادي عشر).

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (٨-١٤).

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- النهاية: $\lim_{س \to أ}$ ق(س)
- النهاية من جهة اليمين: $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س)
- النهاية من جهة اليسار: $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س)

التعلم القبلي

- إجـراء العمليـات على الأعداد الحقيقية، العمليـات على الحدود والمقادير الجبريـة، تحليل المقادير الجبرية، تحديد مجال ومدى الاقترانات الحقيقية جبريًا وبيانيًا.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، التفكير الناقد (التحليل)، أخرى (الرؤوس المرقمة).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة في ما يلي: مفهوم الاقتران، إيجاد قيم المجال والمدى من خلال التمثيل البياني، مجال ومدى الاقترانات الكسرية.

٢ - كتابة قاعدة الاقتران ق(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ على اللوح، ورسم منحناه على لوح الرسم البياني، ثم طرح السؤال التالي: ما مجال الاقتران؟ لماذا رسمت حلقة على منحنى ق؟ ما سلوك منحنى ق عندما تقترب قيم س من العدد ١ من جهتي اليمين واليسار؟

٣ – تقديم مفهوم النهاية من خلال مناقشة الجدول المبين في الصفحة (٨)، والاستعانة بالأشكال (١–١)، (١–٢)، (١–٣) للتوصل إلى التعميم الوارد في الصفحة (١٠).

٤ – كتابة التعميم على اللوح، ومناقشة شرط وجود النهاية عندما تقترب قيمة س من عدد، وتوضيح أنه إذا كانت النهاية موجودة عندما تقترب قيمة س من عدد؛ فهذا لا يعني أن يكون الاقتران معرفًا عند ذلك العدد، وإنما يجب أن يكون معرفًا في فترة مفتوحة قصيرة الطول تحوي ذلك العدد، وإذا كان الاقتران معرفًا عند عدد، فهذا لا يعني أن النهاية موجودة عندما تقترب س من ذلك العدد.

٥ – مناقشة مثال (١) بمشاركة الطلبة لتوضيح كيفية إيجاد النهاية من يمين عدد ومن يساره. طرح أسئلة على الطلبة للتأكد من فهمهم، مناقشة الأمثلة (٢، ٣) لتعميق فهم الطلبة.

٦ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، وتكليفهم بحل تدريب (١) صفحة ١٥، وتحديد فترة زمنية مقدارها ٤ دقائق لإنهاء المهمة.

٧ – متابعة الطلبة وملاحظة حلولهم ومناقشاتهم ضمن المجموعات، وتعبئة أداة التقويم وتقديم الدعم لهم بعد انتهاء الفترة الزمنية المخصصة، ثم تكليف المجموعات بعرض أعمالها ومناقشتها على اللوح.

٨ – ختم الدرس بمراجعة الطلبة بالمفاهيم التي وردت في الدرس من خلال توجيه السؤال: ماذا تعلمنا في هذا الدرس؟ (يمكن الاستعانة بأداة التقويم (١–٣)).

٩ – الاستماع إلى إجابات الطلبة باستخدام استراتيجية الرؤوس المرقمة، وهذه تعد بمثابة تغذية راجعة حول مدى امتلاك الطلبة للمفاهيم التي وردت في الدرس.

١٠– تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل الدرس بعضها واجبًا بيتيًا، والآخر في الحصة الصفية ضمن مجموعات، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

أخطاء شائعة

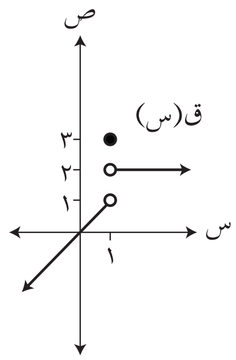
– عدم التمييز بين قيمة النهاية عندما تقترب قيمة س من عدد، وصورة ذلك العدد في قاعدة اقتران.

– يخطئ بعض الطلبة في إيجاد النهاية من جهة اليمين، أومن جهة اليسار من خلال التمثيل البياني لمنحنى اقتران.

– يعتبر بعض الطلبة أن النهاية عند أطراف الفترة تكون موجودة، وعلاج ذلك بالتركيز على مفهوم النهاية.

علاج:

معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد كلًّا مما يأتي:



١) ق(١)

٢) نهـــا ق(س)
س←١^+

٣) نهـــا ق(س)
س←١^-

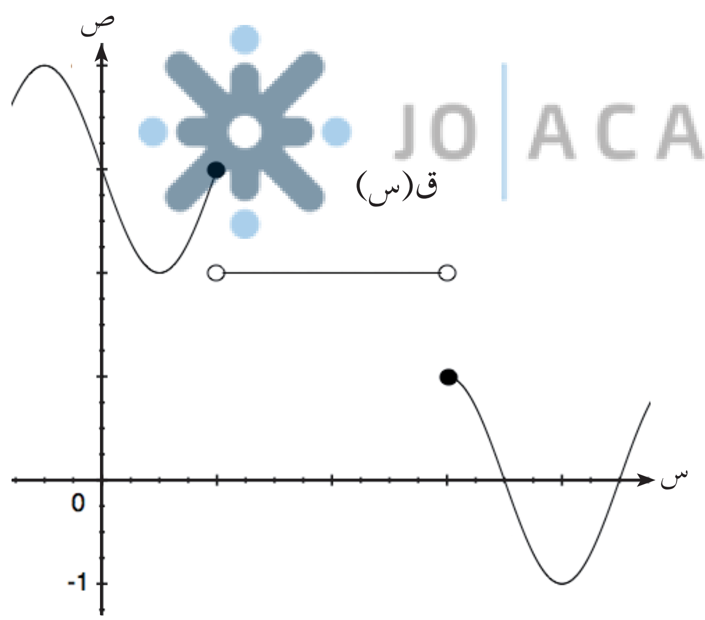
٤) نهـــا ق(س)
س←١

الحل:

١) ق(١) = ٣ ٢) ٢ ٣) ١ ٤) غير موجودة

إثـــراء:

معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على الفترة [−١، ٥) جد كلًّا مما يأتي:



١) ق(١) ، ق(٣) ، ق(٣,٥)

٢) نهـــا ق(س)
س←١^+

٣) نهـــا ق(س)
س←٢

٤) نهـــا ق(س)
س←٤^+

٥) نهـــا ق(س)
س←٠

٦) نهـــا ق(س − ١)
س←٢^+

٧) نهـــا ق(٣ − س)
س←٢^-

٧) مجموعة قيم أ التي تنتمي للفترة [−١ ، ٥) التي تجعل نهـــا ق(س) غير موجودة
س←أ

الحل:

١) ق(١) = ٣ ، ق(٣) = ١ ، ق(٣,٥) = صفرًا

٢) ٢ ٣) ٢ ٤) −١ ٥) ٣

٦) ٢ ٧) ٣ ٨) −١، ١ ، ٣ ، ٥

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التواصل، الملاحظة، مراجعة الذات.

أداة التقويم: سلم التقدير (١-١)، البند (١)، قائمة الرصد (١-٣)، سجل وصف سير التعلم (١-٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

١) ١ ٢) ٥ ٣) غير موجودة. ٤) ق(٢) = ٨

تدريب (٢)

١) ٢ ٢) غير موجودة ٣) ٢ ٤) ٣

التمارين والمسائل

١)

رمز السؤال	أ	ب	جـ	د	هـ	و	ز	ح
الإجابة	٥	٢	١	غير موجودة	−٦	−٦	−٣	صفر

٢)

رمز السؤال	أ	ب	جـ	د	هـ
الإجابة	س≤−٤	صفر	غير موجودة	غير موجودة	٢

٣)

أ) أ∋(−١،١) ∪ { −٢ ، ٢ ، ٣ } ب) جـ∋[−١، ١) ∪ { −٢ ، ٢ ، ٣ }

جـ) ك= { −١ ، ١ } د) ل= { −٣ ، ٤ }

٤) باستخدام الجدول يمكن إيجاد النهاية:

٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	٢,٠٠٠٠٠١	٢	١,٩٩٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩
٨,٠٠٤٠٠١	٨,٠٠٠٤٠٠٠١	٨,٠٠٠٠٠٤		٧,٩٩٩٦٠٠٠١	٧,٩٩٦٠٠١	٧,٩٦٠١	٧,٦١

ومنه $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ٨

ثانيًا نظريات النهايات

عدد الحصص أربع حصص

نتاجات التعلم

- يتعرف نظريات النهايات.
- يطبق نظريات النهايات.
- يجد نهاية اقتران القيمة المطلقة واقتران أكبرعدد صحيح واقتران الجذر التربيعي عند قيمة عددية.

التكامل الرأسي

- خصائص منحنيات الاقترانات في الصفوف الثامن وحتى الحادي عشر.

التكامل الأفقي

- برمجيات رسم الاقترانات، في كتاب الحاسوب.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٥-٢٥).
- برمجيات رسم المنحنيات.
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- نظريات النهايات.

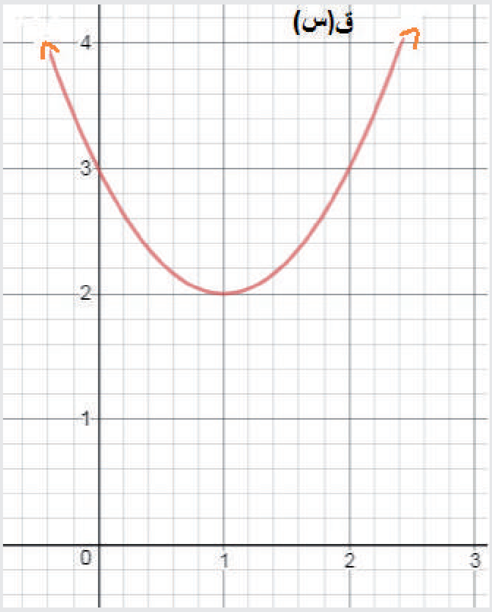
التعلم القبلي

- مفهوم النهاية، خواص الاقترانات: القيمة المطلقة، أكبر عدد صحيح، الجذر التربيعي والجذر التكعيبي، وكثيرات الحدود.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، التفكير الناقد (التحليل)، أخرى (الرؤوس المرقمة).

إجراءات التنفيذ



١ – التمهيد للدرس من خلال رسم الشكل المجاور على اللوح.

٢ – توجيه الأسئلة الآتية للطلبة:

(١) ما $\lim_{س \leftarrow ١}$ ق(س)؟

(٢) ما قيمة ق(١)؟

(٣) هل يمكن إيجاد $\lim_{س \leftarrow ١}$ ق^{٢}(س)

٣ – الاستماع إلى إجابات الطلبة، ثم توضيح أهمية الدرس بأنه سيساعدنا في حل السؤال (٣).

٤ – تقديم نظريات النهايات الواردة صفحة (١٥)، مع تأكيد شرط توظيف النظريات، وهو أن تكون النهاية موجودة لكل اقتران عند قيمة س المبينة.

٥ – مناقشة مثال (١) وحله للوصول إلى التعميم الوارد صفحة (١٦).

٦ – مناقشة مثال (٢) وحله لتعميق فهم الطلبة على تطبيق نظريات النهايات.

٧ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات، ثم تكليفهم بحل تدريب (١)، وتحديد فترة زمنية للمهمة.

٨ – متابعة الحلول، وتقديم التغذية الراجعة.

٩ – مناقشة مثال (٣) لتقديم نهاية اقتران القيمة المطلقة، ثم تكليف الطلبة بحل تدريب (٢) للتأكد من امتلاكهم مهارة إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة، وإيجاد النهاية عند قيمة س المحددة.

١٠– مناقشة مثال (٤) وحله لتقديم نهاية اقتران أكبر عدد صحيح، ثم مناقشة فقرة (فكر وناقش) صفحة (١٩)؛ لتأكيد أن قيمة النهاية لا تكون بالتعويض المباشر بقاعدة الاقتران.

١١– مناقشة مثال (٥) وحله لتوضيح إيجاد النهاية لاقتران الجذر التربيعي، مع التأكيد أن النهاية عند صفر اقتران الجذر التربيعي والاقترانات التي على الصورة ق(س)$^{\frac{١}{ن}}$ ، حيث ن عدد زوجي موجب تكون غير موجودة، والسبب أن الاقتران لا يكون معرفًا في فترة مفتوحة تحوي صفره، ويمكن الاستعانة برسم منحنى الاقتران لتوضيح ذلك للطلبة.

١٢– تكليف الطلبة بحل تدريب (٥)؛ للتأكد من امتلاكهم مهارة إيجاد نهاية اقتران الجذر التربيعي.

١٣– مناقشة مثال (٦) وحله، مع تأكيد أن البحث في النهاية عن يمين نقطة التشعب وعن يسارها، استعن بالشكل (١–١٤) من الكتاب المدرسي لتوضيح أن النهاية موجودة وتساوي صفرًا.

١٤– تكليف الطلبة بحل تدريب (٦)، ومتابعة الحلول وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٥– ختم الدرس بمراجعة الطلبة بالمفاهيم التي وردت في الدرس؛ عن طريق توجيه السؤال: ماذا تعلمنا في هذا الدرس؟

١٦– الاستماع إلى إجابات الطلبة، وهذه تعد تغذية راجعة حول مدى امتلاك الطلبة للمفاهيم التي وردت في الدرس.

١٧– تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل الدرس، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة لهم.

معلومات إضافية

– يمكن الاستعانة ببرمجيات رسم منحنيات الاقترانات، وتدريب الطلبة على استخدامها لتعميق فهمهم لخواص المنحنيات وإيجاد النهايات.

– يمكن الحصول على تلك البرمجيات من التطبيقات الموجودة على الهواتف الذكية (Play store).

– رمز اقتران أكبر عدد صحيح في تلك البرمجيات (floor).

أخطاء شائعة

– يخطئ بعض الطلبة في إعادة تعريف اقتران أكبر عدد صحيح واقتران القيمة المطلقة.

– يخطئ بعض الطلبة في تحديد مجال اقتران الجذر التربيعي على الصورة $\sqrt{\text{أ} - \text{س}}$ أو الصورة $\sqrt{\text{أ} - \text{س}^2}$، أو الصورة $\sqrt{\text{س}^2 - \text{أ}}$

– يحسب بعض الطلبة النهايات بطريقة خاطئة، كما يأتي:

$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}} \sqrt{\text{أ} - \text{س}} = $ صفرًا ؛ إذ يقومون بالتعويض المباشر دون دراسة مجال الاقتران.

مراعاة الفروق الفردية

علاج: جد $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٨} \sqrt{٨ - \text{س}}$ (الحل: غير موجودة)

إثراء: جد $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow {}^-٣} \dfrac{\text{س}^2 \, |\text{س} - ٣|}{\text{س} - ٣}$ (الحل: –٩)

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التواصل، الملاحظة، مراجعة الذات.

أداة التقويم: سلم التقدير (١–١) البند (٢)، قائمة الرصد (١–٣)، سجل وصف سير التعلم (١–٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

١) ١٦   ٢) ١   ٣) ٤ $\sqrt{٢}$ + ١٥

تدريب (٢)

١) ٨   ٢) صفر   ٣) صفر

تدريب (٣)

١) غير موجودة   ٢) غير موجودة   ٣) ١   ٤) غير موجودة

تدريب (٤)

١) أ ∈ مجموعة الأعداد الصحيحة ص   ٢) جـ ∈ الفترة (٢ ، ٣)   ٣) ١   ٤) غير موجودة

فكر وناقش صفحة (١٩)

العبارات صحيحة . مثال $\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} [س] = ٣$ $\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} [س] = ٢$

تدريب (٥)

١) النهاية غير موجودة؛ لأن الاقتران غير معرف في فترة مفتوحة تحوي العدد (٧).

٢) النهاية موجودة؛ وتساوي $\sqrt{٢}$ ، حيث إنَّ الاقتران معرف في فترة مفتوحة تحوي العدد (٩).

٣) النهاية غير موجودة؛ لأن الاقتران غير معرف في فترة مفتوحة تحوي العدد (٥).

٤) النهاية موجودة وتساوي $\sqrt{٢٤}$ ، حيث إنَّ الاقتران معرف في فترة مفتوحة تحوي العدد −٧.

تدريب (٦)

$$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = \underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} |س - ٢| = \text{صفرًا}$$

$$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} [٦ - س] = ٤$$

ومنه النهاية غير موجودة؛ لأن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار.

تدريب (٧)

١) غير موجودة؛ لأن قيمة النهاية من اليمين ٦ وقيمتها من اليسار ٥

٢) غير موجودة؛ لأن قيمة النهاية من اليمين ٢ وقيمتها من اليسار ٣

٣) النهاية موجودة وتساوي ٨

نلاحظ أنه إذا كانت النهاية عند نقطة غير موجودة لاقترانين مختلفين، فإن نهاية ناتج جمع هذين الاقترانين ليس من الضروري أن تكون غير موجودة عند النقطة نفسها.

التمارين والمسائل

١)

أ	ب	جـ	د	هـ	و
−١٠	٢٤	٢/٣	٨١	∛٤	صفر

٢)

أ	ب	جـ	د
١٢	١٢١	√٢ / ٥	٢١

٣)

أ	ب	جـ	د	هـ	و	ز	ح	ط
صفر	صفر	صفر	صفر	غير موجودة	غير موجودة	صفر	غير موجودة	صفر

٤) قيم جـ ∈ [٦ ، ∞)

٥) جـ ∈ (−٥ ، ٠)

٦) بما أنَّ النهاية موجودة إذن ٩ − ٤أ = ٣ ومنه أ = ٣/٢

٧) أ) بفرض ص = ٣س − ٣ ، عندما تقترب س من العدد ٢ تقترب ص من العدد ٣

ومنه نهـا (ص ← ٣) ل(ص) = ١

ب) بتوزيع النهاية ينتج أن نهـا (س ← ٢) (س + ل(س)) = ٢+١ = ٣

٨) أ) بما أنَّ الاقترانين متصلان؛ إذًا يمكن توزيع النهاية، ومنه نهـا (س ← ١) (ق+ع) = ٢

ب) نهـا (س ← ٢) (ق×ع) = ١

جـ) نهـا (س ← ١) (٢ ق(س − ١) + ع(س)) = ٦ (افرض ص = س − ١)

٩) بتوزيع النهاية ينتج أنَّ: نهـا (س ← −٣) ل(س) = ٧

ومنه نهـا (س ← −٣) (ق٢(س) − ٢ل(س)) = ١٦ − ١٤ = ٢

١٠) ع(٢) = ٥ (نظرية الباقي)

نهـا (س ← ٢) (٣ع(س) + ٤س٢) = ٣×٥ + ١٦ = ٣١

ثالثًا نهايات اقترانات كسرية

عدد الحصص أربع حصص

نتاجات التعلم

– يجد نهايات اقترانات كسرية.

التكامل الرأسي

– مفهوم المرافق التربيعي والتكعيبي في الصف التاسع الأساسي.
– تحليل كثيرات الحدود والقسمة التركيبية ونظرية العامل والباقي في الصف الحادي عشر.

مصادر التعلم

– كتاب الطالب، الصفحات (٢٦–٣٥).
– منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

– نهاية اقتران كسري، اقتران نسبي.

التعلم القبلي

– مفهوم النهاية، تحليل المقادير الجبرية، العمليات على الحدود والمقادير الجبرية، مفهوم المرافق التربيعي والمرافق التكعيبي.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي، الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر–انتقِ زميلًا–شارك)، التفكير الناقد (التحليل).

إجراءات التنفيذ

١ – التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة في الاقترانات الكسرية، وتحليل المقادير الجبرية، والمرافق التربيعي والتكعيبي.
٢ – مناقشة المسألة الواردة في مقدمة الدرس، ورسم الشكل(١–١٧) على اللوح، وتوضيح أنه لا يمكن استخدام نظرية (٢) فرع (٥) من الصفحة (١٥) في الكتاب المدرسي لإيجاد نهاية اقتران كسري؛ لأنَّ ناتج التعويض المباشر يعطي صفرًا على صفر، و يجب التخلص من وضع أن يكون المقام صفرًا، وذلك من خلال كتابة الاقتران بصورة أخرى مكافئة؛ تمكننا من اختصار المقدار الذي يجعل المقام يساوي صفرًا.

٣ – توضيح أنه يمكن اختصار المقدار (س–٢) في كل من البسط والمقام؛ لأنَّ قيمة س تقترب من العدد ٢ ولا تساوي ٢ ، والتحقق من صحة الحل عن طريق مقارنة الحل الجبري مع التمثيل البياني.

٤ – مناقشة الأمثلة (٢ ، ٣، ٥ ، ٦) لتوضيح صيغ أخرى لاقترانات كسرية ناتج التعويض المباشر فيها يعطي صفرًا على صفر، ونحتاج إما لتوحيد المقامات أو الضرب بالمرافق التربيعي، أو التحليل إلى العوامل، أو الضرب بالمرافق التكعيبي.

٥ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات وتكليفهم بحل التدريبات (٢، ٤)، ومتابعة الحلول وتقديم التغذية الراجعة.

٦ – مناقشة مثال (١) لتوضيح فكرة أنه إذا كان التعويض المباشر يعطي قيمة عددية على صفر، فإنَّ النهاية في هذه الحالة غير موجودة، و توضيح ذلك هندسيًا من خلال مناقشة سلوك منحنى الاقتران عندما تقترب قيمة س من العدد (١) من جهتي اليمين واليسار في الشكل (١–١٨)، ثم الوصول إلى النتيجة الواردة في الصفحة (٢٧) من الكتاب المدرسي.

٧ – مناقشة مثال (٤) لتدريب الطلبة على إيجاد نهاية الاقترانات الكسرية التي بسطها ومقامها اقتران الجذر التربيعي، مع تنبيه الطلبة إلى ضرورة دراسة مجال كل من البسط والمقام لإمكانية دمج جذري البسط والمقام.

٨ – مناقشة فقرة (فكر وناقش) الواردة صفحة (٣٠)؛ لتنبيه الطلبة بالأخطاء المفاهيمية حول دمج جذري البسط والمقام، وإجراء الاختصار ثم التعويض.

٩ – ختم الدرس بمراجعة الطلبة بالمفاهيم التي وردت فيه من خلال توجيه السؤال: ماذا تعلمنا في هذا الدرس؟

١٠– الاستماع إلى إجابات الطلبة، وهذه تعد تغذية راجعة حول مدى امتلاك الطلبة للمفاهيم التي وردت في الدرس.

١١– تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل الدرس بوصفها واجبًا بيتيًّا، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة لهم.

معلومات إضافية

– يمكن توجيه الطلبة إلى استخدام برمجيات رسم المنحنيات؛ لرسم منحنيات الاقترانات الآتية:

$$ق(س) = \frac{٢}{س - ٣} ، هـ(س) = \frac{٢}{س - ٧}$$

واستقصاء سلوك منحنى كل اقتران عندما تقترب قيمة س من صفر المقام من جهتي اليمين واليسار، لتعميق فهم الطلبة حول قيمة النهاية لمقدار يكون ناتج التعويض المباشر فيه على صورة عدد على صفر.

– عند تحليل العبارة ($س^٢$–٤)= (س–٢) (س+٢)، يسمى المقدار (س–٢) مرافقًا تربيعيًّا للمقدار (س+٢) والمقدار (س+٢) مرافقًا تربيعيًّا للمقدار (س–٢)

وعند تحليل العبارة ($س^٣ - ٨$) = ($س-٢$) ($س^٢+٢س+٤$)، يسمى المقدار ($س^٢+٢س+٤$) مرافقًا تكعيبيًّا للمقدار ($س-٢$).

أخطاء شائعة

- يقوم بعض الطلبة باحتساب نهاية الاقترانات الكسرية من خلال توحيد المقام أو الضرب بالمرافق التربيعي أو التكعيبي دون التأكد أن ناتج التعويض المباشر يعطي صفرًا على صفر.
- الخطأ في الإجراءات عند الضرب بالمرافق التربيعي أو التكعيبي أو توحيد المقامات.
- في الاقترانات الكسرية التي بسطها ومقامها اقتران جذر تربيعي يدمج الطلبة الجذرين ويقومون بعملية الاختصار دون الانتباه إلى البحث في مجال البسط ومجال المقام.
- يخطئ بعض الطلبة في إيجاد قيمة المقدار $\sqrt{س^٢}$

مراعاة الفروق الفردية

علاج: جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \dfrac{س^٣ - ٢٧}{س^٢ - ٧س + ١٢}$ (-٢٧)

إثراء: ١) جد قيمة الثابت ب التي تجعل النهاية: $\dfrac{٤س^٢ + ب س + ٧ب - ٦}{٢س^٢ - ٥س - ٣}$ موجودة. (ب = -٣)

٢) جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٤} \dfrac{٢س^٣ - ١٢٨}{\sqrt{س} - ٢}$ (٣٨٤)

٣) جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٦٤} \dfrac{\sqrt[٣]{س} - ٤}{\sqrt{س} - ٨}$ ($\dfrac{١}{٣}$)

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم، الملاحظة، مراجعة الذات.

أداة التقويم: سلم التقدير (١-٢) البند (١)، قائمة الرصد (١-٣)، سجل وصف سير التعلم (١-٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

١) -٧ (تحليل البسط والاختصار).

٢) غير موجودة (التعويض المباشر ١٠ على صفر).

تدريب (٢)

١) $\frac{-٢}{٢٥٠}$ (تبسيط المقدار والاختصار).

٢) ١٢ (الضرب في المرافق التربيعي للمقام ، التبسيط ثم الاختصار).

٣) $\frac{٣}{٢}$ (الضرب في مرافق البسط التربيعي، تبسيط ثم اختصار).

تدريب (٣)

١) ٢ (دمج الجذر ثم التحليل والاختصار).

٢) غير موجودة (لأنَّ الاقتران غير معرف على يسار العدد ٢).

تدريب (٤)

$\frac{١}{١٢}$ (الضرب في المرافق التكعيبي للبسط، تبسيط ثم اختصار).

فكر وناقش صفحة (٣٣)

لأن قيمة النهاية من اليمين تساوي ١ ، وقيمتها من اليسار تساوي -١ ، ومنه النهاية غير موجودة.

التمارين والمسائل

١)

أ) ١٨ (تحليل البسط بوصفه فرقًا بين مربعين والاختصار مع المقدار في المقام)

ب) $\frac{-١}{٦}$ (الضرب بالمرافق التكعيبي للبسط، تبسيط ثم اختصار)

جـ) $\frac{-١}{٤}$ (توحيد المقامات ثم التبسيط والاختصار)

د) $\frac{١}{٤}$ (إعادة تعريف القيمة المطلقة ، ثم إخراج عامل مشترك والاختصار)

هـ) $\frac{١١}{١٢}$ (الضرب في المرافق التربيعي ثم التبسيط ، إخراج عامل مشترك والاختصار)

و) غير موجودة (تحليل المقدار (ما بداخل الجذر) للحصول على القيمة المطلقة، ثم حساب النهاية من يمين العدد ٥ ومن يساره).

ز) غير موجودة؛ (لأنَّ المقدار غير معرف في فترة مفتوحة تحوي العدد ١)

ح) ٣ (تحليل البسط ثم الاختصار)

ط) $\sqrt{١٤}$ (دمج جذري البسط والمقام، تحليل ثم اختصار)

ي) غير موجودة (إعادة تعريف اقتران أكبر عدد صحيح، وحساب النهاية عن يمين ويسار العدد ٢,٥)

ك) ١ (الضرب في مرافق البسط ، تبسيط ثم اختصار)

٢) ب = ٦

٣) أ = ٣ ، ب = $\frac{-٥}{٢}$

٤) -١ (كتابة المقدار في البسط على صورة ٨ ^{٢س} - ٨ ^{س} ، ثم إخراج عامل مشترك والاختصار)

٥) ع = -١٣

٦) قيم أ هي: ٢ ، ٣

٧) ب = ١

٨) جـ = ٤

رابعًا **نهايات اقترانات مثلثية** | **عدد الحصص** أربع حصص

نتاجات التعلم

– يتعرف نظرية $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$

– يجد نهايات اقترانات مثلثية.

– يجد نهايات اقترانات كسرية تحوي صيغًا لاقترانات مثلثية.

التكامل الرأسي

– مفهوم طول قوس الدائرة والمتطابقات المثلثية، قيم الجيب وجيب التمام والظل للزوايا الخاصة بالتقدير الدائري، ودائرة الوحدة والقياس الموجب والسالب للزوايا، وتحديد زاوية المرجع في الصف العاشر و الحادي عشر، الفرع العلمي.

– كما ورد مفهوم الزوايا المتتامة والمتكاملة في الصف السابع الأساسي.

مصادر التعلم

– كتاب الطالب، الصفحات (٣٦–٤٤).

– منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

– نهاية اقتران مثلثي.

التعلم القبلي

– مفهوم النهاية،الاقترانات المثلثية،طول قوس الدائرة، المتطابقات المثلثية، قيم الجيب وجيب التمام والظل للزوايا الخاصة بالتقدير الدائري، الزوايا المتتامة والمتكاملة، دائرة الوحدة.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي، الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر–انتقِ زميلًا– شارك)، (التعلم الجماعي التعاوني)، التفكير الناقد (التحليل).

إجراءات التنفيذ

١ – التمهيد للدرس عن طريق مراجعة الطلبة في الاقترانات المثلثية.

٢ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات ثم تكليفهم بحل النشاط الوارد في مقدمة الدرس، ثم الاستماع إلى الإجابات من الطلبة للوصول إلى التعميم الوارد صفحة (٣٧).

٣ – مناقشة مثال (١) وحله بمشاركة الطلبة ، ثم استخدام الشكل (١–٢٤) لبرهان أن $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$ ، مع مراعاة توجيه أسئلة للطلبة في كل خطوة للتأكد من فهمهم.

٤ – تكليف أكثر من طالب بمناقشة الشكل (١–٢٢)؛ لتنمية مهارات التواصل الرياضي لدى الطلبة.

٥ – كتابة النظرية: $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ على اللوح، والتطرق إلى فقرة (فكر وناقش)، صفحة (٣٩)؛ لتوضيح شروط النظرية.

٦ – تكليف الطلبة بحل تدريب (١)، مع متابعة الحلول وتقديم التغذية الراجعة.

٧ – مناقشة الطلبة بحل الأمثلة (٤ ، ٥، ٦ ، ٧) على اللوح مع تذكيرهم في المتطابقات المثلثية (والاطلاع على الملحق في كتاب الطالب)، وعرض الحل بأكثر من طريقة ومناقشته بمشاركة الطلبة لتنمية مهارات التفكير الإبداعي لديهم.

٨ – تكليف الطلبة بحل التدريبين (٣ ، ٤) مع متابعة الحلول، واكتشاف مواطن القوة والضعف لديهم.

٩ – تبيان أنه في نهايات الاقترانات المثلثية، يوجد أكثر من طريقة للحل، ومراعاة استقبال جميع الحلول من الطلبة ومناقشتها على اللوح.

١٠– ختم الدرس بمراجعة الطلبة بالمفاهيم التي وردت في الدرس؛ عن طريق توجيه السؤال: ماذا تعلمنا في هذا الدرس؟

١١– الاستماع إلى إجابات الطلبة، ثم مناقشتهم لتعرف مدى امتلاك الطلبة للمفاهيم التي وردت في الدرس.

١٢– تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل الدرس بوصفها واجبًا بيتيًّا، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة لهم.

معلومات إضافية

- الاستعانة بملحق الكتاب المدرسي؛ لمراجعة المتطابقات المثلثية.
- تنبيه الطلبة إلى أنه يمكن إيجاد النهاية بأكثر من طريقة، ولا يوجد طريقة واحدة للحل، ويفضل حل النهاية الواحدة على اللوح بأكثر من طريقة، ومناقشة تلك الطرائق بمشاركة الطلبة.
- يمكن توجيه الطلبة إلى استخدام برمجية رسم منحنيات الاقترانات؛ للتحقق من صحة الحل هندسيًّا عند إيجاد النهاية.

أخطاء شائعة

- يخطئ بعض الطلبة في تطبيق نظرية $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ وعدم مراعاة شروطها.
- يخطئ بعض الطلبة في اختيار المتطابقة المثلثية المناسبة لحل السؤال؛ في حال تعدد صورها مثل متطابقة جتــا (٢س).
- لتفادي وقوع الطلبة في تلك الأخطاء يمكن مناقشة شروط استخدام النظرية بمشاركة الطلبة أثناء تنفيذ الدرس، وتدريبهم على استخدام المتطابقة بمناقشة أمثلة كافية.

مراعاة الفروق الفردية

علاج: جد ١) $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \pi} \frac{\text{جا}(\text{س} - \pi)}{(\text{س} - \pi)}$ (١)

٢) $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{\text{جا}(\text{س} - \pi)}{(\text{س} - \pi)}$ (صفر)

إثراء: جد ١) $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{\text{جا س}}{\sqrt{\text{س}^3 + \text{س}^2}}$ (غير موجودة)

٢) $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow 1} \frac{\text{س جا} \frac{\pi}{\text{س}}}{\text{س} - 1}$ (π)

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم، الملاحظة، مراجعة الذات.

أداة التقويم: سلم التقدير (١–٢) البند (٢)، قائمة الرصد (١–٣)، سجل وصف سير التعلم (١–٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

فكر وناقش صفحة (٣٩)

$\frac{\text{جا } ٤\pi}{٥\pi}$ (لا تنطبق شروط النظرية)

تدريب (١)

١) $\frac{٧}{٣}$ ٢) ١ (فرض ص = س − π)

٣) ٩   ٤) $\frac{٢}{\pi}$

تدريب (٢)

(قسمة جميع الحدود على س ثم توزيع النهاية)

تدريب (٣)

١) $\frac{١}{٢}$ استخدام المتطابقة جتاس = ١ − ٢ جا $\frac{س}{٢}$

٢) ١٢ استخدام المتطابقة : جاأ + جاب = ٢ جا $\frac{أ + ب}{٢}$ جتا $\frac{أ - ب}{٢}$

طريقة أخرى: توزيع المقام ثم استخدام النظرية

تدريب (٤)

١) −١ استخدام المتطابقة جتاس = جا ($\frac{\pi}{٢}$ − س)

٢) $\frac{-\pi}{٢}$ استخدام المتطابقة جتاس = جا ($\frac{\pi}{٢}$ − س) ثم إخراج $\frac{\pi}{٢}$ عاملاً مشتركًا .

التمارين والمسائل

١) $\frac{٤}{٣}$ استخدام مباشر للنظرية.

٢) ٢ توزيع س في المقام ثم توزيع النهاية.

٣) ١ توزيع النهاية.

٤) $\frac{٧}{٢٠}$ تحويل ظتا^{٢} ٢س في البسط إلى ظا^{٢} ٢س في المقام وقتا٥س في البسط إلى جا٥س في المقام، ثم توزيع النهاية واستخدام النظرية.

٥) -٦ تعويض قيمة ٢ جتا^٢ س بـ (جتا ٢س + ١)، استخدام المتطابقة.

$$\text{جتاأ} - \text{جتاب} = -٢ \text{ جا } \frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢} \text{ جا } \frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}$$

٦) $\frac{١}{٢}$ الضرب في مرافق البسط.

٧) $\frac{-١}{\pi}$ تعويض مباشر.

٨) صفر توزيع س في المقام ثم توزيع النهاية واستخدام النظرية.

٩) $\frac{١}{٨}$ الضرب في مرافق البسط، استخدام المتطابقتين ١ − جا^٢ س = جتا^٢ س ،

جا ($\frac{\pi}{٢}$ − س)= جتا س

١٠) ٢ الضرب في مرافق البسط ، استخدام المتطابقة ١ + ظا^٢ س = قا^٢ س

١١) ٤ قسمة جميع الحدود على س^٢ ، ثم توزيع النهاية.

١٢) -٢ استخدام المتطابقتين جتا^{٢}س − حا^٢ س = جتا٢س ، جتا ($\frac{\pi}{٢}$ − س)= جا س

١٣) $\frac{-٩}{١٦}$ الضرب في مرافق البسط ومرافق المقام، ثم توزيع النهاية.

١٤) $\frac{٥}{٢}$ توزيع النهاية.

١٥) $\frac{١}{٢}$ استخدام المتطابقة ظتاس = ظا ($\frac{\pi}{٢}$ − س)

١٦) π قسمة البسط والمقام على س ، ثم استخدام المتطابقة جاس = جا(π − س)

١٧) $\frac{-١}{٨}$ تحليل المقام ثم توزيع النهاية.

١٨) غير موجودة، استخدام المتطابقة جتا٢س = ١−٢ جا^٢ س وحساب النهاية عن يمين العدد صفر ويساره.

١٩) -٣ استخدام المتطابقة جاس = جا(٣ π − س) ، إخراج $\frac{١}{٣}$ بوصفه عاملاً مشتركًا من المقام.

٢٠) $\frac{١}{\pi}$ استخدام المتطابقة ظاس = − ظا(٢ π − س)

٢١) جتا أ استخدام المتطابقة جاأ + جاب = ٢جا $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}$ جتا $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}$

٢٢) أ= ١٢ ب= ١,٥

٢٣) $\frac{٢}{٥}$ استخدام المتطابقة جاس = جا(π − س)

أولًا الاتصال عند نقطة | **عدد الحصص** حصتان

نتاجات التعلم

- يتعرف شروط اتصال اقتران عند نقطة.
- يبحث في اتصال اقتران عند نقطة.
- يتعرف نظريات الاتصال.

التكامل الرأسي

- حل أنظمة المعادلات في الصفوف من السابع وحتى الحادي عشر.
- الاقتران الحقيقي، واقتران القيمة المطلقة وأكبر عدد صحيح في الصف الحادي عشر.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (٤٥-٥٦).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- الاتصال، الاتصال عند نقطة.

التعلم القبلي

- نهاية الاقتران عند نقطة،حل أنظمة المعادلات، الاقتران الحقيقي، واقتران القيمة المطلقة وأكبر عدد صحيح.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي، الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، التفكير الناقد (التحليل).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة في مفهوم النهاية.

٢ - تقسيم الطلبة إلى مجموعات وتكليفهم بتنفيذ النشاط الوارد في مقدمة الدرس، ومن خلاله التوصل إلى مفهوم الاتصال.

٣ - مناقشة الطلبة في شروط اتصال اقتران عند نقطة، وكتابة الشروط على اللوح.

٤ - تكليف أكثر من طالب بالتحدث عن شروط اتصال اقتران عند نقطة بلغته الخاصة.

٥ - مناقشة المثالين (١، ٢) وتأكيد أهمية تبرير الإجابة عن طريق ذكر شروط الاتصال عند نقطة.

٦ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات، وتكليفهم بحل تدريب (١) ،وملاحظة الحلول وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٧ – مناقشة مثال (٣) وحله لتدريب الطلبة على البحث في اتصال اقتران أكبر عدد صحيح، وتنبيه الطلبة إلـى ضرورة إعادة تعريف الاقتران في فترة تحوي العدد المـراد البحث في اتصال الاقتران عنده، ومن خـلال توجيه أسئلـة عصف ذهني يمكن استـدراج الطلبة للوصول إلى أنَّ اقـتران أكبر عدد صحيح يكون دائمًا غير متصل عند نقط التشعب، ويمكن توضيح ذلك من خلال رسم منحنى الاقتران.
٨ – مناقشة مثال (٤) وحله بمشاركة الطلبة؛ لتدريب الطلبة على الاستفادة من شروط الاتصال عند نقطة لإيجاد الثوابت، ثم تكليف الطلبة بحل تدريب (٣) ومتابعة الحلول وتقديم التغذية الراجعة.
٩ – تقديم نظريات الاتصال وبرهان نظرية (٢) فرع (١)، مع التركيز على توضيح شروط توظيفها.
١٠– مناقشة فقرة (فكر وناقش) لتنبيه الطلبة إلى أن عكس النظريات يكون غير صحيح.
١١– تكليف الطلبة بحل تدريب (٤) للتحقق من قدرتهم على برهان النظريات، ومتابعة الحلول وتقديم التغذية الراجعة.
١٢– مناقشة مثال (٥)، وحله بوصفه تطبيقًا على نظريات الاتصال، ويمكن التنويه إلى أنه يمكن حل المثال بطريقتين مختلفتين.
١٣– تكليف الطلبة بحل تدريب (٥) في مجموعات، ومتابعة الحلول وتقديم التغذية الراجعة.
١٤– مناقشة مثال (٦) وحله، لتأكيد أنه يمكن إيجاد قاعدة ق×ل والبحث في اتصاله، وأنه لا يمكن تطبيق نظريات الاتصال في هذه الحالة، وسؤال الطلبة عن السبب واستقبال أكبر عدد ممكن من الإجابات، وتشجيع الطلبة على تقديم تبرير لإجاباتهم.
١٥– تكليف الطلبة بالتحدث عن شروط استخدام نظريات الاتصال، ويمكن عمل خريطة مفاهيمية تلخص هذه النظريات.
١٦– تكليف الطلبة بحل تدريب (٦) في مجموعات، ومتابعة الحل وتقديم التغذية الراجعة.
١٧– ختم الدرس من خلال سؤال الطلبة عن الأمور التي تعلموها فيه.
١٨– تكليف الطلبة بحل التمارين والمسائل بوصفها واجبًا بيتيًّا، والآخر في الغرفة الصفية ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم.

معلومات إضافية

– اقترانات الجذور التربيعية غير متصلة عند أصفارها؛ لأنها غير معرفة في جوار يحوي تلك الأصفار.
– اقتران أكبر عدد صحيح يكون غير متصل عند نقط التشعب؛ لأنه لايحقق شروط الاتصال عند تلك النقط.
– اقتران القيمة المطلقة يكون دائمًا متصلاً، ويمكن توضيح ذلك للطلبة هندسيًّا من خلال استخدام برمجيات رسم المنحنيات.

أخطاء شائعة

- يخطئ بعض الطلبة في البحث في شروط الاتصال عند نقطة، ويمكن معالجة ذلك من خلال مناقشة شروط الاتصال بمشاركة الطلبة أثناء تنفيذ الدرس وكتابتها على اللوح.
- يعتقد بعض الطلبة أنَّ الاقتران على الصورة ق(س) = $\sqrt{\text{أ} - \text{س}}$ يُعدُّ متصلاً عند س= أ ؛ حيث يمكن الاستعانة برسم المنحنى لتوضيح أنه متصل فقط من جهة اليسار عند س=أ وهذا لا يعني أنه متصل عند س=أ
- عدم التحقق من شروط نظريات الاتصال عند تطبيقها، ويمكن تدريب الطلبة على التحقق من شروط.

مراعاة الفروق الفردية

علاج: إذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} \text{س}^2 + ٢ &، \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} + ١ &، \text{س} > ١ \\ ٥ &، \text{س} = ١ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق عندما س=١ (غير متصل)

إثراء: إذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} ٦ - ٣\text{ب س} &، \text{س} \le -٢ \\ \text{جـ س}^2 - \text{أ س} + ٤ &، -٢ < \text{س} \le -١ \\ ٦ - \text{ب س} &، -١ < \text{س} \le ١ \\ \text{أ س}^2 + \text{جـ} &، \text{س} > ١ \end{cases}$$

متصلاً فجد قيمة الثوابت أ ، ب ، جـ (أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = ٣)

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التواصل، الملاحظة، مراجعة الذات.

أداة التقويم: سلم التقدير (١-١) البند (٣)، قائمة الرصد (١-٣)، سجل وصف سير التعلم(١-٤).

تدريب (١)

ق متصل عند س =٤؛ لأن شروط الاتصال متحققة.

تدريب (٢)

١) س تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة.

٢) ق(س) = ⟦ ٠,٥ س +٥⟧ ، ق متصل عند س= ١ و غير متصل عند س=٢

تدريب (٣)

أ= $\frac{٦}{٧}$ ، ب = $\frac{-١٢}{٧}$

فكر وناقش، صفحة (٥١)

١) العبارة خاطئة؛ لأنه ليس من الضروري أن يكون طرح اقترانين غير متصلين عند نقطة اقترانًا غير متصل عند النقطة نفسها، مثال:

ق(س) = ⟦س +١⟧ غير متصل عند س= ٠ ، والاقتران هـ(س) = ⟦س⟧ ، غير متصل عند س= ٠ ، لكن ناتج طرحهما متصل عند س= ٠

٢) العبارة خاطئة؛ لأن ق(س) = س − ١ ، كثير حدود متصل على مجموعة الأعداد الحقيقية، أما $\sqrt{س-١}$ فهو غير متصل عند س=١ ؛ لأنه غير معرف في فترة مفتوحة تحوي العدد ١

تدريب (٥)

الطريقة الأولى: ق×ل متصل لجميع قيم س <١؛ لأنه على صورة كثير حدود.

ق×ل متصل لجميع قيم س > ١؛ لأنه على صورة كثير حدود.

$$\lim_{س \leftarrow ١^{+}} ق×ل = \lim_{س \leftarrow ١^{-}} ق×ل = ٣$$

الطريقة الثانية: ابحث في اتصال ق وحده، ثم ابحث في اتصال ل وحده، ثم استخدم النظرية ٣ الفرع ٣

تدريب (٦)

$$ق×هـ = \begin{cases} (س-٥)^{٣} \times -١ & ، -٣ \leq س < -٢ \\ (س-٥)^{٣} \times صفر & ، -٢ \leq س < -١١ \end{cases}$$

ق× هـ غير متصل عند س= −٢؛ لأنه لا يحقق شروط الاتصال عند نقطة.

ق×هـ متصل عند س= ٥ ؛ لأنه يحقق شروط الاتصال عند نقطة.

التمارين والمسائل

١) قيم س التي عندها الاقتران ق غير متصل هي:

س= −٥ ؛ لأن النهاية لاتساوي قيمة الصورة.

س= ١ ؛ لأن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار.

س= ٤ ؛ لأن ق(٤) غير معرفة.

٢) الاقتران ق غير متصل عند س= ١,٢٥ (تحقق شروط الاتصال).

٣) الاقتران ق غير متصل عند س=١ لأنه غير معرف عند س=١

٤) الاقتران ق غير متصل عند س=٢ ، لأنه غير معرف عند س=٢

٥) الاقتران ق غير متصل عند س= صفرًا؛ لأن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار.

٦) الاقتران ل متصل عند س= ٣ ؛ لأنه يحقق شروط الاتصال.

٧) الاقتران ق غير متصل عند س=٢ ؛ لأن النهاية لا تساوي قيمة الصورة.

٨) الاقتران ك غير متصل عند س= ٢؛ لأن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار.

٩) أ = ٢

١٠) الاقتران ل غير متصل عند س= ١ ؛ لأن النهاية لا تساوي الصورة.

١١) الاقتران ق متصل عند س= ٢ (تحقق شروط الاتصال)

١٢) ب = −٧

١٣) الاقتران ق متصل عند س= ٣، (تحقق شروط الاتصال).

١٤) الاقتران ق غير متصل عند س = ١، كذلك الاقتران هـ غير متصل عند س = ١ لذا؛ لا نستطيع تطبيق نظريات الاتصال. فنجد قاعدة (ق+هـ) (س)

$$\text{ل(س)} = \text{(ق+هـ) (س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٢ & \text{، س} < ١ \\ ٣\text{س}^٢ + ٢\text{س} & \text{، س} \geq ١ \end{cases}$$

ومنه (ق+هـ) متصل عند س = ١ لأنّ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١}$ ل(س) = ل(١)

ثانيًا الاتصال على فترة

عدد الحصص حصتان

نتاجات التعلم

- يتعرف شروط الاتصال على فترة.
- يبحث في اتصال اقتران على فترة.

التكامل الرأسي

- الاقترانات النسبية، والاقترانات المثلثية، والاقتران الحقيقي، واقتران القيمة المطلقة، وأكبر عدد صحيح، في الصف الحادي عشر الفرع العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (٥٧-٦٥).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي: https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- الاتصال على فترة، اتصال من جهة اليمين، اتصال من جهة اليسار.

التعلم القبلي

- الاقتران الحقيقي، واقتران القيمة المطلقة، وأكبر عدد صحيح ، النهايات، والاتصال عند نقطة.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، التفكير الناقد (التحليل).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس عن طريق مراجعة الطلبة في مفهوم الاتصال عند نقطة.

٢ - تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، وتكليفهم بتنفيذ النشاط الوارد في مقدمة الدرس؛ للوصول إلى مفهوم الاتصال على فترة من جهة اليمين، ومن جهة اليسار.

٣ - مناقشة الشكل (١-٢٩) بمشاركة الطلبة للوصول إلى مفهوم اتصال على فترة.

٤ - إتاحة الفرصة للطلبة للتحدث عن شروط اتصال اقتران على فترة مفتوحة، وفترة مغلقة وفترة نصف مفتوحة، أوفترة نصف مغلقة.

٥ – كتابة التعريف الوارد في الصفحة (٥٨)، ثم مناقشة الطلبة في اتصال كثيرات الحدود والاقترانات النسبية على مجالها، ثم اتصال الاقترانين الدائريين الجيب وجيب التمام ، ويمكن الاستعانة بالرسم لتوضيح ذلك.

٦ – توجيه أسئلة حول نقط عدم الاتصال لاقتران الظل والقاطع وقاطع التمام، والاستماع إلى إجابات الطلبة، وإثارة النقاش والحوار.

٧ – مناقشة المثالين (١)، (٢) لتعميق فهم الطلبة حول كيفية البحث في اتصال الاقتران المتشعب، ثم تكليف الطلبة بحل التدريبين (١)، (٢) ضمن مجموعات ثنائية مع متابعة الحلول وتقديم الدعم والمساندة للطلبة.

٨ – مناقشة مثال (٣) مع تأكيد أنَّ اقترانات القيمة المطلقة تكون متصلة على مجالها، ثم تكليف الطلبة بحل تدريب (٣)، ومتابعة الحلول ومناقشتها على اللوح.

٩ – مناقشة مثال (٤)؛ لتدريب الطلبة على الاستفادة من شروط اتصال اقتران على فترة لإيجاد الثوابت، ثم تكليف الطلبة بحل تدريب (٤) ومتابعة الحلول وتقديم التغذية الراجعة.

١٠– ختم الدرس من خلال توجيه السؤال: ماذا تعلمنا في هذا الدرس؟

١١– الاستماع إلى الإجابات، وإتاحة الفرصة لأكبر عدد من الطلبة للإجابة وتقبل جميع الإجابات.

١٢– تكليف الطلبة بحل تمارين الكتاب واجبًا بيتيًّا، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

معلومات إضافية

– يكون ق(س) = $\sqrt{\text{س} - \text{أ}}$ ، متصلاً عند س=أ من اليمين، ولكنه غير متصل عند س= أ .

– يكون الاقتران غير متصل عند أطراف الفترة المعرف عليها.

– إذا كان ق(س) = ظاس؛ فإن نقط عدم الاتصال هي س = $\frac{\text{ن}\pi}{٢}$ ، ن= ١، ٣، ٥، . . .

– إذا كان ق(س)= قـــاس؛ فإن نقط عدم الاتصال هي س =$\frac{\text{ن}\pi}{٢}$ ، ن= ١، ٣، ٥، ...

– إذا كان ق(س)= قتــــاس؛ فإن نقط عدم الاتصال هي س= ن π ، ن= ٠، ١، ٢ ، ...

أخطاء شائعة

– يخطئ بعض الطلبة في تحديد نقط عدم الاتصال لاقتران القاطع وقاطع التمام والظل.

– يخطئ بعض الطلبة في البحث في شروط الاتصال للاقترانات المتشعبة، عن طريق عدم التحقق من اتصال الاقتران على كل فترة جزئية، كما في المثال الآتي:

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س - ١}{س + ١} & ، س < ١ \\ ٢س + ١ & ، س > ١ \\ ٥ & ، س = ١ \end{cases}$$

– تنبيه الطلبة إلى أنَّ ق متصل على الفترة $(-\infty ، ١) - \{-١\}$، ومنه ق(س) متصل على ح$-\{-١، ١\}$.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

إذا كان $ق(س) = \dfrac{٢}{\sqrt{س + ٢}}$ ؛ فما الفترة التي يكون فيها الاقتران ق متصلاً؟ (ق متصل على الفترة $(-٢ ، \infty)$)

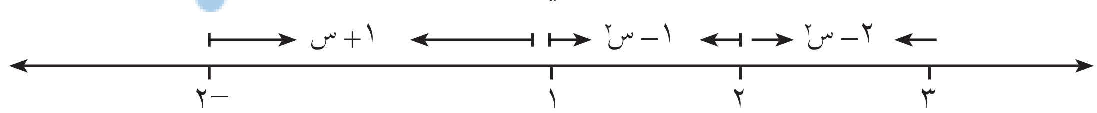
إثراء

١) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} |س - ١| + ٢س & ، -٢ \le س < ١ \\ [س] - س^٢ & ، ١ \le س \le ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق في الفترة $[-٢ ، ٢]$.

٢) أعط مثالاً على اقتران يكون متصلاً على $(-\infty، ٠)$ والفترة $(٠ ، \infty)$ ولا يكون متصلاً على $(-\infty، \infty)$.

الحل: ١) بإعادة تعريف الاقتران؛ انظر الشكل الآتي:



١) الاقتران متصل على كل فترة جزئية؛ لأنه على صورة كثير حدود، وغير متصل عند س= ١، ٢ ، أي متصل على الفترة $[-٢، ٢) - \{١\}$

٢) $ق(س) = \dfrac{١}{س}$

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل، مراجعة الذات، الورقة والقلم.

أداة التقويم: سلم التقدير العددي (١–١) البند (٤)، قائمة الرصد (١–٣)، سجل وصف سير التعلم(١–٤)، اختبار نهاية الوحدة.

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

فكر وناقش صفحة (٥٩)

١) العبارة صحيحة (نظرية)

٢) العبارة غير صحيحة؛ لأنَّ الاقترانات النسبية تكون غير متصلة عند أصفار المقام.

٣) العبارة صحيحة.

٤) العبارة صحيحة، يمكن الاستعانة بالرسم من خلال برمجية الرسم.

تدريب (١)

ق متصل على الفترة [٣ ، ٧)

تدريب (٢)

ق متصل على مجموعة الأعداد الحقيقية ح

تدريب (٣)

ق متصل على الفترة [٠,٠١ ، ٠,٩]

تدريب (٤)

أ= ١٠ ، ب = ١

التمارين والمسائل

١) الاقتران ق متصل على الفترة [−٢، ٢]

٢) الاقتران ل متصل على الفترة [−١٠ ، ٨]

٣) الاقتران ع متصل على ح − {٣}

٤) الاقتران ل متصل على الفترة (− ∞، ∞)

٥) الاقتران ع متصل على الفترة (٣، ٤)

٦) الاقتران ق متصل على الفترة [٠ ، ٦] − {٤}

٧) هـ = ٢,٥

٨) الاقتران ع متصل على ح − { ٢، ٤ ، ٦ }

٩) الاقتران ق متصل على الفترة [−١، ٢] − {٠}

١٠) أ < $\frac{١}{١٢}$

إجابات أسئلة
الوحدة الأولى

١)

أ) ٢ ب) −٢ جـ) ٢

د) ٤ هـ) أ = { ٠، ٢ } و) { ٠، ٢، ٤ }

٢) ١٧

٣) جـ = $\frac{١}{٣}$

٤) أ = −١٠

٥) أ= −١

٦) أ) = صفرًا ب) ١ جـ) $\frac{-١}{٢}$ د) ٤

هـ) $\frac{١}{٣٦}$ و) $\frac{١}{١١}$ ز) $\frac{٢}{٣}$ ح) $\frac{-١}{٣}$

ط) ٤ ي) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٧) ب= $\frac{٤}{٥}$

٨) ق غير متصل عند س=٢

٩) ع غير متصل عند س=٣

١٠) ل متصل عند س= $\frac{١}{٣}$

١١) ع متصل على الفترة (١، ٢).

١٢) هـ(س) متصل لجميع قيم س الحقيقية.

١٣) ق متصل على الفترة [−٢، ١) − { −١ }

١٤) الاقتران ل×هـ متصل على الفترة [٠، ٢)

١٥)

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة الصحيحة	٢٢	$\frac{١}{٢}$	١٨	{−٢، ٠، ٢}	٠	٩	٥	{٣،١}	−٤	(١، ٢)
رمز الإجابة الصحيحة	جـ	جـ	ب	د	ب	د	جـ	د	جـ	ب

استراتيجية التقويم: التواصل.

أداة التقويم: سلم التقدير (١–١).

البند	مؤشرات الأداء	ممتاز	جيد جدًّا	جيد	متوسط	ضعيف
١	**مفهوم النهاية** – يفسّر مفهوم نهاية اقتران عند نقطة. – يعبر عن النهاية باستخدام الرموز. – يجد النهاية من اليمين عند عدد. – يجد النهاية من اليسار عند عدد. – يميز بين نهاية اقتران عند نقطة، وقيمة الاقتران عند تلك النقطة.					
٢	**نظريات النهايات** – يذكر شروط تطبيق نظريات النهايات. – يطبق النظريات المناسبة لحساب النهايات. – يجد نهاية اقتران متشعب عند نقطة.					

ممتاز: يبدي فهمًا عميقًا، ولا يحتاج إلى المساعدة. جيد جدًّا: يبدي فهمًا، وقد يحتاج إلى المساعدة.

جيد: يبدي فهمًا جزئيًّا، ويحتاج إلى المساعدة. متوسط: يبدي فهمًا، ضعيفًا ويحتاج إلى المساعدة.

ضعيف: لا يبدي فهمًا، ويحتاج إلى المساعدة.

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.

أداة التقويم: سلم التقدير (١-٢).

البند	مؤشرات الأداء	ممتاز	جيد جدًّا	جيد	متوسط	ضعيف
١	**نهاية اقترانات كسرية** - يبدأ بالتعويض المباشر عند حساب نهاية اقتران نسبي عند نقطة. - يجد نهاية اقتران كسري عندما تقترب قيمة أ من صفر المقام. - يجد نهاية اقتران كسري بتوظيف الضرب في المرافق التربيعي. - يجد نهاية اقتران كسري بتوظيف توحيد المقامات. - يجد نهاية اقتران كسري بتوظيف الضرب في المرافق التكعيبي.					
٢	**نهاية اقترانات مثلثية** - يجد مجال الاقتران المثلثي. - يتوصل للحقيقة: $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{جا\ س}{س} = ١$ - يوظف النظرية لحساب نهاية اقترانات كسرية تحوي اقترانات مثلثية. - يجد قيمة النهاية لاقترانات مثلثية عند نقطة؛ باستخدام المتطابقات المثلثية المناسبة.					
٣	**الاتصال عند نقطة** - يفسر مفهوم الاتصال عند نقطة هندسيًّا. - يحدد اتصال اقتران عند نقطة من خلال منحناه. - يطبق شروط اتصال اقتران عند نقطة للبحث في اتصال الاقترانات عند نقطة. - يبرهن نظريات الاتصال.					

البند	مؤشرات الأداء	ممتاز	جيد جدًّا	جيد	متوسط	ضعيف
٤	**الاتصال على فترة** – يفسر مفهوم (اتصال اقتران على فترة). – يفسر مفهوم اتصال اقتران على نقطة من اليمين. – يفسر مفهوم اتصال اقتران عند نقطة من اليسار. – يكتب الصيغة الرمزية للاتصال عند نقطة من اليمين ومن اليسار. – يبحث في اتصال اقتران على فترة من خلال البحث في شروط الاتصال على فترة.					

ممتاز: يبدي فهمًا عميقًا، ولا يحتاج إلى المساعدة.
جيد جدًّا: يبدي فهمًا، وقد يحتاج إلى المساعدة.
جيد: يبدي فهمًا جزئيًّا، ويحتاج إلى المساعدة.
متوسط: يبدي فهمًا، ضعيفًا ويحتاج إلى المساعدة.
ضعيف: لا يبدي فهمًا، ويحتاج إلى المساعدة.

استراتيجية التقويم: الملاحظة.
أداة التقويم: قائمة الرصد (١–٣).

تستخدم هذه الأداة لتقويم عمل الطلبة في المجموعات التعاونية.

المعيار / رقم المجموعة	١	٢	٣	٤	٥
تعاون أفراد المجموعة.					
الالتزام بزمن المهمة.					
الدقة في الحل.					
توزيع المهام والأدوار.					

* يستخدم المعلم هذه الأداة عند متابعته أعمال المجموعات.

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.

أداة التقويم: سجل وصف سير التعلم (١–٤).

اسم الطالب:.................. موضوع الدرس:....................

تعلمت اليوم:

....

....

....

واجهت صعوبة في فهم الآتي:

....

....

....

ملاحظات المعلم:

....

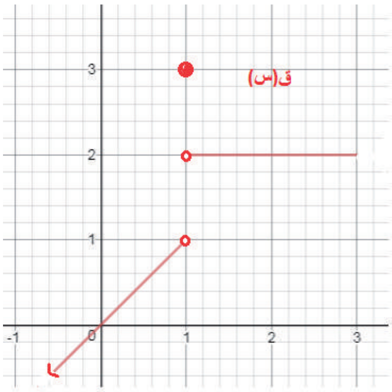
....

....

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.

أداة التقويم: اختبار نهاية الوحدة – النهايات والاتصال.

١) معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد كلًا مما يأتي:

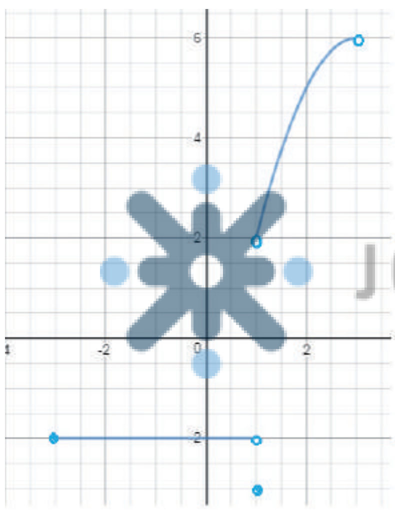


أ) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

ب) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

٢) إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^٢ + \text{جـ س} - ٢٠}{\text{س} - ٥}$ موجودة، فجد قيمة الثابت جـ

٣) معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على الفترة [−٣ ، ٣) ،أجب عن كل مما يأتي:



أ) ما قيم أ التي يكون عندها $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ غير موجودة؟

ب) ما قيم جـ حيث $\underset{\text{س}\to \text{جـ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = -٢$ ؟

٤) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \left(\dfrac{١}{\text{س}\sqrt{\text{س} + ١}} - \dfrac{١}{\text{س}}\right)$

ب) $\underset{\text{س}\to \frac{-\pi}{٤}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ظا س} + ١}{٤\text{س} + \pi}$

جـ) $\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\sqrt{\text{س ظاس}}}{\text{جا٣س}}$

د) $\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا}^٢\text{س}}{١ + \text{جتا}^٣\text{س}}$

هـ) $\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ظا ٣س} - \text{٣ظاس}}{\text{س}^٣}$

٥) إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{أجتاس} - \text{جتاب س}}{\text{س}^٢} = ٤$ ، فجد قيم كل من الثابتين أ ، ب

حلول أسئلة اختبار نهاية الوحدة

١)

أ) غير موجودة؛ لأنَّ الاقتران غير معرف في فترة مفتوحة تحوي العدد ٣

ب) غير موجودة؛ لأنَّ النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار.

٢) جـ = −١

٣)

أ) $(-\infty ، -٣] \cup [٣ ، \infty) \cup \{١\}$

ب) $(-٣ ، ١)$

٤)

أ) −٠,٥

ب) ٠,٥

جـ) $\frac{١}{٣}$

د) $\frac{٢}{٣}$

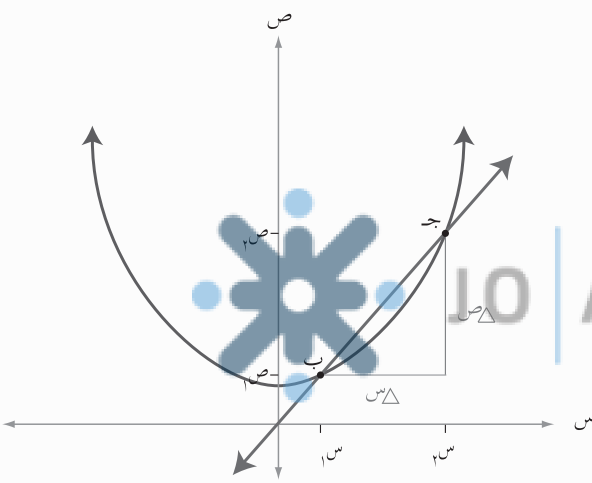
هـ) ٨

٥) أ = ١ ، ب = ±٣

الوحدة الثانية

٢

التفاضل



تتضمن بعض الظواهر في حياتنا تغيرًا في كمياتها أو قياساتها بالنسبة إلى متغير آخر، مثل سرعة صاروخ بالنسبة للزمن،أو قيمة إلى عملة بالنسبة لعملة أخرى،أو حجم بالون كروي إلى طول لطول نصف قطره، ... إلخ، يُستخدم علم التفاضل في دراسة مثل هذه التغيرات.

تطور علم التفاضل عبر دراسة ثلاث مسائل رئيسة هي: مسألة المماس و مسألة السرعة و مسألة القيم القصوى (الكبرى والصغرى) .

وسنقدم في هذه الوحدة مفهوم المشتقة وقواعد إيجادها.

يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- وصف القاطع والمماس لمنحنى اقتران هندسيًّا.
- إظهار فهم للمشتقة وإيجادها باستخدام التعريف.
- وصف وحساب المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة باستخدام التعريف بصيغ مختلفة.
- استخدام رموز مختلفة للتعبير عن المشتقة الأولى.
- التمييز بين الاتصال والقابلية للاشتقاق عند نقطة.
- تعليل عدم قابلية الاشتقاق.

تهيئة الوحدة

١) اربط كل عبارة في العمود الأيمن بما يناسبها في العمود الأيسر:

أ) اقتران	١) اقتران يمكن رسم منحناه على ورقة باستخدام القلم دون الحاجة إلى رفعه.
ب) ميل المستقيم	٢) عدد جـ تقترب منه قيم الاقتران ق كلما اقتربت س من أ.
جـ) اقتران متصل	٣) علاقة تربط كل قيمة من المجال بقيمة واحدة فقط من المدى.
د) $\underset{س \to ١^{+}}{نهــا}$ ق(س) = جـ	٤) نسبة فرق الصادات إلى فرق السينات في المستوى الإحداثي.
	٥) قيمة الاقتران ق عند أ يساوي جـ .
	٦) علاقة تربط كل قيمة من المجال بقيمة واحدة على الأقل من المدى.

في السؤالين ٢ ، ٣ اختر الإجابة الصحيحة :

٢) ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، هو :

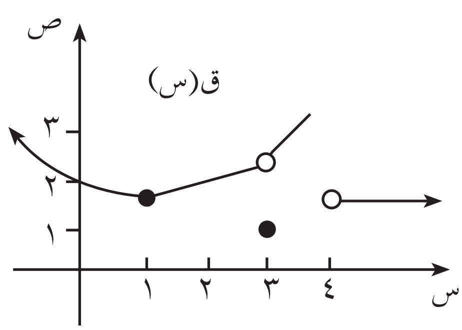
أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ب) ١ جـ) $\sqrt{٣}$ د) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

٣) مجال الاقتران ق(س) = $\frac{س - ١}{\sqrt{س - ٢}}$ هو :

أ) $(٢ ، \infty)$ ب) $[٢ ، \infty)$ جـ) ح د) ح − {١، ٢}

* اعتمد على منحنى الاقتران ق(س) المرسوم في الشكل للإجابة عن الأسئلة من ٤ إلى ١٣ .

– اذكر إن كانت النهاية موجودة أم لا.



٤) $\underset{س \to ٣^{+}}{نهــا}$ ق(س) ٥) $\underset{س \to ٣^{-}}{نهــا}$ ق(س)

٦) $\underset{س \to ٣}{نهــا}$ ق(س) ٧) $\underset{س \to ٤}{نهــا}$ ق(س)

٨) $\underset{س \to ٢}{نهــا}$ ق(س) ٩) $\underset{س \to ١}{نهــا}$ ق(س)

– اذكر إن كان الاقتران متصلًا أم لا عند النقطة المطلوبة:

١٠) س = ١ ١١) س = ٢ ١٢) س = ٣ ١٣) س = ٤

– في الأسئلة ١٤ إلى ١٦؛ جد قيم الاقتران ق عند قيمة (قيم) س المبيَّنة:

١٤) ق(س) = $|٤س - ١٢|$ ، س = ٥ ، س = −١

١٥) ق(س) = $[\![٢س - ٨]\!]$ ، س = ٤ ، س = ٣,١

١٦) ق(س) = ٨جاس جتاس − $\sqrt{٣}$ ، س = $\frac{\pi}{٣}$

− في التمارين (١٧ إلى ٢٠) جد النهاية:

١٧) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ (س^٢ − ٣س + ٥)

١٨) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}}$ $\sqrt{١ - ٤س}$

١٩) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}}$ $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ - س - ٢}$

٢٠) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ $\frac{\text{جا ٦س}}{\text{٣ س}}$

في التمرينين ٢١ ، ٢٢ جد ميل المستقيم المار بالنقطتين:

٢١) (٢ ، − ١) ، (− ٣، ٤) ٢٢) (٤ ، ٢) ، (٢، ١)

٢٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س - ٦ & ، س \geq ٢ \\ ٦ - ٣س & ، س < ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

إجابات التهيئة

١) أ : ٣ ب: ٤ جـ : ١ د: ٢

٢) جـ	٣) أ	٤) موجودة	٥) موجودة
٦) موجودة	٧) غير موجودة	٨) موجودة	٩) موجودة
١٠) متصل	١١) متصل	١٢) غير متصل	١٣) غير متصل
١٤) ٨ ، ١٦	١٥) صفر، − ٢	١٦) $\sqrt{٣}$	١٧) ٣
١٨) ٣	١٩) $\frac{٢}{٣}$	٢٠) ٢	٢١) − ١
٢٢) $\frac{١}{٢}$	٢٣) متصل		

أولًا | معدل التغير | عدد الحصص: حصتان

نتاجات التعلم

- يجد معدل التغير في فترة محددة.
- يفسر مفهوم معدل التغير هندسيًا، وفيزيائيًّا.

التكامل الرأسي

- الاقترانات الحقيقية، والاقترانات الخاصة (المتشعبة والقيمة المطلقة وأكبر عدد صحيح) في الصف الحادي عشر العلمي.
- القاطع في الصف العاشر الأساسي .

التكامل الأفقي

- السرعة المتوسطة في مبحث الفيزياء.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (٧٤-٨١).

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- التغير في س: Δ س، التغير في ص: Δ ص
- معدل التغير في ص بالنسبة إلى س: $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$
- القاطع، زاوية ميل القاطع، السرعة المتوسطة ($\bar{ع}$).

التعلم القبلي

- قيمة اقتران عند نقطة، نهاية اقتران عند نقطة، الاتصال عند نقطة ، الاتصال على فترة، طرق إيجاد النهايات، ميل المستقيم.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، التفكير الناقد (التحليل).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد من خلال طرح السؤال الآتي على الطلبة: كيف تعرّف ميل مستقيم يشترك مع منحنى اقتران في نقطتين من نقاطه؟ (يسمى قاطعًا).

٢ – الانطلاق من هذا السؤال لبيان الحاجة إلى معلومات تتعلق بالاقتران لتعريف ميل هذا المستقيم، وأنهم في هذا الدرس سوف يتعلمون كيف يجدون ميل القاطع لمنحنى اقتران.

٣ – مراجعة الطلبة بالموضوعات الآتية: قيمة اقتران عند نقطة، ميل المستقيم إذا عُلمت نقطتان عليه، ظل الزاوية.

٤ – مفهوم التغير من مواقف حياتية، ويمكن الاستعانة بأمثلة وردت في مقدمة هذه الوحدة صفحة (٧٢).

٥ – تعريف التغير في س ورمزه Δ س من الكتاب صفحة (٧٥)، ثم مناقشة مثال (١) وتكليف الطلبة بحل تدريب (١) والتحقق من الإجابات، وتأكيد أنه من الممكن أن يكون التغير في س سالبًا كما في فرع (١).

٦ – تقديم تعريف التغير في ص ورمزه Δ ص من الكتاب صفحة (٧٥)، والتركيز على الصور المختلفة لكتابته وارتباطه في التغير في س، ثم مناقشة مثال (٢).

٧ – تعريف معدل التغير في ص بالنسبة إلى س: $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ من الكتاب صفحة (٧٦)، والتركيز على الصور المختلفة لكتابته، وأن معدل التغير يكون على فترة، ثم مناقشة المثالين (٣،٤). تأكيد أن فترة التغير قد تتضمن نقطة تشعب كما في مثال (٤).

٨ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات ثنائية، وتكليفهم بحل التدريبين (٢،٣) ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة.

٩ – مناقشة التفسير الهندسي لمعدل التغير؛ كما ورد في الكتاب صفحة (٧٨) ثم مناقشة مثال (٥)، وتكليف الطلبة بحل تدريب (٤) للتأكد من امتلاكهم مهارة إيجاد معدل التغير للاقتران في فترة معطاة.

١٠– مناقشة التفسير الفيزيائي لمعدل التغير كما ورد في الكتاب صفحة (٧٨)، ثم مناقشة مثال (٦)، ثم توجيه الطلبة إلى حل تدريب (٥) على شكل مجموعات ثنائية، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة.

١١– حل و مناقشة مثال (٧)، ثم تكليف الطلبة بحل تدريب (٦) للتأكد من فهمهم.

١٢– تقسيم الطلبة إلى مجموعات (٤–٦) وتكليفهم بتنفيذ ورقة العمل (٢–١) بند أولاً، متابعة الطلبة وتقديم الدعم لهم.

١٣– ختم الدرس من خلال سؤال الطلبة: ماذا تعلمتم في هذا الدرس؟ وما المفاهيم التي وردت في الدرس؟ والاستماع إلى إجاباتهم وتعزيزها.

١٤– تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل واجبًا بيتيًّا، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

معلومات إضافية

– تستعمل معدلات التغير في مجالات حياتية كثيرة، مثل: دراسة تزايد عدد السكان، معدلات الربح، السرعة والتسارع.

أخطاء شائعة

قد يخطئ الطلبة في تطبيق قاعدة إيجاد ميل القاطع أو معدل التغير في الفترة [س_1، س_2]؛ فيطبقون القاعدة بالشكل:

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_1 - \text{ص}_2}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{ق}(\text{س}_1) - \text{ق}(\text{س}_2)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

أكد تطبيق القاعدة لدى الطلبة بالشكل الصحيح.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

إذا كان ق(س) = ٤س + ٣ ، فجد ما يأتي :

١) التغير في س عندما تتغير س من ١ إلى ٣ . (٢)

٢) التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى ٣ . (٨)

٣) معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [١، ٣]. (٤)

إثراء

١) هل يختلف معدل التغير في الاقتران الخطي / الاقتران التربيعي باختلاف الفترة ؟ برر إجابتك.

٢) هل يمكن أن يكون لمنحنى اقتران قاطعا عمودي على محور السينات ؟ برر إجابتك.

٣) إذا كان ق(س) اقترانًا ثابتًا في الفترة [س_1، س_2] فجد معدل تغير الاقتران ق في هذه الفترة.

٤) إذا كان ق(س) = أ س^3 – ب س^2 + جـ ، أ ، ب ، جـ $\in$ ح؛ فأثبت أن معدل التغير في الفترة [س_1، س_2] يساوي أ (س_1 + س_2) + ب

الحل:

١) لا يختلف في الاقتران الخطي؛ لأن معدل تغير الاقتران في أية فترة هو ميل الخط المستقيم.
يختلف في الاقتران التربيعي؛ لأن معدل التغير في أية فترة هو ميل القاطع في تلك الفترة وهذا يختلف من فترة لأخرى.

٢) لا؛ لأن المنحنى الذي له قاطع عموي لا يمثل اقترانًا.

٣) صفر.

٤) طبق قانون معدل التغير للحصول على المطلوب.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات، التواصل، الملاحظة.

أداة التقويم: سلم التقدير (٢ – ١)، قائمة الرصد (٢ – ٣)، قائمة الرصد (٢ – ٦).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

التدريبات

(١) الفرع الأول – ٠,٣ الفرع الثاني ١

(٢) –١,٤ (٣) $\frac{١}{٢}$ (٤) – ١

(٥) ١١م/ث (٦) – ٣

التمارين والمسائل

١) أ) ٦ ب) هـ^{٢} + ٣هـ (٢) هـ + ٢ (٣) النقطة أ(١,٩ ، ٤,٤)

٤) مساحة المربع ق(س) = س^{٢}، س طول ضلع الصفيحة.

طبِّق قاعدة معدل تغير ق (س) في فترة فتكون الإجابة = ١٢,١ سم^{٢}

٥) طبِّق قاعدة معدل تغير هـ (س) في فترة فتكون الإجابة = – ١١

٦) طبِّق قاعدة معدل تغير ف(ن) في فترة فتكون الإجابة: أ) ٢٥ ب) ٥(١٢ – Δ ن)

٧) طبِّق قاعدة معدل تغير هـ (س) في فترة واستخدم المعلومة المعطاة فتكون الإجابة = ٦

٨) طبِّق قاعدة معدل تغير ق(س) في كل الفترات المعطاة . تكون الإجابة المطلوبة= ١١

٩) معدل تغير ق (س) في الفترة [١، ٢] = – ١، ق(١) = ٥

١٠) طبِّق قاعدة معدل تغير ق(س) في فترة فتكون الإجابة = $\frac{٤}{٣}$

١١) طبِّق معدل تغير ق (س) في الفترة [١، س$_{٢}$] تحصل على معادلة تربيعية في س$_{٢}$. الإجابة = ٢

١٢) – $\frac{١}{٢}$

إجابات ورقة العمل (٢–١)

١) أ) التغير ٨، معدل التغير ٤ ب) التغير– ٨ ، معدل التغير ٤

جـ) التغير ٤ Δ س ، معدل التغير ٤

٢) أ) التغير ٢٠، معدل التغير ١٠ ب) التغير – ٢١ ، معدل التغير ٧

جـ) التغير (Δ س)^{٢} + ٢ س$_{١}$ Δ س + ٢ Δ س ، معدل التغير ٢ س$_{١}$ + Δ س +٢

٣) التغير ١، معدل التغير٤

ثانيًا | المشتقة الأولى | عدد الحصص | ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يتعرف المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة، هندسيًّا.
- يفسر المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة، هندسيًّا.
- يجد المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة باستخدام التعريف ، وبصورتها العامة.
- يبحث في قابلية اشتقاق اقتران على فترة.

التكامل الرأسي

- الاقترانات النسبية والكسرية، في الصف الحادي عشر العلمي.
- المماس في وحدة الدائرة في الصف العاشر .

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (٨٢-٩٢).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https: //edraak.org / learn /k12/ math-g12-jo-vv1

المفاهيم والمصطلحات والرموز

المشتقة الأولى لاقتران عند النقطة ($س_١$، $ص_١$) رمزها $ق'(س_١)$، المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة من اليمين رمزها $ق'_+(س_١)$، المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة من اليسار رمزها $ق'_-(س_١)$.

التعلم القبلي

- معدل تغير اقتران على فترة، نهاية اقتران عند نقطة، طرق إيجاد النهايات، التفسير الهندسي لمعدل التغير.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، ورقة عمل)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد من خلال طرح السؤال الآتي: كيف نعرّف مماس منحنى اقتران عند نقطة تقع عليه؟ استمع للإجابات وبيّن لهم أننا سنجيب على السؤال في هذا الدرس.

٢ - إبراز أهمية المشتقة الأولى في الرياضيات والعلوم الأخرى؛ فمثلًا في الفيزياء مشتقة المسافة بالنسبة للزمن هي السرعة، ومشتقة السرعة بالنسبة للزمن هي التسارع، وفي الكيمياء المشتقة هي معدل التفاعل.

٣ – مراجعة معدل تغير اقتران على فترة، ونهاية اقتران عند نقطة، وطرق إيجاد النهايات، والتفسير الهندسي لمعدل التغير عن طريق توجيه الأسئلة، والاستماع لإجابات الطلبة وتعزيزها.

٤ – تقديم مفهوم المشتقة الأولى هندسيًا كما ورد في الكتاب صفحة (٨٢)، وتأكيد أن هذا إجابة على السؤال المطروح في بداية الحصة، تعريف الطلبة بالرموز المختلفة للمشتقة الأولى عند نقطة، كتابة تعريف المشتقة عند نقطة على اللوح بشكل واضح.

٥ – تقديم مفهومي قابلية الاشتقاق، وعدم قابلية الاشتقاق عند نقطة، والتركيز على ربطهما بوجود وجود النهاية أو عدم وجودها.

٦ – حل مثال (١) ومناقشته في صفحة (٨٤) من الكتاب، والتركيز على طريقة حساب المشتقة عند نقطة، ثم مناقشة المثال (٢) الذي يوظف المشتقة في إيجاد النهايات.

٧ – تكليف الطلبة بحل تدريب (١) ومتابعة الحلول، ورصد الأخطاء ثم مناقشة الإجابات .

٨ – اشتقاق الصورة الثانية للمشتقة بالتعاون مع الطلبة تحت عنوان «تعميم» وتأكيد أن الصورتين متكافئتان.

٩ – حل المثالين (٣، ٤) ومناقشتهما وتأكيد استخدام الصورة الثانية للمشتقة. تكليف الطلبة بحل تدريب (٢) ومتابعة الحلول ورصد الأخطاء ثم مناقشة الإجابات وتقديم التغذية الراجعة.

١٠– تقديم تعريف كل من المشتقة من اليمين والمشتقة من اليسار عند نقطة، والرموز المستخدمة في التعبير عنهما والعلاقة بينهما، وبين المشتقة الأولى عند نقطة، ثم مناقشة مثال (٥) لتوضيح طريقة البحث في المشتقة عند نقطة التشعب، وربطها بإيجاد نهاية اقتران عند نقط التشعب.

١١– تكليف الطلبة بحل تدريب (٣) لإكسابهم القدرة على حساب المشتقة الأولى عند نقطة التشعب، ومتابعة الحلول، ورصد الأخطاء ثم مناقشة الإجابات.

١٢– تقديم فكرة الحاجة إلى التعامل مع المشتقة الأولى بوصفها اقترانًا؛ كما سيرد لاحقًا في تطبيقات التفاضل، وتقديم الصورتين المستخدمتين لإيجاد المشتقة كما وردتا في الكتاب صفحة (٨٧).

١٣– مناقشة عدم قابلية اشتقاق اقتران عند طرفي فترة مغلقة معرف عليها، وربط ذلك بخبرات الطلبة في إيجاد النهاية عند طرفي الفترة المغلقة، تقديم التعميم الوارد في نهاية صفحة (٨٧) .

١٤– حل مثال (٦) ومناقشته بشكل متعمق؛ لأن حله يمثل طريقة بحث مشتقة اقتران على فترة مغلقة، وتأكيد إمكانية إيجاد قَ(س) بطريقتين، ثم مناقشة مثال (٧) بوصفه تأكيدًا على استخدام المشتقة كاقتران في س.

١٥– تكليف الطلبة بحل تدريب (٤) من خلال مجموعات ثنائية، بالتحقق من امتلاك الطلبة مهارة إيجاد المشتقة بشكل عام.

١٦– حل مثال (٨) بوصفه مثالًا أو تطبيقًا عمليًا على المشتقة، والتركيز على الربط بين المشتقة، ومعدل تغير اقتران عند نقطة. ثم تكليف الطلبة بحل تدريب (٥) ومتابعة الحلول؛ لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم.

١٧- حل المثال (٩) ومناقشته وتأكيد طريقة حله باعتبار المهارات التي فيه من المهارات العقلية العليا.

١٨- تقسيم الطلبة إلى مجموعات (٤-٦) وتكليفهم بتنفيذ ورقة العمل (٢-٢). ثم متابعة الطلبة وتقديم الدعم لهم ثم ختم الدرس بسؤالهم عن المفاهيم والتعريفات التي وردت في الدرس.

١٩- تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل واجبًا بيتيًا، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

معلومات إضافية

- سيناقش الدرس القادم العلاقة بين الاشتقاق والاتصال عند نقطة. إذا كان اقتران غير متصل عند نقطة فهو غير قابل للاشتقاق عند هذه النقطة. في هذا الدرس يُستخدم تعريف المشتقة لبحث قابلية الاشتقاق عند نقطة، وفي هذه الحالة لا حاجة للبحث في الاتصال.
- استخدم العلماء القدماء مفهوم المشتقة في الهندسة على أنه ميل المماس .أول من اكتشف مشتقة كثير الحدود شرف الدين الطوسي (١١٣٥ - ١٢١٣ م). أما الاتجاه الحديث في حساب التفاضل فيعود إلى إسحق نيوتن (١٦٤٣ - ١٧٢٧) وليبنتز (١٦٤٦ - ١٧١٦) وكان نيوتن أول من طبق التفاضل في الفيزياء النظرية. طور ليبنتز أكثر رموز التفاضل المستخدمة حاليًا.

أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلبة في حساب مشتقة اقتران باستخدام التعريف عند نقطة التشعب؛ نتيجة الخطأ بحساب قيمة الاقتران عند هذه النقطة . فمثلاً في الاقتران:

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س \leq ٣ \\ ٢س + ١ & ، س > ٣ \end{cases}$$

ق(٣) = ٩ ومن الخطأ القول ق(٣) = ٧

أكِّد أن قيمة الاقتران عند نقطة التشعب تكون في الجزء الذي فيه المساواة.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة كل اقتران عند النقطة المطلوبة:

أ) $ق(س) = س + ٢$ ، $س = ١$ ب) $ق(س) = \sqrt{س}$ ، $س = ٤$

٢) جد $قَ(س)$ باستخدام تعريف المشتقة:

أ) $ق(س) = ٣س$ ب) $ق(س) = س^٢ + ٦ س$.

الحل:

١) أ) ١ ب) $\frac{١}{٤}$

٢) أ) ٣ ب) ٢ س + ٦

إثراء

١) إذا كان ق(س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، فأجب عما يأتي:

أ) هل يوجد مماس للاقتران ق عند س = ٢؟

ب) هل يوجد عدد جـ بحيث يكون قَ (جـ) = ٠

جـ) اقترح فترة يكون لمنحنى الاقتران مماس عند نقطة من نقاطها.

٢) إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا فأثبت أنَّ:

$$\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(س + نهـ) - ق(س - نهـ)}{هـ} = ٢ن قَ (س)$$

الحل:

١) أ) لا ؛ لأنَّ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ ب) لا

جـ)] ٢، ٣ [، مماس عند س = $\frac{٩}{٤}$

٢) اتبع خطوات مثال ٩ من هذا الدرس .

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات ، التواصل، الورقة والقلم.

أداة التقويم : سلم التقدير (٢-١)، قائمة الرصد (٢-٣)، ورقة العمل (٢-٢).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

التدريبات

١) (١) ٥ (٢) افرض ٥ هـ = ل ، الإجابة - ١٠

٢) $\frac{١}{٩}$

٣) قَ(-١) = ٤ ، قَ(١) غير موجودة ، $قَ_{-}(١) = ٤$ ، $قَ_{+}(١) = ٢$

٤) $\frac{٨ - س^٢}{(س^٢ + ٨)^٢}$

٥) م(س) = $س^٢$. معدل التغير عند نقطة مَ(س) = ٢س (باستخدام التعريف) ، مَ (٢٠) = ٤٠ سم

التمارين والمسائل

١) أ) – ٥ ب) ١ جـ) $\frac{١}{٤}$

د) قَ(٠) غير موجودة ، قَ(٦) غير موجودة ، قَ(٣) =٥

هـ) كَ(١) = –٢ ، كَ(٢) غير موجودة و) قَ(– ١) = $\frac{٣}{٢}$

٢) أ) $\frac{٢ س^٣ + ٤}{س^٢}$ ب) $\frac{١}{\sqrt{٢س - ٦}}$ جـ) ٣ $س^٢$

د) $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$

٣) أ) إضافة وطرح ق(س) في البسط ثم فصل الكسر إلى جزأين .

ب) إضافة وطرح ع ق(ع) في البسط ثم فصل الكسر إلى جزأين .

جـ) إخراج ٣ عاملًا مشتركًا من البسط ثم إضافة وطرح ع ق(س) من البسط، ثم فصل الكسر إلى جزأين.

٤) إضافة وطرح ق(٥) في البسط ثم فصل الكسر إلى جزأين، ثم فرض ٤هـ = م ،– ٢ هـ = ل أو أية رموز أخرى.

٥) تطبيق الصيغة الثانية من تعريف المشتقة عند نقطة.

٦) ع = نق + ٢ ، م(نق) = ٢ π نق (نق + ٢) ، مَ(٦)= ٢٨ πسم

٧) ٢٤

٨) ح (ل) = $ل^٣$ ، حَ (٢) = ١٢ وحدة مربعة (باستخدام التعريف).

٩) اشتق حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف القطر باستخدام التعريف.

إجابات ورقة العمل (٢–٢)

١) أ) ٤ ب) ٣

٢) باستخدام التعريف $قَ_-$(– ٣) = – ٢ ، $قَ_+$(– ٣) = صفرًا ، قَ(– ٣) غير موجودة

٣) استخدم التعريف . الإجابة $\frac{٣}{٨}$

ثالثًا الاتصال والاشتقاق

عدد الحصص: حصتان

نتاجات التعلم

- يفسر العلاقة بين اتصال اقتران عند نقطة، وقابلية اشتقاقه عند هذه النقطة.
- يدرس قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة معينة مستعينًا بالاتصال.
- يبين الحالات التي يكون فيها الاقتران غير قابل للاشتقاق عند نقطة.

التكامل الرأسي

- الاقترانات الحقيقية في الصف الحادي عشر العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (٩٣-١٠١).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي https://programs.edraak.org/learn/k12/math-g12-jo-vv1

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة، اتصال اقتران عند نقطة.

التعلم القبلي

- نهاية اقتران عند نقطة، طرق إيجاد النهايات،اتصال اقتران عند نقطة. المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة، المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة من اليمين ، المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة من اليسار.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، التدريبات والتمارين)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، الاستقصاء.

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال مراجعة تعريف اتصال اقتران عند نقطة، وقابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة، المشتقة من اليمين عند نقطة ، المشتقة من اليسار عند نقطة.

٢ - عرض مسائل لاقترانات متصلة عند نقاط معينة، بحيث يكون بعضها قابلاً للاشتقاق وبعضها غير قابل للاشتقاق عند هذه النقاط؛ على أن تتضمن المسائل اقترانات تتشعب قواعدها عند النقاط المعنية، ويكون المطلوب فيها بحث الاتصال وقابلية الاشتقاق عند النقط المحددة.

٣ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات (٤–٦)، والطلب إليهم الإجابة عن الأسئلة التي عُرضت في الفقرة السابقة؛ بحيث تُعطى كل مجموعة سؤالاً واحداً، ثم عرض حلول المجموعات.

٤ – طرح السؤال: إذا كان الاقتران ق متصلاً عند نقطة؛ فهل يكون قابلاً للاشتقاق عند هذه النقطة؟ الاستماع للإجابات من المجموعات؛ لاستقصاء العلاقة بين الاتصال وقابلية الاشتقاق عند نقطة بالاستعانة بالأمثلة السابقة التي حُلَّت.

٥ – طرح السؤال: إذا كان الاقتران ق قابلًا للاشتقاق عند نقطة فهل يكون متصلًا عند هذه النقطة؟ الاستماع للإجابات ثم عرض نظرية (١) والتركيز على الفرضيات، والعلاقات المتضمنة فيها ومناقشة برهانها.

٦ – حل مثال (١) ومناقشته بوصفه تطبيقًا على النظرية والتركيز على مثل هذا النوع من الأسئلة. أكد المعنى الهندسي لوجود المشتقة عند نقطة، وهو وجود مماس واحد فقط لمنحنى الاقتران عند هذه النقطة، وهذا من أهم التطبيقات الهندسية في التفاضل.

٧ – حل مثال (٢) ومناقشته لتوضيح أن عكس النظرية غير صحيح، ودعم هذه الحقيقة بالإشارة لأمثلة حَلَّتها المجموعات في المهمة السابقة، ثم توجيه الطلبة إلى حل تدريب (١)، ومتابعتهم لتقديم الدعم.

٨ – طرح السؤال : إذا كان الاقتران غير متصل عند نقطة؛ فهل يمكن أن يكون قابلًا للاشتقاق عند هذه النقطة؟ الاستماع للإجابات ولتأكيد أن الإجابة الصحيحة في نص نظرية (٢)، ثم عرض النظرية.

٩ – حل ومناقشة مثال (٣) والتأكيد توظيف نظرية (٢) في حل الجزء الثاني منه. ثم توجيه الطلبة إلى حل تدريب (٢)، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم.

١٠– حل و مناقشة مثال (٤) وتأكيد أنه نمط آخر من الأسئلة يُطلب فيه بحث المشتقة على مجال الاقتران، وهذا يتطلب البحث في مشتقة الاقتران على فترة إضافة، إلى البحث عن قابلية الاقتران للاشتقاق عند نقطة (نقاط) التشعب إن وجدت.

١١– ختم الدرس بتكليف الطلبة بتنفيذ ورقة العمل (٢–٣) ومتابعة الطلبة وتقديم الدعم لهم وسؤالهم عن العلاقة بين الاتصال والاشتقاق، والنظريات التي تدعم هذه العلاقة.

١٢– تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل بوصفها واجبًا بيتيًّا، ثم مناقشة الإجابات في الحصة القادمة.

معلومات إضافية

- توفر النظرية (٢) في الصفحة (٩٧) من الكتاب المدرسي الوقت والجهد عند البحث في قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة. يمكن توضيح الفكرة بعرض المثال الآتي:

- إذا كان ق(س)= $\begin{cases} س + \sqrt{س + ١} &، س \leq ٤ \\ ٢س &، س > ٤ \end{cases}$ ، ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٤ .

الحل: الاقتران غير متصل عند س= ٤ فهو غير قابل للاشتقاق عندها.

أخطاء شائعة

- قد يصعُب على الطلبة فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق عند الربط بين النظريتين ١ ، ٢؛ ولذا أكد مضمون النظريتين وكيفية استخدامهما من خلال الأمثلة التوضيحية.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

إذا كان ق(س)= $\begin{cases} س^٢ &، س \leq ٣ \\ ٣س &، س > ٣ \end{cases}$ ، فأجب عما يأتي:

١) بيّن أن ق متصل عند س = ٣ .

٢) استخدم تعريف المشتقة لتثبت أنَّ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٣

الحل:

١) طبّق شروط الاتصال.

٢) استخدم تعريف المشتقة لتجد المشتقة من اليمين واليسار.

إثراء

اكتب اقترانًا متصلاً على مجاله و متشعبًا عند نقطتين من نقاطه؛ بحيث يكون قابلًا للاشتقاق عند نقطة وغير قابل للاشتقاق عند الأخرى.

الحل: انظر إجابات الطلبة وتحقق منها.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات، التواصل، الملاحظة، الورقة والقلم.

أداة التقويم: سلم التقدير (٢–١)، قائمة الرصد (٢ –٣)، قائمة الرصد (٢ –٦)، ورقة العمل (٢ –٣).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

التدريبات

١) الفرع الأول غير متصل عند س= ٢ ؛ لأن النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار.

الفرع الثاني غير قابل للاشتقاق عند س= ٢ ؛ لأن المشتقة من اليمين ≠ المشتقة من اليسار.

٢) غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ ؛ لأنه غير متصل عندها ، قَ(٤) = ٨ .

التمارين والمسائل

١) أ) غير قابل للاشتقاق عند س=١ ؛ لأنه غير متصل عندها.

ب) غير قابل للاشتقاق عند س= ٢ ؛ لأن المشتقة من اليمين ≠ المشتقة من اليسار.

جـ) لَ$\left(\frac{١}{٤}\right)$=٠ ، وغير قابل للاشتقاق عند س = − ١ لأنه غير متصل عندها

د) غير قابل للاشتقاق عند س = ٠ ، س = ٥ غير قابل للاشتقاق عند س= ٣ لأن المشتقة من اليمين ≠ المشتقة من اليسار.

٢) قَ(٩)= $\frac{١}{٦}$

٣) أ = − ١

٤) قَ(س)= $\begin{cases} -٢ & ،\ س < -١ \\ ٢س & ،\ -١ \leq س < ١ \\ \text{غير موجودة} & ،\ س = ١ \\ ١ & ،\ س > ١ \end{cases}$

٥) غير قابل للاشتقاق عند س= ٢ ؛ لأن المشتقة من اليمين ≠ المشتقة من اليسار.

٦) قَ(س)= $\begin{cases} ٠ & ،\ س < ٠ \\ -١ & ،\ ٠ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & ،\ س = ٠ ، ٤ ، ٥ \\ \frac{١}{(٥ - س)^{٢}} & ،\ س > ٤ ،\ س \neq ٥ \end{cases}$

٧) $\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \text{٠} & \text{،} \quad \text{١} < \text{س} < \text{٢} \\ \text{١}- & \text{،} \quad \text{٢} < \text{س} < \text{٣} \\ \text{١} & \text{،} \quad \text{٣} < \text{س} < \text{٤} \\ \text{غير موجودة} & \text{، س} = \text{١، ٢ ، ٣ ، ٤} \end{cases}$

إجابات ورقة العمل (٢-٣)

١) غير قابل للاشتقاق عند س = ١ ؛ لأنَّ المشتقة من اليمين ≠ المشتقة من اليسار

غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ ؛ لأنَّه غير متصل عند ٢ .

٢) أ = ٥

٣) الاقتران القابل للاشتقاق عند نقطة يكون متصلًا عند هذه النقطة.

الاقتران غير متصل عند نقطة يكون غير قابل للاشتقاق عند هذه النقطة.

الاقتران المتصل عند نقطة قد يكون قابلًا للاشتقاق، وقد لا يكون قابلًا للاشتقاق عند هذه النقطة.

أولاً	قواعد الاشتقاق ١	عدد الحصص	حصتان

نتاجات التعلم

- يستخدم قواعد الاشتقاق لإيجاد المشتقات.

التكامل الرأسي والأفقي

- كتاب الرياضيات جمع الاقترانات وطرحها في الصفين العاشر الأساسي، والحادي عشر العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٠٢-١٠٩).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي
https: //programs.edraak.org / learn /k12/math-g12-jo-vv1

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- مشتقة مجموع اقترانين، مشتقة طرح اقترانين

التعلم القبلي

- قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة، الاقتران الثابت، جمع الاقترانات وطرحها، اقتران كثير حدود.
- العلاقة $ع^{ن} - س^{ن} = (ع - س)\,(ع^{ن-١} + ع^{ن-٢}س + ع^{ن-٣}س^{٢} + \ldots + ع\,س^{ن-٢} + س^{ن-١})$

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، أوراق عمل)، التعلم في مجموعات (فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، حل المشكلات و الاستقصاء.

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال طرح السؤال: إذا كان كل من ق(س)، هـ(س) قابلاً للاشتقاق عند $س_{١}$ وكان ل(س) = ق(س) + هـ(س)، هل ل(س) قابلاً للاشتقاق عند $س_{١}$؟ إن كانت الإجابة نعم فكيف تجد $ل'(س_{١})$ ؟ كرر السؤال إذا كان م(س) = ق(س) - هـ(س)

٢ - تكليف الطلبة بإيجاد مشتقة اقتران مثل ق(س) = $٢س^{٣} + س^{٢} - ٨$ أو الاقتران ق(س) = $س^{٣}\,|س|$ أو أي اقتران آخر مشابه؛ باستخدام تعريف المشتقة، ثم سؤال الطلبة عن الوقت المستهلك والجهد المبذول لإيجاد المشتقة، والتوصل معهم إلى أهمية استخدام طرق بديلة لإيجاد مشتقة اقترانات من هذا النوع.

٣ – مناقشة قاعدة الاشتقاق (١) وتفسيرها هندسيًّا، وحل أمثلة كافية بوصفها تطبيقًا عليها.

٤ – كتابة العلاقة $ع^{ن} - س^{ن} = (ع - س)\,(ع^{ن-١} + ع^{ن-٢}س + ع^{ن-٣}س^{٢} + \ldots + ع\,س^{ن-٢} + س^{ن-١})$ على اللوح وتوضيح الحاجة إليها في البرهان، ثم عرض قاعدة (٢) ومناقشة برهانها مع الطلبة والتركيز عليها باعتبارها من القواعد الأساسية في الاشتقاق، مناقشة مثال (٢) بوصفه مثالاً مباشرًا على القاعدة.

٥ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات (٤ – ٦) وتوجيههم إلى إثبات صحة القاعدة (٣) مع المتابعة، وتقديم الدعم حسب الحاجة، ثم عرض أعمال المجموعات أمام الصف، ثم مناقشة المثالين (٣، ٤) وتأكيد أن حل مثال (٤) يتم دون الحاجة إلى إعادة تعريف القيمة المطلقة. تكليف المجموعات بحل تدريب (١)، ثم عرض أعمال المجموعات أمام الصف، التأكد من تطبيق قواعد الاشتقاق بشكل صحيح.

٦ – مناقشة قاعدة (٤) المتعلقة بالسؤال المطروح في بداية الحصة، ومناقشة برهانها وتأكيد أنها إحدى أهم قواعد الاشتقاق، ثم التعبير عن القاعدة بالكلام إضافة إلى الرموز، ومن ثم مناقشة مثال (٥).

٧ – مناقشة التعميم المتعلق باشتقاق مجموع ن من الاقترانات، ثم النتيجة المتعلقة بقابلية اقتران كثير الحدود للاشتقاق على ح.

٨ – حل الأمثلة (٦ ، ٧ ، ٨) ومناقشتها على اللوح باستراتيجية حل المشكلات بمشاركة الطلاب، والتركيز على إعادة تعريف اقترانات القيمة المطلقة وأكبر عدد صحيح وتطبيق قواعد الاشتقاق بشكل صحيح؛ بهدف تنمية قدرات الطلبة على اختيار القاعدة المناسبة.

٩ – تكليف المجموعات بحل التدريبين(٢ ،٣)، ومتابعتها لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم، ثم عرض أعمال المجموعات أمام الصف.

١٠– ختم الدرس بتكليف الطلبة بتنفيذ ورقة العمل (٢–٤)، ومتابعة الطلبة وتقديم الدعم لهم وسؤالهم عن قواعد الاشتقاق التي تعلموها في هذا الدرس، ولماذا يتم استخدامها، ويمكن ختم الدرس بتنفيذ مسابقة أو لعبة بين الطلبة حول نتاجات الدرس.

١١– تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل بوصفها واجبًا بيتيًّا، ثم مناقشة الإجابات في الحصة القادمة.

معلومات إضافية

يعتمد إيجاد المشتقات على استخدام قواعد الاشتقاق؛ لذلك لا بد للطالب من فهم قواعد الاشتقاق وحفظها واختيار المناسب منها عند حل التمارين والمسائل ، يشبه هذا الأمر إيجاد النهايات الذي يعتمد على استخدام الطريقة المناسبة لإيجاد النهاية.

أخطاء شائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في إيجاد مشتقة الاقتران الثابت من النمط ق(س) = حـ^{٣} ، حـ عدد ثابت، فيكتبون قَ(س) = ٣ حـ^{٢}. أكد أن حـ^{٢} ، حـ^{٣} ، حـ^{٤} ، ...الخ كلها أعداد ثابتة بالنسبة إلى س وأنَّ مشتقة الثابت صفر . قدّم تدريبات مشابهة.

– في بعض الاقترانات مثل ق(س) = ٣ س^{٤} – ٦س^{٣} + ٥س + ٢؛ قد يخطئ الطلبة بالقول إنَّ قَ(٠)=٠ لأنَّ ق(٠) = ٢ ، أكد لهم بأنه يجب إيجاد قَ(س) أولا ثم التعويض بالصفر.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) جد قَ(س) لكل مما يأتي

أ) ق(س) = $\pi \sqrt{٢}$ ب) ق(س) = س^{٣} + س^{٢} – ٤س – ٧

٢) إذا كان ق(س) = ل(س) + ٢ هـ(س) وكان لَ(١) = ٤ ، هـَ(١) = –٣ فجد قَ(١).

الحل:

١) أ) صفر   ب) ٣ س^{٢} + ٢ س – ٤

٢) – ٢

إثراء

١) كرة طول نصف قطرها (س) وحدة تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها، اكتب قاعدة لحساب معدل تغير حجم الكرة بالنسبة لطول نصف قطرها، ثم جد معدل تغير حجم الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ١٠ سم.

٢) إذا كان ق(س) = جـ س^{٣} + ٤ س ، جـ ثابتًا وكان

$$\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(-١ + هـ) - ق(-١)}{هـ} = ١٠$$ فجد قيمة الثابت جـ .

الحل:

١) ح = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} ، حَ = ٤π نق^{٢} ، حَ(١٠) = ٤٠٠π سم^{٢}

٢) قَ(–١) = ١٠ ، ومنه جـ = ٢

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم : مراجعة الذات، التواصل، الملاحظة، الورقة والقلم.

أداة التقويم: سلم التقدير (٢–٢)، قائمة الرصد (٢–٤)، قائمة الرصد (٢–٦)، ورقة العمل (٢–٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

التدريبات

١) الفرع الأول : صفر الفرع الثاني : − ٨ س الفرع الثالث: $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

٢) ٥

٣) الفرع الأول : ٣٢$\text{س}^{٣}$ − ٥٠ $\text{س}^{٤}$ الفرع الثاني: ق(س) = ٢ + س ، قَ(٤,٠) = ١

التمارين والمسائل

١) أ) صفر ب) ٤٠ $\text{س}^{٩}$

ج) صفر د) $\frac{١}{٤}$ $\text{س}^{٣}$

٢) أ) ٢ س + ٣ ب) $\frac{١}{٢}$ س

ج) ٤π $\text{س}^{٣}$ د) $\text{س}^{٣}$ + $\text{س}^{٢}$ − ١

٣) أ) −٢ ب) ٩

ج) −١٩,٢ د) ٤

٤) أ) ٣٠ ب) ١١

٥) أ = −٦ ، ب = ٢

٦) اشتق جزأي الاقتران ثم جد قَ_{+} (جـ)، قَ_{-} (جـ) ، قَ(جـ) = لَ(جـ)

إجابات ورقة عمل (٢–٤)

الاقتران	ق(س) = جـ	ق(س) = س	ق(س) = $\text{س}^{ن}$	ق(س) = ل(س) ± هـ (س)	ق(س) = حـ ل(س)
المشتقة	قَ(س) = ٠	قَ(س) = ١	قَ(س) = ن $\text{س}^{ن-١}$	قَ(س) = لَ(س) ± هـَ (س)	قَ(س) = حـ لَ(س)

الاقتران	ق(س) = ٦π	ق(س) = $\text{س}^{٢}$	ق(س) = $\text{س}^{٤}$ [س]	قَ(س)= $\frac{١}{٣}$ $\text{س}^{٣}$ − ٢$\text{س}^{٤}$	ق(س) =|٢س − ٦|
قيمة المشتقة	قَ(−٢) = ٠	قَ($\frac{١}{٢}$) = ١	قَ($\sqrt{٣}$) = ١٢	قَ (١) = −٧	قَ (٠) = −٢

ثانيًا قواعد الاشتقاق ٢

عدد الحصص ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يستخدم قواعد الاشتقاق لإيجاد المشتقات.

التكامل الرأسي والأفقي

- ضرب اقترانات كثيرات الحدود وقسمتها في الصف العاشر.
- ضرب الاقترانات، والاقترانات الكسرية في الصف الحادي عشر العلمي .

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١١٠-١١٨).
- منصة إدراك للتعليم المدرسي https: //programs.edraak.org / learn /k12/math-g12-jo-vv1

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- مشتقة حاصل ضرب اقترانين، مشتقة حاصل قسمة اقترانين.

التعلم القبلي

- قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة، مشتقة الاقتران الثابت، مشتقة جمع اقترانين، مشتقة طرح اقترانين.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر(الأسئلة والأجوبة، أوراق عمل)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، (التعلم التعاوني الجماعي)، التعلم من خلال النشاط، حل المشكلات والاستقصاء.

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس بطرح السؤال: إذا كان كل من ق(س)، هـ(س) قابلاً للاشتقاق عند $س_١$، وكان ل(س)= ق(س) ×هـ(س) هل ل(س) قابل للاشتقاق عند $س_١$؟ إن كانت الإجابة نعم فكيف تجد لَ($س_١$) ؟ كرر السؤال إذا كان م(س)= $\frac{ل(س)}{هـ(س)}$، هـ($س_١$) ≠ ٠.

٢ - تقسيم الطلبة إلى مجموعات (٤-٦) والطلب إليهم تنفيذ ورقة العمل (٢-٥).

٣ -عرض ما توصلت إليه المجموعات، وتوضيح أهمية وجود قاعدة لإيجاد مشتقة حاصل ضرب اقترانين؛ لما توفره من جهد ووقت.

٤ – كتابة القاعدة (١) على اللوح، المتعلقة بإيجاد مشتقة حاصل ضرب اقترانين على اللوح بالرموز والتعبير عنها بالكلام، ثم مناقشة المثال (١) بوصفه تطبيقًا مباشرًا على القاعدة، وتكليف الطلبة بحل تدريب (١).

٥ – عرض القاعدة (٢)، المتعلقة بإيجاد مشتقة حاصل قسمة اقترانين بالرموز والتعبير عنها بالكلام، ثم مناقشة المثال (٢) بوصفه تطبيقًا مباشرًا على القاعدة، وتكليف الطلبة بحل تدريب (٢).

٦ – عرض أمثلة لإيجاد مشتقات اقترانات تشتمل على حالات يكون فيها البسط عددًا ثابتًا والمقام اقترانًا للتمهيد للوصول إلى النتيجة (١). عرض حالات يكون فيها البسط اقترانًا والمقام عددًا ثابتًا، وحلها بطريقتين الأولى باعتبارها بسطًا ومقامًا والأخرى باعتبارها عددًا ثابتًا مضروبًا باقتران؛ مثال:

$$ق(س) = \frac{س^{٢} + ١}{٦} = \frac{١}{٦}(س^{٢} + ١)$$

٧ – مناقشة نتيجة (١) والتأكيد أنها حالة خاصة من القاعدة، (٢) ثم تكليف المجموعات بإثبات صحتها في فقرة (فكر وناقش) صفحة (١١٢).

٨ – مناقشة نتيجة ٢ والتأكيد أنها تعميم للقاعدة (٢) من قواعد الاشتقاق (١)، ثم مناقشة مثال (٣).

٩ – تكليف المجموعات بتنفيذ ما ورد في فقرة (فكر وناقش) صفحة (١١٣) ثم بحل تدريب (٣)، ومتابعة أعمال المجموعات لتقديم الدعم اللازم والتغذية الراجعة، ثم عرض ما توصلت إليه المجموعات.

١٠– مناقشة خطوات مشتقة اقتران متشعب الواردة في كتاب الطالب صفحة (١١٤)، وتأكيد تنفيذ الخطوات المتبعة في الكتاب، وخاصة عند نقاط التشعب.

١١– حل المثالين (٤ ، ٥) ومناقشتهما بوصفها تطبيقًا مباشرًا على إيجاد مشتقة اقتران متشعب.

١٢– تكليف الطلبة بحل تدريب (٤)، ومتابعة الحلول وتقديم المساعدة حسب الحاجة.

١٣– التركيز على أن فهم مشتقات الاقترانات الأساسية وحفظها، وقواعد الاشتقاق أمران مهمان في إيجاد مشتقات الاقترانات الأخرى. وأكد كذلك أنه يمكن تسهيل عملية اشتقاق بعض الاقترانات عند كتابتها بصورة إخرى.

١٤– ختم الدرس بسؤال الطلبة عن قواعد الاشتقاق التي تعلموها في هذا الدرس وفي الدرس السابق ولماذا يتم استخدامها، متابعة الطلبة وتقديم الدعم لهم، ويمكن عمل مسابقة بين طالبين أو فريقين على قواعد الاشتقاق (١)، (٢).

١٥– تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل بوصفها واجبًا بيتيًّا، ثم مناقشة الإجابات في الحصة القادمة.

معلومات إضافية

إذا استُخدم تعريف المشتقة الأولى لبحث قابلية اقتران للاشتقاق **عند نقطة التشعب** فلا حاجة لبحث الاتصال، أما البحث في الاتصال قبل البحث في الاشتقاق؛ فهو لتوفير الوقت والحكم بعدم قابلية الاقتران للاشتقاق عند نقطة إذا كان غير متصل عندها. إذا كانت نتيجة البحث اتصال الاقتران عند نقطة؛ فيمكن استخدام قواعد الاشتقاق في حالة كون أجزاء الاقتران على طرفي نقطة التشعب اقترانات كثيرة حدود أو كسرية.

أخطاء شائعة

– قد يخطئ الطلبة في إيجاد مشتقة قَ (س)= $\frac{\text{٤س + ٧}}{\text{٣س}}$ على الصورة قَ(س) = $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ أو على الصورة قَ (س)= $\frac{\text{٣(٤س+٧)−٤(٣س)}}{\text{٩س}^{\text{٢}}}$ لمعالجة ذلك أكد الصيغة الصحيحة مع مزيد من الأمثلة.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) جد قَ (س) لكل مما يأتي:

أ) ق(س) = (٢س$^{\text{٣}}$ + ٤) (١ – س)

ب) ق(س) = $\frac{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + س}}{\text{٤س}}$

٢) إذا كان ل(٣) = – ٢ ، لَ (٣) = ٨، هـ(٣) = ٢ ، هـَ(٣) = – ١٠ جد قَ (٣) في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = ل(س) × هـ (س)

ب) ق(س)= $\frac{\text{ل(س)}}{\text{هـ(س)}}$

الحل:

١) أ) ٦ س$^{\text{٢}}$ – ٨ س$^{\text{٣}}$ + – ٤

ب) $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$

٢) أ) – ٤

ب) – ١

إثراء

١) إذا كان ل(س) × ق(س) = جـ ، حيث جـ عدد ثابت وكان قَ (٢) = ٣ ، ق(٢) = – ٢ $\sqrt{\text{جـ}}$

فجد لَ (٢).

٢) العلاقة $\frac{\text{١}}{\text{ع}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ + $\frac{\text{١}}{\text{ص}}$ تربط بين البعد البؤري (ع) لعدسة محدبة، س ، ص بعد الجسم و بعد الصورة المتكونة له عن مركز العدسة على الترتيب؛ إذا كانت ع = ٢ سم ، فجد:

أ) صيغة عامة لمعدل تغير ص بالنسبة إلى س.

ب) معدّل تغير ص بالنسبة إلى س؛ عندما تكون س = ١٢ سم.

الحل:

١) اكتب ل(س) بدلالة ق(س) ثم اشتق وعوض. الإجابة $\frac{\text{–٣}}{\text{٤}}$

٢) أ) اكتب ص بدلالة س ثم اشتق صَ= $\frac{\text{–٤}}{\text{(س–٢)}^{\text{٢}}}$

ب) – ٠,٠٤

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات، التواصل، الملاحظة، الورقة والقلم.

أداة التقويم: سلم التقدير (٢-٢)، قائمة الرصد (٢-٤)، قائمة الرصد (٢-٦)، اختبار قصير.

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

التدريبات

١) $٢ - ٤ س^٣ - ١٨ س^٢$

٢) $\frac{-٣٢}{٩}$

٣) الفرع الأول: $\frac{-٢\sqrt{٣}}{س^٣}$ الفرع الثاني: $\frac{-٢}{س^٢} - ٢ س$

٤) $$قَ(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{(س + ١)^٢} &، س < ١ \\ \text{غير موجودة} &، س = ١ ، -١ \\ ١ &، س > ١ \end{cases}$$

فكر وناقش صفحة (١١٢)

نتيجة (١)

بتطبيق قاعدة مشتقة قسمة اقترانين

$$قَ(س) = \frac{ل(س) \times ٠ - أ \times لَ(س)}{(ل(س))^٢} = \frac{أ \times لَ(س)}{(ل(س))^٢} ، ل(س) \neq ٠$$

فكر وناقش صفحة (١١٣)

$$قَ(س) = \frac{س^٣ \times ٤ س^٣ - (س^٤ - ٣)(٣ س^٢)}{(س^٣)^٢} = \frac{٤ س^٦ - ٣ س^٦ + ٩ س^٢}{س^٦}$$

$$= \frac{س^٦ + ٩ س^٢}{س^٦} = \frac{٩}{س^٤} + ١$$

التمارين والمسائل

١) أ) $٥ س^٤ + ٢ س$

ب) $١٦ س^٣ - ٩ س^٢ - ١٦ س + ١٠$

جـ) $\frac{٣ س^٢ - ٢ س^٣}{(١ - س)^٢}$

د) $\frac{٢ س^٢ + ٦ س + ٢}{(٢ س + ٣)^٢}$

٢) أ) ٤س^٣ − ٣س^٢ − ٢٤ س − ١٢

ب) $ق'(س) = \begin{cases} ٣س^٢ - ٤س - ٣ & \text{، } س > ٣ \\ \text{غير موجودة} & \text{، } س = ٣ \\ ٤س - ٣س^٢ + ٣ & \text{، } س < ٣ \end{cases}$

جـ) $\dfrac{٢س^٢ - ٨}{(س^٢ + ٤)^٢}$

د) $ق'(س) = \begin{cases} -\dfrac{٤}{س^٢} & \text{، } ١ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & \text{، } س = ٤ ، ٥ \\ \dfrac{٤}{س^٢} & \text{، } ٤ < س < ٥ \end{cases}$

٣) أ) ١ ب) ١٩ جـ) $-\dfrac{١٠}{٩}$ د) $\dfrac{١١}{٢٧}$

٤) أ) −٢٢ ب) $-\dfrac{٥}{٤}$

٥) أ) ٢,٨ ب) $-\dfrac{٢}{٣}$ جـ) $\dfrac{-٨}{٩}$

٦) اعتبر ل(س) × م(س) الاقتران الأول ، هـ(س) الاقتران الثاني ثم طبق مشتقة ضرب اقترانين مرتين.

٧) بفرض م(س) = هـ(س) = ل(س) ثم تطبيق النتيجة في سؤال ٦ .

٨) ق'(١) = ١٢ ، $ق'(س) = \begin{cases} ١٢س^٢ & \text{، } س \le ١ \\ ١٢س^٣ & \text{، } س > ١ \end{cases}$

٩) ق'(٠) = ٠ ، $ق'(س) = \begin{cases} ٣س^٢ + ١٢س & \text{، } س > ٠ \\ ٠ & \text{، } س = ٠ \\ -٣س^٢ - ١٢س & \text{، } س < ٠ \end{cases}$

١٠) أ = ١١ ، ب = −٣

إجابات ورقة عمل (٢–٥)

(١) أ) لأن كلًّا منها كثير حدود.

ب) قَ(س) = ٣ س^{٢} − ٤ ، هـَ(س) = ٤ س^{٣} + ٦ س^{٢} − ٤

جـ) ل(س) = س^{٧} + ٢س^{٦} − ٤ س^{٥} − ٦ س^{٤} +١٢س^{٣} + ١٦ س^{٢} − ٢٤ س

لَ(س) =٧ س^{٦} + ١٢ س^{٥} − ٢٠ س^{٤} − ٢٤س^{٣} + ٣٦ س^{٢} + ٣٢س − ٢٤

د) ق(س) ×هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س) = ٧ س^{٦} + ١٢ س^{٥} − ٢٠ س^{٤} − ٢٤س^{٣} +٣٦ س^{٢} +

٣٢س − ٢٤

هـ) الإجابة نفسها.

و) م (س) = د(س) × وَ (س) + و (س) × دَ (س)

٢) أ) قَ (س) = ٢ س − ١ ، هـَ(س) = ١ ، (هـ(س))^{٢} = (س + ٢)^{٢}

ب) ل(س) = س − ٣ ، لَ (س) = ١

جـ) ١

د) الإجابة نفسها.

هـ) نعم.

و) تابع اختيارات الطلبة وحلولهم.

ثالثًا المشتقات العليا

عدد الحصص: حصتان

نتاجات التعلم

- يجد المشتقات العليا لاقترانات وعلاقات معطاة حتى المشتقة الرابعة.

التكامل الرأسي والأفقي

- الاقترانات والعمليات عليها في الصفين العاشر والحادي عشر العلمي.
- الاقترانات المتشعبة في الصف الحادي عشر العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١١٩-١٢٣).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي
https: //programs.edraak.org / learn /k12/math-g12-jo-vv1

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- مشتقات عليا
- المشتقة الثانية ق‶(س)، $\frac{د^2 ص}{د س^2}$
- المشتقة الثالثة ق‴(س)، $\frac{د^3 ص}{د س^3}$
- المشتقة الرابعة ق$^{(4)}$(س)، $\frac{د^4 ص}{د س^4}$

التعلم القبلي

- المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة، قواعد الاشتقاق ١، قواعد الاشتقاق ٢.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، أوراق العمل)،التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، التفكير الناقد (التحليل).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس بتذكير الطلبة بالمشتقة الأولى وقواعد الاشتقاق ١ و ٢ .

٢ - تكليف الطلبة بإيجاد مشتقة ق(س) = س^3 ، قَ(س) = ٣ س^2 ، ثم إيجاد مشتقة المشتقة الأولى. (قَ)َ(س) = ٦س. اطرح على الطلبة السؤال الآتي: هل يمكننا إيجاد مشتقة المشتقة الأولى؟ استمع إلى الإجابات، وكلف الطلبة بتأييد أو نفي إجابات بعضهم متبعًا استراتيجية التفكير الناقد وتوصل معهم أنه من الممكن الاستمرار في إيجاد المشتقات المتتالية لبعض الاقترانات مثل:

ق(س) = $\frac{٥}{س^٢}$ لعدد غير منتهٍ من المرات والحصول على اقتران مختلف في كل حالة، يختلف الأمر لدوال أخرى حيث يمكن إيجاد المشتقة عددًا من المرات، وبعدها تتساوى المشتقات فمثلا في الاقتران ق(س) = س^٤ تتساوى المشتقات بدءًا من الخامسة لتكون صفرًا.

٣ – تقديم مفهوم المشتقات العليا من الكتاب صفحة (١١٩)، وكتابة رموزها المختلفة وتأكيد ضرورة قابلية المشتقة للاشتقاق؛ لإيجاد المشتقة التي تليها، وأننا سنكتفي بالمشتقة الرابعة في هذا الدرس.

٤ – حل مثال (١) ومناقشته ثم تكليف الطلبة بحل تدريب (١)، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة.

٥ – حل مثال (٢) ومناقشته وتأكيد أن حله يعتمد على تساوي المقادير الجبرية، ثم تكليف الطلبة بحل تدريب (٢).

٦ – حل مثال (٣) ومناقشته وتأكيد المهارات والمفاهيم المتضمنة فيه، مثل: اختبار قابلية الاقتران للاشتقاق عند نقطة وقابلية كثير الحدود للاشتقاق على مجاله، ثم تكليف الطلبة بحل تدريب (٢).

٧ – ختم الدرس بتكليف الطلبة بتنفيذ ورقة العمل (٢–٥). متابعة الطلبة وتقديم الدعم لهم وسؤالهم عن المفاهيم والرموز التي وردت في الدرس.

٨ – تشكيل مجموعات غير متجانسة من (٤–٦) وتكليفهم بحل تمارين ومسائل صفحة (١٢٢، ١٢٣)، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم.

