سـلسلة الـبكلوريا

((الجبر))

مسألتين في

الأعداد العقدية

مع الحل

شاملتين لمعظم أفكار درس الأعداد العقدية

الثالث الثانوي العلمي

إعداد : أيهم الشاعر

Facebook: Aiyham Alshaer
aiyham1989@Gmail.com

المسألة الأولى:

لتكن المعادلة: $Z^3 - 6Z^2 + 25Z = 0$ والمطلوب:

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة السابقة.

2. حلل كثيرة الحدود السابقة إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى.

3. إذا كان $Z_1, Z_2 \neq 0$ حيث: Z_1, Z_2 أحد حلول المعادلة السابقة أوجد: $Z_1 + Z_2$, $Z_1 - Z_2$, $Z_1.Z_2$, $\frac{Z_1}{Z_2}$

4. بيّن أن : $\overline{Z_1} = Z_2$ ثم اوجد: $|Z_1|$, $|Z_2|$ ، ماذا تلاحظ؟

5. تحقق أن: $\frac{Z_2}{2}$ جذر للمعادلة: $2Z^2 - 3Z + 8 = 0$ ، ثم أوجد الجذر الآخر واكتب $2Z^2 - 3Z + 8 = 0$ على شكل جداء عوامل من الدرجة الأولى.

6. أوجد الجذرين التربيعيين للعد المركب Z_1 .

7. مثّل هندسياً:

OM_1 صورة Z_1 ، OM_2 صورة Z_2 ، OM صورة $Z_1 + Z_2$ ، OM' صورة $Z_1 - Z_2$ ، ON صورة $-2Z_2$

8. ماذا تمثل مجموعة النقاط $M(Z)$ في المستوي التي تحقق الأعداد المركبة Z التي تمثلها:

$$\left| |Z - Z_1| - |Z - Z_2| \right| = 4$$

ثم اكتب المعادلة الممثلة لمجموعة النقاط $M(Z)$.

المسألة الثانية:

ليكن العددين المركبين: $Z_1 = \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}$, $Z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}$ والمطلوب:

1. اكتب Z_1 بالشكل الجبري وبالشكل الأسي ثم استنتج النسب المثلثية للزاوية $\dfrac{\pi}{12}$.

2. تأكد بإستخدام دستورا أويلر من صحة حلك في الطلب السابق.

3. استخدم دستور دوموافر لبرهان أن: $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. اكتب Z_2 بالشكل الجبري وبالشكل الأسي.

5. اكتب بالشكل الأسي كلاً ممايلي: $Z_1.Z_2$, $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ ثم أوجد: $(Z_2)^{18}$, $(Z_1)^{48}$.

6. أوجد الجذور التكعيبية للعدد Z_1 .

7. أوجد الجذور من المرتبة الرابعة للعدد Z_2 .

8. إذا كانت النقاط: $A(Z_1), B(Z_2), C(Z_3)$ حيث $Z = a + i$

ناقش بحسب قيم a متى يكون المثلث ABC قائم في B ومتى تكون النقاط A, B, C على استقامة واحدة.

9. أوجد إحداثيات M منتصف القطعة المستقيمة AB.

حل المسالة الأولى:

1) حل المعادلة:
$$Z^3 - 6Z^2 + 25Z = 0$$
$$\Longrightarrow \quad Z(Z^2 - 6Z + 25) = 0$$
إما $Z=0$ أو $Z^2 - 6Z + 25 = 0$

بإستخدام المميز نوجد حل المعادلة $Z^2 - 6Z + 25 = 0$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 100 = -64 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-64} = \sqrt{64i^2} = 8i$$
$$Z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-8i}{2} = 3-4i \quad , \quad Z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+8i}{2} = 3+4i$$
وبالتالي حلول المعادلة في $\mathbb{C}$ هي: $Z \in \{0, 3+4i, 3-4i\}$

2) تحليل كثيرة الحدود:
$$Z^3 - 6Z^2 + 25Z$$

3) لدينا: $Z_1 = 3+4i \;,\; Z_2 = 3-4i$ ولنوجد:
$$Z_1 + Z_2 = (3+4i) + (3-4i) = (3+3) + i(4-4) = 6$$
$$Z_1 - Z_2 = (3+4i) - (3-4i) = (3-3) + i(4+4) = 8i$$
$$Z_1 . Z_2 = (3+4i).(3-4i) = 9 - 12i + 12i + 16 = 25$$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{3+4i}{3-4i} = \frac{(3+4i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9+12i+12i-16}{9+16} = \frac{-5+24i}{25} = -\frac{5}{25} + \frac{24}{25}i$$

