مسألة شاملة

<u>الشق الأول :</u> نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجيّاً وفق $\begin{cases} u_0 = \dfrac{-7}{3} , u_1 = -6 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 4n \end{cases}$ المطلوب:

A- عيّن الأعداد الحقيقيّة a,b,c بحيث تحقّق المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $t_n = an^2 + bn + c$ العبارة التدريجيّة السابقة نفسها ، أي $t_{n+2} = 3t_{n+1} - 2t_n + 4n$.

B- بفرض $t_n = -2n^2 - 2n$:

① لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $v_n = (u_{n+1} - u_n) - (t_{n+1} - t_n)$.

أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسيّة ، يُطلَب تعيين عبارة v_n بدلالة n .

② لتكن $(w_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $w_n = (u_{n+1} - 2u_n) - (t_{n+1} - 2t_n)$.

أثبت أنّ المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ ثابتة ، و احسب قيمتها .

③ استنتج أنّ $u_n = \dfrac{1}{3}2^n - \dfrac{8}{3} - 2n^2 - 2n$.

<u>الشق الثاني :</u> ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \dfrac{1}{3}e^{2x} - \dfrac{8}{3}e^x + 2x + 3$. **المطلوب :**

① أثبت أنّ $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضليّة $y'' = 3y' - 2y + 4x$.

② ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها ، و دل على القيم الحديّة .

③ أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x + 3$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$ ، و ادرس وضعه النسبي .

④ أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α يحقّق $\alpha \in]-\ln 3, -\ln 2[$.

مساعدة: اعلم أنّ $\dfrac{58}{27} < 2\ln(3)$ و $\dfrac{7}{4} > 2\ln(2)$

⑤ في معلم متجانس ارسم Δ ثم ارسم C .

⑥ احسب $A(\alpha)$ مساحة السطح المحصور بين C و Δ و المستقيمين $x = \alpha$ و $x = 0$ (حيث $\alpha < 0$) .

⑦ احسب $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$.

⑧ استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g : x \mapsto \dfrac{1}{3}e^{2x} - \dfrac{8}{3}e^x + 2x - 3$.

---------- انتهت المسألة ----------

أ.عبد الملك خير الله
0964621810