معلومات إضافية

– ذكِّر الطلاب بأن المشتقة الأولى لاقتران المسافة بالنسبة إلى الزمن هي السرعة، وأن المشتقة الثانية لاقتران المسافة بالنسبة إلى الزمن هي التسارع.

– كلف الطلبة بالبحث على الإنترنت عن تطبيقات المشتقات العليا في الحياة اليومية .

أخطاء شائعة

– قد يُغفل الطلبة اختبار قابلية الاشتقاق لإيجاد المشتقات المتتالية مما يؤدي إلى خطأ بإيجاد هذه المشتقات. أكد ضرورة إجراء الطلَّبة اختبارات الاشتقاق في كل مرحلة من مراحل حساب المشتقات العليا.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) إذا كان ق(س) = س^٣ + س^٢ – ٦ جد قً(س) ، قً(١)

٢) إذا كان ق(س) = | س – ٢ |، فاكتب قاعدة قَ(س).

٣) إذا كان ق(س) = س× ل(س) وكان ل(س) قابلًا للاشتقاق مرتين؛ فاكتب قاعدة قً(س).

الحل:

١) قَ(س) = ٣ س^{٢} + ٢س ، قً(س) = ٦ س + ٢ ، قً (١) = ٦

$$٢)\ قَ(س) = \begin{cases} ١ & ،\ س > ٢ \\ \text{غير موجود} & ،\ س = ٢ \\ -١ & ،\ س < ٢ \end{cases}$$

٣) قً(س)= س لً(س) + ٢ لَ(س)

إثراء

١) جد الاقتران كثير الحدود من الدرجة الثالثة الذي فيه ق(−١) = ٠ ، قَ(−١) = ٣، قً(−١) = − ٢ ، قً (−١) = ٦.

٢) إذا كان كل من ق ، ل اقترانين قابلين للاشتقاق؛ فجد (ل ق − ق ل)ً (س) دون إجراء عملية الاشتقاق.

الحل:

١) ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د ، عوِّض بالمعلومات المعطاة لتحصل على:

أ =١ ، ب = ٢، جـ = ٤ ، د = ٣ ، ق(س) = س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٤ س + ٣

٢) الإجابة صفر لأن ل ق ــ ق ل = ٠

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات، التواصل، الملاحظة، الورقة والقلم.

أداة التقويم: سلم التقدير (٢−٢)، قائمة الرصد (٢−٤)، قائمة الرصد (٢−٦)، ورقة العمل (٢−٦).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

إجابات التدريبات

١) الفرع الأول ــ ٣٨ الفرع الثاني ٢٤٨

٢) الاشتقاق ٣ مرات ثم استخدام المعلومة المعطاة ، أ = ٦.

٣) الفرع الأول. جد قَ(س) ، قً(س) حسب قواعد الاشتقاق ثم اختبر قَ(٠) ، قً(٠).

الفرع الثاني. اكتب قَ(س)، قً(س) من الفرع الأول .

الفرع الثالث. جد قً(س) حسب القواعد ثم اختبر قً (٠)

التمارين والمسائل

١) أ) ٢٤ س − ٧ ب) $\frac{٢}{س^{٣}}$ جـ) ق″(س) = $\begin{cases} ٦س + ٢ & ، س > ٠ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٠ \\ −٦س − ٢ & ، س < ٠ \end{cases}$

٢) − ٢٧٠

٣) إيجاد ن أولًا ثم أ ، أ = ٢٤

٤) تطبيق قواعد الاشتقاق مرتين.

٥) أ) س = −٢ ، $\frac{١}{٢}$ ب) الفترتين (−∞، −٢] ، [$\frac{١}{٢}$ ، ∞) جـ) (−٢، $\frac{١}{٢}$)

٦) أ) ٢٤ س + ٦٣٠ $س^{-٨}$ ب) ٦ أ

٧) أ) صفر ب) ١ جـ) ٢٤

٨) ق′(س) = $س^{٢}$ ل″(س) + ٤ س ل′(س) + ٢ ل(س)

ق″ (س) = $س^{٢}$ ل‴(س) + ٦ س ل″(س) + ٦ ل′(س)

٩) استخدام قواعد الاشتقاق مرتين.

١٠) ق(س) = أ $س^{٢}$ + ب س + جـ . جد ق′(س) ، ق″(س).

طبِّق المعلومات المعطاة لتحصل على ق(س) = ٢ $س^{٢}$ − ٦ س + ٧

١١) اشتق الطرف الأيسر لتحصل على الطرف الأيمن.

١٢) جد هـ′ (س) ،استخدم العلاقة ل′(س)× ق′(س) = جـ ثم اشتقها.

جد هـ″ (س) وعوض لتحصل على المطلوب.

١٣) ٢

١٤) م < ٣

إجابات ورقة عمل (٢−٦)

الاقتران	ق(س) = $س^{٤}$	ق(س) = ٦π $س^{٥}$	ق(س) = $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ − ٢ $س^{٦}$	ق(س) = $\frac{١}{س}$
المشتقة الأولى ق′(س)	٤ $س^{٣}$	٣٠π $س^{٤}$	$س^{٢}$ − ١٢ $س^{٥}$	$\frac{−١}{س^{٢}}$
المشتقة الثانية ق″(س)	١٢$س^{٢}$	١٢٠π $س^{٣}$	٢ س − ٦٠ $س^{٤}$	$\frac{٢}{س^{٣}}$
المشتقة الثالثة ق‴(س)	٢٤س	٣٦٠π$س^{٢}$	٢ − ٢٤٠ $س^{٣}$	$\frac{−٦}{س^{٤}}$
قيمة المشتقة	ق‴(٢) = ٤٨	ق‴(−١) = ٣٦٠π	ق‴($\sqrt[٣]{}$) = ٢ − ٧٢٠$\sqrt[٣]{}$	ق‴($\frac{١}{٢}$) = $\frac{−٣}{٨}$

رابعًا مشتقات الاقترانات المثلثية

عدد الحصص حصتان

نتاجات التعلم

- يجد مشتقات الاقترانات المثلثية.

التكامل الرأسي

- الاقترانات المثلثية في الصف الحادي عشر العلمي.
- النسب المثلثية في مبحث الرياضيات في الصفين التاسع والعاشر الأساسي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٢٤-١٣٠).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي https: //programs.edraak.org / learn /k12/math-g12-jo-vv1

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- الاقتران المثلثي، مشتقة الاقتران المثلثي، رموز الاقترانات المثلثية.

التعلم القبلي

- المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة، قواعد الاشتقاق ١، قواعد الاشتقاق ٢. الاقترانات المثلثية. $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{جا\, س}{س} = ١$

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (أوراق عمل، التدريبات والتمارين)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بتذكير الطلبة بالمواضيع الآتية:
المشتقة الأولى للاقتران و بالصورتين المستخدمتين لإيجادها، قواعد الاشتقاق (١) و (٢)، النظرية، $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{جا\, س}{س} = ١$، المتطابقات المتعلقة بالفرق بين جيبي زاويتين و الفرق بين جيبي تمام زاويتين الموجودة في كتاب الطالب صفحة (١٢٤) تحت عنوان (تذكر).

٢- طرح السؤال الآتي: هل يوجد مشتقات للاقترانات المثلثية؟ وإن كانت الإجابة نعم؛ فما مشتقة الاقتران ق(س) = جا س ؟

٣- عرض قاعدة (١) صفحة (١٢٤)، ومناقشة برهانها مع الطلبة، ثم مناقشة المثالين (١، ٢).

٤- تكليف الطلبة بحل تدريب (١)، والتركيز على إيجاد مشتقة اقترن مثلثي عند عدد محدد.

٥- عرض قاعدة (٢) صفحة (١٢٥)، ومناقشة برهانها مع الطلبة، ثم مناقشة الأمثلة (٣، ٤، ٥) مع تأكيد المهارات.

٦- تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة من (٣ -٥)، وتكليفهم بحل التدريبين (٢، ٣) والتأكيد أن مشتقات الاقترانات في تدريب (٣) تعتبر قواعد لاشتقاق اقترنات مثلثية أساسية؛ يجب حفظها لاستخدامها في إيجاد مشتقات اقترانات أخرى.

٧- حل مثال (٦) ومناقشته كما ورد في الكتاب، ثم تكليف المجموعات بحل المثال بطريقة أخرى؛ وذلك بتحويل الاقتران بدلالة جا، جتا ثم اشتقاقه ثم تكليفهم بحل تدريب (٤) صفحة (١٢٨).

٨- التركيز على أن فهم مشتقات الاقترانات المثلثية الأساسية وحفظها وقواعد الاشتقاق أمران مهمان في إيجاد مشتقات الاقترانات الأخرى. وأكد كذلك أنه يمكن تسهيل عملية اشتقاق بعض الاقترانات عند كتابتها بصورة أخرى مثل ق(س) = $\frac{\text{س ظاس + س}}{\text{س}}$ = ظا س + ١

٩- تكليف الطلبة بتنفيذ ورقة العمل (٢-٧)، ومتابعة الطلبة وتقديم الدعم لهم حسب الحاجة.

١٠-ختم الدرس بسؤال الطلبة عن قواعد اشتقاق الاقترانات المثلثية، وربط العلاقة بين الاقتران ومشتقته والعلاقات السابقة بينها ما أمكن مثلاً :

(جا س)َ = جتاس،جا^{٢}س + جتا^{٢} س = ١، جاس = جتا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) ، .... إلخ. وذلك لسهولة حفظ العلاقات بين الاقترانات المثلثية وللحاجة إليها في مواقف مختلفة.

١١-تكليف المجموعات بحل تمارين ومسائل في الصفحة (١٢٩ ، ١٣٠)، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم حين الحاجة.

معلومات إضافية

- ذكّر الطلبة بأن المتغير س يجب أن يكون بالتقدير الدائري عند اشتقاق الاقترانات المثلثية، ويمكن إيجاد مشتقة اقتران مثل ق(س) = جتا س، س بالقياس الستيني بعد أن تتعرف قاعدة السلسلة في الدرس اللاحق.

أخطاء شائعة

– كثيرًا ما يخطئ الطلبة في إشارة مشتقة الاقترانات المثلثية . أكد أنَّ إشارة مشتقات الاقترانات جا س، ظا س، قاس موجبة، وأنَّ إشارة مشتقة الاقترانات جتا س، ظتا س، قتا س سالبة.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد قَ(س) لكل مما يأتي:

أ) ق(س) = س جا س   ب) ق(س) = ظاس + جتاس

الحل:

أ) س جتاس + جاس   ب) قا^{2}س – جاس

إثراء

١) إذا كان ق(س) = جتا^{2} س فجد قَ (س): مستخدمًا مشتقة حاصل ضرب اقترانين.

٢) إذا كان ، فجد ق(س) = ٢س جا(٢ π – س)، فجد قَ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$

٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{جا س} ، & 0 < \text{س} \leq \frac{2\pi}{3} \\ \text{أ س} + \text{ب} ، & \frac{2\pi}{3} < \text{س} < 2\pi \end{cases}$

قابلاً للاشتقاق عند س = $\frac{2\pi}{3}$ ، فجد قيمة كل من أ، ب.

الحل:

١) – جا٢س

٢) – $\frac{\pi}{3}$ – $\sqrt{3}$

٣) أ = – $\frac{1}{2}$ ، ب = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + $\frac{\pi}{3}$

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات، التواصل، الملاحظة، الورقة والقلم.

أداة التقويم: سلم التقدير (٢–٢)، قائمة الرصد (٢–٤)، قائمة الرصد (٢–٦)، ورقة العمل (٢–٧).

التدريبات

١) ٧ ٢) ١

٣) إعادة تعريف الاقترانات بدلالة جا س، جتا س ثم تطبيق قاعدة القسمة. ٤) ٢

التمارين والمسائل

١) أ) ٣ جتا س + جا س ب) س^{٢} جتا س + ٢ س جا س

جـ) $\frac{\text{جتا س + س جا س}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$ د) قا^{٢}س $-\sqrt{٣}\,\pi$

هـ) صفر و) $-$قتا س ظتا س + س قتا^{٢}س $-$ ظتا س

٢) ٥ ص

٣) أ) $\frac{-١}{٢}$ ب) $-\sqrt{٢}$

جـ) $-$ ١ د) $\frac{\pi}{٩} + \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ هـ) $\frac{٢}{\sqrt{٣}} - \frac{٢\pi}{٩}$

٤) جد صَ ثم صً في كل حالة ثم عوّض في المعادلة المطلوبة:

٥) أ) $-\frac{٣\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ ب) $-\pi$ ، ٠ ، π

٦) أ) قتا^{٣}س + قتا س ظتا^{٢}س ب) ٢ جا س $-$ س جتا س

٧) أ = صفرًا ، ب = ١

٨) أعد تعريف ق(س) ثم اختبر قابلية ق للاشتقاق عند س = π ، قَ(π) = غير موجودة.

٩) $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}\pi$

إجابات ورقة عمل (٢-٧)

١)

الاقتران ق(س)	جا س	جتا س	ظا س	ظتا س	قا س	قتا س
المشتقة قَ(س)	جتا س	$-$ جا س	قا^{٢}س	$-$قتا^{٢}س	قا س ظا س	$-$ قتا س ظتا س

٢) أ) $\frac{\pi}{٢} - \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ ب) $-\pi\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}$

٣) أ) $-$ قتا س ظتا س $-$ ٨ س ب) قا^{٢}س

خامسًا	قاعدة السلسلة	عدد الحصص	ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة صيغ الاقترانات المركبة.

التكامل الرأسي

- تركيب الاقترانات في الصف الحادي عشر العلمي .

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٣١–١٣٧).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي
https: //programs.edraak.org / learn /k12/math–g12–jo–vv1

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- مشتقة تركيب اقترانين، قاعدة السلسلة.

التعلم القبلي

- المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة، قواعد الاشتقاق ١، قواعد الاشتقاق ٢، مشتقات الاقترانات المثلثية. تركيب الاقترانات.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر–انتقِ زميلًا–شارك)، حل المشكلات والاستقصاء.

إجراءات التنفيذ

١ – التمهيد للدرس بطرح السؤال الوارد في بداية الدرس، بيِّن لهم أنَّ استخدام القواعد السابقة لإيجاد هذه المشتقة يحتاج كثيرًا من الجهد؛ وهذا يؤكد أهمية وجود قاعدة لإيجاد مشتقة مثل هذه الاقترانات.

٢ – مراجعة الطلبة بتركيب اقترانين وشروط قابلية التركيب، كما ورد في كتاب الطالب صفحة (١٣١) تحت عنوان تذكر، يمكن استخدام الرسم للتوضيح.

٣ – مناقشة قاعدة السلسلة التي تتضمن إيجاد مشتقة تركيب اقترانين، والتركيز على آلية تطبيقها، وعرض الصورتين المتكافئتين لقاعدة السلسلة.

٤ – حل الأمثلة (١، ٢، ٣) ومناقشتها والتركيز على المهارات المتضمنة في كل مثال، والسبب الذي من أجله استُخدمت قاعدة السلسلة في حلها، و كان من الصعب الحل بقواعد الاشتقاق السابقة.

٥ – تكليف الطلبة بحل تدريب (١) والإشارة إلى أن الجزء الأول منه يحل المشكلة المطروحة في بداية الدرس.

٦ – تقديم النتيجة الموجودة في نهاية صفحة (١٣٣) التي تتضمن اشتقاق اقتران مرفوع لقوة، و تأكيد أنها توفر الوقت والجهد في اشتقاق كثير من الاقترانات، ثم تكليف الطلبة ببرهنة هذه النتيجة من خلال مجموعات ثنائية، ومتابعة الحلول لتقديم التغذية الراجعة.

٧ – حل مثال (٤) ومناقشته وتكليف المجموعات الثنائية بحل تدريب (٢)، ومتابعة الحلول وتقديم التغذية الراجعة.

٨ – حل الأمثلة (٥، ٦، ٧) ومناقشتها وتأكيد الأفكار و المهارات المتضمنة في كل مثال وهي: في مثال (٥) اقتران مثلثي مرفوع لقوة، مثال (٦) اقتران كثير حدود داخل اقتران مثلثي، مثال (٧) اقتران داخل اقتران مثلثي.

٩ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة (٤–٦) وتكليفهم بإثبات صحة القواعد الموجودة تحت عنوان تعميم صفحة (١٣٥)، وربطها بالقواعد الموجودة في درس مشتقات الاقترانات المثلثية.

١٠– حل ومناقشة ومثال (٨) بوصفه تأكيد تطبيقًا على إحدى القواعد السابقة الموجودة في التعميم ثم تكليف الطلبة بحل تدريب (٣) .

١١– حل المثالين (٩، ١٠) ومناقشتهما، وتأكيد تطبيق قاعدة السلسلة على نموذجين جديدين من تركيب الاقترانات.

١٢– تكليف الطلبة بحل تدريب (٤) لاكتساب مهارة تطبيق قاعدة السلسلة على نماذج جديدة من تركيب الاقترانات، كما ورد في المثالين (٩ ، ١٠).

١٣– تكليف الطلبة بتنفيذ ورقة العمل (٢–٨) ومتابعة حلولهم وتقديم الدعم لهم حسب الحاجة.

١٤– ختم الدرس بسؤال الطلبة عن الصيغ المختلفة لقاعدة السلسلة وما أهميتها في اشتقاق الصيغ المختلفة في تركيب الاقترانات.

١٥– تكليف المجموعات بحل تمارين ومسائل صفحة (١٣٨ ، ١٣٩).

معلومات إضافية*

كيف تشتق اقترانًا مثلثيًا زاويته بالدرجات ؟

تذكر س بالدرجات = $\frac{\pi س}{١٨٠}$ بالتقدير الدائري.

$$\frac{د}{دس}\left(جا\left(\frac{\pi س}{١٨٠}\right)\right) = \frac{\pi س}{١٨٠} \text{ جتا } \frac{\pi س}{١٨٠}$$

* غير مطلوب في امتحان الثانوية العامة.

أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلبة في تطبيق قاعدة السلسلة فيكتبون (ق ∘ هـ)َ(س) = قَ(س) × هـَ(س) . ركّز على تطبيق القاعدة بشكل صحيح.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) جد قَ(س) لكل مما يأتي:

أ) ق(س) = (س^{٢} + ٣س − ٦)^{١٠} ب) ق(س) = ٤ جا س^{٢}

٢) جد ما يأتي بدلالة قَ :

أ) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (ق(س^{٣}) + ١)) ب) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$((ق(س))^{٣} + ٢))

الحل:

١) أ) ١٠ (٢ س + ٣) (س^{٢} + ٣ س − ٦)^{٩} ب) ٨ س جتا س^{٢}

٢) أ) قَ(س^{٣} +١) × ٣س^{٢} ب) ٣ (ق(س))^{٢} × قَ(س)

إثراء

١) إذا كان قَ(س) = جا س^{٢} ، ص = ق$\left(\frac{\text{٢س} - ١}{\text{س} + ١}\right)$ ، فجد صَ

٢) ق(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ ، ع(س) = أس^{٣} وكان (ع ∘ ق)َ(٣) = ١٢ ، فما قيمة أ ؟

٣) إذا كان ص = ظاس ، برهن أن ص$^{(٣)}$ = ٦قا^{٤}س − ٤قا^{٢}س

٤) إذا كان ص = ع^{٢} + ١ ، ع = ٨س − ٦ ، س = ٤ ل فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دل}}$

الحل:

١) $\frac{٣}{(\text{س} + ١)^{٢}}$ جا$\left(\frac{\text{٢س} - ١}{\text{س} + ١}\right)^{٢}$

٢) − ٤

٣) اشتق ٣ مرات، ثم أجرِ العمليات اللازمة لتحصل على المطلوب.

٤) $\frac{\text{دص}}{\text{دل}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دل}}$، اشتق حسب هذه القاعدة . الإجابة ٦٤(٣٢ ل − ٦)

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات، التواصل، الملاحظة، الورقة والقلم، التقويم المعتمد على الأداء.

أداة التقويم: سلم التقدير (٢−٢)، قائمة الرصد (٢−٤)، قائمة الرصد (٢−٥)، ورقة العمل (٢−٨).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

التدريبات

١) الفرع الأول: ٦ (س^{٣} − س)^{٥} (٣ س^{٢} − ١)   الفرع الثاني: ٢ جتاس − قتاس ظتاس

٢) ٢

٣) الفرع الأول: ٤ قا ٤ س ظا٤ س ،   الفرع الثاني: ٧(س^{٣} + ٢ س − ٨)^{٦} (٣ س^{٢} + ٢)،
الفرع الثالث: ٨ س جا^{٣}(س^{٢}) جتا (س^{٢})

٤) $\frac{-\text{١٧}}{\text{٤٨}}$

التمارين والمسائل

١) أ) ٨(س^{٣} − ٢ س + ٤)^{٧} (٣ س^{٢} − ٢)   ب) $\frac{-\text{١٠س}}{(\text{س}^{٢}+\text{١})^{٦}}$

جـ) $\frac{\text{٤س}^{٣}(\text{١}+\text{٢س}^{٣})}{(\text{١}-\text{س}^{٢})^{٥}}$ د) (١ − ٢ س) جا (س^{٢} − س)

٢) أ) ٦   ب) صفر

٣) أ) −٢٤   ب) ٨$\sqrt{\text{٣}}$

٤) بفرض ع = هـ(س) فيكون ص= جا^{ن} ع. طبق قاعدة السلسلة.

٥) أ) قا^{٢} (س^{٣} − س) (٣س^{٢} − ١)   ب) ٢٠ س (س^{٢} + ١)^{٤} ((س^{٢} + ١)^{٥} + ١)

٦) استخدم قاعدة السلسلة ثم عوِّض.

٧) استخدم قاعدة السلسلة .

٨) أ) $\frac{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ ب) صفر

٩) أ) $\frac{\text{٢}}{\text{س}^{٣}}$ قا^{٢} $(\frac{\text{١}}{\text{س}})$ ظا $(\frac{\text{١}}{\text{س}})$ ب) $\frac{\text{٤س جا٢س} + \text{٢جتا٢س} - \text{٤س}^{٢}\text{ جتا٢س}}{\text{س}^{٣}}$

١٠) استخدم قاعدة السلسلة، ثم جد س عندما جا٢س = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ثم عوض. الإجابة −٤

١١) استخدم قاعدة السلسلة ثم عوِّض. الإجابة ٢٠

١٢) $\frac{١}{٢}$

١٣) أ) ١٠٨ ب) ٤٣٢ جـ) ٣٢٤ د) ٢١٦

إجابات ورقة عمل (٢–٨)

١)

ص = ق (ل)	ص = $ل^٣$	ص = $\frac{٢}{ل}$	ص = $\frac{١}{٢}$ ظال	ص = ٢ جال
ل = هـ (س)	ل = ٤س − ٢	ل = $س^٢$	ل = $\pi س^٢$	ل= $\frac{٣س}{٢}$
ص = (ق∘هـ)(س)	$(٤س − ٢)^٣$	$\frac{٢}{س^٢}$	$\frac{١}{٢}$ ظا$\pi س^٢$	٢جا $\frac{٣}{٢}$ س
(ق∘هـ)َ (س) أو $\frac{دص}{دس}$	١٢(٤س − ٢ $)^٢$	$\frac{-٤}{س^٣}$	πسقا$^٢\pi س^٢$	٣جتا $\frac{٣}{٢}$ س

٢) −٣٠

٣) استخدم قاعدة السلسلة ثم اجعل س =−١ . الإجابة−١٢

سادسًا	الاشتقاق الضمني	عدد الحصص	ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يجد مشتقة علاقة ضمنية.

التكامل الرأسي

- الاقترانات والعلاقات في الصف الثامن.
- الاقترانات والعمليات عليها في الصفين العاشر والحادي عشر العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٤٠-١٤٧).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي
https: //programs.edraak.org / learn /k12/math-g12-jo-vv1

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- الاشتقاق الضمني.
- العلاقة الضمنية.

التعلم القبلي

- المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة، قواعد الاشتقاق ١، قواعد الاشتقاق ٢، مشتقات الاقترانات المثلثية. تركيب الاقترانات.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (أوراق العمل، التدريبات والتمارين)، التعلم في مجموعات (فكر-انتقِ زميلًا-شارك) حل المشكلات والاستقصاء.

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس بتذكير الطلبة بالاقتران والعلاقة، وأن العلاقة بين س، ص قد لا تكون اقترانًا لكن لا يمنع من إيجاد ميل المماس؛ وبالتالي معادلة المماس لمنحنى العلاقة عند نقطة من نقاطها.

٢ - طرح السؤال الوارد في بداية الدرس، وتوضيح أن العلاقة المذكورة في السؤال معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل. من الإجابات المتوقعة نجد ميل نصف قطر الدائرة الذي يصل بين هذه النقطة ومركز الدائرة، ثم نجد ميل المماس (المماس يعامد نصف القطر عند نقطة التماس) ثم نجد معادلة المماس.

٣ - الانطلاق من السؤال المطروح في بداية الدرس؛ للتوصل إلى ضرورة إيجاد طريقة جديدة في الاشتقاق؛ لحل مثل هذه القضايا. مناقشة مفهوم العلاقة الصريحة والعلاقة الضمنية كما ورد في

بداية الدرس. وإعطاء أمثلة كافية عليهما، ثم تسمية الطريقة الجديدة في الاشتقاق، التي تحل مشاكل الاشتقاق في العلاقات الضمنية بالاشتقاق الضمني.

٤ – مناقشة خطوات إيجاد مشتقة علاقة ضمنية كما وردت في الصفحة (١٤٠) من الكتاب.

٥ – حل مثال (١) ومناقشته، والتركيز على الاشتقاق بالطريقتين العادية والضمنية. ثم عرض أمثلة يُطلب فيها إيجاد المشتقة لعلاقات لا يمكن فيها فصل المتغيرين لتكوين علاقة صريحة؛ كما في المثالين (٢، ٣)؛ ليكتشف الطلبة أنَّ الحل الوحيد لإيجاد المشتقة هو الاشتقاق الضمني.

٦ – تشكيل مجموعات غير متجانسة (٤–٦)، وتكليفها بحل تدريب (١) ثم برهان النظرية المتعلقة باشتقاق ص= $س^{ن}$ ؛ حيث ن عدد نسبي مستخدمًا استراتيجية حل المشكلات. يفضل إرشاد الطلبة إلى الخطوة الأولى بالبرهان، وتقديم المساعدة حسب الحاجة، ثم عرض أعمال المجموعات وتقديم التغذية الراجعة ثم عرض البرهان الصحيح.

٧ – حل مثال (٤) ومناقشته بوصفه تطبيقًا مباشرًا على النظرية ثم عرض النتيجة المتعلقة باشتقاق ص= $(ق\ س))^{ن}$، والتركيز على هذه النتيجة؛ لأنها توفِّر الوقت في الاشتقاق.

٨ – حل المثالين (٥، ٦) ومناقشتهما بوصفهما تطبيقين على النتيجة السابقة، ثم تكليف المجموعات بحل تدريب (٢)، عرض إجابات الطلبة، وتقديم التغذية الراجعة.

٩ – حل مثال (٧) ومناقشته، وتوضيح الأفكار المختلفة التي وردت فيه، مثل: الاشتقاق الضمني وقواعد الاشتقاق والمشتقات العليا، ثم مناقشة مثال (٨)، والتركيز على أنه شكل آخر من أشكال تركيب الاقترانات التي تجد مشتقتها بقاعدة السلسلة.

١٠– تكليف المجموعات بحل التدريبين (٣، ٤) بوصفهما تطبيقين على المثالين (٧ ، ٨) ثم عرض إجابات الطلبة، وتقديم التغذية الراجعة.

١١– تكليف الطلبة بتنفيذ ورقة العمل (٢–٩)، ومتابعة حلولهم وتقديم الدعم حسب الحاجة.

١٢– ختم الدرس بسؤال الطلبة عما تعلموه في هذا الدرس ونماذج من مسائل الاشتقاق الجديدة (التي حُلَّت بالاشتقاق الضمني وكان يصعب حلها بالاشتقاق العادي.

١٣– تكليف المجموعات بحل تمارين ومسائل صفحة (١٤٦، ١٤٧)، ومناقشة الإجابات في الدرس لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

معلومات إضافية

– تذكر أن الاشتقاق الضمني يعني أن تشتق بالنسبة إلى المتغير المستقل، وعادة ما يكون س. وينتج عن الاشتقاق علاقة بين س ، ص ، صَ .

– تذكير الطلبة أنه في معظم الأحيان من الصعب إيجاد صَ بدلالة س فقط ، أما حساب صَ عند نقطة محددة ($س_١$، $ص_١$) فأمر بسيط.

أخطاء شائعة

في الصفوف السابقة تعلمنا أن مماس الدائرة هو مستقيم يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة فقط، من الأخطاء الشائعة تعميم هذا التعريف على مماسات منحنيات الاقترانات. والصحيح أنَّ مستقيمًا ما يكون مماسًّا لمنحنى اقتران عند نقطة من نقاطه؛ إذا كانت المشتقة الأولى للاقتران موجودة عند هذه النقطة ، لكن هذا المماس قد يمس أو يقطع منحنى الاقتران عند نقطة أو نقاط أخرى غير هذه النقطة.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) ميِّز العلاقات الصريحة من الضمنية في ما يأتي، ثم اشتق العلاقات الضمنية:

أ) $س^٢ - ٤ص = س$ ب) $ص + س^٢ = ظا ص$

جـ) $س^٣ - ٥س = ص + ١$ د) $س ص^٢ - جتا ص = ٤ س$

الحل:

أ) صريحة ب) ضمنية ، $صَ = \frac{٢س}{ظا^٢ص}$

جـ) صريحة د) $صَ = \frac{٤ - ص^٢}{٢س ص + جا ص}$

إثراء :

١) إذا كان $س^٢ + ص^٢ = أ^٢$ عددًا ثابتًا فأثبت أنَّ $\left|\frac{صً}{[١ + (صَ)^٢]^{\frac{٣}{٢}}}\right| = \frac{١}{أ}$

٢) إذا كان جتا $(س + ص) = س^٢ ص$ فجد $\frac{ءص}{ءس}$

٣) أعط مثالاً على مستقيم يمس منحنى اقتران عند نقطة ويقطعه عند نقطة أخرى.

الحل:

١) اشتق ضمنيًّا مرتين ، لاحظ أنَّ $(صَ)^٢ = صَ \times صَ$ هو مربع المشتقة. أجر العمليات والتعويض حيثما لزم لتحصل على المطلوب.

٢) $صَ = \frac{-ص - جا(س + ص)}{س + جا(س + ص)}$

٣) لاحظ إجابات الطلبة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات، التواصل، الملاحظة، الورقة والقلم، التقويم المعتمد على الأداء.

أداة التقويم: سلم التقدير (٢–٢)، قائمة الرصد (٢–٤)، قائمة الرصد (٢–٥)، ورقة العمل (٢–٩).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

التدريبات

١) الفرع الأول : $\frac{٣}{٤} \times \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ الفرع الثاني: $\frac{١ - ٢\text{ص}}{٢\text{س} - ٣\text{ص}^٢ - ٢}$ الفرع الثالث: $\frac{٢\text{س}}{\text{قا}^٢\text{ص} - ١}$

٢) الفرع الأول : $٢\sqrt{\text{ص}}\ \text{جاس}$ الفرع الثاني: $\frac{٢(\text{س} - \text{ص})}{٢\text{س} - ٢\text{ص} + ١}$

٣) اشتق الطرفين ثم جد جا ص بدلالة س ثم عوض.

٤) اشتق ضمنيًّا مرتين، ثم عوض .الإجابة ١

التمارين والمسائل

١) أ) $\frac{-١}{٤} \times \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ب) $\frac{٣\text{س}^٢ + ٨\text{س}}{٤\text{ص}\sqrt{\text{س}^٣ + ٤\text{س}^٢}}$

جـ) $\frac{\text{ص} - ٣\text{س}^٢}{٣\text{ص}^٢ - \text{س}}$ د) $\frac{٢}{\text{جتا}(\text{س ص})} - \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

٢) أ) $-\frac{٤}{٣} \times \frac{٢\text{س ص}' + ٣\text{ص}}{\text{س}^٤\ \text{ص}^٣} - \frac{\text{س ص}' - \text{ص}}{\text{س}^٢}$ ب) $-\frac{٤}{٣}\left(\frac{\text{ص} - \text{س ص}'}{\text{ص}^٢}\right)$

جـ) $-\frac{\text{حاص}(\text{ص}' + \text{حتاص}) + \text{س ص}'}{(١ + \text{س جاص})^٢}$ د) $-٢\sqrt{\text{ص}}\ \text{جاس} + \frac{\text{ص}'\ \text{جتا س}}{\sqrt{\text{ص}}}$

٣) أ) $\frac{٤\pi}{١ - ٢\pi}$ ب) -٥

جـ) $-\frac{١}{٨}$

٤) $\dfrac{\text{جتا}(\text{س} + \text{ص}) + \text{ص}^{٢}\,\text{جاس}}{٢\text{ص}\,\text{جتاس} - \text{جتا}(\text{س} + \text{ص})}$

٥) $\left(\dfrac{٩}{٤} ، \dfrac{٩}{٤}\right)$

٦) أ) $\dfrac{٤}{٣\sqrt[٣]{٢\text{س}^{٢} + ١}}$

ب) $\dfrac{٤\text{س}\sqrt{٣\text{س}} + ٣}{٤\sqrt{٣\text{س}} \times \sqrt{\text{س}^{٢} + \sqrt{٣\text{س}}}}$

٧) اشتق ضمنيًّا مرتين ثم عوض عن صَ في المشتقة الثانية.

٨) ٢

٩) اشتق ضمنيًّا مرتين ثم ضع س ص مكان جاس في المشتقة الثانية.

١٠) $\dfrac{١}{١٦}$

١١) اشتق ضمنيًّا مرتين ولاحظ أن $(\text{صَ})^{٢} = \text{صَ} \times \text{صَ}$

١٢) اشتق ضمنيًّا مرتين ثم استخدم العلاقة الأصلية في التعويض.

إجابات ورقة عمل (٢-٩)

١) $\dfrac{-٤\text{س}}{\text{ص}}$

٢) اشتق الطرفين ضمنيًّا ثم أجر العمليات اللازمة . الإجابة $\dfrac{٣}{٢}$

٣) اشتق ضمنيًّا مرتين ثم استخدم العلاقات المثلثية.

إجابات أسئلة
الوحدة الثانية

١) طبق قاعدة معدل التغير على فترة، وأجرِ العمليات الحسابية اللازمة ثم استخدم المتطابقات المثلثية المناسبة.

٢) طبق تعريف مشتقة اقتران عند نقطة واجر العمليات اللازمة . الإجابة صفر.

٣) قَ(س) =
- ٢س + ٢ ، ٠ < س < ١
- ٤ ، ١ ≤ س < ٢
- ٤ ، ٢ ≤ س < ٣
- غير موجودة ، س = ٠ ، ٣ ، ٢ لأن ق غير متصل عند س = ٢

٤) أ) $٤\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١١}{٤}$ جـ) ٥ د) $\frac{٨\pi}{٣}$

٥) أ) اشتق مرتين وأجرِ العمليات اللازمة ثم عوض بالعلاقة الأصلية.

ب) اشتق الطرفين ثم جد جتا ص بدلالة س ثم عوض.

٦) $\frac{١}{٢}$

٧) اشتق الطرفين ثم عوض بالمعلومات المعطاة . الإجابة صفر.

٨) أ) قَ(س) =
- ٤(س + ١)^{٣} ، س < ٠
- ٤(س − ١)^{٣} ، س > ٠
- غير موجودة ، س = ٠

ب) اختبر قابلية ق للاشتقاق عند س = ٠

٩) استخدم قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني . الإجابة (− ٣)

١٠) ٢

١١) أ) ٨٦٤ ب) ١٢٩٦

١٢) $\frac{-٢}{٥}$

١٣) ٤

١٤) اشتق ضمنيًا مرتين ثم أجرِ العمليات المناسبة.

١٥) اشتق الطرفين باستخدام قاعدة السلسلة وقواعد الاشتقاق ثم عوض.

١٦) اشتق ضمنيًا مرتين ثم أجرِ العمليات المناسبة.

١٧) جد صَ ثم جد مربع كل من ص، صَ ثم عوض.

١٨) استخدم قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني . الإجابة −٣

١٩) أ) ١٥٤ ب) ٤٢٦

٢٠) أ) س = ٠ ب) س= −١ ، ٠ ، ٢

٢١)

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
رمز الإجابة الصحيحة	جـ	ب	د	أ	جـ	أ	د	ب

ورقة عمل (٢-١)

أولًا: معدل التغير

الهدف: إيجاد معدل التغير لاقتران على فترة.

ادرس الاقترانات الآتية ثم أجب عن الأسئلة التي تليها.

ص = ق(س) = ٤ س − ٢ ، ص = ل(س) = $س^٢$ + ٢ س − ٨ ، ص = هـ(س) = | ١ − ٤ س |

١) جد التغير ، ومعدل التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من :

أ) س = ١ إلى س = ٣. ب) س = ٢ إلى س = صفرًا جـ) س = $س_١$ إلى $س_١$ + Δ س

٢) جد التغير ، ومعدل التغير في الاقتران ل(س) عندما تتغير س من :

أ) س = ٣ إلى س = ٥ . ب) س = ٤ إلى س = ١ جـ) س = $س_١$ إلى $س_١$ + Δ س

٣) جد معدل التغير في الاقتران هـ (س) عندما تتغير س من ١,٢٥ إلى ١,٥ .

ورقة عمل (٢-٢)

ثانيًا: المشتقة الأولى

الهدف: إيجاد المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة.

١) استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة؛ لإيجاد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند النقطة المبينة بجانبه:

أ) ق(س) = ٤ س + ١ ، س = − ٢ ب) هـ (س) = $س^٣$ − ٢ ، س = ١

٢) ابحث في قابلية الاقتران $\begin{cases} ١ - ٢س &، س \geq -٣ \\ ٧ &، س < -٣ \end{cases}$ للاشتقاق عند س = − ٣ .

٣) إذا كان ق(س) = $\sqrt{٣س + ١}$ فجد قَ(٥) باستخدام تعريف المشتقة الأولى عند نقطة.

ورقة عمل (٢-٣)

ثالثًا: الاتصال والاشتقاق

الهدف: بحث قابلية الاشتقاق عند نقطة، تذكر العلاقة بين قابلية الاشتقاق والاتصال.

١) إذا كان ق(س) =
- ٢س + ١ ، س ≤ ١
- ٢ ، ١ < س ≤ ٢
- س٢ ، س > ٢

فابحث عن قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س= ١، س= ٢

٢) إذا كان ق(س) =
- س٢ ، س ≤ ٣
- أ س − ٦ ، س > ٣

فجد قيمة أ التي تجعل الاقتران ق(س) قابلًا للاشتقاق عند س=٣.

٣) لخص العلاقة بين قابلية الاشتقاق والاتصال لاقتران عند نقطة.

ورقة عمل (٢-٤)

أولًا: قواعد الاشتقاق (١)

املأ الجدول الآتي بإيجاد المشتقات المطلوبة. اعتبر س عددًا حقيقيًا، جـ عددًا ثابتًا ، ن عددًا صحيحًا موجبًا.

الاقتران	ق(س) = جـ	ق(س) = س	ق(س) = سن	ق(س) = ل(س) ± هـ (س)	ق(س) = حـ ل(س)
المشتقة					

املأ الجدول الآتي بما يناسب

الاقتران	ق(س) = ٦π	ق(س) = س٢	ق(س) = س٤ [س]	قَ(س)= ١/٣ س٣ − ٢س٤	ق(س) =|٢س − ٦|
قيمة المشتقة	قَ(−٢) =	قَ(١/٢) =	قَ(√٣) =	قَ(١) =	قَ(٠) =

ورقة عمل (٢-٥)

ثانيًا : قواعد الاشتقاق (٢)

المهمة: استنتاج قاعدة مشتقة ضرب اقترانين، قاعدة مشتقة قسمة اقترانين.

١) ادرس الاقترانات الآتية ثم أجب عن الأسئلة التي تليها:

ق(س) = س^{٣} − ٤س + ٦ ، هـ(س) = س^{٤} + ٢س^{٣} − ٤س ، ل(س) = ق(س) × هـ(س)

أ) لماذا كل من ق، هـ ، ل قابل للاشتقاق على مجاله ؟

ب) جد قَ(س) ، هـَ(س)

جـ) اكتب ل(س) على شكل كثير حدود، ثم جد لَ(س)بأبسط صورة.

د) جد ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س) بأبسط صورة.

هـ) قارن بين لَ(س) في البند (جـ) وما حصلت عليه في البند (د).

و) اقترح قاعدة لإيجاد مشتقة م (س) حيث م (س) = د(س) × و(س).

٢) ادرس الاقترانات الآتية ثم أجب عن الأسئلة التي تليها:

ق(س) = س^{٢} − س − ٦ ، هـ (س) = س + ٢ ، ل(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ، س ≠ −٢

أ) جد كلًّا من قَ(س) ، هـَ(س) ، (هـ(س))^{٢}

ب) جد ل(س) على صيغة كثير حدود بقسمة البسط على المقام، ثم جد لَ(س).

جـ) جد $\frac{\text{هـ(س)× قَ(س)− ق(س)× هـَ(س)}}{\text{(هـ(س))}^{٢}}$ بأبسط صورة

د) قارن ما حصلت عليه في البند (ج) مع لَ(س) التي حصلت عليها في البند(ب).

هـ) هل يمكن القول أن لَ(س)= $\frac{\text{هـ(س)× قَ(س)− ق(س)× هـَ(س)}}{\text{(هـ(س))}^{٢}}$ ؟

و) كرر العملية مع اقترانات أخرى؛ بحيث لا يوجد عوامل مشتركة بين ق(س)، هـ (س).

ورقة عمل (٢-٦)

ثانيًا: المشتقات العليا

المهمة: إيجاد المشتقات العليا

الاقتران	ق(س) = $س^{٤}$	ق(س) = ٦π $س^{٥}$	ق(س) = $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ − ٢$س^{٦}$	ق(س) = $\frac{١}{س}$
المشتقة الأولى قَ(س)				
المشتقة الثانية قً(س)				
المشتقة الثالثة قًّ(س)				
قيمة المشتقة	قًّ(٢) =	قًّ(−١) =	قًّ($\sqrt{٣}$) =	قًّ($\frac{١}{٢}$) =

ورقة عمل (٢-٧)

أولا : مشتقات الاقترانات المثلثية

المهمة: إيجاد مشتقات الاقترانات المثلثية.

١) أكمل الجدول الآتي:

الاقتران ق(س)	جاس	جتاس	ظاس	ظتاس	قاس	قتاس
المشتقة قَ(س)						

٢) جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية عند النقط المبينة إزاء كل منها :

أ) ق(س) = $س^{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جاس ، س= $\frac{\pi}{٤}$

ب) ق(س) = ٢ π جتاس − قاس ، س = $\frac{\pi}{٣}$

٣) جد مشتقة من الاقترانات الآتية :

أ) ق(س) = قتاس − ٤ $س^{٢}$

ب) ق(س) = ظا س

ورقة عمل (٢-٨)

ثانيًا : قاعدة السلسلة

المهمة: استخدام قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة صيغ الاقترانات المركبة.

١) املأ الجدول الآتي بما يناسب:

ص = ق (ل)	ص = ل^{٣}	ص = $\frac{٢}{ل}$	ص = $\frac{١}{٢}$ ظا ل	ص = ٢ جا ل
ل = هـ (س)	ل = ٤س − ٢	ل = $\sqrt{س - ١}$	ل = πس^{٢}	ل = $\frac{٣س}{٢}$
ص = (قoهـ)(س)				
(قoهـ)َ (س) أو $\frac{ءص}{ءس}$				

٢) إذا كان هـ(س) = س^{٤} − ٥س، ق(س) اقتران فيه ق(٢) = ٠، قَ(٢) = ٦ وكان ل = هـoق، فجد لَ(٢).

٣) إذا كان ق(٢س) = ١٠ س^{٢} − ٤س؛ فجد قَ(− ٢) .

ورقة عمل (٢-٩)

ثالثا : الاشتقاق الضمني

المهمة: إيجاد مشتقات علاقات ضمنية.

١) جد $\frac{ءص}{ءس}$ للعلاقة ٤ س^{٢} + ص^{٢} = ٨

٢) جد ميل المماس لمنحنى العلاقة ٢ س^{٢} − ٢س ص + ص^{٢} = ٥ عند النقطة (−١ ، ١)

٣) إذا كان س = − جتا ص فأثبت أنَّ صً = − قتا^{٢}ص ظتا ص

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.

أداة التقويم: سلم التقدير (٢-١).

التقويم الذاتي للطالب حول مدى امتلاكه للمعارف و المهارات المطلوبة

الفصل	مؤشرات الأداء	ممتاز	جيد	مقبول
الفصل الأول	**أولًا : معدل التغير** - أعبر عن التغير بكلماتي الخاصة. - أميز بين التغير الموجب والتغير السالب. - أعرّف معدل التغير في فترة. - أُفسّر معدّل التغير هندسيًا . - أفسّر معدّل التغير فيزيائيًّا. - أجد معدّل التغير جبريًّا من الاقتران. - أجد معدّل التغير جبريًّا من خلال منحنى الاقتران. - أوظف التفسير الهندسي والفيزيائي لمعدل التغير في حل مسائل تطبيقية.			
	ثانيًا : المشتقة الأولى - أُفسّر المشتقة الأولى كنهاية لمعدّل التغير. - أعرّف المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة. - أُفسّر المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة هندسيًّا. - أجد المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة باستخدام التعريف. - أعرّف المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة من اليمين ومن اليسار. - أختبر قابلية اقتران للاشتقاق، عند نقطة التشعب. - أتمكن من استخدام صيغتي المشتقة للبحث في قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة. - أبحث قابلية اقتران للاشتقاق على فترة. - أوظف المشتقة الأولى باعتبارها نهاية معدل التغير لحل مسائل تطبيقية. - أوظف المشتقة الأولى في حل مسائل على النهايات.			

الفصل	مؤشرات الأداء	ممتاز	جيد	مقبول
الفصل الأول	**ثالثًا: الاتصال والاشتقاق** – أذكر العلاقة بين الاتصال والاشتقاق عند نقطة. – أُفسّر الحالات التي يكون فيها الاقتران غير قابل للاشتقاق عند نقطة. – أدرس قابلية اقتران للاشتقاق، عند نقطة تشعب باستخدام تعريف المشتقة من اليمين ومن اليسار. – أحدد مجال المشتقة الأولى لاقتران؛ من خلال بحث قابلية الاقتران للاشتقاق على مجاله. – أبرهن النظرية المرتبطة بالعلاقة بين الاشتقاق والاتصال عند نقطة.			

ممتاز : إذا أنجز الطالب المهمة كاملة دون أخطاء ودون الحاجة إلى مساعدة.

جيد : إذا أنجز الطالب المهمة كاملة دون أخطاء بمساعدة أو أنجزها بخطأ واحد دون مساعدة.

مقبول : إذا أنجز جزءًا من المهمة أو أنجزها وعنده أكثر من خطأ.

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.

أداة التقويم: سلم التقدير (٢–٢).

التقويم الذاتي للطالب حول مدى امتلاكه للمعارف و المهارات المطلوبة

الفصل	مؤشرات الأداء	٣	٢	١
الفصل الثاني	**أولًا: قواعد الاشتقاق ١** ١) أستخدم تعريف المشتقة في إثبات : – مشتقة اقتران ثابت تساوي صفرًا. – مشتقة ق(س) = $س^{ن}$ هي قَ(س) = ن $س^{ن-١}$ ، ن عدد صحيح موجب. – مشتقة ثابت مضروب في اقتران تساوي الثابت مضروبًا في مشتقة الاقتران. – قاعدة مشتقة حاصل جمع / طرح اقترانين. ٢) أجد مشتقة اقتران باستخدام قواعد الاشتقاق (١).			
	ثانيًا : قواعد الاشتقاق ٢ – أعبر عن قاعدة اشتقاق ضرب اقترانين بالرموز والكلام . – أعبر عن قاعدة اشتقاق قسمة اقترانين بالرموز والكلام. – أعبر بالرموز عن مشتقة الاقتران $\frac{أ}{ل(س)}$ ، ل(س) $\neq$ ٠، أ ثابت. – أثبت أنَّ مشتقة ق(س) = $س^{ن}$ ، ن عدد صحيح سالب هي قَ(س) = ن $س^{ن-١}$.			

الفصل	مؤشرات الأداء	٣	٢	١
الفصل الثاني	– أجد مشتقة حاصل ضرب اقترانين باستخدام قاعدة الضرب. – أجد مشتقة حاصل قسمة اقترانين باستخدام قاعدة القسمة. – أجد مشتقة اقتران متشعب باستخدام قواعد الاشتقاق. – أوظف قواعد الاشتقاق ٢ في حل مسائل على الاشتقاق.			
	ثالثًا: المشتقات العليا. – أعبر بالرموز المختلفة عن المشتقات من الثانية حتى الرابعة. – أجد المشتقات العليا لاقترانات معطاة حتى المشتقة الرابعة. – أوظف المشتقات العليا في حل مسائل على الاشتقاق.			
	رابعًا : مشتقات الاقترانات المثلثية – أثبت قاعدة اشتقاق جا س. – أثبت قاعدة اشتقاق جتا س. – أكتب بالرموز قواعد الاشتقاق المتعلقة باقترانات قا س، قتا س. – أكتب بالرموز قواعد الاشتقاق المتعلقة باقترانات ظا س، ظتا س. – أجد مشتقات اقترانات مثلثية.			
	خامسًا : قاعدة السلسلة – أعبر بالرموز عن الصورتين المتكافئتين لقاعدة السلسلة. – أجد مشتقة تركيب اقترانين باستخدام قاعدة السلسلة. – أثبت قاعدة اشتقاق $ص = (ل(س))^{ن}$ ، حيث ن عدد صحيح . – أحل مسائل على اشتقاق تركيب اقترانين؛ باستخدام قاعدة السلسلة.			
	سادسًا : الاشتقاق الضمني – أميز بين العلاقة الضمنية والعلاقة الصريحة بين المتغيرين س ، ص. – أذكر خطوات إيجاد مشتقة علاقة ضمنية. – أثبت قاعدة اشتقاق $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ، حيث $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي – أعبر بالرموز عن قاعدة اشتقاق $ص = (ق(س))^{ن}$ ،حيث ن عدد نسبي. – أجد المشتقة الأولى لعلاقة ضمنية . – أوظف الاشتقاق الضمني في حل مسائل تتطلب إيجاد مشتقات عليا لعلاقة ضمنية.			

الفصل	مؤشرات الأداء	٣	٢	١
الفصل الثاني	**مهارات التعلم الأساسية** – أجري العمليات الروتينية. – أستخدم النمذجة والرموز الرياضية. – أفكر تفكيرًا منطقيًا. – أحل المشكلات.			
	الكفايات العامة. – أحترم النظام وبتقيد بالتعليمات. – أحافظ على البيئة الصفية و الممتلكات العامة. – أتقبل الآخرين. – أظهر المبادرة و يتعاون مع الآخرين. – أحرص على التعلم الذاتي والمستمر.			

(٣): إذا أنجز الطالب المهمة كاملة دون أخطاء ودون الحاجة إلى مساعدة .

(٢): إذا أنجز الطالب المهمة كاملة دون أخطاء بمساعدة أو أنجزها بخطأ واحد دون مساعدة.

(١): إذا أنجز جزءًا من المهمة أو أنجزها دون مساعدة وعنده أكثر من خطأ.

استراتيجية التقويم: التواصل.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٢-٣).

الفصل	مؤشرات الأداء	نعم	لا
الفصل الأول	**أولًا: معّدل التغير** – يعبر عن التغير بكلماته الخاصة. – يميز بين التغير الموجب والتغير السالب. – يعرّف معدل التغير في فترة. – يفسّر معدّل التغير هندسيًا . – يفسّر معدّل التغير فيزيائيًّا. – يجد معدّل التغير جبريًّا من الاقتران . – يجد معدّل التغير جبريًّا من خلال منحنى الاقتران. – يوظف التفسير الهندسي والفيزيائي لمعدل التغير في حل مسائل تطبيقية.		

الفصل	مؤشرات الأداء	نعم	لا
الفصل الأول	**ثانيًا : المشتقة الأولى** – يفسّر المشتقة الأولى كنهاية لمعدّل التغير. – يعرّف المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة. – يفسر المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة هندسيًا. – يجد المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة باستخدام التعريف. – يعرّف المشتقة الأولى لاقتران؛ عند نقطة من اليمين ومن اليسار. – يختبر قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة التشعب. – يتمكن من استخدام صيغتي المشتقة للبحث في قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة. – يبحث قابلية اقتران للاشتقاق على فترة. – يوظف المشتقة الأولى باعتبارها نهاية معدل التغير لحل مسائل تطبيقية. – يوظّف المشتقة الأولى في حل مسائل على النهايات.		
	ثالثًا: الاتصال والاشتقاق – يذكر العلاقة بين الاتصال والاشتقاق عند نقطة. – يفسّر الحالات التي يكون فيها الاقتران غير قابل للاشتقاق عند نقطة. – يدرس قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة تشعب باستخدام تعريف المشتقة من اليمين ومن اليسار. – يحدد مجال المشتقة الأولى لاقتران؛ من خلال بحث قابلية الاقتران للاشتقاق على مجاله. – يبرهن النظرية المرتبطة بالعلاقة بين الاشتقاق والاتصال عند نقطة.		

استراتيجية التقويم: التواصل.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٢–٤).

الفصل	مؤشرات الأداء	نعم	لا
الفصل الثاني	**أولًا: قواعد الاشتقاق (١)** ١) يستخدم تعريف المشتقة في إثبات : – مشتقة اقتران ثابت تساوي صفرًا. – مشتقة ق(س) = $س^{ن}$ هي قَ(س) = ن $س^{ن-١}$ ، ن عدد صحيح موجب. – مشتقة ثابت مضروب في اقتران تساوي الثابت مضروبًا في مشتقة الاقتران. – قاعدة مشتقة حاصل جمع / طرح اقترانين. ٢) يجد مشتقة اقتران باستخدام قواعد الاشتقاق (١).		

لا	نعم	مؤشرات الأداء	الفصل
		ثانيًا : قواعد الاشتقاق (٢) – يُعبر عن قاعدة اشتقاق ضرب اقترانين بالرموز والكلام . – يُعبر عن قاعدة اشتقاق قسمة اقترانين بالرموز والكلام. – يُعبر بالرموز عن مشتقة الاقتران ثابت. – يثبت أن مشتقة ق(س) = س^{ن} ، ن عدد صحيح سالب هي قَ(س) = ن س$^{ن-١}$. – يجد مشتقة حاصل ضرب اقترانين باستخدام قاعدة الضرب. – يجد مشتقة حاصل قسمة اقترانين باستخدام قاعدة القسمة. – يجد مشتقة اقتران متشعب باستخدام قواعد الاشتقاق. – يوظف قواعد الاشتقاق ٢ في حل مسائل على الاشتقاق.	الفصل الثاني
		ثالثًا: المشتقات العليا. – يعبر بالرموز المختلفة عن المشتقات من الثانية حتى الرابعة. – يجد المشتقات العليا لاقترانات معطاة حتى المشتقة الرابعة. – يوظف المشتقات العليا في حل مسائل على الاشتقاق.	
		رابعًا : مشتقات الاقترانات المثلثية – يثبت قاعدة اشتقاق جا س. – يثبت قاعدة اشتقاق جتا س. – يكتب بالرموز قواعد الاشتقاق المتعلقة باقترانات قا س، قتا س. – يكتب بالرموز قواعد الاشتقاق المتعلقة باقترانات ظا س، ظتا س. – يجد مشتقات اقترانات مثلثية.	
		خامسًا : قاعدة السلسلة – يعبر بالرموز عن الصورتين المتكافئتين لقاعدة السلسلة. – يجد مشتقة تركيب اقترانين باستخدام قاعدة السلسلة. – يثبت قاعدة اشتقاق ص= (ل(س))^{ن} ، حيث ن عدد صحيح . – يوظف قاعدة السلسلة في حل مسائل على مشتقة تركيب اقترانين.	

لا	نعم	مؤشرات الأداء	الفصل
		سادسًا : الاشتقاق الضمني – يميز بين العلاقة الضمنية والعلاقة الصريحة بين المتغيرين س ، ص. – يذكر خطوات إيجاد مشتقة علاقة ضمنية. – يثبت قاعدة اشتقاق ص= س $^{\frac{م}{ن}}$ ، حيث $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي. – يعبر بالرموز عن قاعدة اشتقاق ص = (ق(س))^{ن} ، حيث ن عدد نسبي. – يجد المشتقة الأولى لعلاقة ضمنية . – يوظف الاشتقاق الضمني في حل مسائل تتطلب إيجاد مشتقات عليا لعلاقة ضمنية.	**الفصل الثاني**

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٢–٥).

قائمة رصد لتقويم أداء طالب يعمل على حل مشكلة:

التقدير		الفقرة	الرقم
لا	نعم		
		يشعر بالمشكلة.	١
		يتقبل المشكلة بروح إيجابية.	٢
		يحدد المعطيات والشروط في المسألة بشكل صحيح.	٣
		يفهم المشكلة ويحدد أبعادها بصورة صحيحة.	٤
		يجمع معلومات مفيدة للوصول إلى الحل.	٥
		يضع خطة مناسبة للوصول إلى الحل.	٦
		ينفذ خطة الحل ويقوم بالإجراءات بصورة صحيحة.	٧
		يتحقق من صحة الحل ويراجع إجراءاته.	٨
		يطبق الحل على مواقف مشابهة.	٩

استراتيجية التقويم: الملاحظة.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٢-٦).

قائمة رصد لتقويم أداء طالب أثناء العمل في مجموعات تعاونية

الرقم	الفقرة	التقدير	
		نعم	لا
١	يتقبل زملاءه في المجموعة نفسها.		
٢	يقوم بالمهام الموكولة إليه.		
٣	يساعد زملاءه في المجموعة عند الحاجة.		
٤	يشارك في المناقشة.		
٥	يعبّر عن رأيه بوضوح.		
٦	يبادر إلى تحمل أعباء المهام الطارئة.		

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٢-٧).

	مؤشرات الأداء	نعم	لا
	أولًا: مهارات التعلم الأساسية - يُجري العمليات الروتينية. - يستخدم النمذجة والرموز الرياضية. - يفكر تفكيرًا منطقيًّا. - يحل المشكلات.		
	ثانيًا: الكفايات العامة - يحترم النظام ويتقيد بالتعليمات. - يحافظ على البيئة الصفية و الممتلكات العامة. - يتقبل الآخرين. - يُظهر المبادرة و يتعاون مع الآخرين. - يحرص على التعلم الذاتي والمستمر.		

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.

أداة التقويم: اختبار قصير – وحدة التفاضل–

١) إذا كان ق(س) $= \begin{cases} \text{س}^2 - ٣ + ١ & ، ٠ \leq \text{س} \leq ٣ \\ [\text{س}] - ٢ & ، ٣ \leq \text{س} \leq ٤ \end{cases}$ ، فأجب عما يأتي:

أ) جد معدل تغير الاقتران ق في الفترة [١ ، ٤]

ب) اكتب قاعدة ق َ(س).

٢) إذا كان ق(س) = س^3 + س ، هـ(س) = ٦ س^2 + ١ فجد كلًّا مما يأتي:

أ) (ق × هـ)َ (−١)

ب) $\left(\dfrac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'$ (٠)

جـ) (ق ∘ هـ)َ (س)

د) إذا كان س = ظا ص فجد صً

إجابات الاختبار القصير

١)

أ) ١

ب) ق َ(س) $= \begin{cases} ٢\text{س} - ٣ & ، ٠ < \text{س} < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، \text{س} = ٠ ، ٣ ، ٤ \\ ٠ & ، ٣ < \text{س} < ٤ \end{cases}$

٢)

أ) ٥٢

ب) ١

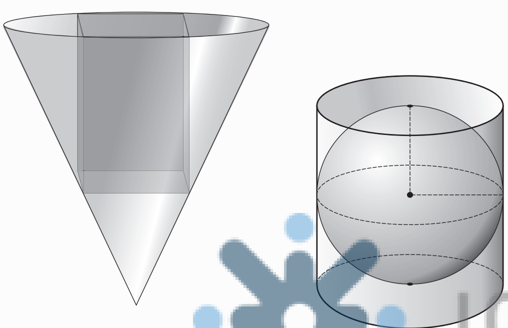
جـ) ٣٦ س (٦ س^2 + ١)^2 + ١٢ س

د) − ٢ جاص جتا^3 ص

الوحدة الثالثة

٣

تطبيقات التفاضل



تم توظيف علم التفاضل في مجالات متعددة تخدم العلوم الأخرى، كعلوم الفيزياء والكيمياء وعلوم الفضاء والاقتصاد والصناعات. وتضم دراسة خصائص الاقترانات، من حيث نهاياتها واتصالها ومجالات تزايدها وتناقصها ومجالات تقعرها، كذلك تم توظيف المعادلات التفاضلية في مجالات الاتصالات والمركبات الفضائية وفي المجالات العسكرية، كما تم توظيفها في العلوم الحياتية والسكانية.

يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- إيجاد معادلة المماس عند نقطة.
- حل مسائل هندسية على المشتقة الأولى.
- حل مسائل عملية على المسافة، والسرعة، والتسارع.
- تفسير مفهوم المعدل الزمني.
- حل مسائل وتطبيقات حياتية على المعدّلات المرتبطة بالزمن.
- بيان العلاقة بين المشتقة الأولى لاقتران، ومجالات التزايد والتناقص له.
- استخدام اختبار المشتقة الأولى في تحديد فترات التزايد والتناقص لاقتران معطى.
- تحديد النقط الحرجة لاقتران معطى.
- بيان العلاقة بين المشتقة الأولى لاقتران، والقيم القصوى المحلية له.
- استخدام اختبار المشتقة الأولى في ايجاد القيم القصوى المحلية و المطلقة لاقتران معطى، إن وُجدت.
- استخدام اختبار المشتقة الثانية في تحديد فترات التقعر إلى الأعلى وإلى الأسفل، ونقط الانعطاف، والقيم القصوى.
- حل مسائل عملية تتضمن القيم القصوى.