4)
$$\overline{Z_1} = \overline{(3+4i)} = 3-4i = Z_2$$
$$|Z_1| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5 \;,\; |Z_2| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$
نلاحظ أن: $|Z_1| = |Z_2|$ أي أن للعددين المترافقين الطويلة ذاتها.

5) لدينا: $\frac{Z_2}{2} = \frac{3-4i}{2} = \frac{3}{2} - 2i$ نعوّض $\frac{Z_2}{2}$ في المعادلة: $2Z^2 - 3Z + 8 = 0$ فنجد:
$$2\left(\frac{3}{2}-2i\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}-2i\right) + 8 = 2\left(\frac{9}{4} - 3i - 4\right) - \frac{9}{2} + 6i + 8 = \frac{9}{2} - 6i - 8 - \frac{9}{2} + 6i + 8 = 0$$
ويكون الجذر الثاني هو: $\frac{3}{2} + 2i$

ولنكتب $2Z^2 - 3Z + 8$ على شكل جداء عوامل من الدرجة الاولى:

$$2Z^2 - 3Z + 8 = \left(Z - \left(\frac{3}{2} - 2i\right)\right)\left(Z - \left(\frac{3}{2} + 2i\right)\right) = \left(Z - \frac{3}{2} + 2i\right)\left(Z - \frac{3}{2} - 2i\right)$$

(6 نفرض $\omega = x + yi$ جذر تربيعي للعدد المركب Z_1 عندئذٍ:

$$x^2 - y^2 = a = 3 \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \qquad (2)$$

