المتتاليات

الاسم: --

الدرجة: ٤٠٠ المدة: ساعتين

السؤال الأول: (40د)

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية تحقق $U_{15}=31$ و $U_3=-5$ عين r وU_n بدلالة n و U_{25} ثم احسب $S=U_3+U_4+\cdots+U_{25}$

السؤال الثاني: (120د)

نعبر عن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $\begin{cases} u_0=0, u_1=1 \\ u_{n+2}=\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n \end{cases}$ ونتامل المتتاليتان v_n, w_n المعرفتان وفق:

$$w_n=5^n u_n \quad , \quad v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$$

1) بين ان المتتالية v_n هندسية وعين أساسها وحدها الأول ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n
2) احسب بدلالة n المجموع $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}$
3) بين ان w_n حسابية وعين أساسها وحدها الأول ثم اكتب عبارة w_n بدلالة n
4) احسب المجموع $x_n=w_1+w_2+\cdots+w_{100}$
5) اكتب u_n بدلالة n

السؤال الثالث: (80د)

برهن انه من اجل عدد طبيعي n ان:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}=\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

السؤال الرابع: (70د)

لتكن$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} U_0=16 \\ U_{n+1}=\sqrt{U_n+20} \end{cases}$$

1) برهن بالتدريج انه من اجل عدد طبيعي n فان : $U_n\geq 5$
2) بين ان المتتالية متناقصة

السؤال الخامس: (110د)

لتكن$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} U_0=\frac{1}{2} \\ U_{n+1}=\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \end{cases}$$

1) برهن بالتدريج انه من اجل عدد طبيعي n فان: $0\leq U_n\leq 1$
2) برهن بالتدريج انه من اجل عدد طبيعي n فان: $U_n=cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$

انتهت الأسئلة بالتوفيق

السؤال الأول:

بما ان المتتالية حسابية نستخدم القانون:

$$U_m - U_p = (m-p).r$$
$$U_{15} - U_3 = (15-3)r$$
$$31+5 = 12r \Rightarrow r = \frac{36}{12} = 3 \Rightarrow r = 3$$

لايجاد U_n بدلالة n نستخدم نفس القانون ونعوض:

$$U_m - U_p = (m-p).r$$
$$U_n - U_3 = (n-3).3$$
$$U_n + 5 = 3n - 9 \Rightarrow U_n = 3n - 14$$

لايجاد U_{25} نعوضها بالعلاقة $U_n = 3n - 14$:

$$U_{25} = 3(25) - 14 = 75 - 14 = 61$$

لحساب المجموع:

$$S = U_3 + U_4 + \cdots + U_{25}$$
$$S = n.\frac{a+l}{2}$$

يلزمنا عدد الحدود:

$$n = 25 - 3 + 1 = 23$$
$$S = 23\frac{-5+61}{2} = 644$$

السؤال الثاني:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{5}u_{n+1} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n - \frac{1}{5}u_{n+1} (1$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n$$
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n}{u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n} = \frac{\frac{1}{5}\left(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n\right)}{u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n} = \frac{1}{5} = q$$

فالمتتالية v_n هندسية اساسها $q = \frac{1}{5}$ وحدها الاول:

$$v_0 = u_{0+1} - \frac{1}{5}u_0 = 1 - 0 = 1$$

كتابة عبارة v_n بدلالة n:

$$\frac{v_n}{v_0} = q^{n-0} \Rightarrow v_n = 1.\left(\frac{1}{5}\right)^n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$
$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = a.\frac{1-q^n}{1-q} (2$$
$$a = v_0 = 1$$
$$S_n = 1.\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

3)برهن ان w_n حسابية :

$$w_{n+1} - w_n = 5^{n+1}u_{n+1} - 5^n u_n = 5^{n+1}\left(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n\right)$$
$$w_{n+1} - w_n = 5^{n+1}v_n = 5\frac{5^n}{5^n} = 5 = r$$

فالمتتالية w_n حسابية اساسها $r = 5$ وحدها الأول:

$$w_0 = 5^0 u_0 = 0$$
$$w_n - w_0 = (n-0)r \Rightarrow w_n = 5n$$
$$x_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_{100} (4$$
$$= \frac{n}{2}(a+l) = \frac{100-1+1}{2}\big(5(1) + 5(100)\big)$$
$$x_n = \frac{100}{2}(505) = 25250$$