تهيئة الوحدة

أجب عن الأسئلة الآتية:

١) جد ميل المستقيم المار بالنقطتين (١،٢) ، (٣،٦) .

٢) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٠،٠) ، (٢،٤) .

٣) جد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع محور السينات الموجب .

٤) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١،٣) وميله ٣ .

٥) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤،٠) ويوازي محور الصادات .

٦) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٠،٥) ويوازي محور السينات .

٧) جد قياس الزاوية التي يصنعها العمودي على المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع محور السينات الموجب .

٨) جد نقطة تقاطع منحنيي الاقترانين ق(س) =س ، هـ(س)= س^٢.

٩) جد نقطة تقاطع منحنى الاقتران ق(س) = س^٢ – ٤ مع محور السينات .

١٠) إذا كان ق(س) = س^٣ + ٣س^٢ + ١ ، فجد قَ(٢) .

١١) إذا كان ق(س)= جا س ، هـ(س)= ١ ، فجد قيم س التي يكون عندها ق(س)= هـ(س)، س ∈ [٠،٢π]

١٢) إذا كان ق(س) = جاس ، س ∈ [٠،٢π] ، بين أن ٠ ≤|جاس|≤١ .

١٣) اختر الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

(١) معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم ص=٣س+١ ويمر بالنقطة (١،٥) هي:

أ) ص= ٣س + ١ ب) ص= ٣س+ ٢ جـ) ص=٥ د) ص= س+٤

(٢) ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه السالب محور السينات يساوي:

أ) –١ ب) ٠ جـ) ١ د) ٢

(٣) مساحة المثلث المكون من المستقيمات الآتية : ص=س ، ص=٤ –س ، ص=٠ ، بالوحدات المربّعة هي:

أ) ٨ ب) ١٦ جـ) ٦ د) ٤

(٤) إحداثيات نقطة تماس المستقيم الذي معادلته ص+٨س=١٦ مع منحنى الاقتران ق(س)= $\frac{٨}{س}$ هي :

أ) (١،٨) ب) (٠،١٦) جـ) (١٦،٠) د) (٨،١)

إجابات التهيئة

١) ٢

٢) ص = ٢س

٣) ١

٤) ص = ٣س

٥) س = ٤

٦) ص=٥

٧) $\frac{٢\pi}{٣}$

٨) (٠،٠) ، (١،١)

٩) (−٢،٠) ، (٢،٠)

١٠) ٢٤

١١) $\frac{\pi}{٢}$

١٢) −١≤جاس ≤ ١ ⟵ ٠≤|جاس|≤ ١

١٣)

١	٢	٣	٤
ب	جـ	د	أ

أولًا تطبيقات هندسية

عدد الحصص ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يجد معادلة المماس عند نقطة.
- يوظف المشتقة الأولى في حل مسائل هندسية .

التكامل الرأسي

- الاقتران التربيعي في الصف التاسع الأساسي، كثيرات الحدود في الصفين العاشر، والحادي عشر العلمي.

التكامل الأفقي

- وحدة الضوء في مبحث الفيزياء.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٥٤-١٦١).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- المماس، ميل المماس، العمودي، ميل العمودي، تقاطع المنحنين، نقطة التماس، نقطة مشتركة.

التعلم القبلي

- معادلة الخط المستقيم.
- المشتقة الأولى.
- نقطة التماس.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، حل المشكلات والاستقصاء.

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة بالمتطلبات السابقة: معادلة خط المستقيم، وتمثيلها في المستوى البياني.

٢ - توضيح مفهوم ميل المماس وربطه بمفهوم المشتقة الأولى.

٣ - تقديم مفهوم ميل المماس عند نقطة التماس (س$_1$، ق(س$_1$)) = قَ(س$_1$)

٤ – مناقشة المثال (١) وتوضيح المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة التماس، وإيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي.

٥ – تكليف الطلبة بحل تدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعة حلولهم للتأكد من اكتسابهم للمعرفة وإيجاد ميل المماس، ميل العمودي باستخدام المشتقة الأولى، كتابة معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران.

٦ – مناقشة المثالين (٢) ، (٣) مع الطلبة، وتوضيح مفهوم التوازي والتعامد والعلاقة بين ميلي مستقيمين متوازيين ومستقيمين متعامدين.

٧ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، وتكليف المجموعات بحل التدريبين (٢) ، (٣).

٨ – مناقشة ما توصلت إليه المجموعات، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

٩ – مناقشة الأمثلة (٤)، (٥)، (٦).

١٠– تكليف الطلبة بحل التدريبين (٤)، (٥)، ومتابعة حلولهم، للتأكد من امتلاكهم للمعرفة الرياضية.

١١– ختم الدرس من خلال توجيه أسئلة حول الخبرات التي قدّمت في الموقف الصفي، وتوجيه الطلبة إلى تعبئة سجل وصف سير التعلم.

١٢– إعطاء التمارين والمسائل واجبًا بيتيًا، ومتابعة حلول الطلبة لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

أخطاء شائعة

– يخطئ بعض الطلبة؛ فلا يفرقون بين مفهوم القاطع ومفهوم المماس، وعدم تمييزهم بين نقطة التماس، ونقطة غير ذلك، ويمكن معالجة ذلك بالتوضيح بيانيًا.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– تكليف الطلبة بحل سؤال رقم (١–أ) من ورقة العمل.

إثراء

– تكليف الطلبة بحل سؤال رقم (١– جـ) من ورقة العمل .

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التواصل، الورقة والقلم، مراجعة الذات.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٣–١)، سجل وصف سير التعلم (١–٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١):

معادلة المماس : ص−٢= $\frac{١}{٤}$(س−١)

معادلة العمودي : ص−٢= −٤(س−١)

تدريب (٢):

هـَ(±٢) × قَ(±٢) = ١× −١ = −١ متعامدان

التمارين والمسائل

١) ميل المماس عند (١،٢) = قَ(١) =٨

٢) نقطة التقاطع عند س= ٢ هي (٢،٨)

معادلة المماس : ص−٨=١٢(س−٢)

٣) (١،١)

٤) (−١، ٣)

٥) معادلة المماس : ص= −٢س+٢

٦) معادلة المماس: ص−٢ = −٢(س − ١)

معادلة العمودي: ص−٢ = $\frac{١}{٢}$(س − ١)

٧) ب=١ ، جـ=٢

٨) جـ=٤، −٤

٩) معادلة المماس الأولى : ص= $\frac{-١}{٤}$ س

معادلة المماس الثانية : ص−٤ = $\frac{١}{٤}$ س

١٠) هـ = $\frac{٣\pi}{٤}$

١١) معادلة المماس : ص−٥= −٢(س−$\frac{\pi}{٤}$)

معادلة العمودي : ص−٥ = $\frac{١}{٢}$(س−$\frac{\pi}{٤}$)

١٢) معادلة المماس : ص= $\frac{١}{٢}$س+$\frac{١}{٢}$

١٣) مساحة المثلث=٨ وحدات مربعة

١٤) مساحة المثلث= ٥ وحدات مربعة

تدريب (٣):

قَ(س) = ٠ عندما س= $\frac{\pi}{٢}$

تدريب (٤):

جـ= −$\frac{١}{٥}$

تدريب (٥):

نقطة التماس الأولى (١،٤)

نقطة التماس الثانية (٥،−٢٠)

ثانيًا تطبيقات فيزيائية

عدد الحصص ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يستخدم الاشتقاق في حل مسائل عملية على المسافة، السرعة، والتسارع.

التكامل الرأسي

- الاقتران التربيعي، والمقذوفات في الصف التاسع الأساسي.
- كثيرات الحدود في الصفين العاشر، والحادي عشر العلمي.

التكامل الأفقي

- التكامل مع مبحث الفيزياء في وحدة الحركة و المقذوفات.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٦٢-١٦٦).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- المسافة، السرعة، التسارع، أقصى ارتفاع.
- السرعة اللحظية، التسارع اللحظي.
- انعدام السرعة، انعدام التسارع.

التعلم القبلي

- المشتقة، قواعد الاشتقاق، قاعدة السلسلة، الاشتقاق الضمني، المشتقات العليا.
- المقذوفات.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، التفكير الناقد (التحليل).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة بالخبرات السابقة، السرعة المتوسطة ($\bar{ع}$) في الفترة [ن ، ن+Δن] لجسيم يتحرك على خط مستقيم، وفق العلاقة ل= ف(ن)، ثم ربط نهاية السرعة المتوسطة عندما Δن ← ٠ بالمشتقة الأولى فنحصل ع(ن) = فَ(ن)

٢ - تقديم مفهوم السرعة اللحظية في اللحظة ن: ع(ن) = فَ(ن)

ومفهوم التسارع اللحظي في اللحظة ن : ت(ن) = عَ(ن) = فً(ن)

٣ – استنتاج بمشاركة الطلبة أنَّ ع(ن)، هو التفسير الفيزيائي للمشتقة الأولى لاقتران المسافة ف(ن).

٤ – مناقشة المثالين (١) ، (٢) مع الطلبة بوصفهما تطبيقًا مباشرًا على كل من السرعة اللحظية والتسارع اللحظي.

٥ – تكليف الطلبة بحل التدريبين (١) ، (٢) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

٦ – مناقشة المثالين (٣) ، (٤).بمشاركة الطبة وطرح أسئلة أثناء الحل للتأكد من فهمهم.

٧ – تقسيم الطلبة في مجموعات تعاونية.

٨ – تكليف المجموعات بحل تدريب (٣) وأسئلة الكتاب (١،٢،٣،٤)، ومتابعة مناقشتهم ضمن المجموعات.

٩ – توجيه المجموعات إلى عرض أعمالها ومناقشتها على اللوح.

١٠ – المناقشة وإجراء حوار حول الإجابات الصحيحة التي تم التوصل إليها.

١١ – ختم الدرس من خلال سؤال الطلبة : ماذا تعلمتم في هذا الدرس؟

١٢ – إعطاء واجبات بيتيّة، ومتابعة حلول الطلبة؛ لتقديم التغذية الراجعة، والدعم اللازم حين الحاجة.

أخطاء شائعة

- قد يخلط بعض الطلبة بين مفهومي السرعة اللحظية والسرعة المتوسطة، والتسارع اللحظي والتسارع المتوسط، وضح للطلبة الفرق بين السرعة اللحظية والسرعة المتوسطة.
- قد يخلط بعض الطلبة في حركة المقذوفات والمتجهات، وضح للطلبة مسار حركة المقذوفات بيانيًا.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

- تكليف الطلبة بحل سؤال رقم (٢) من ورقة العمل (٣–١).

إثراء

- تكليف الطلبة بحل السؤال رقم (٣) من ورقة العمل (٣–١).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء، الملاحظة، التواصل.

أداة التقويم: سلم التقدير (٣–٢)، سلم التقدير اللفظي لحل المسألة (٣–٩).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

ف$(\frac{\pi}{٦})$ = ٤ متر

ع$(\frac{\pi}{٦})$= ١٥ م/ث

ت$(\frac{\pi}{٦})$= −٣٦ م/ث^{٢}

تدريب (٢)

ت(١)= −١٢ م/ث^{٢}

ت(٥)= ١٢ م/ث^{٢}

تدريب (٣)

ل= ١٢٠ متر

التمارين والمسائل

١) أ) ع(٠) = ٩م/ث   ب) ت(٣) = ٦م/ث^{٢} ، ت(١) = −٦م/ث^{٢}

٢) ت$(\frac{\pi}{٣})$ = $(\frac{١}{٢})$ م/ث^{٢}

٣) أ) ف(٢)= ١٩,٦ م   ب) ت(ن) = −٩,٨ م/ث^{٢} جـ) ع(٤) = −١٩,٦ م/ث

٤) أ) ن ∈ (٤، ٨]   ب) ف(٤) = ٢٥٦ قدم ، ت(١) = −٦م/ث^{٢}

جـ) ت(ن) = −٣٢ قدم/ث   د) ع(٠) = ١٢٨ قدم/ ث

٥) ع(١)= ٦٤ قدم/ث ، ع(٥) = −٦٤ قدم/ث

٦) أ= ٤٠

٧) أ) زمن الصعود + زمن الهبوط = ٨ث

ب) $\frac{٨+\sqrt{١١٢}}{٢}$ = ٤ + ٢ $\sqrt{٧}$ ثوان.

جـ) ف(٤)+٦٠ = ١٤٠ قدم

د) ن= ١ث

هـ) ن=٣ث ، ن= ٥ث

٨) ن$_{٢}$ = ١ث ، ومنه ن$_{١}$ = $\frac{٣}{٢}$ ث ، ف$_{١}$$(\frac{٣}{٢})$ = ٣٦ مترًا

٩) أ=٤

١٠) ت = −$\sqrt{٢}$ م/ث^{٢}

ثالثًا المعدلات المرتبطة بالزمن

عدد الحصص أربع حصص

نتاجات التعلم

- يفسر مفهوم المعدل الزمني.
- يحدد الثوابت والمتغيرات المعطاة والمطلوبة.
- يوظف الاشتقاق الضمني في حل مسائل وتطبيقات حياتية على المعدلات المرتبطة بالزمن.
- يكوِّن علاقة رياضية تربط متغيرات المسألة المعطاة والمطلوبة.

التكامل الأفقي

- معدلات التغير في مبحث الفيزياء.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٧١-١٧٨).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

معدل التغير، المعدل الزمني، المعدلات المرتبطة بالزمن.

التعلم القبلي

- تكوين علاقات رياضية، الاشتقاق الضمني بالنسبة للزمن، حجوم المجسمات ومساحة سطحها، مساحات الأشكال الهندسية، علاقات و قوانين المثلثات.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (التدريبات والتمارين) ، حل المشكلات، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، التفكير الناقد (التحليل).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد من خلال مراجعة الخبرات السابقة وخاصة الاشتقاق الضمني بالنسبة للزمن.

٢ - تقديم مفهوم معدلات تغير كل من ص ، س بالنسبة للزمن، والتي تسمى بالمعدلات المرتبطة بالزمن، للطلبة من خلال ذكر أمثلة حياتية، وتوجيههم إلى ذكر أمثلة أخرى يرتبط معدل تغيرها بتغير الزمن والاستماع إلى إجاباتهم وتعزيزها.

٣ – مناقشة المثالين (١) و (٢) مع الطلبة، مع التركيز على تنفيذ خطوات حل المسألة لحل كل من المثالين، وهي: فهم المسألة، اقتراح خطة الحل، تنفيذ الحل، التحقق من الحل، والتركيز على ضرورة تحديد الثوابت والمتغيرات المعطاة والمطلوبة، وتكوين العلاقات الرياضية الصحيحة التي تربط متغيرات المسألة للتمكن من حلها.
٤ – تقسيم الطلبة في مجموعات غير متجانسة.
٥ – تكليف المجموعات بحل تدريب (١)، ومتابعة حلولهم وتقديم التغذية الراجعة المناسبة، لأنَّ هذه المعرفة تشكل عند الطلبة مشكلات رياضية، وتوجيه المجموعات إلى عرض أعمالها ثم مناقشة الحل الصحيح على اللوح.
٦ – مناقشة المثالين (٣) و (٤) مع الطلبة، وإشراكهم في تنفيذ الحلول للأمثلة مراقبًا خطوات حل المسألة.
٧ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة ومرقمة، وتكليف المجموعات ذات الرقم الفردي بحل تدريب (٣) والمجموعات ذات الرقم الزوجي بحل تدريب (٤).
٨ – مناقشة ما توصلت إليه المجموعات وتقديم التغذية الراجعة المناسبة لها.
٩ – مناقشة مثال (٥) مع الطلبة وحله بمشاركتهم مع تأكيد خطوات الحل.
١٠– إعطاء واجبات صفية للطلبة، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.
١١– ختم الدرس من خلال:
- سؤال الطلبة: ماذا تعني المعدلات المرتبطة بالزمن؟ (والاستماع إلى إجاباتهم وتعزيزها).
- توجيه الطلبة إلى تعبئة نموذج سجل وصف سير التعلم.

أخطاء شائعة

- يخطئ بعض الطلبة في تحديد الثوابت والمتغيرات.
- يخطئ بعض الطلبة في تكوين العلاقات المساعدة.
- يخطئ بعض الطلبة في تكوين العلاقة الأساسية المطلوبة، التي تربط بين الثوابت والمتغيرات متضمنة العلاقات المساعدة.
- ضعف بعض الطلبة في حل المسألة الرياضية (المشكلات).

ويتم معالجة ذلك من خلال:
- تدريب الطلبة على آلية حل المشكلات الرياضية في الموقف الصفي.
- إعطاء الطلبة أنشطة متنوعة على حل المشكلات الرياضية، وتنفيذ خطوات حل المشكلات لتمكينهم من حلها.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

- مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بمعدل ٠,٠٠١سم/ث، جد معدل التغير في حجمه عندما يكون طول ضلعه ١٠سم. (الإجابة: −٠,٣سم^{٣}/ث).
- حوض سباحة على شكل متوازي مستطيلات، بعدا قاعدته ٢٠م، ١٠م وعمقه ٢م، إذا ضخ الماء بمعدل ٤م^{٣}/دقيقة، فجد سرعة ارتفاع الماء فيه. (الإجابة: ٠,٠٢م/د)

إثراء

- حل السؤال رقم (٥) من ورقة العمل (٣−١).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم، الملاحظة، التواصل، مراجعة الذات.

أداة التقويم: سلم التقدير (٣−٣)، سلم التقدير اللفظي (٣−٩)، سجل وصف سير التعلم (١−٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١):

العلاقة المستخدمة حجم الكرة، ومساحة سطح الكرة.

$$\frac{\text{دح}}{\text{دن}}\Big|_{\text{نق}=١٠\text{سم}} = -٤\,\pi \text{ سم}^{٣}/\text{ث}$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = -٠,٤\,\pi \text{ سم}^{٢}/\text{ث}$$

نق = ٥سم

تدريب (٢):

العلاقة المستخدمة المسافة بين النقطتين:

$$\frac{\text{دل}}{\text{دن}}\Big|_{\text{م}٣} = \frac{٦}{\sqrt{٢٠,٥٦}} \text{ م/ث}$$

تدريب (٣):

مساحة المثلث بدلالة جيب الزاوية.

أ) $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\Big|_{\text{هـ}=٦٠^\circ} = \frac{٣٢\pi}{١٨٠}$ سم^{٢}/ث

ب) $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\Big|_{\text{هـ}=١٢٠^\circ} = \frac{-٣٢\pi}{١٨٠}$ سم^{٢}/ث

التمارين والمسائل

١) $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\Big|_{\text{س}=١٠\text{سم}} = -٠{,}٠١٢$ سم^{٢}/ث ، $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}\Big|_{\text{س}=١٠\text{سم}} = -٠{,}٠٣$ سم^{٣}/ث

٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{-٣}{٨}$ م/ث (العلاقة: مبرهنة فيثاغورس)

٣) $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٣$سم^{٢}/ث (العلاقات: تشابه المثلثين، حجم المخروط، مساحة الدائرة)

٤) $\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ١٠ \times \sqrt{٣٧}$ كم/ساعة (العلاقة: قانون جيب التمام)

٥) أ) $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٣٢$ سم^{٢}/ث ب) $\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \frac{١٩٦}{\sqrt{٦٨}}$ سم/ث

٦) $\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = ٠{,}١$ راد/ث (العلاقة: ظل الزاوية)

٧) $\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٥ \times \sqrt{٣}$ سم/ث

٨) $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = (٤٠\pi - ٨٠)$ سم^{٢}/ث (العلاقات: مساحة الدائرة، مساحة مربع)

٩) $\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٠{,}٦$ م/ث (العلاقة: المسافة بين النقطتين)

أولًا النقط الحرجة

عدد الحصص: حصتان

نتاجات التعلم

- يتعرف مفهوم النقط الحرجة لاقتران.
- يحدد النقط الحرجة لاقتران معطى.

التكامل الرأسي

- ورد مفهوم النقط الحرجة هندسيًا في الصف التاسع الأساسي (القطع المكافئ).

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٧٥-١٧٨).

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- النقط الحرجة للاقتران.

التعلم القبلي

- المشتقة الأولى للاقترانات، أصفار الاقتران، مجال الاقتران، حل المعادلات.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتق زميلًا-شارك)، التفكير الناقد (التحليل).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد من خلال كتابة عنوان الدرس على اللوح، وسؤال الطلبة عند توقعاتهم حول موضوع الدرس والاستماع إلى إجاباتهم.

٢ - تقديم تعريف النقط الحرجة وتوضيحه من خلال مجموعة من الأمثلة التي يتم مناقشتها مع الطلبة على اللوح، لترسيخ مفهوم النقط الحرجة لديهم وتدريبهم على كيفية إيجادها لاقتران معطى.

٣ - تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، وتوجيه كل مجموعة إلى حل التدريبات (١، ٢، ٣) ومتابعة حلول المجموعات ومناقشتها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة التي تعمل على ترسيخ مفهوم النقط الحرجة للاقترانات السابقة.

٤ - مناقشة مثال (٤) الذي يتبنى استراتيجية قراءة الشكل الممثل لمنحنى المشتقة الأولى، ويهدف إلى استدراج الطلبة للتوصل إلى تحديد النقط الحرجة للاقتران الأصلي ق(س).

٥ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٤) المسألة الواردة في بداية الدرس، ومتابعة حلولهم وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

٦ – ختم الدرس من خلال سؤال الطلبة: ماذا تعلمت اليوم؟ وتوجيههم إلى تعبئة نموذج سجل وصف سير التعلم.

٧ – تكليف الطلبة بحل واجبات بيتية ومتابعتها لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم.

أخطاء شائعة

– يخطئ بعض الطلبة في تحديد النقط الحرجة؛ وذلك بسبب عدم الانتباه لمجال الاقتران ويمكن علاج ذلك بما يأتي:

- توضيح مفهوم النقط الحرجة وشروط تحقيقها.
- إعطاء مثال ولا مثال على النقط الحرجة.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) $= |\text{٦} - \text{٢}\text{س}|$

إثراء

– جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) $= \dfrac{\sqrt{\text{س}^{\text{٣}} + \text{١}}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}}$.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء، مراجعة الذات.

أداة التقويم: سلم التقدير (٣–٤)، سجل وصف التعلم (١–٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

النقط الحرجة: (–٣، ١٠) ، (٣، –٨) ، (–٢، ١٧) ، (٢، –١٥) .

تدريب (٢)

النقط الحرجة: (٠، ٠) ، $(\frac{\pi}{\text{٢}}$، ٠) ، $(\frac{\pi}{\text{٦}}$، $\frac{\text{١}}{\text{٤}})$ ، $(\frac{\text{٥}\pi}{\text{٦}}$، $\frac{\text{١}}{\text{٤}})$، (π ، ٠)

تدريب (٣)

النقط الحرجة: (–٢ ، $\sqrt[\text{٣}]{\text{٤}}$)، (٠ ، ٠) ، (٢ ، $\sqrt[\text{٣}]{\text{٤}}$)

تدريب(٤)

النقط الحرجة: (١، ١) ، (٢، ٠) ، (٣، ٣).

التمارين والمسائل

١)

أ) (−٢، ٢٥) ، (٢، ٩) ، (١، −٢).

ب) (٠ ، ١) ، ($\frac{\pi}{٤}$، $\sqrt{٢}$) ، ($\frac{٥\pi}{٤}$، −$\sqrt{٢}$) ، (٢ π، ١)

جـ) (−٣ ، ٣٦) ، (٠ ، ٠) ، ($\frac{٢}{٣}$، $\frac{٤}{٢٧}$) ، (١ ، ٠) ، (٢ ، ٤)

د) (٠، ١) ، ($\frac{\pi}{٢}$، ٠) ، (π، ١).

هـ) (−٢، ٥) ، (٠، ١) ، (٢، ٤).

٢)

أ= −٣ ، ب= −٩ .

٣)

(−٣، ق(−٣)) ، (−٢، ق(−٢)) ، (٠، ق(٠)) ، (٣، ق(٣))

٤)

(٠، −١).

ثانيًا التزايد والتناقص

عدد الحصص: حصتان

نتاجات التعلم

- يتعرّف مفهوم تزايد وتناقص الاقتران
- يحددّ فترات التزايد والتناقص للاقتران.
- يبحث إشارة المشتقة الأولى للاقتران ق.
- يستخدم المشتقة الأولى في تحديد فترات التزايد والتناقص لاقتران معطى.

التكامل الرأسي

- التزايد والتناقص في الصف الحادي عشر العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٧٩-١٨٤).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- اختبار المشتقة الأولى.
- التزايد، التناقص، الثابت.

التعلم القبلي

- المشتقة الأولى للاقتران.
- بحث إشارة الاقترانات.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، (أوراق العمل) أخرى (الاستقراء)، التعلم في مجموعات (فكر - انتقِ زميلًا - شارك).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد: توجيه الطلبة الى كتابة الجدول الآتي على دفاترهم وتعبئة الفراغات فيه:

س	-٢	-١	٠	١	٢
ق(س) = س +٢					
هـ(س) = ٦ - س					
ل(س) = ٥					

٢ – توجيــه الطلبة إلى وصف سلوك منحنى كل مــن الاقترانات ق(س)، هـ(س)، ل(س)؛ كلما زادت قيم س في الجدول السابق، وبذلك يستنتج تعريف التزايد والتناقص والثابت.

٣ – مناقشة الطلبة في الشكل (٣ – ١١) وذلك بربط المماسات بالمشتقة الأولى، وظل الزاوية التي يصنعها المماس مع محور السينات؛ بهدف استنتاج وربط إشارة المشتقة الأولى، بسلوك تزايد منحنى الاقتران وتناقصه في الفترات المعرف عليها تمهيدًا لتقديم النظرية .

٤ – تقديم تعريف التزايد والتناقص والثابت لمنحنى الاقتران، كما ورد في كتاب الطالب في الصفحة (١٧٩).

٥ – مناقشة الشكل (٣– ١٠) التمهيدي في بداية الدرس مع الطلبة، وطرح أسئلة؛ عليه لترسيخ مفهوم التزايد والتناقص وكيفية تحديد فترات التزايد والتناقص والثابت.

٦ – تقديم النظرية ومناقشتها مع الطلبة لتوضيحها .

٧ – مناقشــة المثالـين (١) ، (٢) مع الطلبة، وتوظيـف النظرية في تحديد فترات التزايـد والتناقص لمنحنى الاقتران في كل من المثالين.

٨ – تكليـف الطلبة بحل التدريبـين (١) ، (٢) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعـة حلولهم وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

٩ – مناقشــة المثالـين (٣) و(٤) مع الطلبـة، وتكليف الطلبة بحل تدريـب (٣)، ومتابعة حلولهم وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

١٠– ختـم الدرس من خلال طرح أسئلة على الطلبة حول المعرفة التي قُدِّمت في الموقف الصفي للتأكد من مدى امتلاك الطلبة للمعرفة الرياضية التي وردت في الدرس.

١١– تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل الدرس بوصفها واجبًا بيتيًّا، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة لهم.

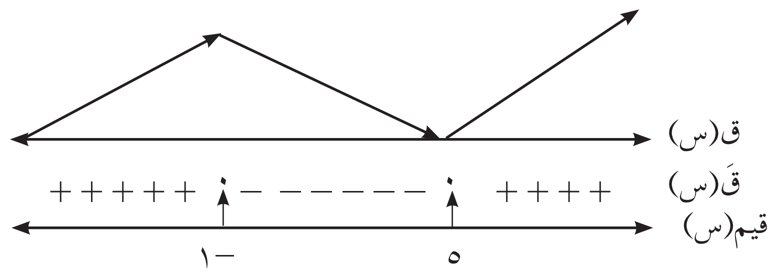
أخطاء شائعة

– يخطـئ بعض الطلبة في بحـث إشارة المشتقـة الأولى؛ وبالتالـي يخفقون في تحديد فتـرات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) معتمدًا الجدول الآتي، اكتب فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.



٢) إذا كان ق(س) = س^{٢} ، س $\in$ [−٢ ، ٤]، فحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.

إثراء

– إذا كان ق(س) اقترانًا متزايدًا على مجموعة الأعداد الحقيقية ح، وكان هـ(س) اقترانًا متناقصًا على ح، وكان كل من ق ، هـ قابلين للاشتقاق، وكان ل(س) = ٤ ق(س) − ٣هـ(س) متصلًا وقابلًا للاشتقاق على ح، فأثبت أنَّ ل(س) متزايد على ح.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التواصل ، الملاحظة.

أداة التقويم: سلم تقدير (٣−٥)، قائمة الرصد (٢−٦).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١) :

ق(س) متزايد في الفترة [٠ ، ٢] .

ق(س) متناقص في الفترتين (− ∞ ، ٠] ، [٢ ، ∞).

تدريب(٢):

ق(س) متزايد في الفترتين [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، [π ، $\frac{٣\pi}{٢}$] .

ق(س) متناقص في الفترتين [$\frac{\pi}{٢}$ ، π] ، [$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π] .

تدريب(٣):

ق(س) متزايد على ح .

التمارين والمسائل

١)

أ) ق(س) متزايد في الفترة ($-\infty$ ، ٢] .

ق(س) متناقص في الفترة [٢ ، ∞) .

ب) ق(س) متزايد في الفترتين [-٣، ٠] ، [٣، ٥].

ق(س) متناقص في الفترتين [-٥، -٣] ، [٠، ٣].

جـ) ق(س) متزايد في الفترتين [$\frac{\pi}{٢}$، π] ، [$\frac{٣\pi}{٢}$، ٢ π].

ق(س) متناقص في الفترتين [٠، $\frac{\pi}{٢}$] ، [π، $\frac{٣\pi}{٢}$].

د) ق(س) متناقص على ح .

هـ) ق(س) متزايد في الفترة [٢، ∞[.

ق(س) متناقص في الفترة ($-\infty$، ٢].

و) ق(س) متزايد في الفترة [-٥، ٠].

ق(س) متناقص في الفترة [٠، ٥].

ز) ق(س) متزايد في الفترة [٤، ∞) .

ق(س) متناقص في الفترة ($-\infty$ ، ٤] .

ح) ق(س) متزايد في الفترتين [٠، $\frac{\pi}{٣}$] ، [π، $\frac{٥\pi}{٣}$] .

ق(س) متناقص في الفترتين [$\frac{\pi}{٣}$، π] ، [$\frac{٥\pi}{٣}$، ٢ π] .

ط) ق(س) متزايد في الفترة ($-\infty$ ، ٠] .

ق(س) متناقص في الفترة [٠، ∞) .

ي) ق(س) متناقص على ح .

٢) ق(س) متزايد في الفترتين ($-\infty$ ، -٢] ، [٢، ∞) .

ق(س) متناقص في الفترة [-٢، ٢] .

٣) هـَ(س) = قَ(س) + ٣س^{٢} > ٠ ، س $\in$ (أ ، ب)

هـ(س) متزايد في الفترة [أ ، ب].

ثالثًا القيم القصوى

عدد الحصص: ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يتعرف مفهوم القيم القصوى المحليةلاقتران معطى.
- يتعرف مفهوم القيم القصوى المطلقة لاقتران معطى.
- يتعرف العلاقة بين المشتقة الأولى للاقتران والقيم القصوى المحلية له.
- يوظف اختبار المشتقة الأولى في إيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران المعطى.

التكامل الرأسي

- القيم القصوى في الصفين التاسع والحادي عشر.

التكامل الأفقي

- القيم القصوى في المقذوفات في مبحث الفيزياء.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٨٥–١٩١).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- اختبار المشتقة الأولى.
- القيم القصوى المحلية، العظمى المحلية، الصغرى المحلية.
- القيمة العظمى المطلقة، القيمة الصغرى المطلقة.

التعلم القبلي

- المشتقة الأولى، النقط الحرجة، بحث إشارة المشتقة الأولى.
- التزايد والتناقص للاقتران.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة) التدريبات والتمارين، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر–انتقِ زميلًا–شارك).

إجراءات التنفيذ

١ – التمهيد من خلال مراجعة الخبرات السابقة التي سبق أن درسها الطلبة في السنوات السابقة، مثل: خواص كثيرات الحدود وتوضيح علاقة إشارة المعامل (س٢) باتجاه منحنى الاقتران التربيعي، والعلاقة بين درجة الاقتران وعدد مرات قطع منحنى الاقتران كثير الحدود محور السينات، وعلاقة ذلك بعدد القيم القصوى والأعداد الحرجة.

٢ – مناقشة الشكل (٣–١٣) الواردة في كتاب الطالب؛ بهدف التمهيد لموضوع الدرس القيم القصوى.
٣ – تقديم تعريف القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة، وتوضيحه من خلال الرسومات البيانية كما في الشكل (٣–١٣) وترسيخه لدى الطلبة.
٤ – تقديم نظرية القيم القصوى للاقتران (ق) وعلاقتها بالنقط الحرجة وتوضيحها من خلال الشكل (٣–١٣).
٥ – تقديم نظرية اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى، وتوضيحها لدى الطلبة؛ من خلال إشارة المشتقة الأولى وربطها بالتزايد والتناقص للاقتران ق.
٦ – مناقشة المثالين (١) ، (٢) وحلهما بمشاركة الطلبة، وربط الحل بالنظريات السابقة، وتوظيفها في إيجاد القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة للاقتران ق.
٧ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، وتكليف المجموعات بحل تدريب (١) ومتابعة حلول المجموعات ومناقشتها وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.
٨ – مناقشة المثالين (٣) ، (٤) وحلهما بمشاركة الطلبة، مع توضيح خطوات إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة وتوظيف نظريات القيم القصوى بشكل مناسب، مع تأكيد كيفية بحث الإشارة وأهميتها في تحديد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران، وإيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة له.
٩ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٣) ضمن مجموعات ثنائية ومتابعة الحلول، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.
١٠– تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل بوصفها واجبًا بيتيًا ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.
١١– ختم الحصة من خلال توجيه الطلبة إلى تعبئة نموذج سجل وصف سير التعلم.

أخطاء شائعة

- يخطئ بعض الطلبة في إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة .
- يخطئ بعض الطلبة في عدم استطاعتهم إيجاد النقط الحرجة.
- يخطئ بعض الطلبة في الخلط بين مفهوم القيم القصوى المحلية والمطلقة.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

- جد النقطة الحرجة والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقترانات الآتية:

أ) هـ(س) = $|$٤ – ٢س$|$

ب) هـ(س) = س^{٣} – ٣س ، س ∈ [–٢ ، ٢]

إثراء

- إذا كان ق(س) = |س − ٢| + $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ ، فجد القيم القصوى للاقتران ق في الفترة [−٢ ، ٣] إن وجدت.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، مراجعة الذات.

أداة التقويم: سلم التقدير (٣−٦)، قائمة الرصد (٢−٦)، سجل وصف سير التعلم (١−٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

للاقتران ق (س) :

قيمة عظمى محلية عند س = ٣ هي ق(٣)= ٢

قيمة صغرى محلية عند س=١ هي ق(١) = −٢

قيمة عظمى مطلقة عند س = −١ هي ق(−١) = ١٨

قيمة صغرى مطلقة عند س = ٥ هي ق(٥) = −١٨

تدريب(٢)

للاقتران ق(س):

قيمة صغرى محلية عند س= ١ ، هي ق(١)= ٠

قيمة صغرى محلية عند س= −١ ، هي ق(−١)= ٠

قيمة عظمى محلية عند س= ٠ ، هي ق(٠) = ١

قيمة عظمى مطلقة عند س= ٤ ، هي ق(٤) = ١٥

قيمة صغرى مطلقة هي ق(±١)= صفرًا

تدريب (٣)

للاقتران ق(س) :

قيمة عظمى محلية عند س= $\frac{٢\pi}{٣}$ هي ق($\frac{٢\pi}{٣}$) = $\frac{٢\pi}{٣}$ + $\sqrt{٣}$

قيمة عظمى مطلقة عند س= $\frac{٢\pi}{٣}$ هي ق($\frac{٢\pi}{٣}$)= $\frac{٢\pi}{٣}$ + $\sqrt{٣}$

قيمة صغرى مطلقة عند س= π هي ق(π) = π

التمارين والمسائل

١)

أ) للاقتران ق(س) :

قيمة صغرى محلية عند س= ٣ هي ق(٣) = ٠

قيمة صغرى مطلقة عند س=٣ هي ق(٣) = ٠

قيمة عظمى مطلقة عند س= ٠ هي ق(٠) = ٩

ب) للاقتران ق(س) :

قيمة صغرى محلية عند س= ٢ هي ق(٢)= −١٦

قيمة عظمى محلية عند س= −٢ هي ق(−٢) = ١٦

قيمة صغرى مطلقة هي ق(−٤)= ق(٢) = −١٦

قيمة عظمى مطلقة هي ق(−٢)= ق(٤) = ١٦

جـ) للاقتران ق(س) :

قيمة عظمى مطلقة عند س= ٠ ، هي ق(٠) = ٨

قيمة صغرى مطلقة عند س= ٤ ، هي ق(٤) = −٨

د) للاقتران ق(س) :

قيمة صغرى محلية عند س= ٠ ، هي ق(٠) = ١

قيمة صغرى مطلقة عند س= ٠ ، هي ق(٠) = ١

قيمة عظمى مطلقة عند س= ٥ ، هي ق(٥) = ١٦

هـ) للاقتران ق(س) :

قيمة صغرى محلية عند س= ١ ، هي ق(١)= ٠

قيمة صغرى مطلقة عند س= ١ ، هي ق(١)= ٠

قيمة عظمى مطلقة هي ق(−١) = ق(٣)= ٨

و) للاقتران ق(س) :

قيمة صغرى محلية عند س= ١ هي ق(١) = $\frac{-١}{١٢}$

قيمة صغرى مطلقة عند س= ١ هي ق(١) = $\frac{-١}{١٢}$

قيمة عظمى مطلقة عند س= ٣ هي ق(٣) = $\frac{٤٥}{٤}$

ز) للاقتران ق(س) :

قيمة صغرى محلية عند س= ٠ هي ق(٠) = ٠

قيمة صغرى مطلقة عند س= ٠ ، هي ق(٠) =٠

قيمة عظمى مطلقة عند س= −٨ ، هي ق(−٨) = ٤

ح) للاقتران ق(س) :

قيمة صغرى مطلقة عند س= ٠ هي ق(٠) = ٠

قيمة عظمى مطلقة عند س= ٢π هي ق(٢π) = ٢π

ط) للاقتران ق(س):

قيمة صغرى مطلقة عند س= ٢ هي ق(٢) = −١

قيمة عظمى مطلقة عند س= −٢ هي ق(−٢) = ٢٧

ي) للاقتران ق(س):

قيمة صغرى محلية عند س= ١ ، هي ق(١) = ٠

قيمة صغرى مطلقة عند س= ١ ، هي ق(١) = ٠

قيمة عظمى مطلقة عند س= −٣ ، هي ق(−٣) = ٢٥٦

٢) بما أنَّ للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س= ٢ ← قَ(س) > ٠ ، س<٢

قَ(س) < ٠ ، س > ٢

هَـ(س)= −٣ (١− ق(س))٢ × قَ(س) ← هَـ(س) < ٠ ، س< ٢

هَـ(س) > ٠ ، س > ٢

للاقتران هـ(س) قيمة صغرى محلية عند س= ٢ ، هي النقطة (٢،هـ(٢)) = (٢،−٨)

٣)

أ) مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق هي { −٢، ٠ ، ٢ }

ب) منحنى ق(س) متزايد في الفترة [−٢ ، ٠]

منحنى ق(س) متناقص في الفترة [٠ ، ٢]

جـ) للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س= ٠

٤)

أ) للاقتران ق(س) نقط حرجة عند س= ٠ ، س= ٣

ب) الاقتران متزايد في الفترة (−∞ ، ٣]

الاقتران متناقص في الفترة [٣ ، ∞)

جـ) للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س= ٣

رابعًا التقعر

عدد الحصص: ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يتعرف مفهوم التقعر للاقتران ق.
- يتعرف مفهوم نقطة الانعطاف للاقتران ق.
- يبحث إشارة المشتقة الثانية للاقتران ق.
- يوظف اختبار المشتقة الثانية في تحديد فترات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق.
- يوظف اختبار المشتقة الثانية في تحديد القيم القصوى المحلية للاقتران ق.

التكامل الرأسي

- التقعر للأعلى أو للأسفل للاقتران التربيعي في الصف التاسع الأساسي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٧٩-١٨٤).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي: https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- اختبار المشتقة الثانية، التقعر للأعلى، التقعر للأسفل، نقط الانعطاف.

التعلم القبلي

- المشتقة الأولى والثانية، النقط الحرجة، بحث إشارة المشتقة الثانية .

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، التعلم من خلال النشاط.

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد من خلال مناقشة الطلبة بالشكل (٣-١٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ودراسة أوضاع المماسات المرسومة عند نقطة التماس الواقعة على منحنى الاقتران ق؛ بهدف توضيح مفهوم التقعر لمنحنى الاقتران ق(س) للأسفل وللأعلى.

٢ - تقديم تعريف التقعر لمنحنى الاقتران ق للأسفل ومناقشته من خلال منحنى اقتران مرسوم بيانيًّا لتوضيح مفهوم تقعر منحنى الاقتران وربطه بأوضاع مماسات منحنى الاقتران، وعلاقتها بالمنحنى الاقتران.

٣ – طـرح تساؤل حول العلاقة بين سلوك منحنى الاقتـران من حيث التزايد أو التناقص وإشارة المشتقة الأولـى بهدف الربط بين سلوك منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق، وإشارة المشتقة الثانية للاقتران ق للتوصل إلى اختبار المشتقة الثانية في تحديد مجالات التقعر لمنحنى الاقتران ق.

٤ – تقديم نظرية اختبار التقعر لمنحنى الاقتران ق ومناقشتها مع الطلبة.

٥ – مناقشـة المثالين (١) ، (٢) لتحديد فترات التقعر للأسفـل وللأعلى لمنحنى الاقتران ق؛ من خلال تطبيق اختبار المشتقة الثانية في التقعر .

٦ – تكليـف الطلبة بحـل التدريبين (١) ، (٢) ضمن مجموعات ثنائيـة ومتابعة حلولهم، وتقديم تغذية راجعة مناسبة لهم.

٧ – لفـت نظـر الطلبة حـول النقط التي يتغيـر منحنى الاقتران من اتجـاه تقعره حولهـا، والتي تقع في مجاله بهدف التمهيد لتعريف نقطة الانعطاف والشروط التي يجب توفرها في النقطة؛ لتكون نقطة انعطاف.

٨ – تقديم تعريف نقطة الانعطاف، وتأكيد الشروط التي يجب توفرها في النقطة لتكون نقطة انعطاف .

٩ – مناقشـة المثالين (٣) ، (٤) لإيجاد نقط الانعطاف، مع تأكيـد شروط توفرها لتكون نقطة انعطاف إن وجدت.

١٠– تكليـف الطلبة بحل التدريبين (٣) ، (٤)، حيث يتم توزيع الطلبة على مجموعات متكافئة، وتكليف بعض المجموعـات بحل تدريـب (٣) والأخرى بحل تدريـب (٤) ومتابعة حلـول المجموعات ومناقشتها وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

١١– تقديـم اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية بوصفه تطبيقًا للمشتقة الثانية، وإشارتها في تميز القيم القصوى المحلية للاقتران ق.

١٢– مناقشة مثال (٥) في إيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران ق باستخدام اختبار المشتقة الثانية .

١٣– تكليف الطلبة بحل تدريب (٥) ومتابعة حلولهم، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة .

١٤– ختم الحصة من خلال سؤال الطلبة: ماذا تعلمت اليوم ؟

أخطاء شائعة

– يخطئ بعض الطلبة في تطبيق اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية؛ وكذلك الخلط بين نقط الانعطاف والنقط الحرجة للاقتران ق .

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– تكليف الطلبة بحل السؤال رقم (٨–د) من ورقة العمل (٣–١).

إثراء

- يمكن الاستعانة بالرسومات البيانية التي تمثل منحنى المشتقة الأولى ق؛ بهدف تعميق الفهم لاختبار التقعر ولنقط الانعطاف والقيم القصوى المحلية.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء، الملاحظة، التواصل.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٣-٧)، قائمة الرصد (٢-٦)، قائمة الرصد (٢-٧).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١):

منحنى الاقتران مقعر للأعلى في الفترتين [-٥، ١] ، [٢، ٥]

منحنى الاقتران مقعر للأسفل في الفترة [١ ، ٢]

تدريب (٢): منحنى الاقتران مقعر للأسفل لجميع قيم س الحقيقية.

تدريب (٣): للاقتران نقطتا انعطاف هما (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٨١)

تدريب (٤):

للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = -٢ هي ق (-٢)=١٩

للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = ٣ هي ق (٣)= -٦

التمارين والمسائل

١)

أ) منحنى الاقتران ق مقعر للأسفل في الفترة (- ∞ ، ٠)

منحنى الاقتران ق مقعر للأعلى في الفترة (٠ ، ∞)

ب) منحنى الاقتران ق مقعر للأسفل في الفترة (-٤، ٤)

جـ) منحنى الاقتران ق مقعر للأعلى في الفترة (-∞، ٢)

د) منحنى الاقتران ق مقعر للأعلى في الفترتين (- ∞ ، ٠) ، (٠، $\frac{٣}{٢}$)

منحنى الاقتران مقعر للأسفل في الفترة ($\frac{٣}{٢}$ ، ∞)

هـ) منحنى الاقتران ق مقعر للأعلى في الفترة ($\frac{\pi}{٤}$ ، π)

منحنى الاقتران ق مقعر للأسفل في الفترة (٠ ، $\frac{\pi}{٤}$)

٢)

أ) للاقتران ق نقطة انعطاف عند س =٢هي(٢، ٤)

ب) للاقتران ق نقطتي انعطاف عند س = ٠ ، س = ١ هما (٠،٠) ، (١، ٠)

جـ) للاقتران ق نقطة انعطاف عند س = ٠ هي (٠، ٠)

د) للاقتران ق نقطة انعطاف عند س = ٠ هي (٠، ٠)

٣)

أ) للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = $\frac{٧\pi}{٤}$ هي ق ($\frac{٧\pi}{٤}$) = $-\sqrt{٢}$

للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{٣\pi}{٤}$ هي ق ($\frac{٣\pi}{٤}$) = $\sqrt{٢}$

ب) يفشل اختبار المشتقة الثانية، ومن اختبار المشتقة الأولى نجد أنَّ للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = ٠ هي ق (٠) =٠

جـ) يفشل اختبار المشتقة الثانية، ومن اختبار المشتقة الأولى نجد أنَّ للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = ٢ هي ق (٢) = −١

د) للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = ٤ هي ق (٤) =٤٨

٤) ق(س) = − س^{٣} + ٦ س^{٢} − ١٥س + ١٥

٥) منحنى ق(س) مقعر للأعلى في الفترة (٠ ، ∞)

منحنى ق(س) مقعر للأسفل في الفترة (−∞، ٠)

لا يوجد لمنحنى ق نقطة انعطاف عند س =٠؛ لأنَّ ق غير معرف عند س=٠

منحنى هـ(س) مقعر للأسفل في الفترة (٠ ، ∞)

منحنى هـ(س) مقعر للأعلى في الفترة (− ∞، ٠)

للاقتران هـ(س) نقطة انعطاف عند س= ٠ هي (٠، ٠)

٦)

أ) ق(س) متزايد في الفترتين (− ∞ ، −١] ، [١، ∞)

ق(س) متناقص في الفترة [−١ ، ١]

ب) للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س= −١ هي ق (−١)

للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س= ١ هي ق (١)

جـ) منحنى ق مقعر للأعلى في الفترة [٠ ، ∞)

منحنى ق مقعر للأسفل في الفترة (− ∞ ، ٠]

د) للاقتران نقطة انعطاف عند س= ٠ هي (٠، ق(٠))

خامسًا تطبيقات القيم القصوى

عدد الحصص أربع حصص

نتاجات التعلم

- يوظف التفاضل في حل مسائل عملية ومشكلات حياتية تتضمن القيم القصوى.

التكامل الرأسي

- القيم القصوى في الصف الثاني عشر العلمي.

التكامل الأفقي

- أقصى ارتفاع في مبحث الفيزياء.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب الصفحات، (٢٠٠-٢١٠).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- أكبر ما يمكن ، أقل ما يمكن ، أصغر ما يمكن.

التعلم القبلي

تكوين العلاقات، المشتقة الأولى، النقط الحرجة، التزايد والتناقص للاقترانات، القوانين والعلاقات الرياضية، المشتقة الثانية.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، حل المشكلات والاستقصاء، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد من خلال مناقشة المثال الآتي مع الطلبة :
- جد قيم س التي تجعل قيم الاقتران ق(س) = س^٢ - ٤س + ٢، أقل ما يمكن.
- جد قيم س التي تجعل قيم الاقتران هـ(س) = ٦س - س^٢ + ٣، أكبر ما يمكن.

٢ - التوضيح للطلبة أثناء المناقشة؛ ماذا تعني أكبر ما يمكن وأصغر ما يمكن، وأقل ما يمكن بيانيًّا، وبالرسومات التوضيحية.

٣ - مناقشة الطلبة في المثالين (١) ، (٢) وتوظيف خطوات حل المسألة الرياضية في حلهما ولتشجيع الطلبة على:
- فهم المسألة المراد حلها.

- قراءة المسألة بتمعن.
- تحديد المتغيرات والثوابت.
- ربط المتغيرات والثوابت مع بعضها.
- رسم شكل توضيحي للمسألة.
- تحديد المعطيات والمطلوب.
- التخطيط لحل المسألة وكتابة العلاقة التي تربط بين المتغيرات في المسألة بدلالة متغير واحد.
- تنفيذ الحل مستخدمًا ما تعلمه الطالب في الدروس السابقة في إيجاد القيم القصوى (اختبار المشتقة الأولى، اختبار المشتقة الثانية).
- التحقق من الحل وَمَعْقوليته.

٤ – تقسيم الطلبة في مجموعات غير متجانسة.
٥ – تكليف المجموعات بحل التدريبين (١) ، (٢) ومتابعة حلولهم، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.
٦ – مناقشة المثالين (٣) ، (٤) مع الطلبة وإشراك الطلبة في تنفيذ خطوات حل المسألة وتوظيفها في حل المثالين السابقين.
٧ – تكليف المجموعات بحل التدريبين (٣) ، (٤) ، ومتابعة حلولهم وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.
٨ – مناقشة المثالين (٥) ، (٦) مع الطلبة وإشراك الطلبة في تنفيذ حل المثالين، والتركيز على خطوات حل المسألة في أثناء الحل.
٩ – تكليف الطلبة بحل التدريبين (٥) ، (٦) ، مع التركيز على خطوات حل المسألة.
١٠– ختم الدرس من خلال سؤال الطلبة: ماذا تعلمت اليوم؟ ويمكن توجيههم إلى تعبئة نموذج سير وصف التعلم.

أخطاء شائعة

- يخطئ بعض الطلبة في تكوين العلاقات المساعدة التي تربط المتغيرات بالثوابت.
- يخطئ بعض الطلبة في تكوين العلاقة المطلوبة بدلالة متغير واحد.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

- عـددان صحيحـان موجبـان مجموعهما ٤٠ ، جد العدديـن بحيث يكون مجمـو ع مربّعيهما أقل ما يمكن.

إثراء

- حل السؤال (٩) من ورقة العمل (٣–١)

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة والتواصل ، الورقة والقلم، مراجعة الذات

أداة التقويم: سلم التقدير (٣– ٨)، سلم التقدير اللفظي (٣–٩)، سجل وصف سير التعلم (١–٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

العلاقة : س + ٢ص = ٤٠ ، ق = س × ص

العدد الأول = ٢٠

العدد الثاني = ١٠

تدريب (٢)

العلاقة مساحة المستطيل مع الرسم

العرض = ٤ سم

الطول = ٣٢ سم

تدريب (٣)

العلاقة : مساحة المستطيل المحصورة (م = ٢ (س^{٣} – ٦س^{٢} + ٨س))

س = ٢ + $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ سم

تدريب (٤)

العلاقة : قانون مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$×٦٤×٦٤×جا هـ

قياس الزاوية هـ = $\frac{\pi}{٢}$

تدريب (٥)

حجم المخروط = $\frac{٦٤\pi}{٣}$ سم^{٣}

تدريب (٦)

العلاقة : مبرهنة فيثاغورس

أقل تكلفة عندما س = $\frac{٣}{٢}$ كم

أكبر تكلفة عندما س = ٦ كم

التمارين والمسائل

١) العدد = $\frac{١}{٢}$

٢) م (١٠) = ٣٠٠ π سم^{٢}

٣) (٢ ، ٤)

٤) ٣ص + ٤س – ٢٤ = ٠

٥) قياس الزاوية هـ = $\frac{\pi}{٤}$

٦) م = ١٦ سم^{٢}

٧) هـ = ٢ $\sqrt{\frac{٢\pi}{٣}}$

٨) س = ٧٥٠٠ قطعة

٩) هـ = $\frac{٣\pi}{٤}$

١٠) م = $\frac{٢٥٦}{٢٧}$ وحدة مربّعة

إجابات أسئلة
الوحدة الثالثة

١) جـ = ٢

٢) ت = $\sqrt{٣}$ م/ث^{٢}

٣) أ) س = ± ٣ ، س = ± ٣ ($\sqrt{٣}$)

ب) الاقتران ق متزايد في الفترتين (−∞ ، −٣] ، [٣ ، ∞)

الاقتران ق متناقص في الفترة [−٣ ، ٣]

جـ) للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = −٣

للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = ٣

للاقتران ق قيمة صغرى مطلقة عند س = − ٣ $\sqrt{٣}$

٤) ق (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٥

٥) أ) للاقتران ق نقطة حرجة عند س = −١ ، س = ٥

ب) الاقتران ق متزايد في الفترة [−١ ، ٥]

الاقتران ق متناقص في الفترتين (− ∞ ، −١] ، [٥ ، ∞)

جـ) للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = ٥

للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = −١

د) الاقتران ق مقعر للأعلى في الفترة (− ∞ ، ٢]

الاقتران ق مقعر للأسفل في الفترة [٢ ، ∞)

هـ) للاقتران ق نقطة انعطاف عند س = ٢

٦) أ) للاقتران ق نقط حرجة عند س = −١ ، س = ٠ ، س = ١ ، س = ٤

ب) الاقتران ق متزايد في الفترة [٠ ، ٤]

الاقتران ق متناقص في الفترة [−١ ، ٠]

جـ) للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = ٠

د) أ = ٢ ، ب = ٠ ، ج = $\frac{١}{٢}$ ، د = ٠ ، هـ = $\frac{٣}{٢}$

٧) أبعاد المستطيل هي ل = ٥سم ، ع = ٣,٢ سم

٨)

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
رمز الإجابة الصحيحة	جـ	د	أ	د	أ	د	د	جـ	ب	د	جـ

ورقة عمل (٣-١)

أجب عن الأسئلة الآتية:

١) إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٢

أ) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (١ ، ٣)

ب) جد معادلة العمودي على مماس منحنى الاقتران ق عند النقطة (١ ، ٣)

جـ) جد مساحة المثلث الناتج عن تقاطع محور السينات والمماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (١ ، ٣).

٢) قذف جسيم رأسيًا للأعلى من برج يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٧٠م ، فإذا كان ارتفاع الجسيم عن قمة البرج يعطى بالعلاقة ف(ن) = ٦٠ن – ١٠ن^{٢} ، حيث ن: الزمن بالثواني، ف: المسافة بالأمتار.

فجد كلًّا مما يأتي:

أ) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم عن قمة البرج .

ب) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم عن سطح الأرض.

جـ) متى يعود الجسيم إلى الأرض.

د) سرعة الجسيم لحظة وصوله الأرض.

٣) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إنَّ بعده عن نقطة الأصل معطاة حسب العلاقة :

ف(ن)= ن^{٣}– ٩ن^{٢} + ١٥ن + ٢٠ ، حيث ن: الزمن بالثواني ، ف: المسافة بالأمتار .

فجد كلًّا مما يأتي:

أ) السرعة الابتدائية.

ب) تسارع الجسيم عند اللحظة التي تنعدم فيها السرعة .

جـ) المسافة التي يقطعها الجسيم عند ن = ١ث.

٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم، وفق العلاقة ف(ن) = $\sqrt{ن}$ (٢٧–ن) حيث ن: الزمن بالثواني، ف: المسافة المقطوعة بالأمتار. بيِّن أن الجسيم يبدأ في العودة بعد مرور ٩ ثوانٍ من بدء حركته.

٥) خزان ماء كروي الشكل نصف قطره ١م ، يصب فيه الماء من حنفية، فإذا كان معدل ارتفاع الماء فيه $\frac{١}{٤}$ م/د

فجد كلًّا مما يأتي:

أ) معدل تغير مساحة سطح الماء فيه بعد دقيقتين من بدء صب الماء .

ب) معدل تغير مساحة سطح الماء فيه بعد مرور (٦) دقائق من بدء صب الماء.

٦) إذا كان ق(س) = $\sqrt{س^٢ - ٣٦}$ ، | س| ≤ ٦ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) النقط الحرجة للاقتران ق.

ب) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.

جـ) القيم القصوى المحلية إن وجدت للاقتران ق وبيِّن نوعها.

د) مجالات التقعر للاقتران ق.

هـ) نقط الانعطاف إن وجدت.

٧) إذا كان ق(س) = ٣س^٢ – س^٣ ، حيث س ∈ [–٢ ، ٤] ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) النقط الحرجة للاقتران ق.

ب) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق .

جـ) القيم القصوى المحلية للاقتران ق وبين نوعها .

د) مجالات التقعر للاقتران ق.

هـ) نقط الانعطاف للاقتران ق.

٨) إذا كان ق(س) = جاس + جتا س ، س ∈ [٠ ، ٢π] ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) النقط الحرجة للاقتران ق .

ب) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.

جـ) القيم القصوى المحلية للاقتران ق، وبين نوعها .

د) مجالات التقعر للاقتران ق.

هـ) نقط الانعطاف للاقتران ق.

٩) المثلث أ ب جـ طول قاعدته ١٢سم ، وارتفاعه ١٦سم ، رسم المثلث د هـ و بحيث تقع رؤوسه على أضلاع المثلث أ ب جـ ، إذا كان($\overline{د و}$) يوازي ($\overline{ب جـ}$) ، فجد ارتفاع المثلث د هـ و الذي يجعل مساحته أكبر ما يمكن.

١٠) تتحرك النقطة و (س، ص) على المستقيم: س – ص = ٤ ، جد إحداثيات النقطة والتي تجعلها أقرب ما يمكن للنقطة (٦ ، ٠) .

١١) إذا كان الاقتران ق(س) متصلًا على الفترة [أ ، ب] وقابلًا للاشتقاق على (أ ، ب)، وكان قَ(س)< ٠ ، لكل س ∈ (أ ، ب) ، فبيِّن أنَّ الاقتران هـ(س) = ق(س) – س° ، متناقصًا على الفترة [أ،ب] .

إجابات ورقة عمل (٣-١)

١) أ) ص = ٣س

ب) ص = $\frac{١٠ - س}{٣}$

جـ) م = ١٥ وحدة مربعة .

٢) أ) ع(٠) = ١٥ م/ث

ب) ت(١) = −١٢ م/ث^{٢} ، ت (٥) = ١٢ م/ث^{٢}

جـ) ف(١) = ٢٧م .

٣) أ) أقصى ارتفاع عند قمة البرج = ٩٠م

ب) أقصى ارتفاع عن سطح الأرض = ١٦٠م

جـ) ن = ٧ث

د) ع = − ٨٠ م/ث .

٤) يبدأ الجُسيم في العودة عندما ع(ن) = ٠

ع(ن) = فَ(ن) = $\frac{٢٧}{٢\sqrt{ن}} - \frac{٣}{٢}\sqrt{ن}$ = صفر

ومنه ن = ٩ ثوان

٥) أ) $\frac{\pi}{٤}$ سم^{٢} / د

ب) − $\frac{\pi}{٤}$ سم^{٢} / د

٦) أ) النقط الحرجة هي (٠،٠)، (٢، ٤).

ب) منحنى ق(س) متناقص في الفترتين(−∞ ، ٠] ، [٢ ، ∞) ، ومتزايد في الفترة[٠ ، ٢].

جـ) للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س= ٢ هي ق(٢)، وصغرى محلية عند س= ٠ هي ق(٠).

د) منحنى الاقتران ق مقعر للأعلى في الفترة (−∞ ، ١] ومقعر للأسفل في الفترة[١ ، ∞).

٧) أ) النقط الحرجة هي (−٦ ، ٠) ، (٦ ، ٠) .

ب) منحنى ق(س) متناقص في الفترة (−∞ ، ٢] ، ومتزايد في الفترة[٦ ، ∞)

جـ) يوجد قيمة صغرى محلية هي ق(٠) = −٦ وقيمة عظمى مطلقة هي ق(٦) = ٠ .

د) منحنى الاقتران ق(س) مقعر للأسفل في الفترتين (−∞ ، −٦] ، [٦ ، ∞)

هـ) لا يوجد نقط انعطاف.

هـ) للاقتران نقطة انعطاف عند س= ١ .

٨) أ) قيم س الحرجة هي = ٠ ، $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$ ، ٢π .

ب) منحنى الاقتران ق متزايد في الفترتين [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$] ، [$\frac{٥\pi}{٤}$ ، ٢π] ومتناقص في [$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$] .