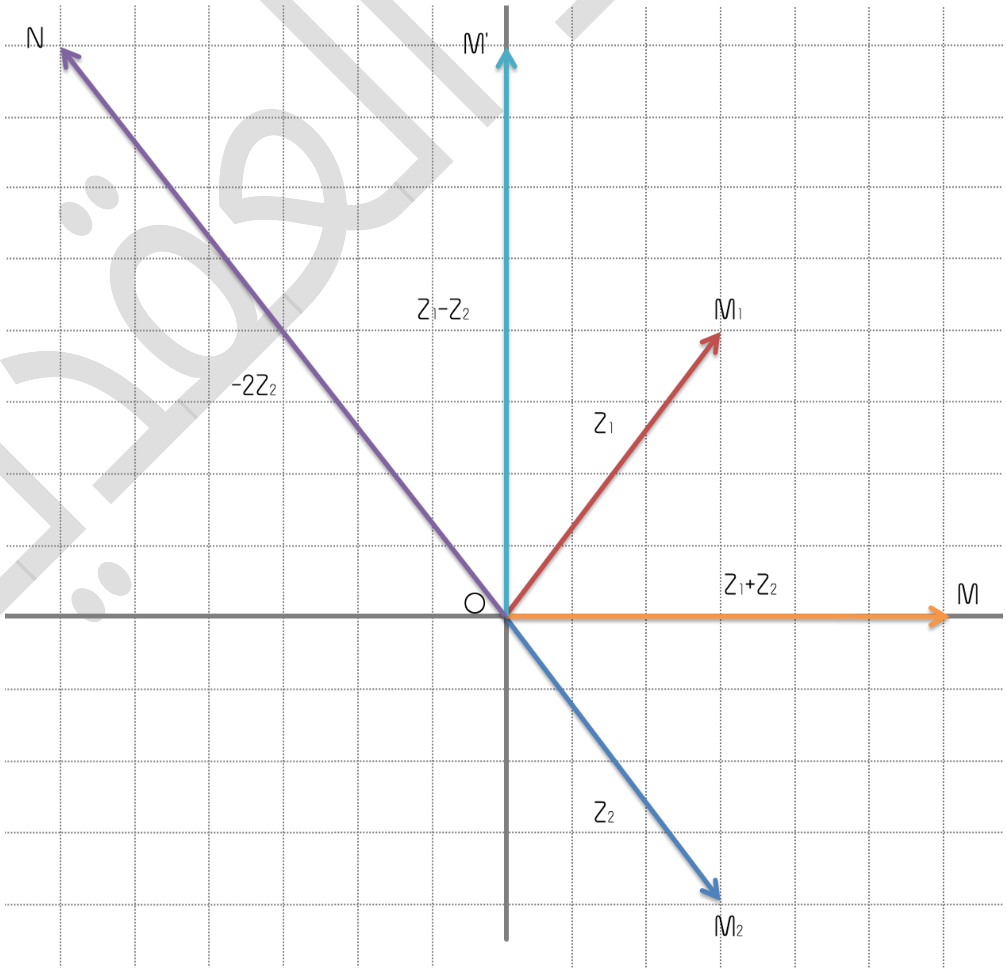
$$xy = \frac{b}{2} = 2 \qquad (3)$$

بالحل المشترك للمعادلتين $(1),(2)$ نجد: $x^2 = 4$ ومنه: $x \in \{-2,2\}$ أي أن: $y^2 = 1$ ومنه: $y \in \{-1,1\}$

من المعادلة (3) نجد أن $x.y > 0$ أي أن: $(x,y) = (2,1)$ أو $(x,y) = (-2,-1)$

فالجذران التربيعيان المركب Z_1 هما: $\omega = 2 + i$ و $\omega = -2 - i$

(7 OM_1 صورة Z_1 ، OM_2 صورة Z_2 ، OM صورة $Z_1 + Z_2$ ، OM' صورة $Z_1 - Z_2$ ، ON صورة $-2Z_1$



8) نلاحظ أن القيمة المطلقة للفرق بين بعد مجموعة النقاط $M(Z)$ عن Z_1, Z_2 يساوي مقدار ثابت (10) وبالتالي

فإن مجموعة النقاط $M(Z)$ تمثل قطع زائد تعطى معادلته بالشكل:

$$\left|\, |Z - Z_1| - |Z - Z_2| \,\right| = 4$$

$$\left|\, |(x+iy)-(3+4i)| - |(x+iy)-(3-4i)| \,\right| = 4$$

$$\left|\, |(x-3)+(y-4)i| - |(x-3)+(y+4)i| \,\right| = 4$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = \pm 2 + \sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2 = 4 \pm 4\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2} + (x-3)^2+(y+4)^2$$

$$\pm 4\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2} = (y-4)^2-(y+4)^2-16 = y^2-8y+16-y^2-8y-16-16$$

$$\pm 4\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2} = 32-16y \Rightarrow \pm\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2} = 8-4y$$

$$(x-3)^2+(y+4)^2 = (8-4y)^2$$

$$x^2-6x+9+y^2+8y+16 = 64-64y+16y^2$$

$$x^2-6x+9+y^2+8y+16-64+64y-16y^2 = 0$$

$$x^2-6x-15y^2+72y-39 = 0$$

انتهى حل المسألة الأولى

حل المسألة الثانية:

(1

$$Z_1=\frac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}=\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{3+1}=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\quad(1)$$

نفرض: $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $z_2=\sqrt{3}+i$ فيكون:

$$|r_1|=\sqrt{2+2}=2\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x}{|r_1|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2mm]\sin\theta=\dfrac{y}{|r_1|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$|r_2|=\sqrt{3+1}=2\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x}{|r_2|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\[2mm]\sin\theta=\dfrac{y}{|r_2|}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}\Rightarrow z_2=\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$Z_1=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\qquad(2)$$

بالمقارنة بين (1), (2) نجد: $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{-i\frac{\pi}{12}}}{2}=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)-i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{2}$$

$$=\frac{2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}-e^{-i\frac{\pi}{12}}}{2i}=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{2i}$$

$$=\frac{2i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{2i}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(3

$$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\cos 2\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin 2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2+2i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$=\left(\frac{6+2\sqrt{12}+2}{16}-\frac{6-2\sqrt{12}+2}{16}\right)+2i\left(\frac{6-2}{16}\right)=\frac{4\sqrt{12}}{16}+i\,\frac{8}{16}=\frac{8\sqrt{3}}{16}+i\,\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}$$