5)اكتب u_n بدلالة n:

$$w_n = 5^n u_n \Rightarrow u_n = \frac{w_n}{5^n} = \frac{5n}{5^n}$$

السؤال الثالث:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

سنبرهن ذلك عن طريق الاثبات بالتدريج:

نبرهن صحة العلاقة من اجل $n = 0$:

$$l_1 = 1 \Rightarrow l_2 = 1 \Rightarrow l_1 = l_2$$

نفرض صحة العلاقة من اجل n:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

نبرهن صحة العلاقة من اجل $n+1$:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right]$$

ننطلق من الطرف الأول وصولاً للطرف الثاني:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] + \frac{1}{4^{n+1}}$$
$$\frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] + \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4^{n+1}}\right]$$
$$= \frac{4}{3}\left[1 - \frac{1}{4^{n+1}}\left(1 - \frac{3}{4}\right)\right] = \frac{4}{3}\left[1 - \frac{1}{4^{n+2}}\right]$$

ومنه العلاقة $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right]$ محققة

السؤال الرابع:

$$\begin{cases} U_0 = 16 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 20} \end{cases}$$

1) نبرهن العلاقة من خلال الاثبات بالتدريج:

$$U_n \geq 5$$

- نبرهن صحة العلاقة من اجل $n = 0$:

$$U_0 \geq 5 \Rightarrow 16 \geq 5$$

- نفرض صحة العلاقة من اجل n:

$$U_n \geq 5 \quad *$$

- نبرهن صحة العلاقة من اجل $n+1$:

$$U_{n+1} \geq 5$$

- الان نقوم بعمليات على ال U_n حتى تصبح U_{n+1}:
- ننطلق من * :

$$U_n \geq 5$$

- نضيف 20 للطرفين:

$$U_n + 20 \geq 25$$

- نجذر الطرفين:

$$\sqrt{U_n + 20} \geq \sqrt{25}$$
$$U_{n+1} \geq 5$$

2) لنبرهن ان المتتالية متناقصة نبرهن ان $U_{n+1} \leq U_n$ من خلال الاثبات بالتدريج:

- نبرهن صحة العلاقة من اجل $n = 0$

$$U_1 \leq U_0$$

$6 \leq 16$ محققة

- نفرض صحة العلاقة من اجل n :

$$U_{n+1} \leq U_n \quad *$$

- نبرهن صحة العلاقة من اجل $n+1$:

$$U_{n+2} \leq U_{n+1}$$

- ننطلق من * :

$$U_{n+1} \leq U_n$$

- نضيف 20 للأطراف:

$$U_{n+1} + 20 \leq U_n + 20$$

- نجذر الأطراف:

$$\sqrt{U_{n+1} + 20} \leq \sqrt{U_n + 20}$$

وهو المطلوب $U_{n+2} \leq U_{n+1}$

السؤال الخامس:

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + U_n}{2}} \end{cases}$$

1) سنبرهن العلاقة التالية من خلال الاثبات بالتدريج:

- نبرهن صحة العلاقة من اجل $n = 0$:

$$0 \leq U_0 \leq 1$$
$$0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

- نفرض صحة العلاقة من اجل n:

$$0 \leq U_n \leq 1 \quad *$$

- نبرهن صحة العلاقة من اجل $n+1$:

$$0 \leq U_{n+1} \leq 1$$

- ننطلق من *:

$$0 \leq U_n \leq 1$$

- نضيف 1 لجميع الأطراف:

$$1 \leq U_n + 1 \leq 2$$

- نقسم الأطراف على 2 :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{U_n + 1}{2} \leq 1$$

- نجذر الأطراف:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{U_n + 1}{2}} \leq \sqrt{1}$$

وهو المطلوب $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

2) نبرهن العلاقة الاتية: $U_n = \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$ من خلال الاثبات بالتدريج:

- نبرهن صحة العلاقة من اجل $n = 0$:

$$U_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^0}\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

- نفرض صحة العلاقة من اجل n :

$$U_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$$

- نبرهن صحة العلاقة من اجل $n+1$:

$$U_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}\right)$$

- لدينا $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$
- نعوض $U_n = \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$ في $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$

$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1 + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n \times 2}\right) - 1}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}\right)}{2}} = \left|\cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}\right)\right|$$

- لكن $U_n > 0$ ومنه $U_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)$

اذاً U_{n+1} محققة

انتهى الحل