جـ) للاقتران قيمة عظمى محلية عند س= $\frac{\pi}{٤}$ وهي مطلقة، وقيمة صغرى محلية عند $\frac{٥\pi}{٤}$ وهي مطلقة.

د) ق(س) مقعر للأسفل في الفترة [٠ ، $\frac{٣\pi}{٤}$] و [$\frac{٧\pi}{٤}$ ، ٢π] وللأعلى في الفترة [$\frac{٣\pi}{٤}$ ، $\frac{٧\pi}{٤}$] .

هـ) للاقتران نقطتا انعطاف عند س= $\frac{٣\pi}{٤}$ ، $\frac{٧\pi}{٤}$.

٩) ٨سم .

١٠) (٣ ، $\sqrt{٥}$) .

١١) هـَ (س) = قَ(س) – ٥س٤ < ٠ ، لكل س ∈ (أ ، ب)

ومنه فإنَّ هـ(س) متناقص على الفترة [أ ، ب].

استراتيجية التقويم: االتواصل، الورقة والقلم.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٣-١).

مؤشرات الأداء	نعم	لا
تطبيقات هندسية: - يعرف المعنى الهندسي للمشتقة الأولى. - يميز بين ميل المماس وميل العمودي على المماس. - يجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة التماس. - يجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند تقطة التماس. - يجد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى إذا عُلمت نقطة خارجة. - يبين تعامد منحنيين عند نقطة. - يبين توازي منحنيين عند نقطة.		

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء.

أداة التقويم: سلم التقدير (٣-٢).

مؤشرات الأداء	١	٢	٣	٤	٥
- يتعرف مفهوم السرعة اللحظية لجسيم يتحرك وفق العلاقة ف(ن). - يتعرف مفهوم التسارع اللحظي وعلاقته ت(ن) = عَ(ن) = فً(ن) - يحل مسائل عملية على المسافة. - يحل مسائل عملية على السرعة. - يحل مسائل عملية على التسارع.					

ممتاز(٥): يبدي فهمًا عميقًا، ولا يحتاج إلى المساعدة. جيد جدًّا (٤): يبدي فهمًا، وقد يحتاج إلى المساعدة.

جيد (٣): يبدي فهمًا جزئيًّا، ويحتاج إلى المساعدة. متوسط (٢) : يبدي فهمًا ضعيفًا، ويحتاج إلى المساعدة.

ضعيف (١): لا يبدي فهمًا، ويحتاج إلى المساعدة.

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم، الملاحظة.

أداة التقويم: سلم التقدير (٣-٣).

مؤشرات الأداء	ضعيف	مقبول	جيد	جيد جدًّا	ممتاز
- يفهم المسألة ويمثلها بشكل تقريبي.					
- يحدد الثوابت والمتغيرات والمعدلات الزمنية المعطاة والمطلوبة.					
- يكون علاقات مساعدة تربط متغيرات المسألة وثوابتها.					
- يكون علاقة رئيسة متضمنة الثوابت والمتغيرات.					
- يشتق طرفي العلاقة ضمنيًّا بالنسبة للزمن.					
- يجد المعدلات المطلوبة في المسألة.					
- يحل المعدلات المرتبطة بالزمن.					

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء.

أداة التقويم: سلم التقدير (٣-٤).

مؤشرات الأداء	١	٢	٣	٤	٥
- يحددّ مجال الاقتران المعطى.					
- يجد المشتقة الأولى للاقتران المعطى.					
- يجد أصفار المشتقة الأولى إن وجدت.					
- يجد قيم س التي تكون عندها المشتقة الأولى غير موجودة.					
- يعين النقط الحرجة.					

استراتيجية التقويم: التواصل.

أداة التقويم: سلم التقدير (٣-٥).

مؤشرات الأداء	١	٢	٣	٤	٥
- يجد قَ(س).					
- يجد النقطة الحرجة للاقتران.					
- يبحث إشارة الاقتران (قَ).					
- يجد فترات التزايد والتناقص للاقتران.					

ممتاز(٥): يبدي فهمًا عميقًا، ولا يحتاج إلى المساعدة. جيد جدًّا (٤): يبدي فهمًا، وقد يحتاج إلى المساعدة.

جيد (٣): يبدي فهمًا جزئيًّا، ويحتاج إلى المساعدة. متوسط (٢) : يبدي فهمًا ضعيفًا، ويحتاج إلى المساعدة.

ضعيف (١): لا يبدي فهمًا، ويحتاج إلى المساعدة.

استراتيجية التقويم: الملاحظة.

أداة التقويم: سلم التقدير (٣-٦).

مؤشرات الأداء	ضعيف	مقبول	جيد	جيد جدًّا	ممتاز
- يتعرف مفهوم القيم القصوى المحلية للاقتران المعطى.					
- يتعرف مفهوم القيم القصوى المطلقة للاقتران المعطى.					
- يجد القيم القصوى المحلية للاقتران المعطى.					
- يجد القيم القصوى المطلقة للاقتران المعطى.					
- يوظف نظرية اختبار المشتقة للقيم القصوى.					

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٣-٧).

مؤشرات الأداء	يتقن	لا يتقن
- يتعرف مفهوم التقعر.		
- يتعرف مفهوم نقط الانعطاف.		
- يحدد فترات التقعر للأعلى وللأسفل.		
- يعيّن القيم القصوى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الثانية.		

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل.

أداة التقويم: سلم التقدير (٣-٨).

مؤشرات الأداء	١	٢	٣	٤	٥
- يفهم المسألة المراد حلها.					
- يرسم شكل توضيحي للمسألة.					
- يحدد المتغيرات والثوابت.					
- يربط المتغيرات والثوابت مع بعضها بعلاقة رياضية.					
- يحدد المعطيات والمطلوب.					
- يكتب العلاقة المطلوبة بدلالة متغير واحد.					
- يجد القيم القصوى.					

ممتاز(٥): يبدي فهمًا عميقًا، ولا يحتاج إلى المساعدة. جيد جدًّا (٤): يبدي فهمًا، وقد يحتاج إلى المساعدة.

جيد (٣): يبدي فهمًا جزئيًّا، ويحتاج إلى المساعدة. متوسط (٢) : يبدي فهمًا ضعيفًا، ويحتاج إلى المساعدة.

ضعيف (١): لا يبدي فهمًا، ويحتاج إلى المساعدة.

استراتيجية التقويم: التواصل، الملاحظة.

أداة التقويم: سلم التقدير اللفظي (٣-٩).

سلم تقدير لفظي لتقويم مهارات الطلبة في حل المسألة الرياضية العلمية.

مؤشر الأداء	ضعيف في حل المسألة (١)	مبتدئ في حل المسألة (٢)	مؤهل لحل المسألة (٣)	خبير لحل المسألة (٤)
يعيد صياغة المسألة بعباراته الخاصة.	لا يستطيع صياغة المسألة بعباراته الخاصة.	يجد صعوبة في صياغة المسألة بعباراته الخاصة ويحتاج لشرح أكثر.	يستطيع صياغة المسألة بعباراته الخاصة.	يستطيع صياغة المسألة بعباراته الخاصة بطلاقة.
تحديد المعطيات والمطلوب.	لا يستطيع تحديد المعطيات والمطلوب.	يجد صعوبة في تحديد المعطيات والمطلوب ويجد صعوبة في التفريق ما بين المعطيات والمطلوب.	يحدّد المعطيات والمطلوب.	يحدّد المعطيات والمطلوب ويقوم برسم توضيحي للمسألة، ويعّين عليه المعطيات والمطلوب إن تطلّب الأمر ذلك.
تحديد طريقة الحل المناسبة.	لا يستطيع تحديد طريقة الحل المناسبة.	يحاول تحديد طريقة الحل المناسبة ويحتاج إلى مساعدة	يتقيد بطريقة الحل الموجودة في الكتاب.	يبتكر أكثر من طريقة لحل المسألة.
ينفّذ الحل.	لا يستطيع أن ينفّذ الحل.	يستطيع تنفيذ الحل مع وجود أخطاء في بعض خطوات الحل.	يستطيع تنفيذ الحل ولكن يحتاج لوقت طويل.	ينفّذ الحل بسرعة ودقة وإتقان.
يتحقق من صحة الحل.	لا يستطيع التحقق من صحة الحل.	لا يتحقق من صحة الحل.	يتحقق من صحة الحل بطريقة محددة.	يتحقق من صحة الحل بأكثر من طريقة.

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.

أداة التقويم: اختبار وحدة تطبيقات التفاضل.

السؤال الأول:

أ) قذف جسيم رأسيًّا للأعلى من سطح بناية ترتفع ١٠٠ متر عن سطح الأرض بحيث إنَّ ارتفاعه عنها بعد ن ثانية من بدء الحركة يعطى بالعلاقة : ف(ن)= أ ن – ٥ ن^{٢} ، إذا علمت أن سرعة الجسيم أثناء هبوطه بعد مرور (٦) ثوانٍ تساوي نصف سرعته التي قذف بها، فجد:

(١) قيمة الثابت أ (٢) سرعة الجسيم وهو على ارتفاع (٥٥) مترًا عن سطح الأرض.

ب) أثبت أنَّ المستقيم ٢ص + س = ٣ عمودي على منحنى العلاقة ص = س^{٢} عند إحدى نقطتي تقاطعه مع منحناها..

جـ) اذا كان
$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \leq صفر \\ س & ، صفر < س < ٢ \\ \sqrt{س - ٢} & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

فجد كلًّا مما يأتي: (١) قيم س الحرجة (٢) مجالات التزايد والتناقص

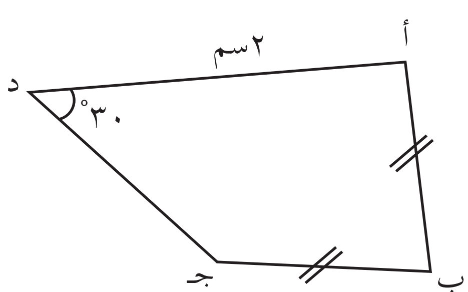
(٣) القيم القصوى (إن وجدت) .

د) إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين على [أ ، ب] وقابلين للاشتقاق على (أ ، ب) وكان كل من ق(س) ، هـ(س) متزايدًا على [أ ، ب]، وكان ل(س) = ق(س) + هـ(س) فأثبت أنَّ ل(س) متزايد على [أ ، ب].

السؤال الثاني:

أ) خزان ماء مخروطي الشكل قاعدته أفقية ورأسه إلى أسفل ، قطر قاعدته ١٢ سم ، وارتفاعه ١٢ سم، يصب فيه الماء بمعدل ١٥ سم^{٣} / ث ، وفي اللحظة نفسها يخرج منه الماء بمعدل ٦ سم^{٣} /ث . جد سرعة ارتفاع سطح الماء داخل الخزان عندما يكون عمق الماء فيه ٦ سم . ثم جد سرعة تغير مساحة سطح الماء عند تلك اللحظة .

ب) أ ب جـ د شكل رباعي فيه $\overline{أب} = \overline{ب جـ}$ ، $\overline{أد}$ = ٢ سم قياس الزاوية أ د جـ = ٣٠° ، جد طول $\overline{د جـ}$ لتكون مساحة الشكل الرباعي أقل ما يمكن .



السـؤال الثالث :

١) إذا كانت ق(س) = (س − ٣)^{٥} (س + ١)، فجد قيم س التي يوجد عندها قيمة صغرى محلية ؟

السـؤال الرابع :

يتكون هذا السؤال من (١١ فقرة) من نوع الاختيار من متعدد، لكل منها أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

١) إذا كان ق(س) = جا س × جتا س فإن قً $\left(\frac{\pi}{١٢}\right)$ يساوي :

أ) ١ ب) −١ جـ)صفرًا د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢) إذا كان ق(س) = جتا ٢س ، حيث س ∈ [٠ ، π] فإنَّ أصفار قَ(س) هي :

أ) $\{\frac{\pi}{٢}\}$ ب) { ٠ ، π } جـ) { ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، π } د) $\{\frac{\pi}{٤}\}$

٣) إذا كان ق(س) معرفًا على [٠ ، ٣] وكانت قَ(س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢}$ ، فإنَّ عدد النقط الحرجة للاقتران ق يساوي :

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤

٤) إذا كان ق(س) = ٢س^{٣} + ٣م س + ٢٤ س متزايدًا لجميع قيم س ∈ ح، فإنَّ قيم الثابت م تساوي:

أ) { −٤ ، ٤ } ب) [−٤ ، ٤] جـ) −٤ د) (−٤ ، ٤)

٥) يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = أ جا ٣ن ، حيث ف: المسافة بالأمتار ، ن: الزمن بالثواني، فإنَّ تسارع الجسيم عندما يقطع مسافة مقدراها ٤م تساوي:

أ) ١٢م/ث^{٢} ب) −٣٦ م/ث^{٢} جـ) −٤ م/ث^{٢} د) ١٨ م/ث^{٢}

٦) إذا كان ق(س) = ٢ س^{ن} وكان ق$^{(٣)}$ (س)=١٢ أ س^{٢} ، فإنَّ قيمة الثابت أ تساوي:

أ) ١٢٠ ب) ١٢ جـ) ١٠ د) ٥

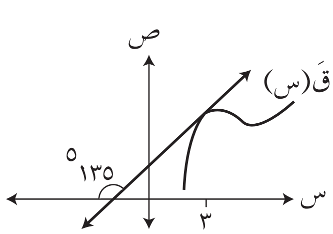
٧) إذا كان قَ (١) = ٣ ، $\sqrt{\text{ق(١)}}$=٢ وكان ل(س) = ق(س^{٢}) − ق^{٣}(س)، فإنَّ لَ (١) تساوي:

أ) −٦ ب) −٣٣ جـ) −٣٠ د) صفرًا

٨) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق، فإنَّ ميل العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٣ يساوي::

أ) ٣ ب) ١

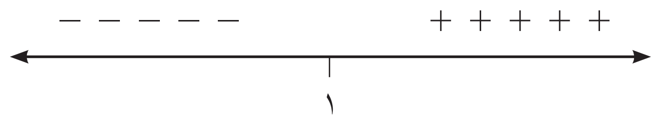
جـ) −١ د) $-\frac{١}{٣}$



٩) إذا كان ع = ٦ × $\sqrt{\text{ف}}$ فإنَّ التسارع ت يساوي:

أ) ٦ م/ث^٢ ب) ٣ م/ث^٢ جـ) ١٨ م/ث^٢ د) $\frac{١}{٦}$ م/ث^٢

١٠) الشكل الآتي يمثل إشارة ق$^{(٣)}$ (س) حيث ق(س) كثير حدود معرف على ح



معتمدًا على المعطيات فإنَّ إحدى العبارات الآتية صحيحة:

أ) قَ(س) متزايد على الفترة [١،∞)

ب) ق(س) مقعر لاعلى على الفترة [١،∞)

جـ) (١ ، قَ(س)) نقطة انعطاف لمنحنى ق (س)

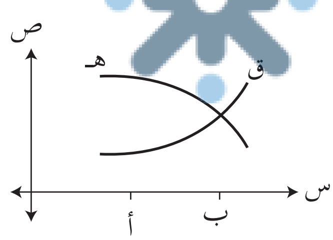
د) قً (س) مقعر للاعلى في الفترة [١،∞)

١١) اذا كان لمنحنى ق(س)= جـا س + أ س^٢ نقطة انعطاف عندما س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن قيمة الثابت أ تساوي:

أ) ١ ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) صفر د) $\frac{١}{٤}$

السؤال الخامس:

أ) الشكل المجاور يمثل منحنى كل من الاقتران ق(س) ، هـ(س) المعرفين على [أ ، ب] جد مجال التزايد للاقتران م(س) = قَ (س) × هـَ (س)

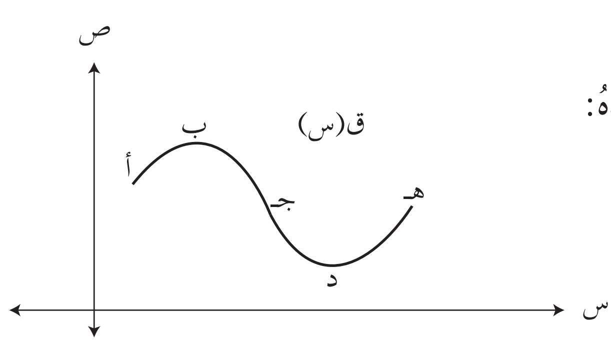


ب) إذا كانت النقطة (١،٠)، نقطة انعطاف لمنحنى ق(س) = أس^٣ + ٦س^٢ + ب ، فجد قيم كل من أ ، ب.

جـ) اذا كان ق(س)= ١ + جتا^٢ س – جتا ٢س ، فجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف (إن وجدت) ضمن الفترة [٠ ، π]

السؤال السادس:

(١) الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س)، اعتمد عليه في إيجاد النقطة التي تحقق كل فرع مما يأتي وحدَهُ:



أ) قَ(س) > ٠ ، قً(س) > ٠

ب) قَ(س) < ٠ ، قً(س) > ٠

جـ) قَ(س) < ٠ ، قً(س) = ٠

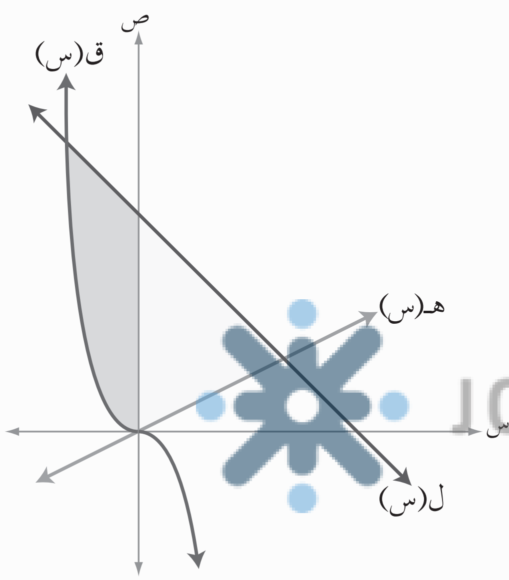
د) قَ(س) = ٠ ، قً(س) > ٠

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الرابعة

٤

التكامل وتطبيقاته



تعـد المشتقة و التكامل المحدود أهم موضوعين في علم التفاضل والتكامـل، ويدخل هـذا العلم في العديد مـن التطبيقات في الهندسة والعلـوم المختلفة حيـث تعالج المشتقـة إيجاد ميـل المماس وتعريف السرعـة والتسـارع، وقـد سبق لك دراسـة هذا الموضـوع وتعرفت تطبيقاته، بينما يعالج التكامل المحدود إيجاد مساحات مناطق محدودة بمنحنيـات يصعب حسابهـا بالقوانين العادية ، وهـذا أحد تطبيقات التكامل المتعددة في الرياضيات والعلوم الأخرى. وهناك ارتباط وثيق بين المشتقة والتكامل ستتعرفه في هذه الوحدة.

يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تعرف مفهوم معكوس المشتقة لاقتران ما، وإيجاده.
- استخدام رمز التكامل للتعبير عن عكس المشتقة.
- إيجاد التكامل غير المحدود لاقترانات كثيرات حدود، ومثلثية، وأسية، ونسبية.
- تعرف مفهوم التكامل المحدود، وإيجاد قيمته.
- تعرف قواعد التكامل.
- توظيف قواعد التكامل في إيجاد تكاملات معطاة.
- إيجاد مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي وتكامله.
- إيجاد مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي وتكامله.
- استخدام عدة طرق لإجراء التكامل مثل التعويض، والأجزاء، والكسور الجزئية.
- استخدام التكامل لإيجاد المساحة المحصورة بين ثلاثة منحنيات على الأكثر.
- حل معادلات تفاضلية.

أولًا معكوس المشتقة

عدد الحصص حصتان

نتاجات التعلم

- يتعرف معكوس المشتقة للاقتران المتصل.
- يستخدم رمز التكامل للتعبير عن عكس المشتقة.

التكامل الرأسي

- كثيرات الحدود، والاقترانات الحقيقية، والاقترانات المثلثية في الصف الحادي عشر العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (٨-١٣).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- معكوس المشتقة، التكامل غير المحدود ($\int$)

التعلم القبلي

- قواعد الاشتقاق.

استراتيجيات التدريس

الاستقصاء، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، العمل في الكتاب المدرسي).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال طرح السؤال الآتي: إذا كان ق(س) = ٤س٣، فجد الاقتران الذي مشتقته ق(س).

٢ - الاستماع لإجابات الطلبة، وتعزيزها.

٣ - توضيح مفهوم معكوس المشتقة، وكتابة التعريف على اللوح، وتكليف أكثر من طالب بقراءته وتحديد شروطه.

٤ - مناقشة المثال (١) مع الطلبة.

٥ - تقسيم الطلبة في مجموعات غير متجانسة.

٦ - تكليف المجموعات بحل التدريب (١)، والتجول بينهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.

٧ - تكليف المجموعات بتنفيذ النشاط صفحة (٩)، وتدوين النتائج التي توصلوا إليها.

٨ – مناقشة ما توصلت إليه المجموعات وتقديم التغذية الراجعة.
٩ – مناقشة مثال (٢) بمشاركة الطلبة؛ مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة؛ للتحقق من فهمهم.
١٠– تكليف الطلبة بحل تدريب (٢)، والتجول بينهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.
١١– مناقشة مثال (٣) بمشاركة الطلبة، للتوصل لمفهوم التكامل غير المحدود.
١٢– كتابة التعريف على اللوح وتكليف أكثر من طالب بقراءته.
١٣– مناقشة مثال (٤) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهمهم وللتوصل إلى انَّ عمليتي الاشتقاق والتكامل متعاكستان.
١٤– مناقشة المثالين (٤)، (٥) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهمهم.
١٥– تقسيم الطلبة إلى ٤ مجموعات.
١٦– تكليف كل مجموعة بحل التدريبين (٣) ، (٤) والتجول بينهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة عمل المجموعات، ومن ثم الحلول على اللوح.
١٧– ختم الدرس من خلال سؤال الطلبة: ماذا نعني بمعكوس المشتقة؟ أعط مثالًا على اقتران، ومعكوسًا لمشتقته؛ والاستماع إلى إجاباتهم وتعزيزها.
١٨– إعطاء الطلبة واجبًا بيتيًّا من التمارين والمسائل ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم.

أخطاء شائعة

يعتقد بعض الطلبة أنه يوجد معكوس مشتقة واحد فقط للاقتران، لذا أكِّد للطلبة أنه يوجد عدد لانهائي من معكوس المشتقة تختلف فيما بينها بالحد الثابت وتكتب على الصورة الآتية: م(س) + جـ

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) جد معكوسًا لمشتقة كل من الاقترانات الآتية:
أ) ق(س) = ٢س   ب) ل(س) = ٣س٢ + ١

٢) إذا كان م (س) = جاس + ٧، هـ (س) = جاس + ١ معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق.
جد مَ (س)، هـَ(س) ماذا تلاحظ؟

الحل:

١) أ) م(س) = س٢ + جـ   ب) م (س) = س٣ + س + جـ

٢) مَ (س) = جتاس، هـَ(س) = جتاس

إثراء

١) إذا كان م$_{١}$(س)، م$_{٢}$(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق وكان $\int$ هـ(س) د س = م$_{١}$(س) + جتا^{٢}س – م$_{٢}$(س)

جد هَـ (π)

٢) إذا كان م(س) معكوسًا لمشتقة الاقتران ق، حيث ق(س) = م^{٣}(س) + س^{٣} ، فجد قَ(–١) حيث

ق(–١) = –٩

الحل:

١) $\int$ هـ(س) ءس = م$_{١}$(س) + جتا^{٢}س – م$_{٢}$(س)

$\int$ هـ(س) ءس = م$_{١}$(س) – م$_{٢}$(س) + جتا^{٢}س

هـ(س) = صفر + ٢ جتاس × – جاس   (م$_{١}$(س) – م$_{٢}$(س) = ثابت)

هـ(س) = – جا٢س

هَـ(س) = – ٢ جتا٢س

هَـ(π) = – ٢ جتا٢π = – ٢

٢) ق(س) = م^{٣}(س) + س^{٣}

قَ(س) = ٣م^{٢}(س) × مَ(س) + ٣س^{٢}، ق(–١) = – ٩، –٩ = م^{٣}(–١)+(–١)^{٣}، م(–١)= –٢

قَ(–١) = ٣م^{٢}(– ١) ×مَ(–١) + ٣(– ١)^{٢}

قَ(–١) = ٣×٤ × –٩ + ٣، قَ(–١) = – ١٠٥

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل، مراجعة الذات

أداة التقويم: سلم التقدير (٤–١) البند (١)، سجل وصف سير التعلم (١–٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

ق(س) متصل على ح لأنه نتج عن طرح اقترانين متصلين

مَ(س) = ٤س^{٣} – جتاس

م (س) معكوس لمشتقة الاقتران ق.

تدريب (٢)

لَ(س) = – ٢ق(س)

تدريب (٣)

ق(س) = – ٣س^{٢}

تدريب (٤)

أ = – $\sqrt{٢}$

التمارين والمسائل

١) ق(س) اقتران متصل على ح − {١} لأنه اقتران نسبي.

$\text{م}'(\text{س}) = \frac{١}{(\text{س} + ١)^{٢}}$ = ق(س)، إذن م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق.

٢) ق(س) اقتران متصل على ح؛ لأنه اقتران مثلثي.

م َ(س) = ٢جاس جتاس = جا٢س = ق(س)، إذن م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق.

٣) ق(−٢) = −١١

٤) ق(١) = ٨,٥

٥) $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٣$

٦) $\text{م}_{٢}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٤$

٧) ٢

٨) − ٢٠

٩) ٢

١٠)

أ) $\text{م}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}} + \text{جـ}$ ب) م(س) = س + جـ

جـ) $\text{م}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$ د) م(س) = ٥ظاس + جـ

١١) −٢

ثانيًا التكامل غير المحدود

عدد الحصص: ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يتعرف قواعد التكامل غير المحدود
- يحسب التكامل غير المحدود لاقترانات معطاة (كثيرات الحدود، والاقترانات المثلثية، والنسبية).

التكامل الرأسي

- كثيرات الحدود، الاقترانات المثلثية في الصف الحادي عشر العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٤-٢٣).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- التكامل غير المحدود ($\int$)
- خصائص التكامل غير المحدود.

التعلم القبلي

- الاقترانات المثلثية، التحليل إلى العوامل.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، حل المشكلات والاستقصاء، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال طرح السؤال الآتي هل يمكن إيجاد $\int \frac{س^٢ - س}{\sqrt{س} - ١}$ ءس ، مع تقديم المبررات لضرورة إيجاد قواعد للتكامل غير المحدود.

٢ - عرض القاعدة (١)، ومناقشة مثال (١) مع الطلبة.

٣ - عرض القاعدة (٢)، ومناقشة مثال (٢) مع الطلبة

٤ - تكليف الطلبة بحل التدريبين (١)، (٢) والتجول بينهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.

٥ - كتابة تعميم صفحة (١٥)، وتكليف أكثر من طالب بقراءته وتحديد شروطه مع التطرق لفقرة (فكر وناقش) صفحة (١٦) لتنبيه الطلبة أن التكامل لا يتوزع على الضرب.

٦ – مناقشة مثال (٣) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهم الطلبة.

٧ – مناقشة مثال (٤) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهم الطلبة. والتطرق لفقرة (فكر وناقش) صفحة (١٦) لتنبيه الطلبة إلى أنه يمكن حل المثال بطريقة أخرى.

٨ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٣) ضمن مجموعات ثنائية، والتجول بينهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.

٩ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة (٤– ٦) طلاب في كل مجموعة.

١٠– تكليف المجموعات بتنفيذ نشاط (١) صفحة (١٧)، وتدوين النتائج التي توصلوا إليها.

١١– مناقشة ما توصلت إليه المجموعات، وتقديم التغذية الراجعة.

١٢– عرض القاعدة (٣) ومناقشة مثال (٥) مع الطلبة.

١٣– تكليف الطلبة بحل تدريب (٤) ضمن مجموعات ثنائية، والتجول بينهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، والتأكد من تطبيق قاعدة (٣) بصورة صحيحة، ثم مناقشة الحلول على اللوح.

١٤– تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة (٤– ٦) طلاب في كل مجموعة

١٥– تكليف المجموعات بتنفيذ نشاط (٢) صفحة (٢٣٢)، وتدوين النتائج التي توصلوا إليها.

١٦– مناقشة ما توصلت إليه المجموعات، وتقديم التغذية الراجعة.

١٧– عرض القاعدتين (٤)، (٥) ومناقشة مثال (٦) مع الطلبة.

١٨– تكليف الطلبة بحل تدريب (٥) والتجول بينهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، والتأكد من تطبيق قاعدة (٥) بصورة صحيحة، ثم مناقشة الحلول على اللوح.

١٩– مناقشة مثال (٧) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهم الطلبة. والتطرق لفقرة (فكر وناقش) صفحة (٢٠) لتنبيه الطلبة إلى أنه يمكن حل فرع (٢) من المثال بطريقة أخرى.

٢٠– مناقشة مثال (٨) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهم الطلبة.

٢١– تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة (٤–٦) طلاب في كل مجموعة.

٢٢– تكليف الطلبة بحل تدريب (٦)، والتجول بينهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.

٢٣– ختم الدرس بسؤال الطلبة: ماذا تعلمتم في هذا الدرس؟ ويمكن عمل مسابقة بين الطلبة تتضمن أسئلة يحقق كل منها نتاج من نتاجات الدرس.

٢٤– تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل واجبًا بيتيًا، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم.

أخطاء شائعة

يعتقد بعض الطلبة أن $\int$ هـ(س) ق (س) ءس = $\int$ هـ(س) ءس × $\int$ ق(س) ءس

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) هل $\int$ ٣س × س ءس = $\int$ ٣س ءس × $\int$ س ءس

٢) مناقشة فقرة فكر وناقش

الحل: ١) لا

إثراء

١) إذا كان قً(س)= $\frac{٦}{\sqrt{س}}$ ، ومنحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٤، ٠) وميل العمودي على المماس عند هذه النقطة يساوي (− ١) فجد قاعدة الاقتران ق (س).

٢) إذا كان قً(س)= − ٤جتا٢س، والنقطة ($\frac{\pi}{٢}$، −٢)نقطة حرجة للاقتران ق، فجد قاعدة الاقتران ق.

الحل:

١) ق(س) = ٨ $\sqrt{س^{٣}}$ − ٢٣س + ٢٨

٢) ق(س) = جتا ٢س − ١

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل، مراجعة الذات.

أداة التقويم: سلم التقدير (٤−١)، قائمة الرصد رقم (٢−٦)، سجل وصف سير التعلم (١−٤)

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

١) س + جـ

٢) $\frac{-١}{٤}$ ل + جـ

تدريب (٢)

١) ١٠س + جـ

٢) $\frac{٧}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٧}}$ + جـ

تدريب (٣)

١) $\frac{٢}{٥}$ $\sqrt{س^{٥}}$ + $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} + جـ

٢) $\frac{-١٦}{\sqrt{س}}$ + ٤ $\sqrt{س^{٣}}$ − ٢٤ $\sqrt{س}$ − $\frac{٢}{٥}$ $\sqrt{س^{٥}}$ + جـ

تدريب (٤)

١) $\frac{-١}{٧(٧\text{س}+٥)^{٣}} + \text{جـ}$

٢) $\frac{(٥\text{س}-٣)^{٥}}{٢٥} + \text{جـ}$

تدريب (٥)

١) $\frac{-١}{٤}\,\text{قتا}٤\text{س} - \frac{١}{٣}\,\text{ظتا}٣\text{س} + \text{جـ}$

٢) $\frac{-١}{٤}\,\text{جتا}٤\text{س} + \frac{١}{٦}\,\text{ظا}٦\text{س} + \text{جـ}$

تدريب (٦)

١) $٢\,\text{ظاس} + ٢\,\text{قاس} - \text{س} + \text{جـ}$

٢) $\frac{-٣}{٢}\,\text{ظتاس} + \text{جـ}$

٣) $-\text{ظتاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

٤) $\text{س} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا}٢\text{س} + \text{جـ}$

التمارين والمسائل

١)

أ) $\frac{\text{س}^{٧}}{٧} - \frac{٣}{٤\text{س}^{٤}} - \frac{٥}{٧}\sqrt[٥]{\text{س}^{٧}} + \text{جـ}$

ب) $\frac{(٥+٣\text{ص})^{٥}}{١٥} + \text{جـ}$

جـ) $\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{س}^{٢} + ٤\text{س} + \text{جـ}$

د) $\frac{(٢\text{س}+٥)^{١١}}{٢٢} + \text{جـ}$

هـ) $\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س} + \text{جـ}$

و) $\frac{-(\text{س}-١)^{٧}}{٧} + \text{جـ}$

ز) $\frac{-٣\sqrt[٣]{(٥-\text{س})^{٤}}}{٤} + \text{جـ}$

ح) $\frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} + \text{جـ}$

ط) $\frac{٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}}}{٥} + ٥\text{س} + \text{جـ}$

ي) $\frac{٢\sqrt{(٧\text{س}+٣)^{٣}}}{٢١} - \frac{\sqrt{(٢\text{س}+٣)^{٣}}}{٣} + \text{جـ}$

٢) $\text{ق(س)} = \text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ١$

٣) $\text{ق(س)} = ٨\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٢٣\text{س} + ٢٨$

٤) $\text{ق}(-٢) = -٩$

٥) $\text{ق(س)} = \text{جتا}\,٢\text{س} - ١$

٦)

أ) −٥ظتاس − ٣ظاس + جـ

ب) $\frac{١}{٢}$ ظاس + جـ

جـ) −٢ظتاس + ٢قتاس − س + جـ

د) قاس + س + جـ

هـ) −٤ظتاس − ٤س + جـ

و) −جتاس − جاس + جـ

ز) جا٢س − س + جـ

ح) −٢ظتا٢س + جـ

ط) قاس + س + جـ

ي) $\frac{١}{٤}$ جا٢س − $\frac{١}{٢٠}$ جا١٠س+ جـ

ك) $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٤}$ جا٢س + جـ

ل) جاس − ٥ظاس + جـ

م) $\frac{١}{٨}$ جا٤س + $\frac{١}{٢٠}$ جا١٠س+ جـ

ن) $\frac{١}{٢}$ جا٢س+ جـ

س) −قتاس − ظتاس − س + جـ

ع) قاس + ظاس − س + جـ

ثالثًا التكامل المحدود

عدد الحصص ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يتعرف مفهوم التكامل المحدود على الفترة [أ، ب]
- يحسب التكامل المحدود لاقترانات معطاه.
- يتعرف خصائص التكامل المحدود.

التكامل الرأسي

- كثيرات الحدود، الاقترانات المثلثية في الصف الحادي عشر العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (٢٤-٣٧).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- التكامل المحدود ($\int_{أ}^{ب}$) الحد العلوي للتكامل المحدود، الحد السفلي للتكامل المحدود

التعلم القبلي

- الاقترانات المثلثية، التحليل إلى العوامل، قواعد التكامل غير المحدود.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، حل المشكلات والاستقصاء.

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال طرح السؤال الآتي: إذا كان الاقتران ل قابلًا للاشتقاق وكان لَ(س) = ٣س^{٢} +٢، فجد لَ(٣) - لَ(-١).

٢ - رسم الشكل (٤-٢) وتنفيذ مقدمة الدرس مع الطلبة.

٣ - بعد تلقي اجابات الطلبة، توضيح مفهوم التكامل المحدود بكتابة التعريف على اللوح.

٤ - مناقشة مثال (١) مع الطلبة.

٥ - تكليف الطلبة بحل تدريب (١)، ومتابعة حلولهم، لتقديم التغذية الراجعة لهم

٦ - مناقشة مثال (٢) مع الطلبة، مع التطرق لفقرة (فكر وناقش) صفحة (٢٥).

٧ - كتابة القاعدة على اللوح، ومناقشة المثالين (٣)، (٤) مع الطلبة، وتكليفهم بحل تدريب (٣)، ومتابعة حلولهم.

٨ – عرض خصيصة (١) على اللوح، ثم مناقشة المثالين (٥)، (٦) مع الطلبة، وتكليفهم بحل تدريب (٤)، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم.
٩ – عرض خصيصة (٢) على اللوح، ثم مناقشة الأمثلة (٧)، (٨)، (٩) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهم الطلبة.
١٠– تقسيم الطلبة إلى مجموعات تعاونية غير متجانسة.
١١– تكليف الطلبة بحل التدريبين (٥)، (٦) ومتابعة حلولهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم.
١٢– تكليف إحدى المجموعات بعرض الحل مستخدمًا أسلوب الحوار والمناقشة؛ لتوضيح الحل.
١٣– عرض خاصية (٣) على اللوح، ثم مناقشة الأمثلة (١٠)، (١١)، (١٢) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهم الطلبة.
١٤– تقسيم الطلبة إلى مجموعات تعاونية.
١٥– تكليف الطلبة بحل التدريبين (٧)، (٨) ومتابعة حلولهم لإرشادهم، وتقديم الدعم اللازم لهم
١٦– تكليف إحدى المجموعات بعرض الحل مستخدمًا أسلوب الحوار والمناقشة لتوضيح الحل.
١٧– عرض خصيصة (٤) على اللوح، ثم مناقشة مثال (١٣) والتطرق إلى فقرة (فكر وناقش).
١٨– مناقشة مثال (١٤) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة؛ للتحقق من فهم الطلبة. والتطرق لفقرة (فكر وناقش).
١٩– تكليف الطلبة بحل التدريبين (٩)، (١٠) ضمن مجموعات، ومتابعة حلولهم لإرشادهم، وتقديم الدعم اللازم لهم.
٢٠– تكليف إحدى المجموعات بعرض الحل مستخدمةً اسلوب الحوار والمناقشة لتوضيح الحل.
٢١– مناقشة مثال (١٥) بمشاركة الطلبة والتطرق لفقرة (فكر وناقش) للتوضيح إلى أنَّ المثال يُحل بطرق أخرى، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهمهم.
٢٢– تكليف الطلبة بحل تدريب (١١) والتجول بينهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح، مع التوضيح أنه يمكن حل التدريب بأكثر من طريقة.
٢٣– ختم الدرس من خلال مراجعة الطلبة بالمفاهيم التي وردت في الدرس من خلال توجيه السؤال: ماذا تعلمنا اليوم؟ (يمكن الاستعانة بأداة التقويم (٤–٣))
٢٤– الاستماع إلى إجابات الطلبة وهذه تعد بمثابة تغذية راجعة حول مدى امتلاك الطلبة للمفاهيم التي وردت في الدرس.
٢٥– إعطاء واجب بيتي من التمارين والمسائل، ومتابعة حلول الطلبة لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

معلومة إضافية

تم التوصل إلى التكامل المحدود من خلال مفهوم المساحة باستخدام مجموع ريمان.

أخطاء شائعة

- يخطئ بعض الطلبة عند حساب قيمة تكامل محدود بالتعويض أولًا بالحد السفلي للتكامل ويطرح منه قيمة التعويض بالعلوي.
- يخطئ بعض الطلبة عند قلب حدود التكامل؛ وذلك بعدم تغيير إشارة الناتج.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) إذا كان ق(١) = ٤ ، ق(٥) = ١٢ ، فجد $\int_{١}^{٥}$ قَ(س) ءس

٢) جد قيمة كل من التكاملين $\int_{٠}^{٢}$ (٢س+١) ءس ، $\int_{٢}^{٠}$ (٢س+١) ءس، ماذا تلاحظ؟

٢) إذا كان $\int_{٧}^{٢}$ ق(س) ءس = ٤ ، فجد $\int_{٢}^{٧}$ ق(س) ءس

الحل:

١) ٨ ٢) ٦، −٦ عند قلب الحدود تتغير الإشارة ٣) −٤

إثراء

١) $\int_{-١}^{٣}$ ٢ق(س) ءس = ٤ ، $\int_{٣}^{٠}$ ($\frac{\text{ق(س)}}{٥}$ + ب) ءس = ١ ، $\int_{٠}^{-١}$ (٥ق(س) − ٢س) ءس = ٤٠، فجد قيمة الثابت ب.

٢) إذا كان $\int_{٠}^{٢}$ ($\int_{-١}^{٣}$ ق(س) ءس) ءس = −١٢، فجد $\int_{٣}^{-١}$ (٧ق(س) − ٤س+٤) ءس

الحل:

١) $\frac{-٧٦}{٧٥}$ ٢) ٤٦

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل، مراجعة الذات.

أداة التقويم: سلم التقدير (٤–١)، قائمة الرصد (٢–٦)، سجل وصف سير التعلم (١–٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١) أ = ٢

تدريب (٢) ١) ٩٠ ٢) $١ - \frac{١}{\sqrt{٣}}$

تدريب (٣) ب $= \frac{٧}{٢}$

تدريب (٤) −٢

تدريب (٥) −٥

تدريب(٦) $\frac{\pi}{٢}$

تدريب (٧) ١٢

تدريب (٨) ٤

تدريب (٩) ١) موجبة ٢) سالبة

تدريب (١٠)

١) $\int_{٠}^{١} \text{ق(س) ءس} \le \int_{٠}^{١} \text{هـ(س) ءس}$

٢) $\int_{-١}^{٠} \text{ق(س) ءس} \ge \int_{-١}^{٠} \text{هـ(س) ءس}$

تدريب (١١)

$٠ \le \text{س} \le ١$

$٠ \le \text{س}^٢ \le ١$

$١ \le \text{س}^٢ + ١ \le ٢$

$١ \ge \frac{١}{\text{س}^٢ + ١} \ge \frac{١}{٢}$

$٢ \ge \frac{٢}{\text{س}^٢ + ١} \ge \frac{٢}{٢}$

$١ \le \frac{٢}{\text{س}^٢ + ١} \le ٢$

$\int_{٠}^{١} ١\,\text{ءس} \le \int_{٠}^{١} \frac{٢}{\text{س}^٢ + ١}\,\text{ءس} \le \int_{٠}^{١} ٢\,\text{ءس}$

م = ١، ك = ٢

التمارين والمسائل

١)

أ) $\frac{٣}{٨}$ ب) $\frac{١٣}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{-\pi^{٢}}{٨} - ١$

هـ) $\frac{\pi}{٢}$ و) صفر ز) ١٦ ح) $\frac{٧٦}{١٥}$

ط) $\frac{٢}{٣}$ ي) $\frac{١٠}{٣}$ ك) $\frac{١١}{٢}$ ل) صفر

٢) −١١ ٣) ب = ٥، −٣ ٤) جـ = صفر، ١,٥

٥) جـ = ٢، −٢ ٦) ١٢,٥ ٧) ب = ٦، −٣

٨) $\frac{-١٧}{٦}$

٩) $-١ \le \text{جتا}\,\text{س} \le ١$

$٠ \le \text{جتا}^{٢}\text{س} \le ١$

$٠ \le ٣\text{جتا}^{٢}\text{س} \le ٣$

$٢ \le ٢ + ٣\text{جتا}^{٢}\text{س} \le ٥$

$\frac{١}{٥} \le \frac{١}{٢+٣\text{جتا}^{٢}\text{س}} \le \frac{١}{٢}$

$\frac{١}{٥} \le \frac{١}{٢+٣\text{جتا}^{٢}\text{س}} \le \frac{١}{٢}$

$\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٥}\,\text{ءس} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢+٣\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢}\,\text{ءس}$

$\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢+٣\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} \le \frac{\pi}{٢}$

١٠)

$-٣ \le \text{س} \le ٣$

$٠ \le \text{س}^{٢} \le ٩$

$٠ \ge -\text{س}^{٢} \ge -٩$

$٩ - ٩ \le ٩ - \text{س}^{٢} \le ٩$

$٠ \le ٩ - \text{س}^{٢} \le ٩$

$٠ \le \sqrt{٩ - \text{س}^{٢}} \le ٣$

$\int_{-٣}^{٣} ٠\,\text{ءس} \le \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}\,\text{ءس} \le \int_{-٣}^{٣} ٣\,\text{ءس}$

م = صفرًا ، ك = ١٨

١١) $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} + \text{س} + ٥$

١٢) $\text{ق}(\text{س}) = -٠,٥\,\text{س} + ٢$

رابعًا اقتران اللوغاريتم الطبيعي

عدد الحصص	حصتان

نتاجات التعلم

- يجد مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي.
- يجد تكامل اقترانات نسبية.

التكامل الرأسي

- اللوغاريتمات في الصف الحادي عشر العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (٤٠-٤٣).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- اللوغاريتم الطبيعي، مشتقة اللوغاريتم الطبيعي.

التعلم القبلي

- قوانين اللوغاريتمات، التكامل المحدود، قواعد الاشتقاق.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، العمل في الكتاب المدرسي) حل المشكلات والاستقصاء، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-أنتقِ زميلًا-شارك).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة بقوانين اللوغاريتمات وقواعد الاشتقاق.

٢ - توضيح مفهوم اقتران اللوغاريتم الطبيعي؛ من خلال ربطه بمساحة المنطقة المحصورة بين ص $= \frac{١}{ع}$
ع = ١، ع = س، ومحور السينات.

٣ - كتابة القاعدة على اللوح وتوضيحها باستخدام أسلوب الحوار والمناقشة والتبرير المنطقي.

٤ - مناقشة مثال (١) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهمهم.

٥ - تكليف الطلبة حل تدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية.

٦ - مناقشة مثال (٢) بمشاركة الطلبة، واستخدام استراتيجية (فكر-انتق زميلاً-شارك) لمناقشة الفقرة (فكر وناقش) صفحة (٤٠) لتنبيه الطلبة إلى أنه يمكن حل المثال بطريقتين.

٧ – كتابة مثال (٣) على اللوح، وتقسيم الطلبة إلى مجموعات تعاونية، ثم توجيه كل مجموعة إلى حل المثال بفرعيه.

٨ – عرض النتائج التي توصلت إليها المجموعات ومناقشتها، ثم عرض القاعدة صفحة (٤٠) على اللوح وشرحها.

٩ – مناقشة مثال (٤) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهمهم.

١٠– تكليف الطلبة بحل تدريب (٢)، والتجول بينهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.

١١– ختم الدرس بمراجعة الطلبة بالمفاهيم التي وردت في الدرس من خلال توجيه السؤال: ماذا تعلمنا اليوم؟

١٢– استقبال إجابات الطلبة وهذه تعد بمثابة تغذية راجعة حول مدى امتلاك الطلبة للمفاهيم التي وردت في الدرس.

١٣– إعطاء واجب بيتي من التمارين والمسائل، ومتابعة حلول الطلبة لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) جد قَ(س)، قً(س) لكل من الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = لـو_{هـ} س$ ب) $ق(س) = لـو_{هـ} |س^{٢} - ٥س + ٢|$

٢) جد $\int \frac{س + ٧}{س} \, ءس$

الحل:

١) أ) $قَ(س) = \frac{٣}{س}$ ب) $قَ(س) = \frac{٢س - ٥}{س^{٢} - ٥س + ٢}$

٢) $س + ٧ لـو_{هـ} |س| + جـ$

إثراء: جد $\int_{١}^{٣} \frac{س^{٢}}{س^{٣} + ٣س} \, ءس$

الحل: $\frac{١}{٢} لـو_{هـ} |س^{٢} + ٣|]_{١}^{٣} = \frac{١}{٢} (لـو_{هـ} ١٢ - لـو_{هـ} ٤) = لـو_{هـ} \sqrt{٣}$

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التواصل، الورقة والقلم.

أداة التقويم: سلم التقدير (٤–١)، قائمة الرصد (٢–٦)، اختبار قصير.

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

١) $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{\text{جاس}}{٢ - \text{جتاس}}$

٢) $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{٢}{٢\text{س} + ٥}$

تدريب (٢)

١) $\dfrac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٥$

٢) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,٣$

التمارين والمسائل

١)

أ) $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{١}{\text{س}}$

ب) $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٥\,\text{ظتا}\,٥\text{س}$

جـ) $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{٢\text{س} + ٤}{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٥}$

د) $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{٢\text{س} + ٥}{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٣}$

هـ) $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^{٢}\,(١ + ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})$

و) $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{١}{٤\sqrt{\text{س}} + ٢\text{س}}$

ز) $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{٣}{\text{س}} + \dfrac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظاس}}$

ح) $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{١}{\text{س}} - \dfrac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$

ط) $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{٣}{\text{س}}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^{٢}$

ي) $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{٤٨\text{س}}{٤\text{س}^{٢} + ٥} + \dfrac{١٠}{٧ - ٢\text{س}}$

ك) $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{١٥\text{س}^{٢} + ٤}{١٥\text{س}^{٣} + ١٢\text{س}}$

ل) $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{\text{قا}^{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})}{\text{س}}$

٢) $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{١ + \dfrac{٢\text{س}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}}{\text{س} + \sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{١ + \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}}{\text{س} + \sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{س + \sqrt{س^٢ - ١}}{(س + \sqrt{س^٢ - ١})\sqrt{س^٢ - ١}}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{\sqrt{س^٢ - ١}}$$

٣) $\int (قَ(س) - س)\, ءس = لــو_هـ |قاس + ظاس| + س^٢$

باشتقاق الطرفين: $قَ(س) - س = \frac{قاس ظاس + قا^٢س}{قاس + ظاس} + ٢س$

$$قَ(س) = \frac{قاس (ظاس + قاس)}{قاس + ظاس} + ٢س + س$$

$$قَ(س) = قاس + ٣س$$

٤) ق(س) متصل على مجاله

$مَ(س) = \frac{جتاس}{جاس} = ظتاس = ق(س)$، إذن م(س) هو معكوس لمشتقة الاقتران ق.

٥)

أ) $لــو_هـ |س^٢ + ٣| + جـ$

ب) $لــو_هـ |س + جاس| + جـ$

جـ) $-٥لــو_هـ |ظتاس| + جـ$

د) $لــو_هـ |س^٣ + ٥| + جـ$

هـ) $س + ٥لــو_هـ |س| + جـ$

و) $لــو_هـ ٧ - لــو_هـ ٥$

ز) $لــو_هـ ٢ + لــو_هـ ٥$

ح) $\frac{-١}{٣} لــو_هـ |١ + جتا٣س| + جـ$

ط) $لــو_هـ |س^٢ - س| + جـ$

ي) $-لــو_هـ |جتاس| + جـ$

٦)

أ) $م(س) = لــو_هـ |س^٢ + ٤| + جـ$

ب) $م(س) = لــو_هـ |٥ + جا٣س| + جـ$

خامسًا مشتقة وتكامل الاقتران الأسي الطبيعي

عدد الحصص حصتان

نتاجات التعلم

- تجد مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي.
- تجد تكامل الاقتران الأسي الطبيعي.

التكامل الرأسي

- الاقترانات الأسي والأسي الطبيعي في الصف الحادي عشر العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (٤٤-٤٩).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي: https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- الاقتران الأسي الطبيعي، مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي، تكامل الاقتران الأسي الطبيعي، رمز الاقتران الأسي الطبيعي ق(س) = هـ^س.

التعلم القبلي

- قوانين الأسس، قواعد الاشتقاق، التكامل المحدود.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، حل المشكلات والاستقصاء.

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة بمفهوم الاقتران الأسي.

٢ - عرض قاعدة (١) وتوضيحها وبرهنتها؛ باستخدام أسلوب الحوار والمناقشة والتبرير المنطقي.

٣ - مناقشة مثال (١) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهم الطلبة.

٤ - تكليف الطلبة بحل تدريب (١) ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة.

٥ - مناقشة مثال (٢) بمشاركة الطلبة، ثم استخدام استراتيجية (فكر-انتق زميلًا-شارك) ثم توجيه الطلبة إلى حل فقرة (فكر وناقش) صفحة (٤٥).

٦ - تكليف الطلبة بحل تدريب (٢) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعة حلولهم.

٧ - كتابة قاعدة (١) على اللوح، وثم مناقشة مثال (٣) بمشاركة الطلبة.

٨ - كتابة مثال (٤) على اللوح، وتقسيم الطلبة إلى مجموعات تعاونية، وتوجيه المجموعات إلى حل المثال.

٩ – عرض النتائج التي توصلت إليها المجموعات ومناقشتها، ثم عرض قاعدة (٢) على اللوح وشرحها.
١٠– مناقشة مثال (٥) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهم الطلبة.
١١– تكليف الطلبة بحل تدريب (٣) والتجول بينهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.
١٢– ختم الدرس بمراجعة الطلبة بالمفاهيم التي وردت في الدرس من خلال توجيه السؤال: ماذا تعلمنا اليوم؟
١٣– الاستماع إلى إجابات الطلبة، وهذه تعد بمثابة تغذية راجعة حول مدى امتلاك الطلبة للمفاهيم التي وردت في الدرس.
١٤– إعطاء واجب بيتي من التمارين والمسائل، ومتابعة حلول الطلبة لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) إذا علمت أن $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{س}^{٥}}$ ، س ≠ ٠ ، فجد $\text{ق}'(\text{س})$

٢) جد كلا مما يأتي:

أ) $\int \text{هـ}^{٧} \, \text{ءس}$ ب) $\int \text{هـ}^{٢\text{س}+١} \, \text{ءس}$

إثراء: حل السؤال (٢) فرع (٣) من ورقة العمل (٤–١)

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل، مراجعة الذات، الورقة والقلم.
أداة التقويم: سلم التقدير (٤–١)، قائمة الرصد (٢–٦)، سجل وصف سير التعلم (١–٤)، ورقة العمل (٤–١).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

١) $\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جاس}} \, \text{جتاس}$

٢) $\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣} \, \text{هـ}^{٢\text{س}} \, (\text{س} + ٢)$

تدريب (٢)

١) $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢}$

٢) $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{جتاس} \, (١ + \text{جاس})^{٢}$

تدريب (٣)

١) $\frac{-٣}{٢} + ٢\text{هـ} + \frac{١}{٢} \, \text{هـ}^{٢}$

٢) $\frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{٣} + \frac{\text{هـ}^{٥\text{س}}}{٥} + \text{جـ}$

التمارين والمسائل

١)

أ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{١+٩ هـ}^{\text{٩س}}$

ب) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٢٠س}^{\text{٣}}\ \text{هـ}^{\text{٦−٥س}^{\text{٤}}}$

جـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢ هـ}^{\text{٢س}}\ \text{جتاهـ}^{\text{٢س}}$

د) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{هـ}^{\text{٢س}}}{\sqrt{\text{١+هـ}^{\text{٢س}}}}$

هـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{−١}}{\text{س}^{\text{٢}}}\ \text{هـ}^{\frac{\text{١}}{\text{س}}} + \frac{\text{١}}{\text{٢س}}$

و) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ظاس}$

ز) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{١٢س}^{\text{٢}}\ (\text{س}^{\text{٣}} + \text{٢})^{\text{٣}}$

ح) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{−٥هـ}^{\text{−٥س}} - \text{٣هـ}^{\text{−٣س}}$

ط) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^{\text{٢}}\ \text{هـ}^{\text{جاس}}(\text{س جتاس} + \text{٣})$

ي) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢٤ هـ}^{\text{٢٤س+٣٠}}$

٢) أ = −١

٣) $\text{ق(س)} = \text{−جاس} + \frac{\text{هـ}^{\text{٢س}}}{\text{٤}} + \text{س}$

٥) أ = ٢، ٣

٧) ب = ١، −١

٨)

أ) $\frac{\text{هـ}^{\text{٧س}}}{\text{٧}} + \text{جـ}$

ب) $\text{هـ}^{\text{٣}} - \text{١}$

جـ) $\text{٢ هـ}^{\text{٤}}$

د) $\text{لـــو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{٤س}} - \text{٣س}| + \text{جـ}$

هـ) $\frac{\text{هـ}^{\text{٢س}}}{\text{٢}} + \text{٣ هـ}^{\text{س}} + \text{٩س} + \text{جـ}$

و) $\text{هـ}^{\text{٥}}\ \text{جاس} + \text{جـ}$

ز) هـ + ١

ح) $\frac{\text{٣هـ}^{\text{٢}}\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}} + \text{جـ}$

ط) $\frac{\text{هـ}^{\text{٦س}}}{\text{٦}} + \frac{\text{٢هـ}^{\text{٥س}}}{\text{٥}} + \text{جـ}$

ي) $\frac{\text{هـ}^{\text{٤س+١٠}}}{\text{٤}} + \text{جـ}$

أولًا التكامل بالتعويض

عدد الحصص أربع حصص

نتاجات التعلم

- يتعرف طريقة التكامل بالتعويض.
- يستخدم طريقة التكامل بالتعويض في إيجاد بعض التكاملات.

التكامل الرأسي

- الاقترانات المثلثية في الصف الحادي عشر العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (٥٠-٦٠).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- التكامل بالتعويض.

التعلم القبلي

- معكوس المشتقة، قواعد الاشتقاق، قواعد التكامل غير المحدود، التكامل المحدود، المتطابقات المثلثية.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، التدريبات والتمارين)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، حل المشكلات والاستقصاء.

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال طرح المثال الآتي: جد $\int (س(س^{2} + ٣)^{2} + ٣)\ ءس$، والاستماع لإجابات الطلبة مع تقديم التبرير.

٢ - تقسيم الطلبة إلى مجموعات، وتكليف كل مجموعة بتنفيذ النشاط في الصفحة (٥٠)؛ الذي يهدف التوصل إلى قاعدة التكامل بالتعويض، ومتابعة المجموعات في أثناء تنفيذهم النشاط، ثم مناقشة المجموعات في نتائجهم، وكتابة ما توصلوا إليه على اللوح.

٣ - تقديم القاعدة، وتكليف أكثر من طالب بقراءتها وتحديد شروطها.

٤ - مناقشة مثال (١) مع الطلبة؛ لتدريبهم على استخدام قاعدة التكامل بالتعويض.

٥ – تكليف المجموعات نفسها بحل المثالين (٢)، (٣) والتجول بينهم لإرشادهم،وتقديم الدعم لهم، ثم مناقشة الحلول.
٦ – تكليف الطلبة بحل تدريب (١)، ومتابعة حلولهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.
٧ – مناقشة مثال (٤) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهمهم.
٨ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٢)، ومتابعة حلولهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.
٩ – مناقشة مثال (٥) بمشاركة الطلبة، ثم مناقشة فقرة (فكر وناقش) صفحة (٥٤).
١٠– تقسيم الطلبة إلى (٤) أو (٨) مجموعات غير متجانسة.
١١– تكليف كل مجموعة بحل سؤال واحد من تدريب (٣)، ومتابعة حلولهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مقارنة المجموعات ذات السؤال نفسه إجاباتها التي توصلت إليها، ومناقشة الحلول على اللوح.
١٢– مناقشة مثال (٦) بمشاركة الطلبة، وتوجيههم إلى حل فقرة (فكر وناقش) صفحة (٥٥) باستخدام استراتيجية (فكر–انتقِ زميلاً–شارك) لتنبيه الطلبة إلى أنه يمكن حل المثال بطريقتين.
١٣– تكليف الطلبة بحل تدريب (٤) ومتابعة حلولهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.
١٤– مناقشة المثالين (٧)، (٨) بمشاركة الطلبة، لعرض أفكار مختلفة.
١٥– تقسيم الطلبة إلى (٦) مجموعات وتكليف كل مجموعتين بحل نفس السؤال من تدريب (٥) ومناقشة الحلول على اللوح.
١٦– مناقشة مثال (٩) بمشاركة الطلبة، والتطرق لفقرة (فكر وناقش) صفحة (٥٦) لعرض حلول مختلفة.
١٧– مناقشة مثال (١٠) بمشاركة الطلبة، والتطرق لفقرة (فكر وناقش) صفحة (٥٧) وإمكانية حل المثال من خلال فرض ص = جتاس ومناقشة الطلبة بالخطوات.
١٨– مناقشة مثال (١١) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة.
١٩– تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة وتكليفهم بحل تدريب (٦)، والتجول بينهم لإرشادهم، وتقديم الدعم لهم ثم مناقشة الحلول على اللوح.
٢٠– تكليف المجموعات السابقة بحل سؤال (٦) من تمارين ومسائل، ومتابعة عمل المجموعات لإرشادهم، وتقديم الدعم لهم ثم مناقشة الحلول على اللوح.
٢١– ختم الدرس بسؤال الطلبة:
- لماذا سميت طريقة التكامل بالتعويض بهذا الاسم؟

- متى تستخدم طريقة التكامل بالتعويض؟

٢٢- إعطاء واجب بيتي من التمارين والمسائل، ومتابعة حلول الطلبة لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

أخطاء شائعة

- يقوم بعض الطلبة عند إجراء التعويض في التكامل بإبقاء المتغير الأصلي (س) مع المتغير (ص) لذا أكد إيجاد س بدلالة ص قبل عملية التعويض بالتكامل.
- يخطئ بعض الطلبة بعدم استبدال حدود التكامل عند استخدام طريقة التعويض؛ لإيجاد تكامل محدود، فيعوضون حدود التكامل كما هي.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

جد: ١) $\int \text{س}^{٣} (\text{س}^{٢} + ٢)^{٥} \, \text{ءس}$ ٢) $\int_{١}^{٣} \text{س} \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} - ١} \, \text{ءس}$

الحل: ١) $\frac{(\text{س}^{٢} + ٢)^{٧}}{١٤} - \frac{(\text{س}^{٢} + ٢)^{٦}}{٦} + \text{جـ}$ ٢) ٤,٥

إثراء

١) إذا كان م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق (س)، فجد $\int \frac{٢\,\text{ق}(\text{س})}{(٤\text{م}(\text{س})+١)^{٢}} \, \text{ءس}$

٢) جد $\int (\text{س} - ١)^{٣} (\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٨)^{٦} \, \text{ءس}$

الحل: ١) $\frac{-١}{٢(٤\text{م}(\text{س})+١)} + \text{جـ}$ ٢) $\frac{(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٨)^{٨}}{١٦} - \frac{٢(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٨)^{٧}}{٧} + \text{جـ}$

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل، الورقة والقلم.

أداة التقويم: سلم التقدير (٤-٢)، قائمة الرصد (٢-٦)، قائمة الرصد (٢-٧).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

١) $\frac{١}{٧٢} (٦\text{س}^{٣} + ٥)^{٤} + \text{جـ}$ ٢) $\frac{٥}{١٢} \sqrt[٥]{(\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٤)^{٦}} + \text{جـ}$

٣) $١٥ \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} - \text{س} + ١} + \text{جـ}$

تدريب (٢):

١) $\frac{١}{١٠}\sqrt{(س^{٤} - ٣)^{٥}} + ٢\sqrt{(س^{٤} - ٣)^{٣}} + جـ$

٢) $\frac{١}{٧}(س^{٢} + ٥)^{٧} - \frac{٥}{٣}(س^{٢} + ٥)^{٦} + ٥(س^{٢} + ٥)^{٥} + جـ$

تدريب (٣)

١) $\frac{-١}{٦}\left(\frac{٢س+١}{س}\right)^{٦} + جـ$

٢) $\frac{٣}{١٦}\sqrt[٣]{(س^{٤} + ٥)^{٤}} + جـ$

٣) $\frac{٣}{٣٢}\sqrt[٣]{(٤س^{٤} + ٢)^{٤}} + جـ$

٤) $\frac{١}{١١٢}(٧س^{٤} - ٢)^{٤} + جـ$

تدريب (٤)

١) $\frac{٩٨}{٣}$

٢) $\frac{٣٣٦٧}{٣٨٤}$

تدريب (٥):

١) $\frac{-١}{٣}$ جتا$(س^{٣} + ٣س + ١) + جـ$

٢) $\frac{١}{٢}\left(ظا(س^{٢} + ٥) - (س^{٢} + ٥)\right) + جـ$

٣) $\frac{-١}{٣}(هـ^{\frac{٣}{٢}} - هـ^{٣})$

تدريب (٦):

١) $\frac{١}{١٨}$ ظا^{٦} $٣س + جـ$

٢) $\frac{١}{١٢}$ جا^{٦} $٢س + جـ$

٣) $-$جتاس $+ \frac{جتا^{٣}س}{٣} + جـ$

٤) $\frac{جا^{٥}س}{٢٥} - \frac{جا^{٧}س}{٣٥} + جـ$

التمارين والمسائل

١) أ) $\frac{٦٤}{٣}$

ب) $\frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}|٢س^{٢} - ٦س - ٥| + جـ$

جـ) $\frac{-١}{١٣(٢س - ٥)^{١٣}} + جـ$

د) $\frac{٧}{٢}$

هـ) ظتا$\frac{١}{س} + \frac{١}{س} + جـ$

و) $\frac{(\sqrt{س}+٥)^{٨}}{٤} + جـ$

ز) $\frac{-٢}{٣}\sqrt{\left(\frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}\right)^{٣}}+\text{جـ}$

ح) ٢

ط) $\frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}^{٣}}+\text{جـ}$

ي) $\frac{١}{٤}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}+١}\right)^{٤}+\text{جـ}$

ك) $\sqrt[٣]{\left(\text{س}^{\frac{٣}{٤}}+١\right)^{٤}}+\text{جـ}$

ل) $\frac{٢(\text{جاس}+١)^{٩}}{٩}-\frac{(\text{جاس}+١)^{١٠}}{١٠}+\text{جـ}$

٢) ٦

٣) ١٢

٤) أ) $\text{هـ}^{\text{جاس}}+\text{جـ}$

ب) $\sqrt{١٣}+\frac{٩}{\sqrt{١٣}}-٦$

جـ) $\text{ظاس}-\frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣}+\text{جـ}$

د) $\frac{١}{٣}\sqrt{(\text{جا}^{٢}\text{س}+٤)^{٣}}+\text{جـ}$

هـ) $\frac{-\text{ظتا}^{٦}\text{٦س}}{٣٦}-\frac{\text{ظتا}^{٤}\text{٦س}}{٢٤}+\text{جـ}$

و) $\frac{١}{٤}\left(\text{س}+\text{جا٢س}+\frac{١}{٢}\left(\text{س}+\frac{١}{٤}\text{جا٤س}\right)\right)+\text{جـ}$

ز) $\frac{١}{٤(\text{جتا}^{٢}\text{س}+١)^{٤}}+\text{جـ}$

ح) $\frac{-١}{٢}\text{هـ}^{\text{جتا٢س}}+\text{جـ}$

ط) $\frac{-٣}{٤}\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|٥-\text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}\right|+\text{جـ}$

ي) $\frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣}+\text{ظاس}+\text{جـ}$

ك) $٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|٢+\sqrt{\text{س}}\right|+\text{جـ}$

ل) $\frac{-٣}{٨}\sqrt[٣]{(\text{ظتاس}+٣)^{٤}}+\text{جـ}$

م) $\frac{-٣٢\,\text{جتا}^{١١}\text{س}}{١١}+\text{جـ}$

ن) $\frac{٢}{٣}$

س) $\frac{-٢}{٣}\sqrt{\left(\frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}\right)^{٣}}+\text{جـ}$

ع) $-\frac{(\text{جاس}-\text{جتاس})^{١٠}}{١٠}+\text{جـ}$

٦) أ) ص = جتاس

ب) ص = جاس

جـ) ص = ظاس

د) ص = قاس

هـ) ص = ظتاس

و) ص = ظتا س

ثانيًا التكامل بالأجزاء

عدد الحصص ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يتعرف طريقة التكامل بالأجزاء.
- يستخدم طريقة التكامل بالأجزاء في إيجاد بعض التكاملات.

التكامل الرأسي

- الاقترانات المثلثية، واللوغاريتمات في الصف الحادي عشر العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (٦١–٦٨).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- التكامل بالأجزاء.

التعلم القبلي

- معكوس المشتقة، قواعد الاشتقاق، قواعد التكامل غير المحدود، التكامل المحدود، المتطابقات المثلثية.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر–انتقِ زميلًا–شارك)، التفكير الناقد (التحليل).

إجراءات التنفيذ

١ – التمهيد للدرس من خلال طرح السؤال الآتي: جد $\int$ س جاس ءس، والاستماع لإجابات الطلبة مع تقديم التبرير.

٢ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات، وتكليف كل مجموعة بتنفيذ النشاط، الذي يهدف التوصل لقاعدة التكامل بالأجزاء.

٣ – متابعة الطلبة أثناء تنفيذهم النشاط، لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشتهم في النتائج التي توصلوا إليها، وكتابتها على اللوح.

٤ – كتابة التعميم الوارد في الكتاب على اللوح، وتكليف أكثر من طالب بقراءته وتحديد شروطه.

٥ – مناقشة المثالين (١) ، (٢) مع الطلبة؛ لتدريبهم على استخدام قاعدة التكامل بالأجزاء.

٦ – تقسيم الطلبة إلى ٤ مجموعات.

٧ – تكليف كل مجموعة بحل سؤال واحد من تدريب (١) ومتابعة الطلبة في أثناء العمل في المجموعات لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.

٨ – مناقشة المثالين (٣) ، (٤) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهمهم.

٩ – تكليف المجموعات السابقة بحل تدريب (٢)، ومتابعة حلولهم لإرشادهم، وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.

١٠– مناقشة مثال (٥) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة؛ للتحقق من فهمهم، ثم توضيح حل المثال باستخدام طريقة الجدول، والتوصل مع الطلبة إلى حالات استخدام الجدول.

١١– تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة وتكليفهم بحل التدريبين (٣)، (٤)، ومتابعة حلولهم لإرشادهم، وتقديم الدعم لهم ثم مناقشة الحلول على اللوح.

١٢– مناقشة مثال (٦) بمشاركة الطلبة، بهدف معرفتهم الحاجة للتعويض ثم استخدام طريقة التكامل بالأجزاء.

١٣– طرح السؤال الآتي: هل يمكن حل مثال (٦) مباشرة بطريقة التكامل بالأجزاء دون اللجوء إلى استخدام التعويض؟ واستخدام استراتيجية (فكر–انتقِ زميلاً–شارك)، ثم مناقشة إجاباتهم.

١٤– تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة وتكليفهم بحل تدريب (٥)، ومتابعة حلولهم لإرشادهم، وتقديم الدعم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.

١٥– مناقشة مثال (٧) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهم الطلبة.

١٦– ختم الدرس بسؤال الطلبة:
- لماذا سميت طريقة التكامل بالأجزاء بهذا الاسم؟
- متى تستخدم طريقة التكامل بالأجزاء؟

١٧– إعطاء واجب بيتي من التمارين والمسائل، ومتابعة حلول الطلبة لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

أخطاء شائعة

يخطئ بعض الطلبة عند حساب التكامل بطريقة الأجزاء وذلك باختيار ق، دهـ بطريقة خاطئة، ويتبين هذا الخطأ عند إجراء التكامل. ضع المثال الآتي: جد $\int$ س جاس دس وسؤال الطلبة بحل المثال بطريقتين مختلفتين الطريقة الاولى بفرض ق = س، دهـ = جاس والطريقة الثانية بفرض ق = جاس دهـ = س ليلاحظ الفرق بين الطريقتين.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

جد: ١) $\int$ س جتاس دس ٢) $\int$ س هـ$^{\text{س}}$ دس ٣) $\int$ س $\sqrt{\text{س} + ٥}$ دس

الحل: ١) س جاس + جتاس + جـ ٢) س هـ$^{\text{س}}$ – هـ$^{\text{س}}$ + جـ

٣) $\frac{٢}{٣}\text{س}\sqrt{(\text{س}+٥)^{٣}} - \frac{٤}{١٥}\sqrt{(\text{س}+٥)^{٥}} + \text{جـ}$

إثراء

جد: ١) $\int \frac{\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}}{(\sqrt{\text{س}}+١)^{٢}} + \text{ءس}$ ٢) $\int \text{جاس}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)\text{ءس}$

الحل: ١) $\frac{-٢\sqrt{\text{س}}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}}{\sqrt{\text{س}}+١} + ٢\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{جـ}$ ٢) $-\text{جتاس}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{جاس}}{\text{س}} + \text{جـ}$

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل، مراجعة الذات، الورقة والقلم.

أداة التقويم: سلم التقدير (٤–٢)، قائمة الرصد (٢–٦)، سجل وصف سير التعلم (١–٤)، اختبار قصير.

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

١) $\text{س جاس} + \text{جتاس} + \text{جـ}$

٢) $\frac{-١}{٥}\text{جتا٥س} + \frac{١}{٢٥}\text{جا٥س} + \text{جـ}$

٣) $(٢\text{س} - ٣)\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

٤) $\text{س ظاس} + \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{جـ}$

تدريب (٢)

١) $\frac{١}{٢}\text{س}(\text{س} - \frac{١}{٢}\text{جا٢س}) - \frac{١}{٢}(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{١}{٤}\text{جتا٢س}) + \text{جـ}$

٢) $\frac{٣}{٢}\text{س}^{٢}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{٣}{٤}\text{س}^{٢} + \text{جـ}$

٣) ٣

٤) $\frac{-١}{٢}\text{س ظتاس} + \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| + \text{جـ}$

تدريب (٣)

١) $\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

٢) $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \text{جـ}$

تدريب (٤)

١) $\text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٣\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٦\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٦\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

٢) $\frac{١}{٤}\text{س}^{٢}\,\text{جا٤س} + \frac{١}{٨}\text{س جتا٤س} - \frac{١}{٣٢}\text{جا٤س} + \text{جـ}$

٣) $\frac{-١}{٢}(\text{س}^{٢} - \text{س})\text{جتا٢س} + \frac{١}{٤}(٢\text{س} - ١)\text{جا٢س} + \frac{١}{٤}\text{جتا٢س} + \text{جـ}$

٤) $\frac{س^{٢}(٢س+١)^{٦}}{١٢} - \frac{س(٢س+١)^{٧}}{٨٤} + \frac{(٢س+١)^{٨}}{١٣٤٤} + جـ$

تدريب (٥)

١) $٢\sqrt{ظاس}\,هـ^{\sqrt{ظاس}} - ٢هـ^{\sqrt{ظاس}} + جـ$

٢) $٢جاس\,هـ^{جاس} - ٢هـ^{جاس} + جـ$

٣) $\sqrt{٢س+١}\,جا\sqrt{٢س+١} + جتا\sqrt{٢س+١} + جـ$

٤) $٣\,لو_{هـ}\sqrt{٣}\left(\frac{(\sqrt{٣})^{٣}}{٣} + \sqrt{٣}\right) - ٣\left(\left(\frac{(\sqrt{٣})^{٣}}{٩} + \sqrt{٣}\right) - \frac{١٠}{٩}\right)$

التمارين والمسائل

١)

أ) $\frac{-٤}{٩}$

ب) $\frac{س^{٣}}{٣}لو_{هـ}س - \frac{س^{٣}}{٩} + جـ$

جـ) -٨

د) $\frac{١}{٢}س\,قا^{٢}س - \frac{١}{٢}ظاس + جـ$

هـ) $ظاس\,لو_{هـ}ظاس - ظاس + جـ$

و) $\frac{-١}{٢}هـ^{-٢س} - \frac{١}{٤}هـ^{-٢س} + جـ$

ز) $٣\sqrt[٣]{س^{٢}}\,جا\sqrt[٣]{س} + ٦\sqrt[٣]{س}\,جتا\sqrt[٣]{س} - ٦جا\sqrt[٣]{س} + جـ$

ح) $جاس\,لو_{هـ}جاس - جاس + جـ$

ط) $\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢}س\,جتا٢س + \frac{١}{٤}جا٢س + جـ$

ي) $\frac{٩}{١٠}\left(\frac{١}{٣}هـ^{س}جا٣س + \frac{١}{٩}هـ^{س}جتا٣س\right) + جـ$

ك) $٤\sqrt{س+٣}\,لو_{هـ}\sqrt{س+٣} - ٤\sqrt{س+٣} + جـ$

ل) $\frac{٢}{٣}(س^{٢}-٢س)\sqrt{(س+٣)^{٣}} - \frac{٤}{١٥}(٢س-٢)\sqrt{(س+٣)^{٥}} + \frac{١٦}{١٠٥}\sqrt{(س+٣)^{٧}} + جـ$

م) $ظاس\,لو_{هـ}جاس - س + جـ$

ن) $\frac{١}{٥}(هـ^{س}جا٢س - ٢هـ^{س}جتا٢س) + جـ$

س) $(س^{٣}+٢س)هـ^{س} - (٣س^{٢}+٢)هـ^{س} + ٦س\,هـ^{س} - ٦هـ^{س} + جـ$

ع) $\frac{-س\,هـ^{س}}{س+١} + هـ^{س} + جـ$

٢) ٨

٣) $\frac{-٧}{٣}$

ثالثًا	التكامل بالكسور الجزئية	عدد الحصص	ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يتعرف طريقة التكامل بالكسور الجزئية.
- يستخدم طريقة التكامل بالكسور الجزئية في إيجاد بعض التكاملات.

التعلم القبلي

- معكوس المشتقة، قواعد الاشتقاق، قواعد التكامل غير المحدود، التكامل المحدود، الاقترانات المثلثية،تجزئة الكسور، تحليل العبارة التربيعية.

التكامل الرأسي

- الاقترانات المثلثية في الصف الحادي عشر العلمي.
- اللوغاريتمات وتجزئة الكسور في الصف الحادي عشر العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (٦٩-٧٥).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي: https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- التكامل بالكسور الجزئية

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (أسئلة وأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، التفكير الناقد (التحليل).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال طرح المثال الآتي: جد $\int \frac{٢}{س^٢ - ١}$ دس ، والاستماع لإجابات الطلبة مع تقديم التبرير.

٢ - تقسيم الطلبة إلى مجموعات، وتكليف كل مجموعة بتنفيذ النشاط الذي يهدف إلى التوصل إلى طريقة التكامل بالكسور الجزئية، ومتابعة عمل المجموعات في أثناء تنفيذهم النشاط.

٣ - مناقشة الطلبة في نتائجهم، وكتابة ما توصلوا إليه على اللوح، ومتى نستخدم هذه الطريقة لإجراء التكامل.

٤ - مناقشة مثال (١) مع الطلبة؛ لتدريبهم على استخدام قاعدة التكامل بالكسور الجزئية.

٥ – التأكيد أنه سيتم مناقشة كيفية إجراء تكامل اقترانات نسبية؛ مقامها من الدرجة الثانية ويمكن تحليله.

٦ – تكليف الطلبة بحل تدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية ومتابعة حلولهم، لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.

٧ – مناقشة مثال (٢) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهم الطلبة.

٨ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٢) ضمن مجموعات ثنائية ومتابعة حلولهم، لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.

٩ – مناقشة مثال (٣) بمشاركة الطلبة، مع مراعاة توجيه الأسئلة في كل خطوة للتحقق من فهم الطلبة. ومناقشة فقرة (فكر وناقش) صفحة (٧٢)؛ لتنبيه الطلبة إلى ضرورة إجراء القسمة الطويلة، إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام.

١٠ – تقسيم الطلبة إلى ٤ مجموعات.

١١ – تكليف كل مجموعتين بحل الفرع نفسه من تدريب (٣)، والتجول بينهم لإرشادهم وتقديم الدعم اللازم لهم، ثم مناقشة الحلول على اللوح.

١٢ – مناقشة المثالين (٧)، (٨) بمشاركة الطلبة، لمناقشة أفكار مختلفة.

١٣ – تقسيم الطلبة إلى (٦) مجموعات تكليف كل مجموعتين بحل نفس الفرع من تدريب (٤) ومناقشة الحلول على اللوح.

١٤ – ختم الدرس بسؤال الطلبة:

- لماذا سميت طريقة التكامل بالكسور الجزئية بهذا الاسم ؟
- متى تستخدم طريقة التكامل بالكسور الجزئية ؟

١٥ – إعطاء واجب بيتي من التمارين والمسائل، ومتابعة حلول الطلبة لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

أخطاء شائعة

– يخطئ بعض الطلبة عند إيجاد $\int \frac{\text{ءس}}{(\text{س} + \text{أ})^2}$ فيستخدمون الكسور الجزئية على الصورة الآتية:

$$\frac{1}{(\text{س} + \text{أ})^2} = \frac{\text{ب}}{\text{س} + \text{أ}} + \frac{\text{جـ}}{\text{س} + \text{أ}}$$

بين لهم أن:

$$\frac{\text{ب}}{\text{س} + \text{أ}} + \frac{\text{جـ}}{\text{س} + \text{أ}} = \frac{\text{ب} + \text{جـ}}{\text{س} + \text{أ}} \neq \frac{1}{(\text{س} + \text{أ})^2}$$

- يخطئ بعض الطلبة عند إيجاد $\int \frac{٢س^٢}{س^٢ - ١} \, ءس$

فيبدأ مباشرة بإجراء تجزئة الكسور

$$\frac{٢س^٢}{س^٢ - ١} = \frac{أ}{س - ١} + \frac{ب}{س + ١}$$

بين لهم أن:

$$\frac{أ}{س - ١} + \frac{ب}{س + ١} = \frac{أ(س + ١) + ب(س - ١)}{(س + ١)(س - ١)} \neq \frac{٢س^٢}{س^٢ - ١}$$

والتأكيد بضرورة إجراء القسمة الطويلة.

مراعاة الفروق الفردية

العلاج:

جد: ١) $\int \frac{٣}{٩س^٢ - ٣٠س + ٢٥} \, ءس$ ٢) $\int \frac{٢س^٢}{س^٢ - ٤} \, ءس$

الحل:

١) $\frac{١}{٣س - ٥} + جـ$

٢) $٢س - ٢ لو_هـ |س + ٢| + ٢ لو_هـ |س - ٢| + جـ$

إثراء

جد: ١) $\int \frac{١}{جاس + ٨قاس} \, ءس$ ٢) $\int \frac{\sqrt{٤ + ظتاس}}{جا^٢س} \, ءس$

الحل:

١) $\frac{١}{٦} لو_هـ |٣ + جاس| - \frac{١}{٦} لو_هـ |٣ - جاس| + جـ$

٢) $-\sqrt{٤ + ظتاس} + لو_هـ \left|\sqrt{٤ + ظتاس} + ٢\right| - لو_هـ \left|\sqrt{٤ + ظتاس} - ٢\right| + جـ$

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل، مراجعة الذات، الورقة والقلم.

أداة التقويم: سلم التقدير (٤-٢)، قائمة الرصد (٢-٦)، سجل وصف سير التعلم (١-٤)، اختبار قصير.

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١) $\frac{٥}{٢}$ لوهـ|س − ٣| − $\frac{٥}{٢}$ لوهـ|س − ١| + جـ

تدريب (٢) $\frac{٥}{٢}$ لوهـ|٢س − ١| − ٢ لوهـ|س − ٣| + جـ

تدريب (٣)

١) س + ٥ لوهـ|س| − ٥ لوهـ|س + ١| + جـ

٢) $\frac{٦٥}{٦}$ + ٢ لوهـ٢

تدريب (٤)

١) $\frac{١}{٧}$ لوهـ|ظاس − ١| − $\frac{١}{٧}$ لوهـ|٥ظاس + ٢| + جـ

٢) $\frac{٣\sqrt[٣]{س^٢}}{٢}$ − ٣ $\sqrt[٣]{س}$ + ٣لوهـ|$\sqrt[٣]{س}$ − ٢| + ٩لوهـ|$\sqrt[٣]{س}$ + ٢| + جـ

٣) −١ + ٤لوهـ٣ − ٤لوهـ٢

التمارين والمسائل

١) لوهـ|س − ٥| − لوهـ|س + ٢| + جـ

٢) لوهـ٣ − لوهـ٥

٣) لوهـ٤ − لوهـ٣

٤) $\frac{س^٢}{٢}$ + $\frac{٣١}{٦}$ لوهـ|س − ٣| + $\frac{٤٧}{٦}$ لوهـ|س + ٣| + جـ

٥) ١ − $\frac{٢٥}{٢١}$ لوهـ٤ − $\frac{٦}{٧}$ لوهـ٢

٦) $\frac{١}{١٠}$ لوهـ|لوهـ جتاس − ٥| − $\frac{١}{١٠}$ لوهـ|لوهـ جتاس + ٥| + جـ

٧) س − لوهـ|هـ^{س} + ١| + جـ

٨) هـ^{س} + $\frac{١٦}{٥}$ لوهـ|هـ^{س} − ٤| − $\frac{١}{٥}$ لوهـ|هـ^{س} + ١| + جـ

٩) ٢ + ٢لوهـ٢ − ٢لوهـ٦ + ٢لوهـ٥

١٠) $\frac{١}{٣}$ لوهـ|جاس| − $\frac{١}{٣}$ لوهـ|٢جاس + ٣| + جـ

١١) $\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-٩)-٢\text{س}-٣\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٣|+٣\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٣|+\text{جـ}$

١٢) $\frac{-١}{٢}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|١+\text{س}^{-٢}|+\text{جـ}$

١٣) $٦\,\text{لـو}_{\text{هـ}}٢-٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}٣$

١٤) $\frac{\text{س}-٢}{٢}+٢\sqrt{\text{س}-٢}+٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}-٢}-١|+\text{جـ}$

١٥) $٢\sqrt{١-\text{هـ}^{\text{س}}}-\text{لـو}_{\text{هـ}}|\sqrt{١-\text{هـ}^{\text{س}}}+١|+\text{لـو}_{\text{هـ}}|\sqrt{١-\text{هـ}^{\text{س}}}-١|+\text{جـ}$

١٦) $\frac{١}{٤}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|٢+\text{ظاس}|-\frac{١}{٤}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|٢-\text{ظاس}|+\text{جـ}$

١٧) $\frac{١}{٦}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}٢$

١٨) $\frac{١}{٤}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}-٢|-\frac{١}{٤}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}+٢|+\text{جـ}$

أولًا | المساحة | عدد الحصص | ثلاث حصص

نتاجات التعلم

– يستخدم التكامل لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى اقتران ومحور السينات في الفترة [أ، ب].
– يستخدم التكامل لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنيين.
– يستخدم التكامل لإيجاد المساحة المحصورة بين ثلاثة منحنيات على الأكثر.

التكامل الرأسي

– إيجاد مساحات الأشكال المنتظمة في الصفوف السابقة عن طريق قوانين محددة.

مصادر التعلم

– كتاب الطالب، الصفحات (٧٦–٨٩).
– منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

– المساحة.

التعلم القبلي

– قوانين إيجاد مساحات الأشكال المنتظمة، رسم منحنى الاقتران، التكامل المحدود.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، العمل في الكتاب المدرسي)، حل المشكلات والاستقصاء، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر–انتقِ زميلًا–شارك).

إجراءات التنفيذ

١ – التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة بقوانين مساحة الأشكال المنتظمة (المستطيل، المثلث، الدائرة).
٢ – كتابة مثال (١) على اللوح، وتقسيم الطلبة إلى مجموعات تعاونية، وتوجيههم إلى حل المثال بفرعيه ومقارنة الإجابة بالفرعين، ثم مناقشة ما توصلوا إليه من نتائج.
٣ – كتابة المثال (٢) على اللوح ثم توجيه المجموعات إلى حله، ومناقشة ما توصلوا إليه من نتائج، ثم عرض القاعدة صفحة (٧٨) على اللوح وشرحها.
٤ – مناقشة المثالين (٣)، (٤) مع الطلبة، ثم تكليفهم بحل التدريبات (١، ٢، ٣) واجبًا بيتيًّا.

٥ – متابعة حلول الطلبة للتدريبات وتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.
٦ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات تعاونية.
٧ – مناقشة الأمثلة (٥، ٦، ٧، ٨) مع الطلبة، ثم تكليف المجموعات بحل التدريبين (٤)، (٥) بعد عرض القاعدة صفحة (٨١) على اللوح وشرحها.
٨ – توجيه المجموعات إلى عرض الحل ومناقشتهم في إجاباتهم والنتائج التي توصلوا إليها.
٩ – توضيح كيفية إيجاد المساحة المحصورة بين ثلاثة منحنيات من خلال مناقشة مثال (٩).
١٠ – تكليف المجموعات بحل تدريب (٦)، ثم عرض حلولهم والنتائج التي توصلوا إليها.
١١ – تقسيم الطلبة في مجموعات تعاونية، ثم توجيه المجموعات إلى حل السؤال (٣) من الصفحة (٨٨) وإجراء مناقشة للوصول إلى الحل الصحيح.
١٢ – ختم الدرس بسؤال الطلبة عما تعلموه في هذا الدرس. وعرض نماذج من إيجاد مساحة المنطقة المحدودة التي تم حلها عن طريق التكامل وكان يصعب إيجاد مساحتها بالقوانين.

أخطاء شائعة

- قد يخطئ بعض الطلبة في حساب مساحة منطقة محصورة بين منحنى اقتران ومحور السينات في الفترة [أ، ب] وذلك بحساب قيمة المساحة بالسالب، وهذا الخطأ ناتج عن عدم إيجاد تكامل القيمة المطلقة للاقتران وإنما إيجاد تكامل الاقتران.

- قد يخطئ بعض الطلبة عند حساب المساحة المحصورة بين منحنى اقترانين مثل ق، هـ في الفترة [أ، ب] فلا يستخدمون الرسم، وإنما يعتقدون أن الاقتران الذي درجته أكبر هو الاقتران الأكبر، يوضح المعلم ذلك من خلال عرض المثال التالي: جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س، ومنحنى الاقتران هـ(س) = $س^٢$.
- قد يعتقد بعض الطلبة أنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) ومحور السينات في الفترة [أ، ب] هي القيمة المطلقة لتكامل الاقتران على الفترة [أ، ب]، وضح للطلبة أنَّ اعتقادهم يكون صحيحًا عندما يكون ق(س) أكبر من أو يساوي صفرًا على الفترة [أ، ب] يوضح المعلم ذلك من خلال عرض المثال الآتي: إذا كان ق(س) = س – ٢، س ∈ [٠ ، ٤] فجد:

أ) $\int_{ب}^{أ}$ ق(س) ءس

ب) $\int_{ب}^{أ}$ |ق(س) ءس|

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س٢، ومحورالسينات ومحورالصادات والمستقيم س=٣.

٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = س٢ + ١ والمستقيم ص = ٥.

٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي ق (س) = س + ١، هـ(س) = ١ − ٢س في الفترة [٠، ٢].

الحل:

١) م = ٩ وحدة مساحة ٢) م = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مساحة ٣) م = ٦ وحدة مساحة

إثراء

١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي ص= |س| ، ق(س) = ٢ − س٢

٢) إذا كان المستقيم ص= جـ يقسم المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) = س٢، والمستقيم ص = ٤ إلى جزأين متساويين، فجد قيمة جـ.

الحل:

١) م = $\frac{٧}{٣}$ وحدة مساحة ٢) م = $\sqrt[٣]{١٦}$

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل، مراجعة الذات، الورقة والقلم.

أداة التقويم: سلم التقدير (٤−٢)، قائمة الرصد (٢−٦)، سجل وصف سير التعلم (١−٤)، اختبار قصير.

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١): $\frac{٨}{٣}$ **تدريب (٢):** −٣ **تدريب (٣):** $\frac{٤}{\pi}$ **تدريب (٤):** $\frac{١٦}{٣}$

تدريب (٥): ٢ $\sqrt{٢}$ **تدريب (٦) :** $\frac{٣٧}{٦}$

فكر وناقش:

$$\int_{ب}^{أ} (ل(س) - ق(س)) \, ءس - \int_{ب}^{أ} ل(س) \, ءس$$

تدريب (٧): المساحة = $\frac{٨٨٠}{٣}$ وحدة مساحة.

التكلفة: $\frac{٣٥٢٠٠}{٣}$ قرشًا

التمارين والمسائل

١)

الشكل (٤ – ٢٥)	الشكل (٤ – ٢٤)
$م = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} (هـ(س) - ل(س))\, ءس + \int_{\frac{١}{٢}}^{١} (ق(س) - ل(س))\, ءس$ $م = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} (٢ - س)\, ءس + \int_{\frac{١}{٢}}^{١} (\frac{١}{س} - س)\, ءس$	$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ق(س)\, ءس + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} هـ(س)\, ءس$ $م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جاس\, ءس + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} جتاس\, ءس$
الشكل (٤ – ٢٧)	**الشكل (٤ – ٢٦)**
$م = \int_{-١}^{٠} ل(س)\, ءس + \int_{٠}^{١} ق(س)\, ءس$ $م = \int_{-١}^{٠} هـ^{س}\, ءس + \int_{٠}^{١} هـ^{-س}\, ءس$	$م = \int_{-٢}^{٠} (ق(س) - ل(س))\, ءس + \int_{٠}^{٢} ق(س)\, ءس$ $م = \int_{-٢}^{٠} (\sqrt{٢ - س} + س)\, ءس + \int_{٠}^{٢} \sqrt{٢ - س}\, ءس$
الشكل (٤ – ٢٩)	**الشكل (٤ – ٢٨)**
$م = \int_{٠}^{١} (\sqrt{س} - -\sqrt{س})\, ءس + \int_{١}^{٤} (\sqrt{س} - (س - ٢))\, ءس$ $م = \int_{٠}^{١} ٢\sqrt{س}\, ءس + \int_{١}^{٤} (\sqrt{س} - س + ٢)\, ءس$	$م = \int_{-٢}^{-١} ق(س)\, ءس + \int_{-١}^{١} ل(س)\, ءس + \int_{١}^{٢} ق(س)\, ءس$ $م = \int_{-٢}^{-١} (٤ - س^{٢})\, ءس + \int_{-١}^{١} ٣\, ءس + \int_{١}^{٢} (٤ - س^{٢})\, ءس$

٢) م = ٢ وحدة مساحة

٣) م = ٨ وحدة مساحة

٤) م = ٢٨ وحدة مساحة

٥) $م = \frac{٤٠}{٣}$ وحدة مساحة

٦) $م = \frac{١}{٢}$ وحدة مساحة

٧) م = ٣ وحدة مساحة

٨) $م = \frac{٤٧}{٦}$ وحدة مساحة

٩) $م = \frac{١١٣}{٦}$ وحدة مساحة

١٠) $م = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مساحة

١١) $م = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مساحة

١٢) $م = \frac{٢٧ - ٨\sqrt{٢}}{٦}$ وحدة مساحة

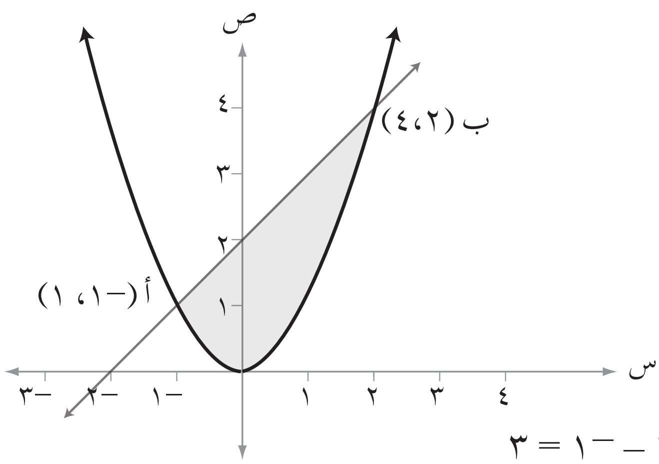
١٣) ١٢

١٤) – ٨

* **معلومات إضافية**

القاعدة الذهبية في القطع المكافئ

لإيجاد المساحة المحصورة بين القطع المكافئ الذي على صورة ق(س) = أ س^{٢} +ب س+جـ وخط مستقيم:



المساحة = $\frac{١}{٦}$ × أ (Δس)^{٣}

اعتمادًا على الشكل المجاور

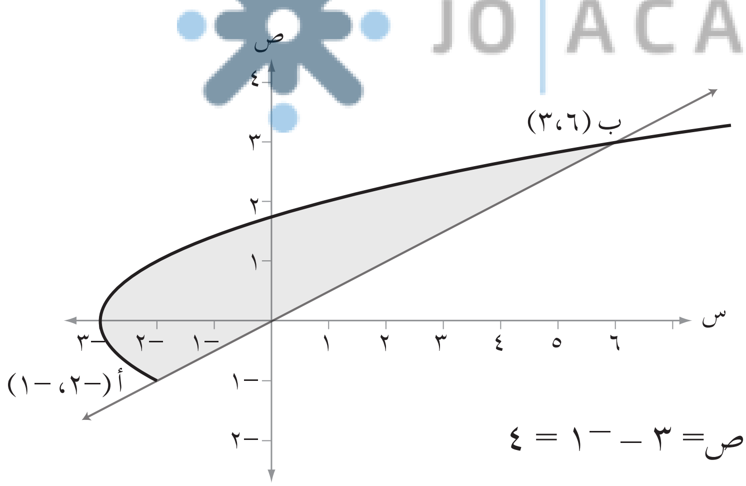
ق(س) = س^{٢}

ل: ص = س + ٢

المساحة = $\frac{١}{٦}$ × أ (Δس)^{٣}، أ = ١ ، Δس= ٢ − ‾١ = ٣

= $\frac{١}{٦}$ × ١ ×٣^{٣} = $\frac{٩}{٢}$ وحدة مساحة

لإيجاد المساحة المحصورة بين القطع المكافئ الذي على صورة س = أص^{٢} +ب ص+جـ ، وخط مستقيم:



المساحة = $\frac{١}{٦}$ × أ (Δص)^{٣}

اعتمادًا على الشكل المجاور

ق(س) = $\sqrt{س + ٣}$

ل: ص = $\frac{س}{٢}$

المساحة = $\frac{١}{٦}$ × أ (Δص)^{٣}، أ = ١ ، Δص= ٣ − ‾١ = ٤

= $\frac{١}{٦}$ × ١ ×٤^{٣} = $\frac{٦٤}{٦}$ = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مساحة

غير مطلوب من الطالب في امتحان الثانوية العامة.

*المرجع انظر قائمة المراجع.

القاعدة الذهبية في المنحنى التكعيبي

لإيجاد مساحة قطعة المنحنى التكعيبي الذي على الصورة

ق (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ل في الفترة [س$_{١}$، س$_{٢}$] ، فإنَّ

المساحة = $\frac{١}{٤}$ × أ × (Δس)^{٣}(س$_{١}$ + س$_{٢}$) + $\frac{١}{٦}$ × ب × (Δس)^{٣}

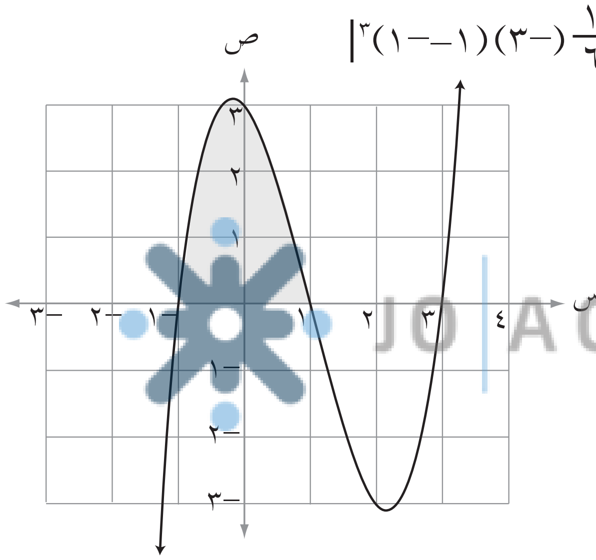
حيث أ: معامل س^{٣}

ب : معامل س^{٢}

اعتمادًا على الشكل الآتي:

حيث ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − س + ٣

المساحة المظللة = |$\frac{١}{٤}$ (١) (١ −−١)^{٣} (١−١) + $\frac{١}{٦}$(−٣)(١ −−١)^{٣}|



= |$\frac{١}{٤}$ × ٨ × ٠ − $\frac{١}{٦}$ × ٣ × ٨|

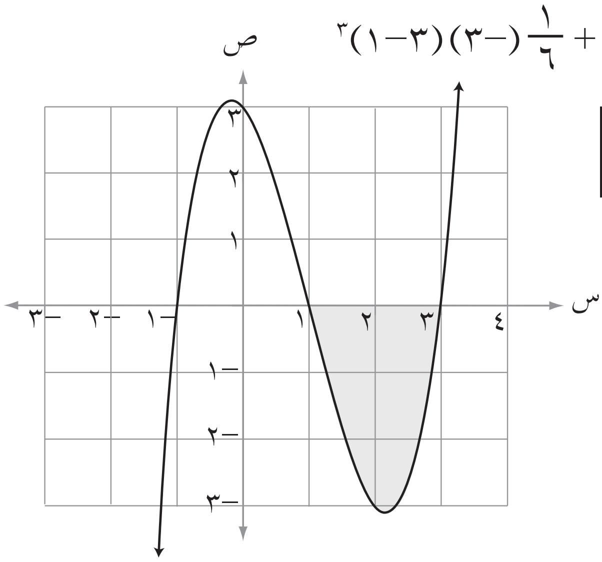
= |٠ − ٤|

= ٤ وحدة مساحة

تحقق أنَّ النقطة (١ ، ٠) نقطة انقلاب، وعليه:

المساحة بين الفترة [−١ ، ١] = المساحة بين الفترة [١ ، ٣]

المساحة المظللة (م): = $\frac{١}{٤}$ × (١) (٣−١)^{٣} (٣+١) + $\frac{١}{٦}$ (−٣)(٣−١)^{٣}



= |$\frac{١}{٤}$ × ٨ × ٤ − $\frac{٣ × ٨}{٦}$|

= ٨ − ٤ = ٤ وحدة مساحة

ثانيًا المعادلات التفاضلية

عدد الحصص: حصتان

نتاجات التعلم

- يتعرّف مفهوم المعادلة التفاضلية.
- يحل معادلات تفاضلية.
- يوظيف المعادلات التفاضلية في حل مسائل حياتية.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (٩٠–٩٥).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي: https://www.edraak.org/k12/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- معادلة تفاضلية، حل المعادلة التفاضلية .

التعلم القبلي

- ميل المماس، السرعة والتسارع، قواعد التكامل غير المحدود.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشـر (الأسئلة والأجوبة)، حل المشكلات والاستقصاء، التعلم فـي مجموعات (المناقشة، فكر–انتقِ زميلًا–شارك).

إجراءات التنفيذ

١ – التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة في ميل المماس وميل العمودي على المماس، والسرعة و التسارع.

٢ – تعريف الطلبة بمفهوم المعادلة التفاضلية من خلال مناقشة مقدمة الدرس مع الطلبة.

٣ – توضيح كيفية حل المعادلة التفاضلية من خلال مناقشة المثالين (١)، (٢) مع الطلبة.

٤ – تكليف الطلبة بحل تدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم.

٥ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات تعاونية.

٦ – مناقشة مثال (٣) مع الطلبة، ثم تكليف المجموعات بحل تدريب (٢) ومتابعة عمل المجموعات.

٧ – مناقشة مثال (٤) مع الطلبة، ثم تكليف المجموعات بحل التدريبين (٣)، (٤)، ثم عرض حلولهم على المجموعات الأخرى ومناقشتها.

٨ – ختم الدرس بمراجعة الطلبة بالمفاهيم التي وردت في الدرس من خلال توجيه السؤال: ماذا تعلمنا اليوم؟

٩ – استقبال إجابات الطلبة وهذه تعد بمثابة تغذية راجعة حول مدى امتلاك الطلبة للمفاهيم التي وردت في الدرس.

١٠ – تكليف الطلبة بحل الأسئلة (٢، ٤، ٥، ٦، ٧) واجبًا بيتيًا، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

أخطاء شائعة

- يخطئ بعض الطلبة عند حلهم لمعادلة تفاضلية بأن يتجاهلوا وضع الثابت جـ بأحد طرفي المعادلة، بعد إجراء التكامل. لذا؛ على المعلم أن يؤكد للطلبة ضرورة كتابة جـ في الطرف الأيسر من المعادلة بعد عملية الحل.
- يخطئ بعض الطلبة عند حل المعادلة التفاضلية بعدم فصل المتغيرات كل متغير مع تفاضله.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) حل المعادلة التفاضلية: $س\ ءص + ص^٢ ءس = ءص$

٢) حل المعادلة التفاضلية: $٢ جتا^٢ س\ ءص + ص^٢ ءس = ٢\ ءص$

الحل: ١) $\frac{١}{ص} = لـو_هـ |س - ١| + جـ$ ٢) $\frac{١}{ص} = \frac{١}{٢} ظتا س + جـ$

إثراء

١) إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) = $\frac{-\sqrt{هـ^{ص + ٢ لـو_هـ س}}}{٦ س^٣ + ٢}$

حيث س> صفر ، فجد قاعدة العلاقة ص، علمًا بأنَّ منحنى العلاقة يمر بالنقطة (١ ، ٢)

٢) قذفت كرة من قمة برج رأسيًا لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (٨٠) قدم/ث ، وبتسارع مقداره (– ٣٢) قدم /ث^٢، فإذا علمت أنّ ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بعد (١) ثانية يساوي (٨٨) قدم، فجد ارتفاع البرج.

الحل: ١) $ص = ٢ لـو_هـ (س^٣ + لـو_هـ |س| + هـ - ١)$ ٢) ارتفاع البرج = ٢٤ قدم

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل، ، الورقة والقلم، مراجعة الذات.

أداة التقويم: سلم التقدير (٤–٢)، قائمة الرصد (٢–٦)، سلم التقدير اللفظي (٣–٩)،سجل وصف سير التعلم (١–٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س} + 4\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ})$

تدريب (٢) $\text{ص} = -2\sqrt{3 + \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}} + 8$

تدريب (٣) $\text{ف}(2) = \frac{118}{3}$ مترًا

تدريب (٤) ن = ٩ ثوانٍ.

التمارين والمسائل

١)

أ) $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{-1}{2\text{س}^2}} + \text{جـ}$

ب) $\text{ص} = \frac{1}{3}\text{س} - \frac{1}{3}\text{جاس} + \text{جـ}$

جـ) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{قاس} + \text{جـ})$

د) $\text{ص} = \frac{1}{8}(\text{س} - \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س}) + \text{جـ}$

هـ) $\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - 1| = \frac{1}{3}\text{س}^3 + \text{س} + \text{جـ}$

و) $\text{ص} = \frac{1}{2}(\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 - 4\text{س}) - 6\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ})$

٢) ق(٣) = ٢١٢٥ دينار

٣) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}} + 1| + 1 - \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{هـ} + 1|)$

٤) المسافة المقطوعة = ١٦٥ مترًا

٦) ف (٤) = ١٢٥ مترًا

٧) ع (٤٠) = ٥٤٠٠٠٠ نسمة

إجابات أسئلة
الوحدة الرابعة

١) أ) $\frac{١}{٦}(\sqrt{١٣^{٣}} - ٢٧)$

ب) $\frac{٣}{٥}\sqrt[٣]{س^{٥}} + جـ$

جـ) $\frac{-١}{٣}\sqrt{(س^{-٢}-١)^{٣}} + جـ$

د) $\frac{(لـو_{هـ} جاس)^{٢}}{٢} + جـ$

هـ) $\frac{(س^{-٧}-٤)^{٧}}{٤٩} + جـ$

و) $\left(\frac{ظا^{٣}س}{٣} + ظاس\right) لـو_{هـ} ظاس - \frac{ظا^{٣}س}{٩} - ظاس + جـ$

ز) $\frac{٣}{١٦}\sqrt[٣]{(٢س^{٢}-١)^{٤}} + جـ$

ح) $\frac{هـ - ١}{٢(هـ + ١)}$

ط) $\frac{١}{٢}(س جا(لـو_{هـ} س) - س جتا(لـو_{هـ} س)) + جـ$

ي) $\frac{-١}{٨} لـو_{هـ}|٢س^{-٤} + ١| + جـ$

ك) $٢(س+٣) - ١٨\sqrt{س+٣} + ٥٤ لـو_{هـ}|\sqrt{س+٣} + ٣| + جـ$

ل) $س لـو_{هـ}(س^{٢} + ٢س) - ٢س + ٢ لـو_{هـ}|س+٢| + جـ$

٢) $لـو_{هـ}|جاص| = ٣جاس + جـ$

٣) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص(١ - ٢س^{٢} هـ^{س^{٢}})}{س(٢ص^{٢} - ١)}$

٤) ب = ٣

٥) ٤٨

٦) −٣٣

٧) $قَ(س) = ٢س - ٣س^{٢} + ١$

٨) −٢

٩) أ = ٢

١٠) $ص = -٢ لـو_{هـ}(\frac{١}{٢} ظتاس + \frac{١}{٢})$

١١) $\frac{٢٦}{٣}$

١٢) $٨ - ٣ لـو_{هـ} ٣$

١٣) $\frac{١٠}{٣}$

١٤) ٧ وحدة مساحة

١٥) ٣

١٦) أ) −٢   ب) ٦ وحدة مساحة   جـ) ٢

١٧)

أ) $\frac{١}{٢}\sqrt{\text{س}}\left(\frac{-١}{٢}\text{جتا}٢\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{٨}\text{جتا}٤\sqrt{\text{س}}\right) + \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٤}\text{جا}٢\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{٣٢}\text{جا}٤\sqrt{\text{س}}\right) + \text{جـ}$

ب) $\frac{٣}{٨}\sqrt[٣]{(\text{س}^٢ + ١)^٤} + \text{جـ}$

جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}} + ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{١}{\sqrt{٣}} - ٢\right| - ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٢ - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{١}{\sqrt{٣}} - ١\right|$

د) $\frac{١}{١٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{٢\text{قتاس} - ٣}{٢\text{قتاس} + ٣}\right| + \text{جـ}$

هـ) $\frac{٧\text{هـ}^٨ + ١}{٣}$

و) $\text{س} + \text{جا}٢\text{س} + \text{جـ}$

ز) $-\text{جتا}٢\text{س} - \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}٢\text{س}| + \text{جـ}$

ح) $\text{س ظا}\frac{\text{س}}{٢} + ٢\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}\right| - \text{لو}_{\text{هـ}}|١ + \text{جتاس}| + \text{جـ}$

ط) $\frac{-٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}}{\text{س} - ١} - ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ١| + \text{جـ}$

ي) $\frac{(\text{قاس} + \text{ظاس})^{١٠}}{١٠} + \text{جـ}$

رقم الفرع	رمز الإجابة	الإجابة
١	د	٢
٢	أ	$٥\text{س}^٤ + \text{جتاس}$
٣	ب	٢٤
٤	جـ	٨
٥	جـ	قَ(هـ(ب)) − قَ(هـ(أ))
٦	جـ	١٢
٧	ب	٨
٨	أ	ظتاس
٩	جـ	١٦
١٠	ب	٦
١١	ب	$\int_{٠}^{١} ٢\text{س}\,\text{ءس} + \int_{١}^{٢} (٤ - ٢\text{س})\,\text{ءس}$

ورقة عمل (٤-١)

السؤال الأول:

١) إذا كان $\int \text{قَ(س)}\,\text{ءس} = \text{هـ}^{١-\text{س}^٢} + ٤\text{هـ}$ ، و كان $\text{قَ(أ)} = -٢\text{أ}$، $\text{أ} \neq \text{صفر}$، فجد قيمة (قيم) الثابت أ .

٢) إذا كان $\text{ق(س)} = \text{جـ هـ}^{٢\text{س}} + \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$ حيث جـ ثابت، و كان $\text{قً}(١) = ٢\text{هـ}^٣ - ١$، فجد قيمة الثابت جـ.

٣) إذا كان $\int_{\text{أ}+١}^{\text{أ}^٣+٢} ٥\,\text{ءس} = ٤٠$ ، فجد قيمة الثابت أ

السؤال الثاني

١) إذا كان $\int_{١}^{\text{ب}^٢} \text{جا}^٢\text{س}\,\text{ءس} = \text{ل}$ ، $\int_{١}^{\text{ب}^٢} \text{جتا}^٢\text{س}\,\text{ءس} = \text{م}$ ، ل ، م عددين حقيقيين.

فأثبت أن $\int_{\text{ب}^٢}^{١} ٤\,\text{جتا}٢\text{س}\,\text{ءس} = ٤(\text{ل} - \text{م})$.

٢) إذا كان $\int_{٣}^{٥} \left(\frac{\text{ق(س)}}{٢} - ١\right)\text{ءس} = ٦$ ، $\int_{٨}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = ١٠$ ، فجد $\int_{٣}^{٨} (\text{ق(س)} + ٢\text{س})\,\text{ءس}$

٣) إذا كان $\text{م(س)} = \text{س هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}$ ، معكوس المشتقة للاقتران $\text{ق(س)} = \text{س هـ}^{\text{س}}$ ، وكان

$\int_{٠}^{٢} (٤\,\text{ق(س)} + \text{هـ}^٢)\,\text{ءس} + \int_{٤}^{\text{هـ}^٢} \frac{\text{أ}}{\text{هـ} - ٢}\,\text{ءس} = ٢٨$، فجد قيمة الثابت أ .

السؤال الثالث

جد التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{\text{س قا}^٢\text{س} - \text{س ظا}^٢\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{ءس}$

٢) $\int_{٥}^{٧} \frac{[\frac{١}{٤}\text{س} + ٣]}{\sqrt{٩\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٤}}\,\text{ءس}$

٣) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{٤\text{س} + ١} + \sqrt{٥\text{س} + ١}}\,\text{ءس}$

٤) $\int \text{جتا}^٢\text{س}\ \text{هـ}^{١ + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}}\,\text{ءس}$

السؤال الأول

يتكون هذا السؤال من (٥) فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربع إجابات واحدة فقط منها صحيحة. انقل إلى ورقة الإجابة رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها على الترتيب:

١) إذا كان $ص = هـ^{(س^٣ - ٢س)} + لو_{هـ}(س^٢ - ٢س + ٤)$، فإنَّ قيمة $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٠}$ تساوي:

أ) $-٢{,}٥$ ب) -٢ جـ) -٤ د) صفر

٢) $\int_{أ}^{٢ب} جا^٢س\ دس = ل$ ، $\int_{أ}^{٢ب} جتا^٢س\ دس = م$ ، إذا كان ل ، م عددين حقيقيين، فإنَّ قيمة $\int_{٢ب}^{أ} ٥جتا٢س$ تساوي:

أ) م − ل ب) ٥ل − ٥م جـ) ل − م د) ٥م − ٥ل

٣) إذا كان $\int_{١}^{هـ} س\ ق(س)\ دس = ٤$ ، فإنَّ قيمة $\int_{٠}^{٢} هـ^{س}\ ق(\sqrt{هـ^{س}})\ دس$ تساوي:

أ) ٤ ب) ٢ جـ) ٨ د) ١

٤) إذا كان $م \leq ل(س) \leq ك$ ، وكان $١٦ \leq \int_{-١}^{٣} (ل(س)+٥)\ دس \leq ٢٠$ ، فإنَّ قيم الثابتين م ، ك على الترتيب:

أ) ٧ ، ١١ ب) −١، صفر جـ) −٤ ، صفر د) ٤ ، ٥

السؤال الثاني

١) إذا كان $قً(س) = \frac{٦}{\sqrt{س}}$، ومنحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٤ ، ٠) ، وميل العمودي على المماس عند هذه النقطة يساوي $(\frac{-١}{٢})$. فجد قاعدة الاقتران ق.

٢) إذا كان $\int (قَ(س)+٢س)\ دس = س^٣ + ب\ س^٢ + ١$ ، وكان قَ(١) =٥، ق(٢)= ٧. فجد ق(−٢)

٣) إذا كان $\int_{٩}^{٢} (٢ق(س) + ٣)\ دس = -١٧$، $\int_{٢}^{٥} \frac{ق(س)}{٣}\ دس = -٢$، فجد $\int_{٣}^{٧} (٤ق(س + ٢)+٣)\ دس$

السؤال الثالث

١) إذا علمت أن $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جتا٢س ق(س) ءس = ١٠ ، $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جا٢س قَ (س) ءس = ٤ ، فجد ق $\left(\frac{\pi}{4}\right)$

٢) جد كلًّا من التكاملات الآتية :

١) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{جا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{4}\text{س}}$

٢) $\int \text{هـ}^{\text{٥س}} \sqrt{\text{هـ}^{\text{٢س}} + \text{٤هـ}^{\text{س}} + ٤} \ \text{ءس}$

٣) $\int \frac{\text{س}^{3}}{(\text{س} + ١)^{5}} \ \text{ءس}$

٤) $\int \frac{\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}}{\left(١ + \sqrt{\text{س}}\right)^{2}} \ \text{ءس}$

السؤال الرابع

١) إذا كان م(س) ،هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق وكان:

$\int_{-١}^{٣} (\text{هـ(س)} - \text{م(س)}) \ \text{ءس} = ١٢$ ، فجد $\int_{٠}^{٤} \text{٢س م (س) ءس} + \int_{٤}^{٠} \text{٢س هـ (س) ءس}$

٢) جد التكاملات الآتية :

١) $\int_{١}^{٤} \frac{|١ - \text{س}|}{\text{س}^{2} - \text{٥س} + ٦} \ \text{ءس}$

٢) $\int \text{جتا٢س} (\text{جاس} - \text{جتاس})^{8} \ \text{ءس}$

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل.

أداة التقويم: سلم التقدير (٤-١).

البند	مؤشرات الأداء	ممتاز	جيد جدًّا	جيد	متوسط	ضعيف
١	**معكوس المشتقة** - يذكر العلاقة بين الاقتران ومعكوس المشتقة له. - يميز بين الاقتران ومعكوس المشتقة له. - يجد معكوس المشتقة لاقترانات معطاة.					
٢	**التكامل غير المحدود** - يتعرف قواعد التكامل غير المحدود. - يحسب التكامل غير المحدود لاقترانات كثيرات الحدود. - يحسب التكامل غير المحدود لاقترانات نسبية. - يحسب التكامل غير المحدود لاقترانات مثلثية.					
٣	**التكامل المحدود** - يتعرف مفهوم التكامل المحدود على فترة. - يحسب التكامل المحدود لاقترانات معطاة. - يتعرف خصائص التكامل المحدود. - يحل أسئلة على خصائص التكامل المحدود.					
٤	**اقتران اللوغاريتم الطبيعي** - يجد مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي. - يوظف مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي في حساب التكامل لاقتران نسبي.					
٥	**مشتقة وتكامل الاقتران الأسي الطبيعي** - يجد مشتقة اقتران أسي طبيعي معطى. - يجد تكامل اقتران أسي طبيعي معطى.					

ممتاز: يبدي فهمًا عميقًا، ولا يحتاج إلى المساعدة. جيد جدًّا: يبدي فهمًا، وقد يحتاج إلى المساعدة.

جيد: يبدي فهمًا جزئيًا، ويحتاج إلى المساعدة. متوسط : يبدي فهمًا ضعيفًا، ويحتاج إلى المساعدة.

ضعيف: لا يبدي فهمًا، ويحتاج إلى المساعدة.

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل.

أداة التقويم: سلم التقدير (٤-٢).

البند	مؤشرات الأداء	٣	٢	١
١	**التكامل بالتعويض** - يتعرف طريقة التكامل بالتعويض - يستخدم طريقة التكامل بالتعويض في إيجاد بعض التكاملات.			
٢	**التكامل بالأجزاء** - يتعرف طريقة التكامل بالأجزاء - يستخدم طريقة التكامل بالأجزاء في إيجاد بعض التكاملات.			
٣	**التكامل بالكسور الجزئية** - يتعرف طريقة التكامل بالكسور الجزئية - يستخدم طريقة التكامل بالكسور الجزئية في إيجاد بعض التكاملات.			
٤	**المساحة** - يستخدم التكامل لإيجاد المساحة بين منحنى اقتران ومحور السينات في فترة معطاة. - يستخدم التكامل لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنيين. - يستخدم التكامل لإيجاد المساحة المحصورة بين ثلاثة منحنيات على الأكثر.			
٥	**المعادلات التفاضلية** - يتعرّف مفهوم المعادلة التفاضلية. - يحل معادلات تفاضلية. - يوظف المعادلات التفاضلية في حل مسائل حياتية			

(٣): إذا أنجز الطالب المهمة كاملة دون أخطاء ودون الحاجة إلى مساعدة .

(٢): إذا أنجز الطالب المهمة كاملة دون أخطاء بمساعدة أو أنجزها بخطأ واحد دون مساعدة.

(١): إذا أنجز جزءًا من المهمة أو أنجزها دون مساعدة وعنده أكثر من خطأ.

الوحدة الخامسة

٥

القطوع المخروطية وتطبيقاتها

تبرز أهمية القطوع المخروطية ودراستها من خلال تطبيقاتها المتعددة في العلوم المختلفة. فحركة الكواكب والنجوم وحركة إلكترونات الذرة في مساراتها حول النواة، تكون في مسارات إهليليجية.

ويتم استخدام القطوع المخروطية في المرايا والعدسات وبناء المراصد الفلكية والجسور المعلقة، والأطباق اللاقطة للإشارات اللاسلكية ، والأقمار الصناعية، وفي المقذوفات، وبناء الروبوتات، والمحاكاة، والصور المتحركة، ومعظم الصناعات الحديثة.

يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- كتابة معادلة محل هندسيّ تمثل:
  (مستقيم، ودائرة، وقطع مكافئ، وقطع ناقص، وقطع زائد).
- تعرُّف الصيغة القياسية لمعادلة (دائرة، وقطع مكافئ، وقطع ناقص، وقطع زائد).
- تمييز نوع القطع المخروطي إذا علمت معادلته.
- تمثيل القطع المخروطي بيانيًا إذا عُلمت معادلته.
- نمذجة مسائل حياتية على القطوع المخروطية وحلّها، مع تبرير الحل.

السؤال الأول:

١) جد بعد النقطة (١، − ٢) عن النقطة (٥، ١).

٢) جد بعد النقطة (١، ٤) عن كلٍّ من المستقيمات الآتية:

أ) س = ٣ ب) ص = ٦ جـ) ٤ص + ١ = ٣س

٣) جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها: (س − ٣)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٣٦

٤) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{ل}_{١}$ يوازي المستقيم $\overleftrightarrow{ل}_{٢}$، والمستقيم $\overleftrightarrow{ل}_{٢}$ يمر بالنقطتين (٢، ١)، (٠، ٤)، فجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{ل}_{١}$.

٥) جد معادلة المستقيم الذي يعامد المستقيم الذي معادلته: ص = ٢س − ٥ ويمر بالنقطة (٠، ٣).

٦) جد البعد بين المستقيمين المتوازيين $\overleftrightarrow{ل}_{١}$: ٣س + ٤ص = ٦، $\overleftrightarrow{ل}_{٢}$: ٣س + ٤ص = ٨

السؤال الثاني: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

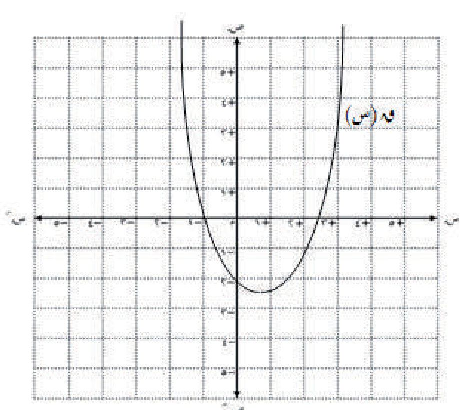
١) معادلة محور التماثل لمنحنى الإقتران ق (س) = س^{٢} + ٢س هي:

أ) س = −١ ب) س = ١ جـ) س = ٢ د) س = ٣

٢) قيمة جـ التي تجعل المقدار الجبري (٤س^{٢} + ١٢س + جـ) مربعًا كاملًا، هي:

أ) ٣ ب) ٩ جـ) ١٦ د) ٢٥

٣) مقطع منحنى الاقتران الممثل في الشكل المجاور من محور الصادات هو:



أ) ٣ ب) ٣

جـ) −١ د) −٢

إجابات التهيئة

السؤال الأول:

١) ٥ وحدات طول.

٢)

أ) ٢ وحدة طول.

ب) ٢ وحدة طول.

جـ) $\frac{١٤}{٥}$ وحدة طول.

٣) احداثيي المركز (٣، ١)، طول نصف القطر = ٦ وحدة طول.

٤) $\frac{-٣}{٢}$

٥) ص = $\frac{-١}{٢}$ س + ٣

٦) $\frac{٢}{٥}$ وحدة طول.

السؤال الثاني:

١) أ

٢) ب

٣) د

أولًا القطع المخروطي

عدد الحصص حصة واحدة

نتاجات التعلم

- يتعرّف القطع المخروطي هندسيًا.

التكامل الرأسي

- الاقترانات التربيعية وتمثيلها بيانيًا في الصف التاسع الأساسي، الدائرة في الصفين التاسع والعاشر الأساسي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٠٤-١٠٦).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://programs.edraak.org/learn/k12/math-g12-jo-vv1/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- القطع المخروطي، الدائرة، القطع الناقص، القطع المكافئ، القطع الزائد، محور التماثل.

التعلم القبلي

المخروط، المستوى، الخط المستقيم.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (فكر-انتقِ زميلًا-شارك، التعلم التعاوني الجماعي)، أخرى (العصف الذهني).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال:

- تسمى الدائرة والقطع الناقص والقطع المكافئ والقطع الزائد بالقطوع المخروطية؛ لأنها ناتجة عن قطع السطح المخروطي المكون من مخروط دائري قائم مزدوج بمستوٍ، فكيف يمكننا تنفيذ ذلك؟
- كيف يمكن تشكيل الدائرة والقطع الناقص والقطع المكافئ والقطع الزائد بقطع السطح المخروطي بمستوٍ؟

٢ - توضيح مبادئ العصف الذهني وهي:

- جماعية وتفاعلية ودقيقة
- قبول جميع الأفكار
- تأجيل نقد الأفكار
- سرعة طرح الأفكار

٣ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات (كل مجموعة ٦ طلاب) يُعَيَّن لكل مجموعة منسق ينظم الأفكار ويسجل المقترحات دون ذكر أسماء، ويكون ملتزمًا بمبادئ حلقة العصف الذهني سابقة الذكر.
٤ – عرض مجسم لمخروط دائري قائم ويطلب تأمل هذا المجسم.
٥ – توضيح كيفية قطع مجسم بمستوٍ، وذلك بمثال مادي مثلاً؛ بشكل أسطوانة من ورق ثم يقص الورقة بالمشرط ويوضح للطلبة أنَّ الشكل الناتج هو منحنى ناتج عن قطع الأسطوانة بمستوٍ.
٦ – توضيح كيفية تشكيل السطح المخروطي من ورقة.
٧ – سؤال الطلبة: تُرى لو قطعنا مخروط قائم مزدوج بمستوٍ، ما الأشكال الناتجة؟
٨ – الطلب من كل مجموعة تشكيل السطح المخروطي من ورقة.
٩ – الطلب من كل مجموعة البدء بالعصف الذهني لاستنتاج هذه الأشكال.
١٠– وضع تصور للحلول من خلال أداء الطلبة بأكبر عدد من الأفكار وتجميعها وإعادة بنائها (يتم العمل بشكل فردي ثم يقوم أفراد المجموعة بمناقشة المشكلة بشكل جماعي مستفيدين من الأفكار الفردية وصولاً إلى أفكار جماعية مشتركة).
١١– تبادل الأوراق بين المجموعات، تصنيف الأفكار، النقد و الاختيار.
١٢– رسم الأشكال الناتجة مع الطلبة من قبل منسق المجموعة على ورقة.
١٣– عرض نتائج كل مجموعة، ومن ثم مقارنة الطلبة النتائج التي توصلت لها المجموعات، مع الأشكال الموجودة في الكتاب ثم يبدأ المعلم مناقشة الطلبة فيها للوصول إلى الأشكال التي تسمى بالقطوع المخروطية (الدائرة – القطع الناقص – القطع المكافئ – القطع الزائد).
١٤– مناقشة فقرة (فكر وناقش).
١٥– ختم الدرس بعرض ملخص لمضمون الدرس.
١٦– تكليف الطلبة بحل التمارين بوصفها واجبًا بيتيًّا.

أخطاء شائعة

– قد يجد بعض الطلبة صعوبة في التمييز بينن المجسم والشكل ثنائي الابعاد.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– ضرورة تنبيه الطلبة إلى الفرق بين المجسم (الكرة، الأسطوانة، المخروط،...) والشكل الهندسي ثنائي الأبعاد (المربع، المستطيل، المثلث،...) من خلال طرح أمثلة واقعية على كليهما.

إثراء

– تحدث بماذا يختلف القطع الزائد عن بقية القطوع المخروطية.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٢–٦).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

فكر وناقش:

نقطة

التمارين والمسائل

١) قطع زائد، قطع ناقص، دائرة، قطع مكافئ.

٢)

أ) قطع زائد.

ب) دائرة.

جـ) قطع مكافئ.

د) قطع ناقص.

ثانيًا المحل الهندسي

عدد الحصص حصتان

نتاجات التعلم

- يتعرّف المحل الهندسي.
- يحدد معادلة تمثل محلًّا هندسيًّا معطى متضمنًا: المستقيمات، الدائرة، القطع المكافئ، القطع الناقص، القطع الزائد.

التكامل الرأسي

- الهندسة الإحداثية في الصفين التاسع والعاشر الأساسي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٠٧-١١١).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://programs.edraak.org/learn/k12/math-g12-jo-vv1/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- المحل الهندسي.
- معادلة المحل الهندسي.

التعلم القبلي

البعد بين نقطين، البعد بين نقطة ومستقيم، معادلة محور السينات، معادلة محور الصادات، العمليات الجبرية على المقادير الجبرية.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم من خلال النشاط (المناقشة ضمن فرق، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي)، حل المشكلات والاستقصاء.

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال طرح السؤال التالي: ما المقصود بالمحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى الإحداثي؟

٢ - تقسيم الطلبة إلى مجموعات (كل مجموعة ٦ طلاب)، وتوجيه كل مجموعة تنفيذ النشاط التالي: "خذ خيطًا وثبت أحد طرفيه في نقطة في المستوى، واربط بطرفه الآخر قلمًا، ثم حرك القلم بصورة مستمرة باتجاه واحد دون رفعه عن المستوى، مع الخيط مشدودًا حتى يعود رأس القلم إلى نقطة البداية، ولاحظ الشكل الناتج".

٣ – متابعة عمل المجموعات أثناء تنفيذ النشاط وإرشادهم؛ للتوصل إلى وصف المحل الهندسي ومعادلته، ثم عرض النتائج التي توصل إليها الطلبة، ومناقشة استنتاجاتهم، وكتابة الاستنتاجات النهائية على اللوح.

٤ – حل مثال (١) ومناقشته وتنويه الطلبة إلى قانون البعد بين نقطتين.

٥ – تكليف الطلبة بحل تدريب (١) في دفاترهم، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة لهم.

٦ – حل مثال (٢) ومناقشته وتنويه الطلبة إلى قانون البعد بين نقطة ومستقيم معلوم.

٧ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٢) في دفاترهم، ثم مناقشة حلولهم على اللوح.

٨ – مناقشة فقرة (فكر وناقش)، وتذكير الطلبة بأن بعد نقطة عن مستقيم يقاس بطول العمود النازل من النقطة على المستقيم.

٩ – حل مثال (٣)، ومناقشته من أجل تعزيز وصف المحل الهندسي ومعادلته.

١٠– مناقشة فقرة (فكر وناقش)، مؤكدًا ضرورة بقاء الخيط مشدودًا.

١١– تكليف الطلبة بحل تدريب (٣)، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة، ثم مناقشة حلولهم على اللوح، للتحقق من أنهم أتقنوا مفهوم المحل الهندسي ومعادلته.

١٢– ختم الدرس بسؤال: ماذا تعلمتم في هذا الدرس؟

١٣– تكليف الطلبة بحل التمارين بوصفها واجبًا بيتيًا.

أخطاء شائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في استخدام قانون البعد بين نقطتين، أو قانون البعد بين نقطة ومستقيم.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن (س، ص) التي تبقى على بعد ثابت من النقطة (٢، ٠) قدره ثلاث وحدات.

إثراء

– جد المحل الهندسي للنقطة ن (س، ص) التي تتحرك في المستوى؛ بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن النقطتين الثابتتين ب$_١$ (٠، ٥)، ب$_٢$ (٠، −٥) يساوي دائمًا ٨ وحدات.

– أ ب جـ مثلث محيطه ٣٠ سم، فيه إحداثيات الرأسين أ، ب هما أ (٠، ٥)، ب (٠، − ٥)، والرأس جـ يتحرك في المستوى، جد المحل الهندسي الناتج عن تحرك الرأس جـ ومعادلته.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل، مراجعة الذات (التأمل الذاتي).

أداة التقويم: سلم التقدير (٥–١)، سلم التقدير (٥–٢)، قائمة الرصد رقم (٢–٦).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

فكر وناقش (١):

لكي نضمن أن تبقى المسافة بين النقطة المتحركة (رأس القلم) والمستقيم ثابتة.

فكر وناقش (٢):

حركة القلم بحيث يبقى على بعد ثابت عن كل من المستقيم والنقطة الثابتة.

تدريب (١):

$$(\text{س} - ٢)^{٢} + (\text{ص} + ٤)^{٢} = ١$$

تدريب (٢):

$$٢\text{س} + \text{ص} = -٥$$

تدريب (٣):

$$٨\,\text{س}^{٢} + ٩\,\text{ص}^{٢} - ٣٦\,\text{س} + ١٨\,\text{ص} + ٤٥ = ٠$$

التمارين والمسائل

١) $(\text{س} + ٢)^{٢} + (\text{ص} - ٦)^{٢} = ٤٩$

٢) $\text{س} = -٣$

٣) $\text{س}^{٢} - ٣\,\text{ص}^{٢} - ١٠\,\text{س} + ٢٦\,\text{ص} - ٣٠ = ٠$

أولاً الدائرة

عدد الحصص ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يتعرّف الدائرة كقطع مخروطي.
- يكتب معادلة الدائرة إذا علمت شروط كافية.
- يميز الدائرة إذا علمت معادلتها بالصورة العامة.
- يمثل معادلة الدائرة بيانيًّا.

التكامل الرأسي

- الدائرة ومعادلتها في الصف التاسع الأساسي.

التكامل الأفقي

- ورد مفهوم المرايا في الصف العاشر الأساسي في مبحث الفيزياء.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١١٢-١١٩).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://programs.edraak.org/learn/
/k12/math-g12-jo-vv1

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- الدائرة، البعد بين نقطتين.

التعلم القبلي

البعد بين نقطين، إحداثيا منتصف القطعة المستقيمة، المماس.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (المناقشة)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، أخرى (العصف الذهني).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة في مفهوم المحل الهندسي، ثم طرح السؤال الآتي: ما المقصود بالمحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى الإحداثي على بعد ثابت من نقطة ثابتة ؟

٢ – مناقشة الطلبة بمقدمة الدرس في كتاب الطالب، ثم يبين المعلم لهم أنَّ المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى الإحداثي على بعد ثابت من نقطة ثابتة هو دائرة مركزها النقطة الثابتة، وطول نصف قطرها البعد الثابت.

٣ – تكليف الطلبة بإيجاد معادلة المحل الهندسي للنقطة (س، ص) التي تبعد بعدًا ثابتًا عن النقطة (د، هـ) قدره (ر) وحدة طول، وذلك من أجل التوصل إلى الصورة القياسية لمعادلة الدائرة.

٤ – حل المثالين (١)، (٢) ومناقشتهما موجهًا الطلبة إلى أنه يوجد صورة أخرى لمعادلة الدائرة تسمى الصورة العامة.

٥ – تكليف الطلبة بحل تدريب (١) في دفاترهم، باستخدام استراتيجية (فكر–انتقِ زميلًا–شارك).

٦ – حل مثال (٣) ومناقشته مع الإشارة إلى أنَّ نصف القطر عمودي على المماس عند نقطة التماس.

٧ – تكليف الطلبة بحل التدريبين (٢، ٣) في دفاترهم.

٨ – تكليف الطلبة بإيجاد معادلة المحل الهندسي للنقطة (س، ص) التي تبعد بعدًا ثابتًا عن النقطة (د، هـ) قدره (ر) وحدة طول؛ وذلك من أجل التوصل إلى الصورة العامة لمعادلة الدائرة.

٩ – حل مثال (٤) ومناقشته، مشيرًا إلى أنّه يمكن التوصل إلى النتيجة نفسها عند كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

١٠– مناقشة فقرة (فكر وناقش) مع الطلبة، والاستماع إلى إجاباتهم وتعزيزها.

١١– تكليف الطلبة بحل تدريب (٤) في دفاترهم، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم.

١٢– حل مثال (٥) ومناقشته، موجهًا الطلبة إلى ضرورة حل المثال بطريقة أخرى.

١٣– تكليف الطلبة بحل تدريب (٥) في دفاترهم، ثم مناقشة حلولهم على اللوح.

١٤– حل مثال (٦) ومناقشته، مراعيًا مستويات الطلبة المختلفة في حل أنظمة المعادلات الخطية، وموجهًا إياهم إلى أنه يمكن استخدام الصورة العامة لكتابة معادلة الدائرة إذا عُلمت ثلاث نقاط تمر بها الدائرة أو نقطتان ومعلومة عن المركز.

١٥– تكليف الطلبة بحل التدريبين (٥، ٦)، ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة.

١٦– ختم الدرس بسؤال الطلبة: ماذا تعلمتم في هذا الدرس؟

١٧– تكليف الطلبة بحل التمارين بوصفها واجبًا بيتيًّا، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

أخطاء شائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في حساب بعد نقطة عن مستقيم، وذلك بعدم كتابة معادلة الخط المستقيم بالصورة القياسية.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد بُعد النقطة (١، ٣) عن المستقيم: ص + ١ = ٣س .

إثراء

١) أحدث سقوط حجر في بركة ماء تموّجات على شكل دوائر متسعة متحدة في المركز. افترض أنَّ أنصاف أقطار هذه الدوائر تزداد بمعدل ٣ سم/ث.

أ) اكتب معادلة الدائرة المتشكلة بعد ١٠ ثوانٍ من سقوط الحجر في البركة، مفترضًا أن نقطة سقوط الحجر هي نقطة الأصل.

ب) معادلة إحدى الدوائر الموجية هي $س^2 + ص^2 = ٢٢٥$، بعد كم ثانية من سقوط الحجر في البركة تكونت هذه الدائرة؟

٢) تتحرك النقطة ن (س، ص) في المستوى بحيث س = ٥ + جا هـ، ص = ٢ + ٣جتا هـ حيث هـ زاوية متغيرة، جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س، ص) وبين نوعه.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل، مراجعة الذات (التأمل الذاتي)، الورقة والقلم.

أداة التقويم: سلم التقدير (٥–١)، سلم التقدير (٥–٢)، اختبار قصير.

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

فكر وناقش

١) عن طريق إكمال المربع... لإكمال المربع في ص نضيف $(\frac{١}{٢}$ معامل ص$)^2$ ونطرحه في المعادلة.

$س^2 + (ص + ٤)^2 = ٢٥$

المركز (٠، –٤)، طول نصف القطر ٥ وحدات.

٢) لأنَّه يمثل مربع نصف القطر.

تدريب (١)

١) $(س - ٦)^2 + (ص - ١)^2 = ٥$

٢) المركز (– ١، ٤)، طول نصف القطر $\sqrt{٣٠}$ وحدة طول

تدريب (٢)

$(س - ٤)^2 + (ص + ١)^2 = ١$

تدريب (٣)

١) $(س - ٤)^2 + (ص + ١)^2 = ١$

٢) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩ (الدائرة في الربع الأول)

(س + ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩ (الدائرة في الربع الثاني)

(س + ٣)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٩ (الدائرة في الربع الثالث)

(س − ٣)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٩ (الدائرة في الربع الرابع)

تدريب (٤)

١) المركز (١، −٣)، طول نصف القطر ٤

٢) المركز (− ٢، ٤)، طول نصف القطر ٢

تدريب (٥)

س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س − ٢ ص = ٠

المركز (− ٢، ١)، طول نصف القطر $\sqrt{٥}$

تدريب (٦)

س^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٥٠

التمارين والمسائل

١)

أ) س^{٢} + ص^{٢} = ١٦

ب) (س + ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٤٩

جـ) (س − ٣)^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = ٤٩

د) (س − ٥)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٥

هـ) (س − ٥)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٥

و) (س − $\frac{٧}{٢}$)^{٢} + ص^{٢} = $\frac{٦٥}{٤}$

ز) (س + ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ١٠

ح) (س − ٧)^{٢} + (ص − ١٠)^{٢} = ١٠٠

٢)

أ) المركز (٠، ٠)، طول نصف القطر ١٢

ب) المركز (−١١، −٤)، طول نصف القطر $\sqrt{١٣}$

جـ) المركز (٠، ٧)، طول نصف القطر ٩

د) المركز (٤، ٣)، طول نصف القطر $\sqrt{٣٤}$

هـ) المركز (٠، −١)، طول نصف القطر $\sqrt{١٠}$

و) المركز (١، −٥)، طول نصف القطر ٥

ز) المركز (−٤، ٠)، طول نصف القطر ٤

٣) (س − ١)^{٢} + (ص − ٦)^{٢} = ٣٦

٤) (س + ٢)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = $\frac{٣٦}{١٠}$

٥) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٤، دائرة

٦) جـ > ٢٠

٧) (س − ١٠)^{٢} + (ص − ٨)^{٢} = ١٠٠

٨) (س − ٤ + ٢ $\sqrt{٢}$)^{٢} + (ص − ٤ + ٢ $\sqrt{٢}$)^{٢} = (٤ − ٢ $\sqrt{٢}$)^{٢}

ثانيًا القطع المكافئ

عدد الحصص: ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يتعرّف القطع المكافئ بوصفه قطعًا مخروطيًّا.
- يكتب معادلة القطع المكافئ إذا علمت شروط كافية.
- يمثل معادلة القطع المكافئ بيانيًّا.
- يحدد عناصر قطع مكافئ إذا علمت معادلته.
- يميز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة.

التكامل الرأسي

- الاقترانات التربيعية وتمثيلها بيانيًّا في الصف التاسع الأساسي.
- الهندسة الإحداثية في الصفين التاسع والعاشر الأساسي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٢٠–١٣٢).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://programs.edraak.org/learn//k12/math-g12-jo-vv1

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- القطع المكافئ، الدليل، البؤرة، محور التماثل.

التعلم القبلي

البعد بين نقطين، البعد بين نقطة ومستقيم، العمليات على المقادير الجبرية، الاقتران التربيعي.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر–انتقِ زميلًا–شارك)، حل المشكلات والاستقصاء، أخرى (العصف الذهني).

إجراءات التنفيذ

١ – التمهيد للدرس من خلال طرح السؤال الآتي:
- جد بعد النقطة (– ١، ٣) عن المستقيم ص = ٦

٢ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات (كل مجموعة ٦ طلاب)، وتكليف كل مجموعة بتنفيذ ورقة العمل (٥ – ١) التي تهدف إلى استنتاج تعريف القطع المكافئ وخواصه وعناصره.

٣ – عرض نتائج الطلبة، ومناقشة استنتاجاتهم، وكتابة الاستنتاجات النهائية على اللوح مقدمًا مجموعة كافية من الأمثلة لدعم استنتاجات الطلبة التي توصلوا إليها.

٤ – رسم محورين متعامدين $\overline{\text{م س}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ في مستوى القطع المكافئ الذي رأسه (د، هـ)، ومحور منطبق على م س وبؤرته النقطة ب (د ± جـ، هـ)، وقطع آخر محوره منطبق على $\overline{\text{م ص}}$ وبؤرته ب (د، هـ ± جـ) وتكليف الطلبة بالإجابة على الأسئلة الآتية:

- اكتب معادلة الدليل ومثّله في كل حالة من حالات المحور والبؤرة.
- افرض أنَّ النقطة ن (س، ص) تقع على منحنى القطع، واستعمال تعريف القطع المكافئ في تعيين العلاقة بين (س، ص).

٥ – حل مثال (٣) ومناقشته، وتكليفهم بحل تدريب (٣) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة.

٦ – تكليف الطلبة بفك حدود معادلة القطع المكافئ في التدريب السابق، وذلك من أجل التوصل إلى أنه يمكن كتابة معادلة القطع المكافئ على إحدى الصور الآتية:

ص = أس^{٢} + ب س + جـ (أ لاتساوي صفرًا) إذا كان محور القطع يوازي محور الصادات.

س = أص^{٢} + ب ص + جـ (أ لاتساوي صفرًا) إذا كان محور القطع يوازي محور السينات.

٧ – حل مثال (٤)، ومناقشته وتكليفهم بحل تدريب (٤)، مذكرًا الطلبة بطريقة إكمال المربع.

٨ – حل مثال (٥)، ومناقشته وتكليفهم بحل تدريب (٥)، مذكرًا الطلبة بوجود اتجاهين موجبين للأعلى ولليمين واتجاهين سالبين للأسفل ولليسار.

٩ – مناقشة فقرة (فكر وناقش).

١٠ – ختم الدرس بعرض ملخص لمضمون الدرس (يمكنك الاستفادة من ملخص الوحدة ص ٢٥٠)، أو تعبئة نموذج وصف سير التعلم.

١١ – إعطاء واجب بيتي من التمارين والمسائل، ومتابعة حلول الطلبة لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

أخطاء شائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في اختيار الصورة القياسية؛ عند إيجاد معادلة القطع المكافئ أو عند تحديد عناصره. عالج ذلك بالتأكيد على رسم تقريبي لمعطيات المسألة.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– حدد نوع القطع المخروطي الذي معادلته: س^{٢} – ٨ ص – ٦ س + ١ = ٠ ثم استنتج عناصره مع الرسم.

إثراء

- تستعمل مرايا على شكل قطوع مكافئة، لتوليد الكهرباء من الطاقة الشمسية؛ إذ تعمل المرايا على تسخين زيت يمر خلال أنابيب تمر عند بؤرة هذا القطع.
- يتكون مجمع شمسي من مرآة على شكل قطع مكافئ؛ تعمل على تركيز أشعة الشمس على مستقبل خطي يمر في بؤرة القطع، ويمكن تمثيل المقطع العرضي للمرآة بالمعادلة س^٢ = ٣,٠٤ ص حيث س، ص بالأمتار. أين يقع المستقبل الخطي لهذا المقطع.
- تتحرك نقطة و (س، ص) في المستوى الإحداثي بحيث يتحدد موقعها في اللحظة ن (ن ≤ ١)، بالمعادلتين: س = جتا ن − جا ن، ص = جا٢ن، جد معادلة مسار النقطة و، ثم بين نوع هذا المسار.
- يبحر قارب في الماء تاركًا وراءه أثرًا على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب، ويمسك رجل يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب. ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج عن أثر القارب بالمعادلة: ص^٢ − ١٨٠س + ١٠ ص + ٢٦٥ = ٠، حيث س، ص بالأقدام.
  - اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية.
  - ما طول الحبل الذي يمسك به الرجل؟

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم، الملاحظة، التواصل، مراجعة الذات (التأمل الذاتي).

أداة التقويم: اختبار قصير، سلم التقدير (٥−١)، سلم التقدير (٥−٢)، سجل وصف سير التعلم (١−٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

فكر وناقش (١) الرأس، البعد البؤري.

فكر وناقش (٢) البعد بين النقطتين ن، ب يساوي البعد بين النقطة والدليل.

فكر وناقش (٣) إعادة ترتيب المعادلات بالصورة القياسية.

تدريب (١)

١) (ص − ١)^٢ = −١٦(س + ١)   ٢) (ص + ٣)^٢ = ٤(س − ٢)

تدريب (٢)

١) (س − ١)^٢ = − ٢٠ (ص − ١)   ٢) س^٢ = ٢٠ (ص − ٣)   ٣) ص^٢ = ١٢(س + ٢)

تدريب (٣):

إحداثيا الرأس (١، −٣)، البؤرة (١، − $\frac{١}{٤}$ ٣)، معادلة المحور س = ١، معادلة الدليل ص = − $\frac{٣}{٤}$٢

تدريب (٤):

إحداثيا الرأس (٠ ، ١)، البؤرة (٠ ، ٢)، معادلة المحور س = ٠، معادلة الدليل ص = ٠

تدريب (٥):

(س + ٢)^{٢} = $\frac{٥}{٣}$ (ص + $\frac{١٢}{٥}$)

التمارين والمسائل

١)

أ) ص^{٢} = −١٦(س + ١)

ب) ص^{٢} = ١٦(س + ١)

جـ) (س − ٢)^{٢} = ٢٠ (ص − ٣)

د) (س − ٢)^{٢} = −٢٠ (ص − ٣)

هـ) (س − ١)^{٢} = ٦(ص + $\frac{٣}{٢}$)

و) ص^{٢} = −١٠(س − $\frac{٥}{٢}$)

ز) (ص + ٥)^{٢} = $\frac{٣}{٢}$ (س − $\frac{١٦٢٥}{١٠٠٠}$)

ح) (ص + ٣)^{٢} = ١٢(س − ٢)

ط) (س + ١)^{٢} = −١٢(ص − ٢)

٢)

فرع	إحداثيا الرأس	إحداثيا البؤرة	معادلة الدليل	معادلة المحور
أ	(−١ ،٣)	(٢ ،٣)	س = −٤	ص = ٣
ب	(−٥ ،٢)	(−٥ ،$\frac{٩}{٤}$)	ص = $\frac{٧}{٤}$	س = −٥
جـ	(٠ ،٠)	($\frac{١}{٤}$ ،٠)	س = −$\frac{١}{٤}$	ص = ٠
د	(−٢ ،٣)	(٠ ،٣)	س = −٤	ص = ٣
هـ	(٠ ،−٢)	(٠ ،−$\frac{٤}{٣}$)	ص = −$\frac{٨}{٣}$	س = ٠
و	(−$\frac{٧٥}{١٦}$ ،$\frac{٣}{٢}$)	($\frac{٢٠٩}{٤٨}$ ،$\frac{٣}{٢}$)	س = $\frac{-٢٤١}{٤٨}$	ص = $\frac{٣}{٢}$

٣) (س − ٢)^{٢} = −١٦ (ص − ١)

٤) (س − ٢)^{٢} = ٤(ص + ٣)

٥) (س − ١)^{٢} = ١٦ (ص + ٢)

٦) س = $\frac{١}{٤}$ ص^{٢} + ص + ٢

٧) $\frac{٤٤}{٣}$ وحدة طول

٨) س^{٢} = −٤(ص − ٩)

ثالثًا القطع الناقص

عدد الحصص ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يتعرّف القطع الناقص بوصفه قطعًا مخروطيًّا.
- يكتب معادلة القطع الناقص إذا علمت شروط كافية.
- يمثل معادلة القطع الناقص بيانيًّا.
- يميز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة.
- يتعرف الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

التكامل الرأسي

- اختبار الخط الرأسي في الصف الثامن الأساسي.
- الهندسة الإحداثية في الصفين التاسع والعاشر الأساسي.

التكامل الأفقي

- مدارات الإلكترونات في الكيمياء.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٣٣-١٤٤).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://programs.edraak.org/learn/k12/math-g12-jo-vv1/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- القطع الناقص، مركز القطع، رأسا القطع، المحور الأكبر، المحور الأصغر، الاختلاف المركزي ورمزه هـ.

التعلم القبلي

البعد بين نقطتين.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (فكر-انتقِ زميلًا-شارك، التعلم التعاوني الجماعي)، حل المشكلات والاستقصاء، أخرى (العصف الذهني).

إجراءات التنفيذ

١ – التمهيد من خلال تقسيم الطلبة إلى مجموعات (كل مجموعة ٦ طلاب)، وتكليف كل مجموعة بتنفيذ ورقة العمل (٥– ٢) التي تهدف إلى استنتاج تعريف القطع الناقص وخواصه وعناصره.

٢ – عرض نتائج الطلبة، ومناقشة استنتاجاتهم، وكتابة الاستنتاجات النهائية على اللوح.

٣ – رسم محورين متعامدين $\overline{\text{م س}}$، $\overline{\text{م ص}}$ في مستوى القطع الناقص الذي مركزه (د، هـ)، ومحوره الأكبر موازيًا لمحور السينات وبؤرتاه النقطتان (د ± جـ ، هـ)، وقطع آخر محوره الأكبر (البؤري) موازيًا لمحور الصادات وبؤرتاه النقطتان (د، هـ ± جـ)، ويطلب من الطلبة الإجابة على السؤال الآتي:

- افرض أنَّ النقطة ن (س، ص) تقع على منحنى القطع، كيف يمكن استخدام تعريف القطع الناقص في تعيين العلاقة بين (س، ص).

٤ – متابعة حلول الطلبة للتوصل إلى الصور القياسية لمعادلة القطع الناقص.

٥ – حل الأمثلة (١، ٢، ٣، ٤)، ومناقشتها مع الطلبة، وتكليفهم بحل التدريبات (١، ٢، ٣، ٤) ضمن مجموعات، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم، ومنبهًا الطلبة إلى ما يأتي:

- لكتابة معادلة القطع الناقص؛ يجب معرفة إحداثيات المركز وقيم أ، ب.
- أي نقطة تقع على منحنى القطع الناقص يكون مجموع بعديها عن بؤرتي القطع يساوي ٢أ.
- أقرب نقطة على القطع لبؤرة القطع هي الرأس المجاور، وتكون أقصر مسافة تساوي أ– جـ.
- أبعد نقطة على القطع عن بؤرة القطع هي الرأس البعيد، وتكون أطول مسافة تساوي أ + جـ .
- ما يحدد نوع القطع من حيث كونه سينيًّا أم صاديًّا هو العدد الأكبر، فإذا كان العدد الأكبر أسفل س يكون القطع سينيًّا وإذا كان العدد الأكبر أسفل ص يكون القطع صاديًّا.

٦ – تكليف الطلبة بفك حدود معادلة القطع الناقص في التدريب السابق، وذلك من أجل التوصل إلى أنه يمكن كتابة معادلة القطع الناقص على الصور الآتية:

- أ س^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س + ءص + هـ = ٠ حيث أ × ب > ٠، أ ≠ ب.

٧ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٥) في دفاترهم، ثم مناقشة حلولهم على اللوح.

٨ – مناقشة فقرة (فكر وناقش)، وفقرة تحدث.

٩ – حل مثال (٥)، ومناقشته مع الطلبة وتكليفهم بحل تدريب (٦) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة.

١٠– مناقشة فقرة (فكر وناقش) باستخدام استراتيجية (فكر–انتقِ زميلًا–شارك).

١١– حل مثال (٦)، ومناقشته مستفيدًا من قانون مساحة القطع الناقص.

١٢– ختم الدرس بعرض ملخص لمضمون الدرس (يمكنك الاستفادة من (ملخص الوحدة).

١٣– تكليف الطلبة بحل التمارين بوصفها واجبًا بيتيًّا، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة لهم

أخطاء شائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في اختيار الصورة القياسية عند إيجاد معادلة القطع الناقص أو عند تحديد عناصره. عالج ذلك بتأكيد الرسم التقريبي لمعطيات المسألة.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) عين عناصر القطع الناقص الذي معادلته $\frac{\text{س}^{٢}}{٢٥} + \frac{\text{ص}^{٢}}{١٦} = ١$

٢) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٠، ٠)، وبؤرتاه (٣، ٠)، (–٣، ٠)، وطول محوره الأكبر ١٠ وحدات.

٣) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (–٣، ٠)، وطول محوره الأكبر (١٠) وحدات، وطول محوره الأصغر (١٠) وحدات.

إثراء

١) الاختلاف المركزي لمدار كوكب أورانوس هو٠,٤٧ وطول المحور الأكبر لمداره حول الشمس ٣٨,٣٦ وحدة فلكية. فما طول المحور الأصغر لهذا المدار ؟

٢) مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي $\frac{٣}{٤}$ وطول محوره الأكبر ١٠٠٠ قدم.

أ) ما أقصى عرض لمضمار السباق؟

ب) اكتب معادلة القطع الناقص؛ إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

٣) تتحرك النقطة و (س، ص) بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين س = أ(جتا ن – جا ن)، ص = ب (جتان + جان) بيِّن أن النقطة و (س، ص)؛ تتحرك على منحنى قطع ناقص ثم عين عناصره.

٤) اكتب معادلة القطع الناقص الذي نهايتا المحور الأكبر فيه هما (–١، – ٢)، (٥، – ٢) ونهايتا المحور الأصغر هما (٢، –٤)، (٢، ٠).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل، مراجعة الذات (التأمل).

أداة التقويم: قائمة الرصد (٢–٦)، سلم التقدير (٥–١)، سلم التقدير (٥–٢)، سجل وصف سير التعلم (١–٤).

فكر وناقش (١)

١) تصبح معادلة دائرة.

٢) أ = ٠ قطع مكافئ سيني، ب = ٠ قطع مكافئ صادي، أ = ب = ٠ معادلة خط مستقيم.

فكر وناقش (٢) أكمل المربع...

فكر وناقش (٣) لا تختلف

تدريب (١): $\frac{س^{٢}}{١٣} + \frac{ص^{٢}}{٤} = ١$

تدريب (٢): $\frac{(ص - ٦)^{٢}}{٣٦} + \frac{(س + ٢)^{٢}}{٢٧} = ١$

تدريب (٣): المركز (٠، ٠)، البؤرتان (٤، ٠)، (−٤، ٠)، الرأسان (٥، ٠)، (− ٥، ٠)، طول المحور الأكبر = ١٠ وحدات، طول المحور الأصغر = ٦ وحدات، البعدي الوؤري = ٨ وحدات، طرفي المحور الأصغر (٠، ٣)، (٠، −٣).

تدريب (٤): $\frac{س^{٢}}{١٦} + \frac{(ص - ١)^{٢}}{١٢} = ١$

تدريب (٥): $\frac{(س - ٣)^{٢}}{٢٥} + \frac{(ص - ٥)^{٢}}{١٦} = ١$

تدريب (٦)

١) (− ٢، ٠)

٢) (− ٢، ٨)، (− ٢، − ٨)

٣) (− ٢، ٤)، (− ٢، −٤)

٤) $\frac{١}{٢}$

التمارين والمسائل

١)

أ) $\frac{(س - ١)^{٢}}{٩} + \frac{(ص - ١)^{٢}}{٤} = ١$

ب) $\frac{ص^{٢}}{٢٥} + \frac{س^{٢}}{٢١} = ١$

جـ) $\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$

د) $\frac{(س)^{٢}}{١٣} + \frac{٤ص^{٢}}{٣٩} = ١$

هـ) $\frac{(س - ٢)^{٢}}{١٠٠} + \frac{(ص - ٣)^{٢}}{٦٤} = ١$

و) $\frac{(س + ٣)^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$

ز) $\frac{٥ص^{٢}}{٨١} + \frac{س^{٢}}{٩} = ١$

٢)

فرع	المركز	البؤرتان	الرأسان	المحور الأكبر	المحور الأصغر
أ	(٠ ، ٠)	$(\sqrt{١١٩}،٠)$ $(-\sqrt{١١٩}،٠)$	(١٢، ٠) (−١٢، ٠)	منطبق على محور السينات ومعادلته ص= ٠، وطوله ٢٤	منطبق على محور الصادات ومعادلته س = ٠، وطوله ١٠
ب	(٤، −١)	$(٤، -١+\sqrt{٥٦})$ $(٤، -١-\sqrt{٥٦})$	(٤ ، ٨) (٤، − ١٠)	يُوازي محور الصادات ومعادلته س = ٤، وطوله ١٨	يُوازي محور السينات ومعادلته ص = −١، وطوله ١٠
جـ	(٠،٠)	$(٥\sqrt{٣} ، ٠)$ $(-٥\sqrt{٣} ، ٠)$	(١٠، ٠) (−١٠، ٠)	منطبق على محور السينات ومعادلته ص = ٠، وطوله ٢٠	منطبق على محور الصادات ومعادلته س = ٠، وطوله ١٠
د	(٣، −١)	$(٣+\sqrt{٢} ، -١)$ $(٣-\sqrt{٢} ، -١)$	(٥، −١) (١، −١)	يُوازي محور السينات ومعادلته ص = −١، وطوله ٤	يُوازي محور الصادات ومعادلته س = ٣، وطوله $٢\sqrt{٢}$
هـ	(٣، −٢)	$(٣+\sqrt{٤٨}، -٢)$ $(٣-\sqrt{٤٨}، -٢)$	(١١، −٢) (−٥، −٢)	يُوازي محور السينات ومعادلته ص= −٢، وطوله ١٦	يُوازي محور الصادات ومعادلته س = ٣، وطوله ٨
و	(٠ ، ٠)	$(٠، \frac{١}{٣})$ $(٠، -\frac{١}{٣})$	$(٠، \frac{٢}{٣})$ $(٠، -\frac{٢}{٣})$	منطبق على محور الصادات ومعادلته س = ٠، وطوله $\frac{٤}{٣}$	منطبق على محور السينات ومعادلته ص = ٠، وطوله $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

٣) $\frac{(\text{س}+١)^٢}{٢٥} + \frac{(\text{ص}-٢)^٢}{٩} = ١$

٤) $\frac{(\text{س}-١)^٢}{٢٩} + \frac{(\text{ص}-١)^٢}{٢٥} = ١$

٥) $\frac{\text{س}^٢}{٦٤} + \frac{\text{ص}^٢}{٤٨} = ١$

٦) $\frac{(\text{س}-٥)^٢}{٩} + \frac{(\text{ص}-٢)^٢}{٤} = ١$

٧) $\frac{س^٢}{٦٤} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

٨) نق = ٦

٩)

أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ب) $\frac{س^٢}{٤٠٠} + \frac{ص^٢}{١٠٠} = ١$

١٠)

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$

$ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢$

$= أ^٢ (١ - هـ^٢)$

١١)

٢أ = م + ن، ٢جـ = م − ن

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{م - ن}{م + ن}$

رابعًا	القطع الزائد	عدد الحصص	ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يتعرّف القطع الزائد بوصفه قطعًا مخروطيًّا.
- يكتب معادلة القطع الزائد إذا علمت شروط كافية.
- يمثل معادلة القطع الزائد بيانيًّا.
- يميز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة.
- يتعرف الاختلاف المركزي للقطع الزائد.

التكامل الرأسي

- الهندسة الإحداثية في الصفين التاسع والعاشر الأساسي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٤٦–١٥٧).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://programs.edraak.org/learn/k12/math-g12-jo-vv1/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- القطع الزائد، مركز القطع، رأسا القطع، المحور القاطع، المحور المرافق، الاختلاف المركزي ورمزه هـ.

التعلم القبلي

البعد بين نقطتين.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي)، حل المشكلات والاستقصاء، أخرى، (العصف الذهني).

إجراءات التنفيذ

١ – التمهيد من خلال تقسيم الطلبة إلى مجموعات (كل مجموعة ٦ طلاب)، وتكليف كل مجموعة بتنفيذ ورقة العمل (٥– ٣) التي تهدف إلى استنتاج تعريف القطع الزائد وخواصه وعناصره.

٢ – عرض نتائج الطلبة، ومناقشة استنتاجاتهم، ثم كتابة الاستنتاجات النهائية على اللوح مقدمًا مجموعة كافية من الأمثلة لدعم استنتاجات الطلبة التي توصلوا إليها.

٣ – رسم محورين متعامدين $\overline{م س}$، $\overline{م ص}$ في مستوى القطع الزائد الذي مركزه (د، هـ)، ومحوره القاطع موازيًا لمحور السينات وبؤرتاه النقطة (د ± جـ، هـ)، وقطع آخر محوره القاطع موازيًا لمحور الصادات وبؤرتاه (د، هـ ± جـ)، ويطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأسئلة الآتية:
- افرض أن النقطة ن (س، ص) تقع على منحنى القطع، استعمل تعريف القطع الزائد في تعيين العلاقة بين س، ص، ومتابعة حلول الطلبة للتوصل إلى الصور القياسية لمعادلة القطع الزائد.

٤ – حل الأمثلة (١، ٢، ٣، ٤) ومناقشتها مع الطلبة، وتكليفهم بحل التدريبات (١، ٢، ٣، ٤) ضمن مجموعات، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم، ومنبهًا الطلبة إلى ما يأتي:
- لكتابة معادلة القطع الزائد؛ يجب معرفة إحداثيات المركز وقيم أ، ب.
- أي نقطة تقع على منحنى القطع الزائد يكون الفرق المطلق لبعدها عن بؤرتي القطع يساوي ٢أ.
- ما يحدد نوع القطع من حيث كونه سينيًا أم صاديًّا هو المقدار الموجب؛ فإذا كان المقدار الموجب مع س يكون القطع سينيًّا وإذا كان المقدار الموجب مع ص يكون القطع صاديًّا.

٥ – تكليف الطلبة بفك حدود معادلة القطع الزائد في التدريب السابق؛ وذلك من أجل التوصل إلى أنه يمكن كتابة معادلة القطع الزائد على الصور الآتية:
- أس^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س + ءص + هـ = ٠ حيث أ × ب < ٠، أ ≠ ب.

٦ – مناقشة فقرة تحدث بمشاركة الطلبة.

٧ – حل مثال (٥) ومناقشته وتكليف الطلبة بحل تدريب (٥) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

٨ – مناقشة فقرة تحدث بمشاركة الطلبة.

٩ – ختم الدرس بعرض ملخص لمضمون الدرس (يمكنك الاستفادة من ملخص الوحدة "واجب بيتي").

١٠– تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل بوصفها واجبًا بيتيًّا، ومتابعة حلولهم لتقديم التغذية الراجعة لهم.

أخطاء شائعة

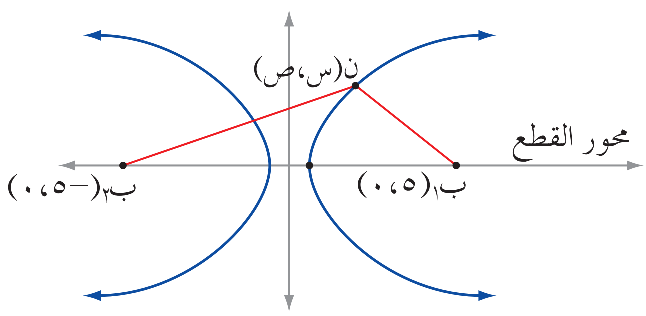
– قد يخطئ بعض الطلبة في اختيار الصورة القياسية عند إيجاد معادلة القطع الزائد، أو عند تحديد عناصره. عالج ذلك بتأكيد الرسم التقريبي لمعطيات المسألة.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– عيِّن عناصر القطع الزائد الذي معادلته: $س^2 - 4ص^2 + 6س - 8ص + 9 = 0$

إثراء



١) اكتب معادلة القطع المخروطي الممثل بالشكل المجاور، علمًا بأن $|ن ب_1 - ن ب_2| = 8$ وحدات.

٢) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠، ٠)، والبعد بين بؤرتيه ١٦ وحدة، والبعد بين رأسيه ١٢ وحدة، ومحوره القاطع منطبق على محور السينات.

٣) جد الاختلاف المركزي لقطع زائد البعد بين إحدى بؤرتيه، وأحد طرفي المحور المرافق يساوي طول محوره القاطع.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم، الملاحظة، التواصل، مراجعة الذات.

أداة التقويم: **اختبار قصير**، سلم التقدير (٥–١)، سلم التقدير (٥–٢)، سجل وصف سير التعلم (١–٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

إجابات تحدث

١) بالاعتماد على قيمة (أ × ب)

٢) بالاعتماد على إشارة الكسر.

٣) هـ = ١ قطع مكافئ، هـ < ١ قطع ناقص، هـ > ١ قطع زائد

تدريب (١)

$$\frac{س^2}{64} - \frac{ص^2}{36} = 1$$

تدريب (٢)

$$\frac{5ص^2}{36} - \frac{س^2}{4} = 1$$

تدريب (٣)

المركز (١، ٠)، البؤرتان (١، ١٣)، (١، − ١٣)، الرأسان (١، ٥)، (١، − ٥)، محوره القاطع يوزاي محور الصادات ومعادلته س= ١ وطوله ١٠وحدات، محــوره المرافــق يوازي محــور السينات ومعادلته ص = ٠ وطوله ٢٤ وحدة .

تدريب (٤) $\frac{\text{س}^{٢}}{٩} - \frac{\text{ص}^{٢}}{١٦} = ١$

تدريب (٥)

المركز (١، −٣)، البؤرتان (١ ± $\sqrt{٧}$ ، −٣)، الرأسان، (١ ± $\sqrt{٥}$ ، −٣)، محوره القاطع يوازي محور السينات ومعادلته ص = − ٣ وطوله ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة ، محوره المرافق يوازي محور الصادات ومعادلته س = ١ وطوله ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة.

التمارين والمسائل

١)

أ) $\frac{\text{س}^{٢}}{٩} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٤} = ١$ ب) $\frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥} - \frac{\text{س}^{٢}}{١٤٤} = ١$

جـ) $\frac{\text{ص}^{٢}}{٣٦} - \frac{\text{س}^{٢}}{٤٥} = ١$ د) $\frac{(\text{س} + ١)^{٢}}{٤} - \frac{(\text{ص} - ١)^{٢}}{\frac{١٦}{٥}} = ١$

هـ) $\frac{\text{س}^{٢}}{١٦} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٤} = ١$ و) $٤\text{ص}^{٢} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} = ١$

٢)

فرع	المركز	البؤرتان	الرأسان	المحور القاطع	المحور المرافق
أ	(٠، ٠)	(± ١٣، ٠)	(±١٢، ٠)	منطبق على محور السينات ومعادلته ص = ٠، وطوله ٢٤	منطبق على محور الصادات ومعادلته س = ٠، وطوله ١٠
ب	(−١، ٤)	(−١، ٢ ± √٥٢)	(−١، ٨) (−١، −٤)	يوازي محور الصادات ومعادلته س = −١، وطوله ١٢	يوازي محور السينات ومعادلته ص = ٢، وطوله ٨
جـ	(٠، ٠)	(±٢√٥ ، ٠)	(±٢، ٠)	منطبق على محور السينات ومعادلته ص = ٠، وطوله ٤	منطبق على محور الصادات ومعادلته س = ٠، وطوله ٨
د	(٢، −٥)	(٢± √٢ ، −٥)	(٢± √٢ ، −٥)	يوازي محور السينات ومعادلته ص = −٥، وطوله ٢√٢	يوازي محور الصادات ومعادلته س = ٢، وطوله ٤√٢
هـ	(٠، ٠)	(± √١٣ ، ٠)	(±٢، ٠)	منطبق على محور السينات ومعادلته ص = ٠، وطوله ٤	منطبق على محور الصادات ومعادلته س = ٠، وطوله ٦
و	(٠، ٠)	(± √٧ / ٣ ، ٠)	(±١ / √٣ ، ٠)	منطبق على محور السينات ومعادلته ص = ٠، وطوله ٢ / √٣	منطبق على محور الصادات ومعادلته س = ٠، وطوله ٤ / ٣
ز	(− ٢، ٣)	(−٢ ±√٢ ، ٣)	(−١، ٣) (−٣، ٣)	يوازي محور السينات ومعادلته ص = ٣، وطوله ٢	يوازي محور الصادات ومعادلته س = −٢، وطوله ٢

٣) $\frac{(س + ١)^{٢}}{٧} - \frac{(ص - ١)^{٢}}{٩} = ١$

٤) $\frac{(س + ١)^{٢}}{٢٥} - \frac{(ص - ٣)^{٢}}{٤} = ١$

٥) ل = ٥، ك = ٩

٦) $\frac{(س + ٤)^{٢}}{٢٥} - \frac{(ص - ٢)^{٢}}{٩} = ١$

قطع زائد

١)

أ) قطع مكافئ رأسه $(\text{٠}،\ -\frac{\text{٢}}{\text{٣}})$

ب) قطع زائد مركزه (− ٣، ٠)

جـ) قطع ناقص مركزه (٠، ٠)

د) دائرة مركزها (١، − ٣)

هـ) قطع زائد مركزه (٠، ١)

و) قطع زائد مركزه $(-\text{٢}،\ -\frac{\text{٣}}{\text{٢}})$

٢)

أ) $\text{س} = \text{٢ص}^{\text{٢}} - \text{٧ ص} + \text{٦}$

ب) $\frac{(\text{س} - \text{٣})^{\text{٢}}}{\text{١٤٤}} + \frac{(\text{ص} - \text{٢})^{\text{٢}}}{\text{١٤٠}} = \text{١}$

جـ) $\frac{(\text{ص} - \text{١})^{\text{٢}}}{\text{٤}} - \frac{(\text{س} - \text{٣})^{\text{٢}}}{\text{٥}} = \text{١}$

٣) $\text{ص} = -\text{س}$

٤) $\text{ص}^{\text{٢}} = \text{٤٠}(\text{ص} - \text{١٠})$

٥) $\frac{\text{٣}(\text{س} - \text{١})^{\text{٢}}}{\text{٤٨}} + \frac{\text{٤ص}^{\text{٢}}}{\text{٤٨}} = \text{١}$

قطع ناقص

٦) $\text{س} = \text{١} - \frac{\text{٢}}{\text{٩}}\text{ص}^{\text{٢}}$

٧) $\text{٣س} + \text{٤ ص} = \text{٢٠}$

٨) قطع ناقص معادلته: $\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٥}} + \frac{(\text{ص} + \text{١})^{\text{٢}}}{\text{١}} = \text{١}$

٩) بالاستفادة من العلاقة: $\text{جـ}^{\text{٢}} = \text{أ}^{\text{٢}} - \text{ب}^{\text{٢}}$

١٠) بالاستفادة من العلاقة: $\text{جـ}^{\text{٢}} = \text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}}$

١١)

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣
رمز الإجابة الصحيحة	أ	ب	د	أ	ب	جـ	جـ	د	ب	ب	ب	أ	د

ورقة عمل (٥-١)

الهدف: التوصل إلى معادلة القطع المكافئ

اعتمادًا على الجدول، أجب على الأسئلة الآتية:

النقطة	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي	ك
(س ، ص)	(١، ٤)	(١، −٤)	(٤، ٨)	(٤، −٨)	(٩، ١٢)	(٩، −١٢)	(١٦، ١٦)	(١٦، −١٦)

١) عين النقطة ب (٢، ٠) في المستوى البياني، ثم ارسم المستقيم س =− ٢.

٢) اكتب قانون المسافة بين نقطتين، وقانون بعد نقطة عن مستقيم.

٣) احسب بعد النقط: د، هـ، و، ز، ح، ط، ي، ك عن النقطة ب(٢، ٢) وبعداه عن المستقيم س = − ٢.

٤) عيّن النقط الواردة في الجدول على المستوى البياني، ثم صل بينهما بخط منحنٍ ممهد.

٥) افرض أنَّ: ن (س، ص) نقطة ما على المنحنى الذي حصلت عليه من البند السابق، تحقق من العلاقة: بين بُعد النقطة ن عن النقطة ب، وبعدها عن المستقيم س = − ٢، ماذا تستنتج ؟

٦) اكتب الصيغة الجبرية للعلاقة الواردة في البند (٥) بدلالة س، ص بأبسط صورة.

٧) بيِّن أنَّ كل نقطة تحقق المعادلة التي حصلت عليها في البند السابق تقع على المنحنى الذي رسمته، وكل نقطة تقع على المنحنى الذي رسمته تحقق المعادلة التي حصلت عليها.

ورقة عمل (٥-٢)

الهدف: التوصل إلى معادلة القطع الناقص

بالاعتماد على الجدول، أجب على الأسئلة الآتية:

النقطة	د	دَ	هـ	هَـ	و	وَ	ع	عَ
(س، ص)	(٢، ٣)	(−٢، ٣)	(٢، −٣)	(−٢، −٣)	(٧، ١٢)	(−٧، ١٢)	(٧، −١٢)	(−٧، −١٢)

١) ارسم محورين متعامدين، ثم عين النقطتين $ب_١$(− ٢، ٠)، $ب_٢$(٢، ٠) على المستوى البياني.

٢) استعمل قانون المسافة بين نقطين لحساب: د$ب_١$ + د$ب_٢$، دَ$ب_١$ + دَ$ب_٢$، هَـ$ب_١$ + هَـ$ب_٢$ وهكذا لبقية النقط في الجدول.

٣) عيِّن النقط الواردة في بداية الجدول على المستوى البياني، ثم صل بينهما بخط منحنٍ ممهد.

٤) افرض أنَّ: ن (س، ص) نقطة ما على المنحنى الذي حصلت عليه من البند السابق، تحقق من العلاقة:
د ب$_١$ + د ب$_٢$ = دَب$_١$ + دَب$_٢$ = هـ ب$_١$ + هَـب$_٢$ =... ؟ ماذا تستنتج ؟

٥) اكتب الصيغة الجبرية للعلاقة الواردة في البند السابق بدلالة س، ص بأبسط صورة.

٦) بيِّن أنَّ كل نقطة تحقق المعادلة التي حصلت عليها في البند السابق تقع على المنحنى الذي رسمته، وكل نقطة تقع على المنحنى الذي رسمته تحقق المعادلة التي حصلت عليها.

ورقة عمل (٥-٣)

الهدف: التوصل إلى معادلة القطع الزائد

بالاعتماد على الجدول، أجب على الأسئلة الآتية:

النقطة	د	دَ	هـ	هَـ	و	وَ	ع	عَ
(س، ص)	(٢، ٣)	(−٢، ٣)	(٢، −٣)	(−٢، −٣)	(٧، ١٢)	(−٧، ١٢)	(٧، −١٢)	(−٧، −١٢)

١) ارسم محورين متعامدين، ثم عين النقطتين ب$_١$(− ٢، ٠)، ب$_٢$ (٢، ٠) على المستوى البياني.

٢) استعمل قانون المسافة بين نقطتين لحساب: دب$_١$ − دب$_٢$، دَب$_١$ − دَب$_٢$، هـ ب$_١$ − هـب$_٢$ وهكذا لبقية النقاط في الجدول.

٣) عين النقاط الواردة في بداية الجدول على المستوى البياني، ثم صل بينهما بخط منحنٍ ممهد.

٤) افرض أنَّ: ن(س، ص) نقطة ما على المنحنى الذي حصلت عليه من البند السابق، تحقق من العلاقة:
دب$_١$ − دب$_٢$ = دَب$_١$ − دَب$_٢$ = هـ ب$_١$ − هـب$_٢$ =... ؟ ماذا تستنتج ؟

٥) اكتب الصيغة الجبرية للعلاقة الواردة في البند السابق بدلالة س، ص بأبسط صورة.

٦) بيِّن أنَّ كل نقطة تحقق المعادلة التي حصلت عليها في البند السابق تقع على المنحنى الذي رسمته، وكل نقطة تقع على المنحنى الذي رسمته تحقق المعادلة التي حصلت عليها.

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل.

أداة التقويم: سلم التقدير (٥–١).

البند	مؤشرات الاداء	١	٢	٣	٤	٥
١	**المحل الهندسي** – يعرّف المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى. – يستخدم قانون المسافة بين نقطتين في إيجاد المحل الهندسي. – يستخدم قانون البعد بين نقطة ومستقيم في إيجاد المحل الهندسي. – يجد معادلة تمثل محلًا هندسيًّا معطى.					
٢	**الدائرة** – يعرّف الدائرة كقطع مكافئ. – يجد معادلة الدائرة إذا علمت شروط كافية. – يميز الدائرة إذا علمت معادلتها بالصورة العامة. – يمثّل معادلة الدائرة بيانيًّا.					
٣	**القطع المكافئ** – يتعرّف القطع المكافئ. – يكتب معادلة القطع المكافئ إذا علمت شروط كافية. – يمثّل معادلة القطع المكافئ بيانيًّا. – يحدّد عناصر قطع مكافئ إذا علمت معادلته. – يميّز معادلة القطع المكافئ إذا علمت معادلته بالصورة العامة.					
٤	**القطع الناقص** – يتعرّف القطع الناقص. – يكتب معادلة القطع الناقص إذا علمت شروط كافية. – يمثّل معادلة القطع الناقص بيانياً. – يحدّد عناصر قطع ناقص إذا علمت معادلته. – يميّز معادلة القطع الناقص إذا علمت معادلته بالصورة العامة. – يتعّرف الاختلاف المركزي للقطع الناقص.					

البند	مؤشرات الاداء	١	٢	٣	٤	٥
٥	**القطع الزائد** – يتعرّف القطع الزائد. – يكتب معادلة القطع الزائد إذا علمت شروط كافية. – يمثّل معادلة القطع الزائد بيانيًّا. – يحدّد عناصر قطع ناقص إذا علمت معادلته. – يميّز معادلة القطع الزائد إذا علمت معادلته بالصورة العامة. – يتعّرف الاختلاف المركزي للقطع الزائد.					

(٥): يبدي فهمًا عميقًا، ولا يحتاج إلى المساعدة. (٤): يبدي فهمًا، وقد يحتاج إلى المساعدة.

(٣): يبدي فهمًا جزئيًّا، ويحتاج إلى المساعدة. (٢) : يبدي فهمًا ضعيفًا، ويحتاج إلى المساعدة.

(١): لا يبدي فهمًا، ويحتاج إلى المساعدة.

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات (التأمل الذاتي).

أداة التقويم: سلم التقدير (٥–٢).

البند	مؤشرات الاداء	١	٢	٣
١	**المحل الهندسي** – أعرّف المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى. – أستخدم قانون المسافة بين نقطتين في إيجاد المحل الهندسي. – أستخدم قانون البعد بين نقطة ومستقيم في إيجاد المحل الهندسي. – أجد معادلة تمثل محلاًّ هندسيًّا معطى.			
٢	**الدائرة** أعرّف الدائرة بوصفها قطعًا مكافئًا. أجد معادلة الدائرة إذا علمت شروط كافية. أميّز الدائرة إذا علمت معادلتها بالصورة العامة. أمثّل معادلة الدائرة بيانيًّا.			
٣	**القطع المكافئ** – أتعرّف القطع المكافئ. – أكتب معادلة القطع المكافئ إذا علمت شروط كافية. – أمثّل معادلة القطع المكافئ بيانيًّا. – أحدّد عناصر قطع مكافئ إذا علمت معادلته. – أميّز معادلة القطع المكافئ إذا علمت معادلته بالصورة العامة.			

١	٢	٣	مؤشرات الاداء	البند
			القطع الناقص – أتعرّف القطع الناقص. – أكتب معادلة القطع الناقص إذا علمت شروط كافية. – أمثّل معادلة القطع الناقص بيانيًّا. – أحدّد عناصر قطع ناقص إذا علمت معادلته. – أميّز معادلة القطع الناقص إذا علمت معادلته بالصورة العامة. – أتعرّف الاختلاف المركزي للقطع الناقص.	٤
			القطع الزائد – أتعرّف القطع الزائد. – أكتب معادلة القطع الزائد إذا علمت شروط كافية. – أمثّل معادلة القطع الزائد بيانيًّا. – أحدّد عناصر قطع ناقص إذا علمت معادلته. – أميّز معادلة القطع الزائد إذا علمت معادلته بالصورة العامة. – أتعرّف الاختلاف المركزي للقطع الزائد.	٥
			مهارات التعليم الاساسية – أجري العمليات الروتينية. – أستخدم الرموز الرياضية. – أفكّر تفكيرًا منطقيًّا. – أحل المشكلات.	٦
			الكفايات العامة – أحترم النظام ويتقيد بالتعمليمات. – أحافظ على البيئية الصفية والممتلكات العامة. – أتقبل الآخرين. – أراعي قواعد السلامة العامة. – أحرص على التعليم الذاتي والمستمر.	٧

(٣): أمتلك المعارف والمهارات المطلوبة بصورة كاملة.

(٢): أمتلك المعارف والمهارات المطلوبة بصورة جزئية.

(١): لا أمتلك المعارف والمهارات المطلوبة.

ملخص الوحدة

إنَّ بيان المعادلة من الدرجة الثانية بالمتغيرين س، ص هي: أس^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س + د ص + هـ = صفرًا حيث أ، ب، جـ، د، هـ ∈ ح (أ، ب لا يساويان الصفر معًا) –عند القيام باختيار قيم أ، ب، جـ، د، هـ بحيث يكون بيان المعادلة قطعًا حقيقيًا – يمثل:

- قطعًا مكافئًا: إذا كان أحد المعاملين أ أو ب يساوي صفرًا.
- قطعًا ناقصًا: إذا اتفقت إشارتا أ، ب.
- دائرة: وهي حالة خاصة من القطع الناقص، إذا كان أ = ب.
- قطعًا زائدًا: إذا اختلفت إشارتا أ، ب.

القطع المكافئ: هو المحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية ن (س، ص) التي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة ب (تسمى البؤرة) مساويًا لبعدها عن مستقيم معلوم ل لا يحوي النقطة ب (يسمى الدليل).

قطع مكافئ سيني		
فتحة	لليمين	لليسار
المعادلة	(ص − هـ)^{٢} = ٤ جـ (س − د)	(ص − هـ)^{٢} = −٤ جـ (س − د)
الرأس	(د، هـ) أي نقطة في المستوى ((جـ > ٠))	
البؤرة	(د + جـ ، هـ)	(د− جـ، هـ)
معادلة الدليل	س = د − جـ	س = د + جـ
محور التناظر	ص = هـ	

قطع مكافئ صادي		
فتحة	لأعلى	لأسفل
المعادلة	(س − د)^{٢} = ٤ جـ (ص − هـ)	(س − د)^{٢} = −٤ جـ (ص − هـ)
الرأس	(د، هـ) أي نقطة في المستوى ((جـ > ٠))	
البؤرة	(د، هـ + جـ)	(د، هـ − جـ)
معادلة الدليل	ص = هـ − جـ	ص = هـ + جـ
محور التناظر	س = د	

- الاختلاف المركزي للقطع المكافئ هو النسبة بين | ن ب |، | ن ل |.

القطع الناقص: هو المحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية ن (س، ص) بحيث يكون مجموع بعدي ن عن نقطتين ثابتتين $ب_{١}$، $ب_{٢}$ (تسميان البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا هو ٢أ.

نوع القطع	قطع ناقص سيني		قطع ناقص صادي	
المعادلة القياسية للقطع الناقص	$\frac{(س - د)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(ص - هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$		$\frac{(ص - هـ)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(س - د)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$	
المركز	(د، هـ) أي نقطة في المستوى ((أ > ب > ٠)) $جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢}$			
المحور الأكبر	يوازي محور السينات (وطوله ٢أ)		يوازي محور الصادات (وطوله ٢أ)	
المحور الأصغر	يوازي محور الصادات (وطوله ٢ ب)		يوازي محور السينات (وطوله ٢ ب)	
البؤرتان	(د + جـ، هـ)	(د − جـ، هـ)	(د، هـ + جـ)	(د، هـ − جـ)
الرأسان	(د + أ، هـ)	(د − أ، هـ)	(د، هـ + أ)	(د، هـ − أ)
محورا التناظر	س = د (موازٍ لمحور الصادات)، ص = هـ (موازٍ لمحور السينات)			

- الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو النسبة بين نصف البعد البؤري (٢جـ) إلى نصف طول المحور الأكبر.

القطع الزائد : هو المحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية ن (س، ص) بحيث يكون الفرق المطلق بين بعدي ن عن نقطتين ثابتتين $ب_{١}$، $ب_{٢}$ (تسميان البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا هو ٢أ.

نوع القطع	قطع زائد سيني		قطع زائد صادي	
المعادلة القياسية للقطع الزائد	$\frac{(س - د)^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{(ص - هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$		$\frac{(ص - هـ)^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{(س - د)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$	
المركز	(د، هـ) أي نقطة في المستوى ((أ > ٠، ب > ٠)) $جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$			
المحور القاطع	يوازي محور السينات (وطوله ٢أ)		يوازي محور الصادات (وطوله ٢أ)	
المحور المرافق	يوازي محور الصادات (وطوله ٢ب)		يوازي محور السينات (وطوله ٢ب)	
البؤرتان	(د + جـ، هـ)	(د − جـ، هـ)	(د، هـ + جـ)	(د، هـ − جـ)
الرأسان	(د + أ، هـ)	(د − أ، هـ)	(د، هـ + أ)	(د، هـ − أ)
محورا التناظر	س = د (موازٍ لمحور الصادات)، ص = هـ (موازٍ لمحور السينات)			

- الاختلاف المركزي للقطع الزائد هو النسبة بين نصف البعد البؤري (٢جـ) الى نصف طول المحور القاطع.

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.

أداة التقويم: اختبار قصير وحدة القطوع المخروطية.

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

١) القطع المكافئ الذي معادلته $(س - ٣)^٢ = ٤ (ص + ٥)$ مفتوح نحو:

أ) اليمين ب) اليسار جـ) الأعلى د) الأسفل

٢) طول المحور الأكبر للقطع الناقص $٧س^٢ + ٩ص^٢ = ٦٣$ يساوي:

أ) ٣ وحدات ب) ٦ وحدات جـ) ٧وحدات د) ٩ وحدات

٣) $س + ص^٢ = ٩$ تمثل معادلة:

أ) قطع مكافئ ب) قطع ناقص جـ) قطع زائد د) دائرة

٤) إحداثيا مركز القطع الذي معادلته $س^٢ + ٤ ص^٢ - ٢س + ١٦ص - ٥ = ٠$

أ) (−١، ٢) ب) (١، ٢) جـ) (١،−٢) د) (−٢، ١)

٥) المعادلة $(٤ - م) س^٢ + ٦ص^٢ - ٨س = ١١$ تمثل قطعًا ناقصًا عندما

أ) م = ٤ ب) م = ٦ جـ) م < ٤ د) م > ٤

السؤال الثاني: أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

١) جد الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته: $(س + ٢)^٢ = ٤ ص$.

٢) اكتب المعادلة: $٣ س^٢ - ٢ص^٢ - ١٢ + ٨ ص - ٢ = ٠$ على الصورة القياسية محددًا نوع القطع المخروطي الناتج وصفاته.

السؤال الأول

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥
رمز الإجابة الصحيحة	أ	ب	أ	جـ	د

السؤال الثاني

١)

الرأس (−٢، ٠)

البؤرة (−٢، ١)

معادلة الدليل ص = −١

٢)

$$\frac{(س - ٢)^٢}{٢} + \frac{(ص - ٢)^٢}{٣} = ١$$

قطع زائد صفاته:

المركز	البؤرتان	الرأسان	المحور القاطع	المحور المرافق
(٢ ، ٢)	(٢± $\sqrt{٥}$ ، ٢)	(٢± $\sqrt{٢}$ ، ٢)	يوازي محور السينات ومعادلته ص = ٢، وطوله ٢ $\sqrt{٢}$	يوازي محور الصادات ومعادلته س = ٢، وطوله ٢ $\sqrt{٣}$

الوحدة السادسة

٦

الإحصاء والاحتمالات

في هذه الوحدة ستتعرّف جزءًا من علم الإحصاء، وهو الجزء الذي يعبر عن العلم الذي يقوم على جمع المعلومات وتصنيفها وعرضها وتحليلها؛ ليتم بعد ذلك استخلاص النتائج والتوصيات المفيدة في المجالات الصناعية والاجتماعية والاقتصادية والزراعية والبحث العلمي وغيرها.

أما الاحتمالات فتهتم بحساب فرصة وقوع حادث ما في التجارب العشوائية، ويُستفاد منها في التنبؤ بقضايا مستقبلية.

يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تحديد طبيعة الارتباط بين متغيرين من خلال شكل الانتشار.
- حساب معامل ارتباط (بيرسون) بين متغيرين.
- تفسير دلالة معامل ارتباط (بيرسون) بالنسبة إلى شكل الانتشار.
- تحديد أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط (بيرسون).
- إيجاد معادلة خط الانحدار للارتباط بين متغيرين.
- تطبيق معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين.
- تعرف المتغير العشوائي المنفصل وحَلّ مسائل عملية عليه.
- تعرف توزيع ذي الحدين و حساب احتمالات خاصة بها.
- تعرف العلامة المعيارية وحسابها وتفسيرها.
- تعرف المتغير العشوائي المتصل واستقصاء خصائص منحنيات التوزيع الطبيعي.
- استخدام خصائص التوزيع الطبيعي وجدول المساحات الخاص به في حل مشكلات عملية.

تهيئة الوحدة

١) إذا كانت علامات ستة طلاب في اختبار قصير هي: ٦، ٨، ٥، ٩، ٤، ١٠، فجد المتوسط الحسابي لهذه العلامات.

٢) إذا كان المتوسط الحسابي لمجموعة من القيم العددية يساوي (٤٠)، وعدلت جميع القيم حسب العلاقة: ص = ٩٥ − ١,٥ س، حيث س: تمثل القيمة قبل التعديل، ص: تمثل القيمة بعد التعديل، فما قيمة المتوسط الحسابي بعد التعديل؟

٣) صندوق يحتوي على (٤) كرات حمراء، و(٦) كرات زرقاء، إذا سحبت كرة واحدة عشوائيًّا فما احتمال أن تكون الكرة:

أ) حمراء　　　ب) زرقاء

٤) تقدم (١٠٠٠٠) طالب وطالبة لامتحان، إذا كانت نسبة الطالبات ٦٠٪، فما عدد الطلاب الذين تقدموا لهذا الامتحان؟

٥) إذا كانت ص = ٣س +٤ تمثل معادلة خط مستقيم، وكانت النقطة (٥، ص١) إحدى نقط المستقيم، فجد ص١.

٦) يتكون هذا السؤال من (٦) فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل منها (٤) بدائل واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم العددية يساوي (٦)، وعدلت جميع القيم حسب العلاقة: ص = ٣ − ٢س، حيث س: تمثل القيمة قبل التعديل، ص: تمثل القيمة بعد التعديل، فإنَّ قيمة الانحراف المعياري بعد التعديل تساوي:

أ) −٩　　　ب) ٩　　　جـ) ٦　　　د) ١٢

(٢) إذا كانت ز = $\frac{س - \overline{س}}{ع}$، وكانت ز =٢، س = ٣٥، $\overline{س}$ = ٢٧، فإنَّ قيمة ع تساوي:

أ) ٢　　　ب) ٣　　　جـ) ٤　　　د) ٨

(٣) إذا كان ق(س) = ب س، وكان ق(٣) = ٠,٦، فإنَّ قيمة الثابت ب تساوي:

أ) ٠,٤　　　ب) ٠,٥　　　جـ) ٠,٦　　　د) ٠,٢

(٤) قيمة $\binom{٦}{٤}$ تساوي:

أ) ١٠　　　ب) ١٥　　　جـ) ٢٠　　　د) ٢٤

(٥) إذا كانت ص = م س + ن، فإنَّ إحدى العبارات الآتية صحيحة:

أ) ن = ص + م س   ب) ن = ص − م س

جـ) م س = ص + ن   د) س = م ص − ن

(٦) إذا كان المتوسط الحسابي لرواتب عشرة موظفين يساوي ٤٥٠ دينارًا شهريًّا، وتم زيادة راتب كل موظف بمقدار ١٥ دينارًا، فإنَّ المتوسط الحسابي لرواتب الموظفين بعد الزيادة يساوي:

أ) ١٥٠   ب) ٤٥٠   جـ) ٤٦٥   د) ٦٠٠

إجابات التهيئة

١) المتوسط الحسابي = ٧

٢) المتوسط الحسابي بعد التعديل = ٣٥

٣) أ) $\frac{٤}{١٠}$ ب) $\frac{٦}{١٠}$

٤) عدد الطلاب = ٠,٤٠ × ١٠٠٠٠ = ٤٠٠٠

٥) $ص_١$ = ٣×٥ + ٤ = ١٩

٦)

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦
رمز الإجابة الصحيحة	د	جـ	د	ب	ب	جـ

أولًا: الارتباط

عدد الحصص حصة واحدة

نتاجات التعلم

- يتعرف مفهوم الارتباط.
- يحدد نوع الارتباط بين متغيرين من شكل الانتشار.

التكامل الرأسي

- تمثيل العلاقات في المستوى البياني في الصف الثامن.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٦٤-١٦٨).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://programs.edraak.org/learn/k12/math-g12-jo-vv1/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- الارتباط الخطي، شكل الانتشار.

التعلم القبلي

الأزواج المرتبة وتمثيلها في المستوى البياني، معادلة الخط المستقيم.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر(العمل في الكتاب المدرسي)، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي)، التعلم عن طريق النشاط (المناقشة ضمن فرق).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة بالمتطلبات السابقة اللازمة للدرس: الأزواج المرتبة وتمثيلها في المستوى البياني، معادلة الخط المستقيم.

٢ - توضيح مفهوم الارتباط بين متغيرين من خلال طرح أمثلة حياتية، كما ورد في الكتاب واستقبال أمثلة من الطلبة.

٣ - حل مثال (١) ومناقشته من خلال رسم شكل الانتشار وتوضيح مفهوم الارتباط الخطي الطردي، والارتباط الخطي العكسي من الرسم.

٤ – تكليف الطلبة بحل تدريب (١) ومتابعة حلولهم؛ للتأكد من اكتساب الطلبة مهارة رسم شكل الانتشار وتحديد نوع الارتباط.
٥ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة (٤–٦) طلاب في كل مجموعة.
٦ – تكليف الطلبة بتنفيذ النشاطين (١)، (٢) من الكتاب، وتدوين النتائج التي توصلوا إليها.
٧ – مناقشة ما توصلت إليه المجموعات وتقديم التغذية الراجعة.
٨ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٢)، ومتابعة الحلول للتأكد من قدرة الطلبة على تحديد نوع الارتباط.
٩ – ختم الدرس من خلال توجيه سؤال للطلبة حول ما تعلموه اليوم.
١٠ – إعطاء واجب بيتي ومتابعة حلول الطلبة لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم.

أخطاء شائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في تعيين النقط في المستوى البياني خاصةً على المحاور، أو باستبدال قيم المتغير س بالمتغير ص.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين س، ص، وبين نوع الارتباط في الجدول الآتي:

س	١	٢	٣	٤
ص	٣	٥	٧	٨

إثراء

حدد نوع الارتباط بين المتغيرين س ، ص في الجدول السابق، دون رسمه.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التواصل، مراجعة الذات.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٦–١) ، سجل وصف سير التعلم (١–٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

فكر وناقش: يكون الارتباط قويًّا كلما اقتربت النقط من خط مستقيم، ويكون ضعيفًا كلما ابتعدت عن خط مستقيم.

تدريب(١): ارتباط طردي.

نشاط(١): أ) موجبة.

ب) طردي.

جـ) عندما تكون إشارة معامل س موجبة يكون الارتباط طرديًّا.

نشاط(٢): أ) سالبة.

ب) عكسي.

جـ) عندما تكون إشارة معامل س سالبة يكون الارتباط عكسيًّا.

تدريب(٢): ارتباط عكسي؛ لأنَّ العلاقة تمثل خطًّا مستقيمًا وإشارة معامل س سالبة.

التمارين والمسائل

١) طردي

٢) أ) الشكل (٦–٤) طردي تام، الشكل (٦–٥) عكسي.

ب) لا؛ لأن الشكل(٦–٥) يمثل ارتباطًا عكسيًّا والمعادلة ص = ٦ + ٣س تمثل ارتباطًا طرديًّا.

٣) أ) العلاقة بين السرعة والمسافة طردية.

ب) العلاقة بين السرعة والزمن عكسية.

٤) نعم

٥) أ) طردي

س	١	٢	٣
ص	٥	٦	٧

ب) عكسي

س	٢	٣	٤
ص	٧	٦	٣

٦) أ) ارتباط طردي.

ب) قوي (طردي تام).

ثانيًا معامل ارتباط بيرسون الخطي

عدد الحصص حصتان

نتاجات التعلم

- يحسب معامل ارتباط (بيرسون) بين متغيرين.
- يجد أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط (بيرسون).

التكامل الرأسي

- المتوسط الحسابي وأثر التعديلات الخطية على المتوسط الحسابي في الصف الثامن.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٦٩-١٧٣).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://programs.edraak.org/learn/k12/math-g12-jo-vv1/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- معامل ارتباط (بيرسون) الخطي ورمزه (ر).
- ارتباط طردي تام، ارتباط عكسي تام.
- س*، ص* قيم س، ص بعد التعديل على الترتيب.

التعلم القبلي

المتوسط الحسابي، وأثر التعديلات الخطية على المتوسط الحسابي.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر(الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، التعلم التعاوني الجماعي)، أخرى (الاكتشاف الموجه، العصف الذهني).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة بالمتطلبات السابقة اللازمة للدرس: المتوسط الحسابي، وأثر التعديلات الخطية على المتوسط الحسابي.
٢ - كتابة صيغة معامل ارتباط (بيرسون) الخطي بين متغيرين.
٣ - توجيه الطلبة إلى تفسير الرموز الواردة في صيغة معامل الارتباط.
٤ - توجيه الطلبة إلى توضيح خطوات استخدام صيغة معامل ارتباط (بيرسون) بين متغيرين.
٥ - مناقشة أفكار الطلبة لتفسير الرموز وتوضيح خطوات الاستخدام.
٦ - حل مثال (١) ومناقشته لشرح الخطوات.

٧ – تكليف الطلبة بحل تدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعة الحلول وتقديم الدعم لهم.
٨ – توضيح كيفية تقدير قيمة معامل الارتباط؛ من خلال شكل الانتشار من الأشكال الواردة في الدرس.
٩ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٢) ومتابعة الحلول؛ للتأكد من اكتساب الطلبة لمهارة تطبيق قانون معامل الارتباط.
١٠– تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة (٤–٦) طالب في كل مجموعة.
١١– تكليف المجموعات بالتحقق من أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل الارتباط (بيرسون) من خلال الإجابة عن الأسئلة الآتية:
- اكتب صيغة معامل الارتباط بين المتغيرين: س، ص
- إذا عدلت قيم س، ص على النحو الآتي:
  س* = أ س + ب ، ص* = جـ ص + د فجد: $\overline{س^*}$، $\overline{ص^*}$
- جد (ر*) : معامل الارتباط بين س*، ص*.
- ما العلاقة بين (ر)، (ر*)؟
١٢– استنتاج العلاقة وكتابتها ومناقشتها.
١٣– يمكن استنتاج العلاقة من خلال مثال عددي على النحو الآتي:

س	٣	٤	٦	٧
ص	٢	٣	٩	١٠

أ) جد معامل ارتباط بيرسون بين س، ص.
ب) إذا عدلت قيم كل من س، ص كالآتي: س* =٢س+١، ص*=٣س–١، فجد معامل ارتباط بيرسون (ر*) بين س*، ص*، ماذا تلاحظ؟
جـ) إذا عدلت قيم كل من س، ص كالآتي: س* =٢س، ص*=–٣س، فجد معامل ارتباط بيرسون (ر*) بين س*، ص*، ماذا تلاحظ؟
١٤– حل مثال (٢) ومناقشته بمشاركة الطلبة.
١٥– تكليف الطلبة بحل تدريب (٣) ومتابعة الحلول، ثم يقارن كل طالب حله بحل زميله في المقعد ليتحقق من صحة الحل.
١٦– ختم الدرس بسؤال الطلبة عما تعلموه اليوم.
١٧– إعطاء واجب بيتي، ومتابعة الحلول لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلبة في:
– استخدام صيغة معامل ارتباط بيرسون عند ايجاد قيمة المقام، أو أن تكون قيمة معامل الارتباط أكبر من واحد أو أقل من سالب واحد.

- تحديد قيمة معامل الارتباط بعد التعديلات الخطية عندما يكون معامل كل من س، ص سالباً بأن يغير إشارة معامل الارتباط.
- معرفة أنَّ الحد المطلق السالب لا يؤثر على قيمة معامل الارتباط.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) ما أكبر قيمة وما أصغر قيمة ممكنة لمعامل ارتباط بيرسون الخطي؟

٢) احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص، في الجدول الآتي:

س	٢	٤	٦	٨
ص	٦	٤	٢	١

إثراء

الأسئلة (١)، (٢) من ورقة العمل (٦-١).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم، التواصل، مراجعة الذات.

أداة التقويم: اختبار قصير، قائمة الرصد (٦-١)، سجل وصف سير التعلم (١-٤).

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب(١): ر ≈ ٠,٨٤

تدريب(٢): ١) ١ ٢) -١ ٣) ضعيفًا

تدريب(٣): ١) ر = ٠,٨٩ ٢) ر = ٠,٨٩

التمارين والمسائل

١) أ) قويًّا ب) صفراً جـ) نوع وقوة

٢) ر = ٠,٩٧

٣) ر = -٠,١

٤) الإشارة الموجبة تدل على الارتباط الطردي، والإشارة السالبة تدل على الارتباط العكسي.

٥) العلاقة بين م، ن أقوى ؛ لأنَّ |- ٠,٩| > |٠,٨|

٦) أ) ر = -٠,١٣ ب) ر = ٠,١٣

ثالثًا معادلة خط الانحدار

عدد الحصص حصتان

نتاجات التعلم

- يجد معادلة خط الانحدار للارتباط بين متغيرين.
- يطبق معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين.
- يجد الخطأ في التنبؤ.

التكامل الرأسي

- معادلة الخط المستقيم في الصف التاسع.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٧٤–١٧٧).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي: https://programs.edraak.org/learn/k12/math-g12-jo-vv1/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- معادلة خط الانحدار، التنبؤ، الخطأ في التنبؤ، القيمة الحقيقية: (ص)، القيمة المتنبأ بها: ($\hat{ص}$).

التعلم القبلي

معادلة الخط المستقيم.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي)، أخرى (العصف الذهني).

إجراءات التنفيذ

١ – التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة بمعادلة الخط المستقيم التي على الصورة: ص = أس + ب.

٢ – طرح أمثلة حياتية واستقبال أخرى من الطلبة؛ لتقديم مفهوم التنبؤ بأحد المتغيرين إذا علم الآخر. (يمكن الاستفادة من المثال الوارد في مقدمة الدرس في الكتاب).

٣ – استنتاج أنَّ العلاقة بين المتغيرين خطية؛ فيمكن تمثيلها بمعادلة خط مستقيم تسمى معادلة خط الانحدار.

٤ – كتابة معادلة خط الانحدار والخطأ في التنبؤ على اللوح ومناقشتها بمشاركة الطلبة.

٥ – رسم شكل انتشار معين، وخط مستقيم يمر بالنقط وتكليف الطلبة بحل (فكر وناقش) لاستنتاج نوعي الخطأ في التنبؤ من خلال العصف الذهني ومناقشة أفكار الطلبة.

٦ – مناقشة حل مثال (١) بمشاركة الطلبة؛ لتفسير رموز معادلة خط الانحدار والخطأ في التنبؤ وتوضيح خطوات إيجاد المعادلة والخطأ في التنبؤ.

٧ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٢) ومتابعة الحلول؛ للتأكد من اكتساب الطلبة لمهارة إيجاد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين، ولإيجاد الخطأ في التنبؤ.

٨ – ختم الدرس بسؤال الطلبة عما تعلموه اليوم.

٩ – إعطاء واجب بيتي، ومتابعة حلول الطلبة لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم.

أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلبة في:

– التمييز بين قانون معامل ارتباط بيرسون الخطي، وقيم أ في معادلة خط الانحدار.

– التمييز بين قيمة ص الحقيقية والمتنبأ بها.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– يبين الجدول الآتي العلامة في الرياضيات، وعدد ساعات الدراسة اليومية لطلبة الصف العاشر في إحدى المدارس، استعن بالجدول في الإجابة عما يليه:

عدد ساعات الدراسة (س)	٢	٣	٥	٨	٧
العلامة في الرياضيات (ص)	٦٥	٧٠	٩٠	٩٥	٩٠

أ) جد معادلة خط الانحدار.

ب) قدر علامة طالب يدرس (٤) ساعات.

جـ) احسب الخطأ في التنبؤ لطالب يدرس (٥) ساعات يوميًّا.

إثراء

السؤال (١) فرع (ب) من ورقة العمل (٦–١).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التواصل، التقويم المعتمد على الأداء، مراجعة الذات.

أداة التقويم: اختبار قصير، سلم التقدير (٦–٣)، سجل وصف سير التعلم (١–٤).

فكر وناقش (٣٨٩)

جبريًّا يكون الخطأ في التنبؤ موجبًا عندما تكون القيمة الحقيقة أكبر من القيمة المتنبأ بها، ويكون الخطأ في التنبؤ سالبًا عندما تكون القيمة الحقيقة أصغر من القيمة المتنبأ بها.

بيانيًّا يكون الخطأ في التنبؤ موجبًا عندما تكون النقطة التي تمثل القيمة الحقيقية فوق المستقيم الذي يمثل معادلة الانحدار، ويكون الخطأ في التنبؤ سالباً عندما تكون النقطة التي تمثل القيمة الحقيقية تحت المستقيم الذي يمثل معادلة الانحدار.

تدريب(١)

١) ص = س + ١١ ٢) $\hat{ص}$ = س + ١١

٣) ٢١ ٤) صفر

التمارين والمسائل

١) أ) $\hat{ص}$ = ٢س + ٢ ب) ١٦ جـ) ١

٢) $\hat{ص}$ = ٣س + ١

٣) أ) أ = ٠,٥، ب = ١ ب) ٥ أخطاء. جـ) صفر.

٤) تدل على نوع الارتباط (موجبة تدل على علاقة طردية، وسالبة تدل على علاقة عكسية).

٥) $\hat{ص}$ = ٠,٧س + ٣,٢

٦) ص الحقيقية = ٩، $\hat{ص}$ المتنبأ بها = ٢×٣ + ١ = ٧

الخطأ في التنبؤ = ص − ص^ = ٩ − ٧ = ٢

٧)

س	١	٢	٣
ص	٩	٨	٧

(يمكن للمعلم أن يختار مثالًا آخر)

أولاً المتغير العشوائي

عدد الحصص: حصتان

نتاجات التعلم

- يتعرف مفهوم المتغير العشوائي.
- يتعرف نوعي المتغير العشوائي (منفصل، ومتصل).
- يكوِّن جدول التوزيع الاحتمالي.

التكامل الرأسي

- الاقتران في الصفوف من الثامن وحتى الحادي عشر العلمي.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٧٨-١٨٥).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://programs.edraak.org/learn/k12/math-g12-jo-vv1/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- المتغير العشوائي، المتغير العشوائي المنفصل، المتغير العشوائي المتصل، التوزيع الاحتمالي، اقتران الكثافة الاحتمالية.

التعلم القبلي

التجربة العشوائية، الفضاء العيني للتجربة العشوائية(Ω)، الاقتران، المجال، المدى، الاحتمال.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر(الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، التعلم عن طريق النشاط (المناقشة ضمن فرق).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة بالمتطلبات السابقة اللازمة للدرس: التجربة العشوائية والفضاء العيني لها، الاقتران، والمجال والمدى، الاحتمال.

٢ - تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة (٤-٦) طلاب في كل مجموعة.

٣ - تنفيذ النشاط الآتي: إذا خاض منتخبنا الوطني مباراة لكرة القدم (٣) مباريات وكانت نتائج جميع المباريات فوزًا أو خسارة، وسجلت النتائج (إما فوز (ف) أو خسارة (خ)) فأجب عما يأتي:

- اكتب الفضاء العيني لهذه التجربة.

- اكتب عدد مرات الفوز في كل ناتج من نواتج هذه التجربة.

٤ – مناقشة ما توصلت إليه المجموعات، وتقديم مفهوم المتغير العشوائي، ومناقشة نوعيه بمشاركة الطلبة.

٥ – حل مثال (١) ومناقشته بمشاركة الطلبة وإعطاء فرصة للطلبة لتقديم أمثلة – منهم – على نوعي المتغير العشوائي.

٦ – حل مثال (٢) ومناقشته بمشاركة الطلبة.

٧ – تكليف الطلبة بحل تدريب (١) ومتابعة الحلول، للتأكد من اكتسابهم لمهارة كتابة مدى المتغير.

٨ – حل مثال (٣) ومناقشته بمشاركة الطلبة؛ لتقديم مفهوم التوزيع الاحتمالي.

٩ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٢) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعة الحلول.

١٠– حل مثال (٤) ومناقشته بمشاركة الطلبة.

١١– تقديم مفهوم اقتران الكثافة الاحتمالية بمشاركة الطلبة.

١٢– حل مثال (٥) ومناقشته بمشاركة الطلبة؛ لتعميق فهم الطلبة لاقتران الكثافة الاحتمالية.

١٣– تكليف الطلبة بحل تدريب (٣) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعة الحلول.

١٤– ختم الدرس من خلال (فكر وناقش) الوارد في نهاية الدرس ثم قدم تبريرًا.

١٥– إعطاء واجب بيتي، ومتابعة الحلول لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلبة في:

– التمييز بين المتغير العشوائي المنفصل والمتصل.

– حساب قيمة الاحتمال فيجدها أكبر من واحد، أو سالبة.

مراعاة الفروق الفردية

العلاج

– تنبيه الطلبة إلى تحديد نوع المتغير وإتاحة الفرصة للطلبة للاستفسار وتقديم التغذية الراجعة.

– إذا كان ق متغيرًا عشوائيًا منفصلاً مداه ١، ٢، ٣، وكان اقتران الكثافة الاحتمالية هو ل(س)، فكوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق.

إثراء

– الأسئلة (١)، (٢) ، (٣) من ورقة العمل (٦–٢).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، الورقة والقلم.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٦–٢)، اختبار قصير.

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

١) {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢}

٢) {٠، ١، ٢، ٣، ٤ }

٣) {٠، ١، ٢، ٣، ٤ }

تدريب(٢)

١)

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ل(س)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

٢)

س	٠	١	٢	٣	٤
ل(س)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٦}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$

٣)

س	٠	١	٢	٣	٤
ل(س)	$\frac{٢١}{٤٦٢}$	$\frac{١٤٠}{٤٦٢}$	$\frac{٢١٠}{٤٦٢}$	$\frac{٨٤}{٤٦٢}$	$\frac{٧}{٤٦٢}$

ملحوظة: يحسب الاحتمال عن طريق التوافيق أو مبدأ العد.

فكر وناقش

{١، ٢، ٣}

تدريب (٣)

٢ك + ٠,٣ + ٠,٤٥ + ٣ك = ١ ومنه ك = ٠,٠٥

فكر وناقش

{٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}

التمارين والمسائل

١) {٠، ١، ٢، ٣}

٢) {٠، ١، ٢، ٣، ٤}

٣)

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ل(س)	٦/٣٦	١٠/٣٦	٨/٣٦	٦/٣٦	٤/٣٦	٢/٣٦

٤)

س	١	٢	٣
ل(س)	٦/٥٦	٣٠/٥٦	٢٠/٥٦

٥) أ) ل(١) + ل(٢) + ل(٣) = ١ومنه، ٤ب + ٢ب + ٤ب = ١ ومنه، ب = ١/١٠

ب)

س	١	٢	٣
ل(س)	٠,٤	٠,٢	٠,٤

جـ) ل(س=٢) + ل(س=٣) = ٠,٢ + ٠,٤ = ٠,٦

٦) ٤ك + ٩ك + ١٦ك = ١ ومنه، ك = ١/٢٩

٧)

س	١	٢	٣	٤
ل(س)	٠,٤	٠,٣	٠,٢	٠,١

ثانيًا توزيع ذي الحدين

عدد الحصص: حصتان

نتاجات التعلم

- يتعرّف توزيع ذي الحدين.
- يحسب الاحتمال باستخدام توزيع ذي الحدين.

التكامل الرأسي

- ورد التوافيق في الصف الحادي عشر العلمي، والاحتمالات في الصفين التاسع والعاشر.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٨٦-١٩٠).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://programs.edraak.org/learn/k12/math-g12-jo-vv1/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- توزيع ذي الحدين.

التعلم القبلي

المتغير العشوائي المنفصل، الاحتمال، التوافيق.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر-انتقِ زميلًا-شارك)، التعلم من خلال النشاط (الألعاب).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة بالمتطلبات السابقة اللازمة للدرس: المتغير العشوائي المنفصل، الاحتمال، التوافيق.

٢ - تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة (٤-٦) طلاب في كل مجموعة.

٣ - تكليف الطلبة بالنشاط الآتي المرتبط بالتقديم الوارد في الكتاب بداية الدرس:

- كم عدد المحاولات في التجربة؟
- هل المحاولات مستقلة ومتماثلة؟
- ما ناتج كل محاولة؟
- إذا سمينا الإجابة بطريقة صحيحة نجاحًا، فما احتمال النجاح؟

• هل احتمال النجاح ثابت؟
٤ – مناقشـة ما توصلت إليه المجموعات وتقديم مفهـوم توزيع ذي الحدين، ومناقشة نوعيه بمشاركة الطلبة.
٥ – حل مثال (١) ومناقشته بمشاركة الطلبة.
٦ – تكليف الطلبة بحل تدريب (١) ومتابعة الحلول؛ للتأكد من اكتساب الطلبة لمهارة حساب الاحتمال باستخدام توزيع ذي الحدين.
٧ – حل مثال (٢) ومناقشته بمشاركة الطلبة.
٨ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٢)، ومتابعة الحلول وتقديم الدعم للطلبة.
٩ – حل مثال (٣) ومناقشته بمشاركة الطلبة؛ لتقديم مفهوم التوزيع الاحتمالي.
١٠ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٢)، ومتابعة الحلول وتقديم الدعم للطلبة.
١١ – حل مثال (٤) ومناقشته بمشاركة الطلبة.
١٢ – ختم الدرس من خلال (فكر وناقش) الوارد في نهاية الدرس.
١٣ – إعطاء واجب بيتي، ومتابعة الحلول لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

معلومات إضافية

احتمال النجاح = ١ – احتمال الفشل.

أخطاء شائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في التعبير عن العبارات الآتية: على الأقل، على الأكثر.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– توضيح التعبير عن العبارات: على الأقل، على الأكثر من خلال التنويع في الأمثلة على النحو الآتي:
• أربعة على الأقل تعني: أربعة أو أكثر: س $\leq$ ٤
• أربعة على الأكثر تعني: اربعة أو أقل: س $\geq$ ٤
– إذا كان ق متغيرًا عشوائيًا ذا الحدين، معاملاه: ن=٣، أ =٠,٩ ، فجد كلًّا مما يأتي:
١) ل(س = ١)　　　٢) ل(س > ١)　　　٣) ل(س $\leq$ ١)

إثراء

– سؤال (٤) من ورقة العمل (٦–٢).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، الورقة والقلم.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٦-٢)، اختبار قصير.

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

ل(س=٣) = $\binom{٣}{٣}$ (٠,٤)^{٣} (٠,٦)^{٠} = ٠,٠٦٤

ل(س<١) = ل(س=٠) = $\binom{٣}{٠}$ (٠,٤)^{٠} (٠,٦)^{٣} = ٠,٢١٦

ل(س≥٢) = ل(س=٢) + ل(س=٣)

ل(س ≥ ١) = ل(س=١) + ل(س=٢) + ل(س=٣) = ١ - ل(س=٠) = ١ - ٠,٢١٦ = ٠,٧٨٤

تدريب (٢)

ن=٧ ، أ = $\frac{١}{٤}$

١) ل(س=١) = $\binom{٧}{١}$ $\left(\frac{١}{٤}\right)^{١}$ $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٦}$

٢) ل(س ≥ ١) = ل(س=١) + ل(س=٢) + ل(س=٣) + ... + ل(س=٧) = ١ - (ل(س=٠))

٣) ل(س≤١) = ل(س=١) + ل(س=٠)

تدريب (٣)

ن=٢٠ ، أ = ٠,٧٥

١) ل(س=٥) = $\binom{٢٠}{٥}$ (٠,٧٥)^{٥} (٠,٢٥)^{١٥}

٢) ل(س=٠) = $\binom{٢٠}{٠}$ (٠,٧٥)^{٠} (٠,٢٥)^{٢٠}

فكر وناقش

لاختلاف مفهوم النجاح؛ فالنجاح في الفرع الأول وقوف المؤشر عند رقم يقبل القسمة على (٢) واحتماله (٠,٥) بينما في الفرع الثاني النجاح يدل على وقوف المؤشر عند رقم يقبل القسمة على (٥) واحتماله $\frac{١}{٨}$.

التمارين والمسائل

١) ل (س ≥ ٣) = ل (س = ٣) + ل (س = ٤) + ل (س = ٥)

٢) ن=٨ ، أ = $\frac{١}{٢}$

أ) ل(س=٤) = $\binom{٨}{٤}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$

ب) ل(س ≥ ٣)= ل(س=٣) + ل(س=٤) + ... + ل(س=٨)

= ١ − (ل(س=٢) + ل(س=١) + ل(س=٠))

٣) ن=٨ ، أ = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

ل (س ≥ ٢) = ١ − (ل(س = ١) + ل(س = ٠))

٤) ن=٣، أ = $\frac{٥}{٨}$

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{٢٧}{٥١٢}$	$\frac{١٣٥}{٥١٢}$	$\frac{٢٢٥}{٥١٢}$	$\frac{١٢٥}{٥١٢}$

ل(س=٠) = $\binom{٣}{٠}\left(\frac{٥}{٨}\right)^{٠}\left(\frac{٣}{٨}\right)^{٣} = \frac{٢٧}{٥١٢}$ وهكذا

٥) أ) قيم س (مدى ق) = {٠، ١، ٢، ٣}

ب) ل (س ≥ ١) = $\frac{٣٧}{٦٤}$

ومنه، ١ − ل(س=٠) = $\frac{٣٧}{٦٤}$

$\binom{٣}{٠}$(أ)^{٠}(١ − أ)^{٣} = $\frac{٢٧}{٦٤}$

١−أ = $\frac{٣}{٤}$

ومنه، ل(س=١) + ل(س=٢) + ل(س=٣) = $\frac{٣٧}{٦٤}$

ومنه، ل(س=٠) = ١ − $\frac{٣٧}{٦٤}$ = $\frac{٢٧}{٦٤}$

ومنه، (١ − أ)^{٣} = $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٣}$

ومنه، أ = $\frac{١}{٤}$

ثالثًا العلامة المعيارية

عدد الحصص: حصتان

نتاجات التعلم

- يتعرف العلامة المعيارية.
- يحسب العلامة المعيارية ويفسرها.

التكامل الرأسي

- ورد المتوسط الحسابي في الصفين السابع والثامن، والانحراف المعياري في الصفين الثامن والعاشر.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٩١–١٩٥).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://programs.edraak.org/learn/k12/math-g12-jo-vv1/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- المتوسط الحسابي ($\bar{س}$)، الانحراف المعياري (ع)، العلامة المعيارية (ز).

التعلم القبلي

المتوسط الحسابي، الانحراف المعياري.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، حل المشكلات والاستقصاء، التعلم في مجموعات (المناقشة، فكر–انتقِ زميلًا–شارك).

إجراءات التنفيذ

١ – التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة بالمتطلبات السابقة اللازمة للدرس: المتوسط الحسابي والانحراف المعياري.

٢ – تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة (٤–٦) طلاب في كل مجموعة .

٣ – تقديم مفهوم العلامة المعيارية من خلال مناقشة ما توصلت إليه المجموعات، وتأكيد أنه لا بد من أخذ المتوسط الحسابي والانحراف المعياري بعين الاعتبار.

٤ – حل مثال (١) ومناقشته بمشاركة الطلبة؛ لتدريبهم على حساب العلامة المعيارية وتفسيرها.

٥ – تكليف الطلبة بحل تدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعة الحلول؛ للتأكد من اكتسابهم لمهارة حساب العلامة المعيارية.

٦ – حل مثال (٢) ومناقشته بمشاركة الطلبة لحساب العلامة المعيارية وتفسيرها.

٧ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٢)ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعة الحلول وتقديم الدعم للطلبة لزيادة مهارتهم في حساب العلامة المعيارية وتفسيرها.

٨ – حل مثال (٣) ومناقشته بمشاركة الطلبة.

٩ – تكليف الطلبة بحل تدريب (٣)، ومتابعة الحلول وتقديم الدعم للطلبة.

١٠– ختم الدرس من خلال (فكر وناقش) الوارد في نهاية الدرس.

١١– إعطاء واجب بيتي، ومتابعة الحلول لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

أخطاء شائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في استخدام قانون العلامة المعيارية (ز) فيكتبوها:

$$ز = \frac{\bar{س} - س}{ع}$$

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– توضيح استخدام القانون من خلال التنويع في الأمثلة والتغيير في المطلوب: (ز ، $\bar{س}$، س، ع).

– إذا كان المتوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي (٥٠)، والانحراف المعياري لها يساوي (٢)، فجد:

أ) العلامة المعيارية للقيمة (٤٧).

ب) القيمة التي تنحرف انحرافين معياريين فوق المتوسط الحسابي.

إثراء

١) السؤال (٥) من ورقة العمل (٦–٢).

٢) متى تكون قيمة العلامة المعيارية سالبة، موجبة، صفرًا؟

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.

أداة التقويم: اختبار قصير، سلم التقدير (٦–٤).

تدريب (١)

١) ز = ٢ ٢) س = ٤٤,٥ ٣) س = ٤٦ ٤) س = ٣٧

تدريب (٢)

الفيزياء أفضل؛ لأن العلامة المعيارية للرياضيات هي: $ز_ر = \frac{-١}{٣} \approx -٠,٣٣$

بينما العلامة المعيارية للفيزياء هي: $ز_{ف} = ١,٥$ ، $ز_{ف} > ز_ر$

تدريب (٣)

١) الانحراف المعياري = ٤ ٢) المتوسط الحسابي = ٧٣ ٣) علامة زينب = ٨٥

فكر وناقش

المتوسط الحسابي بعد التعديل = أ $\bar{س}$ + ب، والانحراف المعياري بعد التعديل = أ ع

$$\text{العلامة المعيارية بعد التعديل} = \frac{(أ س + ب) - (أ \bar{س} + ب)}{أ ع}$$

$$= \frac{أ س + ب - أ \bar{س} + ب}{أ ع} = \frac{أ(س - \bar{س})}{أ ع} = ز$$

التمارين والمسائل

١) $\bar{س} = ٥٨$

٢) أ) ٥ ب) ٥

٣) أ) ع = ٤ ب) ٨٠، ٧٢، ٧١ جـ) ٦٤

٤) ع = ٦

٥) المتوسط للعلامات المعيارية $= \frac{ز_١ + ز_٢ + ز_٣ + \cdots\cdots + ز_ن}{ن}$

$$= \frac{\frac{س_١ - \bar{س}}{ع} + \frac{س_٢ - \bar{س}}{ع} + \cdots + \frac{س_ن - \bar{س}}{ع}}{ن}$$

$$= \frac{(س_١ + س_٢ + \cdots + س_ن) - \overbrace{(\bar{س} + \bar{س} + \cdots + \bar{س})}^{\text{ن من المرات}}}{ن \times ع}$$

$$= \frac{(ن \times \bar{س}) - (ن \times \bar{س})}{ن \times ع} = \frac{\text{صفر}}{ن \times ع} = \text{صفرًا}$$

رابعًا التوزيع الطبيعي

عدد الحصص ثلاث حصص

نتاجات التعلم

- يتعرف منحنى التوزيع الطبيعي وخصائصه.
- يستخدم خصائص التوزيع الطبيعي وجدول المساحات الخاص به في حل مسائل عملية.

التكامل الرأسي

- المتوسط الحسابي في الصفين السابع والثامن.
- الانحراف المعياري في الصفين الثامن والعاشر.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب، الصفحات (١٦٤-١٦٨).
- منصة إدراك للتعلم المدرسي:
https://programs.edraak.org/learn/k12/math-g12-jo-vv1/

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- المتوسط الحسابي ($\overline{س}$) ، الانحراف المعياري (ع)، العلامة المعيارية (ز)، التوزيع الطبيعي، التوزيع الطبيعي المعياري.

التعلم القبلي

المتوسط الحسابي، الانحراف المعياري، العلامة المعيارية، المتغير العشوائي المتصل.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، أخرى (الاكتشاف الموجه) ، التعلم في مجموعات (فكر - انتقِ زميلًا - شارك).

إجراءات التنفيذ

١ - التمهيد للدرس من خلال مراجعة الطلبة بالمتطلبات السابقة اللازمة للدرس: المتوسط الحسابي والانحراف المعياري، العلامة المعيارية، المتغير العشوائي المتصل.

٢ - تقديم مفهوم التوزيع الطبيعي وخصائصه.

٣ - تقديم مفهوم التوزيع الطبيعي المعياري.

٤ - تدريب الطلبة على استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري في حالة ل (ز≥ أ) ، حيث أ ≤ ٠

٥ - تقسيم الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة (٤-٦) طلاب في كل مجموعة.

٦ - تكليف الطلبة باستنتاج العلاقات (٢)، (٣)، (٤) صفحة (١٩٧) في الكتاب المدرسي بشكل فردي.

٧ – قيام كل طالب بمناقشة ما توصل إليه مع زميل آخر.
٨ – مشاركة الطلبة بعضهم بعضًا في ما توصلوا إليه.
٩ – مناقشة ما توصلت إليه المجموعات.
١٠– متابعة عمل الطلبة الفردي والثنائي والجماعي.
١١– حل مثال (١) ومناقشته بمشاركة الطلبة لإكسابهم مهارة استخدام الجدول.
١٢– تكليف الطلبة بحل تدريب(١) ومتابعة الحلول؛ للتأكد من اكتسابهم مهارة استخدام الجدول.
١٣– حل مثال (٢) ومناقشته بمشاركة الطلبة لإكسابهم مهارة استخدام الجدول عند إعطاء قيمة الاحتمال.
١٤– تكليف الطلبة بحل تدريب(٢)؛ للتأكد من اكتساب الطلبة لمهارة استخدام الجدول.
١٥– حل مثال (٣) ومناقشته بمشاركة الطلبة.
١٦– تكليف الطلبة بحل تدريب(٣)، ومتابعة الحلول وتقديم الدعم للطلبة.
١٧– حل مثال (٤) ومناقشته بمشاركة الطلبة لإعطاء مسائل حياتية على التوزيع الطبيعي.
١٨– تكليف الطلبة بحل تدريب(٤)، ومتابعة الحلول وتقديم الدعم للطلبة.
١٩– ختم الدرس من خلال سؤال الطلبة عما تعلموه اليوم.
٢٠– إعطاء واجب بيتي، ومتابعة الحلول لتقديم التغذية الراجعة والدعم اللازم لهم.

معلومات إضافية

– يشير مفهوم الاحتمال في المتغيرات العشوائية المتصلة إلى المساحة تحت منحنى التوزيع الاحتمالي بين نقطتين معينتين.

أخطاء شائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في استخدام الجدول خاصة عندما تكون قيمة (أ) سالبة.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد قيمة كل من:

أ) ل (ز ≥ ١,٢٨)　　　ب) ل (ز ≤ ١,٢٨)

جـ) ل (ز ≥ –١,٤)　　　د) ل (ز ≤ –١,٤)

– إذا كان س متغيرًا عشوائيًا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي (٨٠)، وانحرافه المعياري (٦)، فجد:

١) ل(س ≥ ٨٦)　　　٢) ل(س ≤ ٦٨)　　　٣) ل(٧٤ ≥ س ≥ ٨٣)

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم، مراجعة الذات.

أداة التقويم: سلم التقدير (٦−٤)، سجل وصف سير التعلم (١−٤)

إجابات التمارين والمسائل والتدريبات

تدريب (١)

١) ل(ز≤١,٣٦) = ٠,٩١٣١

٢) ل(ز≥١,٢٣) = ٠,١٠٩٣

٣) ل (ز≤−٠,٩٥) = ٠,١٧١١

٤) ل(٠,٠٣ ≤ ز≤١,٣) = ٠,٤٨٧٥

٥) ل(−٠,٨ ≤ ز ≤صفرًا) = ٠,٢٨٨١

(٦) لا؛ ارسم المنحنى الذي يمثل كل حالة.

تدريب (٢)

١) أ = ٠,٠٨   ٢) أ = −٠,٤٧

تدريب (٣)

١) ل(ز ≤ $\frac{٩٥-١١٠}{١٠}$) = ل(ز ≤ −١,٥) = ٠,٠٦٦٨

٢) ل(ز ≥ −٠,٥) = ٠,٦٩١٥

٣) ل(−٢ ≤ ز ≤ ٢) = ٠,٩٥٤٣

تدريب (٤) ٢٥ يومًا.

التمارين والمسائل

١) أ) ل(ز≤ ٣,٠٦) = ٠,٩٩٨٩   ب) ل(ز ≥ −١) = ل(ز≤ ١) = ٠,٨٤١٣

جـ) ل(ز ≥ ١,٨) = ٠,١٥٨٧   د) ل(ز≤ −٠,٠٧) = ٠,٤٧٢١

هـ) ل(صفر ≤ ز≤ ٠,٥) = ٠,١٩١٥   و) ل(−١,٥٣ ≤ ز≤ −٠,١٢) = ٠,٣٨٩٢

ز) ل(−٠,٨ ≤ ز≤ ٠,٨) = ٠,٥٧٦٢   ح) ل(−١,٧ ≤ ز ≤صفرًا) = ٠,٤٥٥٤

٢) أ) أ = −٠,٢٧   ب) أ = ٠,٩٢

٣) أ) ل(س≥٨٢) = ل(ز ≥ ١,٥) = ٠,٠٦٦٨

ومنه العدد = ٢٠٠٠×٠,٠٦٦٨ ≈ ١٣٤ معلمًا.

ب) ل(س≤٨٠) = ل(ز ≤ ١,٢٥) = ٠,١٠٥٦

ومنه نسبة النجاح = ٠,١٠٥٦ ≈ ١١٪

٤) نسبة النجاح = ٠,٧٥٨٠ ، لتكن أ علامة النجاح ل(س ≤ أ) = ٠,٧٥٨٠

ل(ز ≤ $\frac{\text{أ} - ٦٠}{٥}$) = ٠,٧٥٨٠

نفرض أن ك = $\frac{\text{أ} - ٦٠}{٥}$ ، ل(ز ≤ ك) = ٠,٧٥٨٠ ومن الجدول ك = −٠,٧

= −٠,٧ ومنه، أ = ٥٦,٥ ≈ ٥٧

٥) ل(س ≥ ٤,٨) = ل(ز ≥ −٠,٢) = ١ − ل(ز ≥ ٠,٢) = ١ − ٠,٥٧٩٣ = ٠,٤٢٠٧

عدد الصناديق =

١٠٠٠ × ٠,٤٢٠٧ = ٤٢٠,٧

≈ ٤٢١ صندوقًا

١) طردي تام، ر = ١

أ) $ر = \frac{٧}{\sqrt{٤٠ \times ٢٠}}$ ب) $\hat{ص} = \frac{٧}{٤٠}س + \frac{٤١}{٨}$

جـ) س = ١٠,٧١ ≈ ١١ علامة الطالب في التاريخ

د) س=٥ إذن ص = ٦ ، $\hat{ص}$ = ٦ ومنه الخطأ في التنبؤ = ص − $\hat{ص}$ = ٦−٦=٠

٣) أ) ر = −١ ب) $\hat{ص} = \frac{-٢}{٣}س + \frac{١١}{٣}$

٤) ر = −١

٥) ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩

٦) أ) توزيع ذي الحدين ب) أ = ٠,٤ ن = ٢

جـ) $ل(س=٢) = \binom{٢}{٢}(٠,٤)^{٢}(٠,٦)^{٠} = ٠,١٦$

٧) $ل(٣) = \frac{٣}{٥}$

٨) أ) $ل(س=٢) = \binom{٦}{٢}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٢}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤}$

ب) ل(س ≥ ٣) = ل(س=٣) + ل(س=٢) + ل(س=١) + ل(س=٠) وتحل بنفس طريقة فرع أ .

٩) ل(س ≥ ١) = ل(س=١) + ل(س=٠) توزيع ذي الحدين أ = ٠,٩٥ ن = ٢٠

١٠) $ل(س=٣) = \frac{٤}{١١} \times \frac{٣}{١٠} \times \frac{٧}{٩} = \frac{١٤}{١٦٥}$

١١) ل(س ≤ ٣) = ١ − (ل(س=٢) + ل(س=١) + ل(س=٠)) توزيع ذي الحدين أ = ٠,١ ن = ٩

١٢) أ) صفر ب) ١ جـ) ز = −٥

ورقة عمل (٦-١)

١) إذا كان $\sum_{ر=1}^{ن}$ (سر – $\overline{س}$)(صر – $\overline{ص}$) = –١، $\sum_{ر=1}^{ن}$ (صر – $\overline{ص}$)^2 = ١٠ ، $\overline{س}$ = ١٠ ، $\overline{ص}$ = ٦

وكان معامل ارتباط بيرسون الخطي يساوي –٠,٢ فجد:

أ) $\sum_{ر=1}^{ن}$ (سر – $\overline{س}$)^2 ب) معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س.

٢) إذا كان المتغير (س) يمثل الدخل الشهري لأسرة، وكان المتغير (ص) يمثل مصروف الأسرة الشهري على الطعام. فهل هناك ارتباط بين المتغيرين س، ص؟ ما نوعه (إن وجد)؟ فسر إجابتك.

٣) إذا كان معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س، ص يساوي ٠,٥ وبين س*، ص* يساوي – ٠,٥ ، فاكتب معادلتين خطيتين مقترحتين لـ س* و ص*.

٤) أكمل الجدول الآتي ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:

	س	ص	(س – $\overline{س}$)	(ص – $\overline{ص}$)	(س – $\overline{س}$) (ص – $\overline{ص}$)	(س – $\overline{س}$)^2
	٨	٨				
	٧	٥				
	٦	٧				
	٥	٣				
	٧	٥				
	٩	٨				
المجموع			٠	٠		

أ) ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين س، ص.

ب) احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص.

جـ) ما نوع العلاقة بين المتغيرين س، ص؟

د) أوجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص.

هـ) قدر قيمة ص إذا كانت س تساوي ١٠

و) جد الخطأ في التنبؤ عندما س = ٦

٥) إذا كانت ص = ٣س + ٢ معادلة خط الانحدار، وكانت النقطة (١٥، ٤٦) إحدى نقط شكل الانتشار بين المتغيرين س، ص. فجد الخطأ في التنبؤ عندما س = ١٥

٦) جد معادلة خط الانحدار للبيانات الآتية:

(٤، ٥)، (٣، ٧)، (٢، ٨)، (١، ٩)، (١٠، ١).

إجابات ورقة عمل (٦-١)

١) أ) −٠,٢ = $\frac{-١}{\sqrt{م \times ١٠}}$ ومنه −٠,٢ $\sqrt{م \times ١٠}$ = −١

وتربيع الطرفين ينتج ٠,٠٤ (١٠م) = ١ ومنه، م = ٢,٥

$\hat{ص}$ = $\frac{-٢}{٥}$ س + ٢

٢) نعم طردي؛ لأنه كلما زاد الدخل زاد مصروف الأسرة الشهري على الطعام.

٣) س* = ٥س +٣ ، ص* = −٣ ص +١

٤)

	س	ص	(س − $\bar{س}$)	(ص − $\bar{ص}$)	(س − $\bar{س}$) (ص − $\bar{ص}$)	$(س - \bar{س})^٢$	$(ص - \bar{ص})^٢$
	٨	٨	١	٢	٢	١	٤
	٧	٥	٠	−١	٠	٠	١
	٦	٧	−١	١	−١	١	١
	٥	٣	−٢	−٣	٦	٤	٩
	٧	٥	٠	−١	٠	٠	١
	٩	٨	٢	٢	٤	٤	٤
المجموع	٤٢	٣٦	٠	٠	١١	١٠	٢٠

أ) المتوسط الحسابي لقيم س = ٧، المتوسط الحسابي لقيم ص = ٦

ب) ر = $\frac{١١}{\sqrt{١٠ \times ٢٠}}$ جـ) العلاقة طردية

د) أ = $\frac{١١}{١٠}$ = ١,١ ب = ٦ − ١,١×٧ = −١,٧ $\hat{ص}$ = ١,١س − ١,٧

هـ) $\hat{ص}$ = ١,١×١٠ − ١,٧ = ٩,٣

و) س=٦ ص = ٧

$\hat{ص}$ = ١,١×٦−١,٧ = ٤,٩

الخطأ في التنبؤ = ص − $\hat{ص}$ = ٧ − ٤,٩ = ٢,١

٥) س = ١٥ ، ص = ٤٦

ص̂ = ٣ × ١٥ + ٢ = ٤٧

الخطأ في التنبؤ = ص − ص̂ = ٤٦ − ٤٧ = −١

٦)

	س	ص	(س − س̄)	(ص − ص̄)	(س − س̄) (ص − ص̄)	(س − س̄)^{٢}
	٤	٥	٠	−١	٠	٠
	٣	٧	−١	١	−١	١
	٢	٨	−٢	٢	−٤	٤
	١	٩	−٣	٣	−٩	٩
	١٠	١	٦	−٥	−٣٠	٣٦
المجموع	٢٠	٣٠	٠	٠	−٤٤	٥٠

المتوسط الحسابي لقيم س = ٤، المتوسط الحسابي لقيم ص = ٦

أ = $\frac{-٤٤}{٥٠}$ = −٠,٨٨ ، ب = ٦ + ٠,٨٨ × ٤ = ٩,٥٢ ، ص̂ = −٠,٨٨ س + ٩,٥٢

ورقة عمل (٦-٢)

١)جد مدى المتغير العشوائي في الحالات الآتية:

أ) عدد الناجحين من بين (٨) طلاب تم اختيارهم عشوائيًّا من المتقدمين لامتحان الثانوية العامة في مدرسة ما في العام السابق.

ب) عدد الكرات الحمراء في تجربة سحب (٣) كرات عشوائيًّا من صندوق به (٧) كرات زرقاء، و(٤) كرات حمراء.

٢) في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين وتسجيل العددين الظاهرين على الوجهين العلويين؛ إذا دل المتغير العشوائي على مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين، فأجب عما يأتي:

أ) جد مدى المتغير العشوائي.

ب) ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين يساوي (٦)؟

٣) إذا كان ل(س) = $\frac{س}{١٥}$ ، س ∈ {١، ٢، ٣، ٤، ٥ } ، فهل يمثل ل(س) اقتران كثافة احتمالية؟

٤) إذا كان ق متغيرًا عشوائيًّا ذا الحدين، معاملاه: ن = ٤، أ = ٠,٢ ، فأجب عما يأتي:

١) اكتب قيم س (مدى ق).

٢) جد ل(س = ١)

٣) جد ل(س ≤ ٣)

٥) إذا كانت العلامتان ٤٦، ٨٨ تقابلان العلامتين المعياريتين – ٨، ٦، على الترتيب. فجد العلامة التي تقابل العلامة المعيارية ٨ .

٦) إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا. فجد قيمة كل مما يأتي، باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

١) ل(ز ≥ ١,٠٦)

٢) ل(ز ≤ –٢)

٣) ل (ز ≤ ١,٣)

٤) ل(ز ≥ –٠,٠٩)

إجابات ورقة عمل (٦-٢)

١) أ) {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

ب) {٠، ١، ٢، ٣}

٢) أ) {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢}

ب) $\frac{٥}{٣٦}$

٣) ل(١) + ل(٢) + ل(٣) + ل(٤) + ل(٥) = $\frac{١}{١٥} + \frac{٢}{١٥} + \frac{٣}{١٥} + \frac{٤}{١٥} + \frac{٥}{١٥} = \frac{١٥}{١٥} = ١$

لذلك ل(س) يمثل اقتران كثافة احتمالية.

٤) ١) مدى ق = {٠، ١، ٢، ٣، ٤}

٢) ل(س=١) = $\binom{٤}{١}(٠,٢)^{١}(٠,٨)^{٣}$ = ٤ × ٠,٢ × ٠,٥١٢ = ٠,٤٠٩٦

٣) ل(س ≥ ٣) = ل(س = ٣) + ل(س = ٤)

= ٠,٠٢٥٦ + ٠,٠٠١٦ = ٠,٠٢٧٢

٥) س = ٩٤

استراتيجية التقويم: التواصل.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٦-١).

لتقويم امتلاك الطلبة للمعارف والمهارات المطلوبة في الفصل الأول (الإحصاء).

الرقم	مؤشر الأداء	نعم	لا
١	يرسم شكل الانتشار بين متغيرين.		
٢	يحدد نوع الارتباط من خلال شكل الانتشار.		
٣	يحسب معامل ارتباط (بيرسون) بين متغيرين.		
٤	يجد أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط (بيرسون).		

لتقويم امتلاك الطلبة للمعارف والمهارات المطلوبة في الفصل الثاني (الاحتمالات).

استراتيجية التقويم: الملاحظة.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٦-٢).

الرقم	مؤشر الأداء	نعم	لا
١	يتعرف المتغير العشوائي المنفصل والمتصل.		
٢	يجد قيم المدى للمتغير العشوائي.		
٣	يكوِّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.		
٤	يجد احتمال المتغير العشوائي لتوزيع ذي الحدين.		

استراتيجية التقويم: المعتمد على الأداء.

أداة التقويم: سلم التقدير (٦-٣)

الرقم	مؤشر الأداء	١	٢	٣
١	يجد معادلة خط الانحدار للارتباط بين متغيرين.			
٢	يطبق معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيمة أحد المتغيرين إذا علم الآخر.			
٣	يجد الخطأ في التنبؤ بالاستفادة من معادلة خط الانحدار.			

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.

أداة التقويم: سلم التقدير (٦-٤).

الرقم	مؤشر الأداء	١	٢	٣
١	يحسب العلامة المعيارية.			
٢	يفسر العلامة المعيارية.			
٣	يتعرف منحنى التوزيع الطبيعي وخصائصه.			
٤	يحل مسائل عملية على التوزيع الطبيعي.			

(٣) يمتلك المعارف والمهارات المطلوبة بشكل كامل.

(٢) يمتلك المعارف والمهارات المطلوبة بشكل جزئي.

(١) لا يمتلك المعارف والمهارات المطلوبة.

قائمة المراجع

أولًا: المراجع العربية

١- إدارة المناهج والكتب المدرسية، **الإطار العام للمناهج والتقويم**، ط(٢)، عمّان، الأردن، ٢٠١٣م.

٢- إدارة الامتحانات والاختبارات، **استراتيجيات التقويم وأدواته**، (الإطار النظري) (٢٠٠٤)، وزارة التربية والتعليم.

٣- فريد أبوزينة، **الرياضيات مناهجها وطرق تدريسها** (٢٠٠٣)، مكتبة الفلاح - الكويت.

٤- عوض منصور، **مبادئ الإحصاء**، عمان: دار الصفاء للنشر، ٢٠٠٦م.

٥- محمود شاكر، **نظريات وقوانين جديدة في الرياضيات**، عمان، دار المعتز للنشر والتوزيع، الطبعة الثانية. ٢٠١٠م.

ثانيًا: المراجع الأجنبية

1- Howard Anton, IRL; BIVENS, STEPHEN, DAVIS, Calculus Early Transcendentals, 10th Edition.

2- Larson, Hostetler, Precalculus 7th Edition, Houghton Mifflin, Boston.

3- Sallas, Hille, Calculus one and Several Variables, 10th Edition, 2007. John Willy and Sans.

4- Swokowski, Earal, W., Calculus with analiatic Geomentry, 5th Edition, Weber and Shmidt, Boston.

تم بحمد الله تعالى