بالمقارنة نجد: $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ ,\ \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(4

$$Z_2=\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}-i+3i-\sqrt{3}}{1+3}=\frac{2\sqrt{3}}{4}+i\,\frac{2}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}$$

نفرض: $z_4=1-i\sqrt{3}\quad,\quad z_3=\sqrt{3}-i$ فيكون:

$$|r_3|=\sqrt{3+1}=2\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\frac{x}{|r_3|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{y}{|r_3|}=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow z_3=\sqrt{3}+i=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$|r_4|=\sqrt{1+3}=2\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\frac{x}{|r_4|}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{y}{|r_4|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{3}\Rightarrow z_4=1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$Z_2=\frac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

(5

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$Z_1.Z_2=e^{i\frac{\pi}{12}}.e^{i\frac{\pi}{6}}=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(Z_1)^{48}=\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{48}=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{48}=\cos 48\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin 48\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos 4\pi+i\sin 4\pi=1$$

$$(Z_2)^{18}=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{18}=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{18}=\cos 18\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin 18\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos 3\pi+i\sin 3\pi=-1$$

(6

$$Z_1=e^{i\frac{\pi}{12}}\Rightarrow z=\omega_k=\sqrt[3]{1}.e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{12}}{3}+\frac{2\pi k}{3}\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{36}+\frac{2\pi k}{3}\right)}$$

$$k=0\Rightarrow\omega_0=e^{i\left(\frac{\pi}{36}\right)}$$

$$k=1\Rightarrow\omega_1=e^{i\left(\frac{\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{i\left(\frac{35\pi}{36}\right)}$$

$$k=2\Rightarrow\omega_2=e^{i\left(\frac{\pi}{36}+\frac{4\pi}{3}\right)}=e^{i\left(\frac{49\pi}{36}\right)}$$

(7

$$Z_2=e^{i\frac{\pi}{6}}\Rightarrow z'=\omega'_k=\sqrt[3]{1}.e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{4}+\frac{2\pi k}{4}\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right)}$$

$$k=0\Rightarrow\omega'_1=e^{i\left(\frac{\pi}{24}\right)}$$

$$k=1\Rightarrow\omega'_1=e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i\left(\frac{13\pi}{24}\right)}$$

$$k=2\Rightarrow\omega'_2=e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{4\pi}{2}\right)}=e^{i\left(\frac{49\pi}{24}\right)}$$

$$k=3\Rightarrow\omega'_3=e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{6\pi}{2}\right)}=e^{i\left(\frac{73\pi}{24}\right)}$$

8) الشرط اللازم والكافي ليكون المثلث المثلث ABC في B هو أن يتعامد AB مع BC أي أن يكون العدد:

$\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_2}$ عدد تخيلي بحتاً غير صفري

الشرط اللازم والكافي لتكون النقاط A, B, C على استقامة واحدة أن يكون العدد: $\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_2}$ حقيقياً

$$\frac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}}{a + i - \frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\right)}{\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(1 - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{4}\right)}{\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{4}\right)\right)\left(\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - i\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{\left(\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - i\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}\right)\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{4}\right)\right) + i\left(\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{4}\right)\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}\right)\right)}{\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

يكون العدد: $\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_2}$ تخيلي بحت إذا كان الأمثال الحقيقية معدومة:

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}\right)\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{4}\right) = 0$$

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(2a - \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\right) = 0$$

$$2a\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right) - \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\right) = 4\sqrt{2} - 4$$

$$a = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$$

وهي القيمة التي تجعل المثلث ABC في B

يكون العدد: $\frac{Z_1-Z_2}{Z_3-Z_2}$ حقيقي إذا كان الأمثال التخيلية معدومة:

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{4}\right)\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}\right)=0$$

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\right)\left(2a-\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=0$$

$$2a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\right)=2\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\right)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{2}-\sqrt{6}-2\sqrt{3}-4$$

$$a=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}-2\sqrt{3}-4}{2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\right)}$$

وهي القيمة التي تجعل النقاط $A\,,B\,,C$ على استقامة واحدة.

9) منتصف القطعة المستقيمة AB تمثل العدد: $\frac{Z_1+Z_2}{2}$

$$\frac{Z_1+Z_2}{2}=\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}}{2}=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{4}\right)}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{8}+i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{8}$$

وبالتالي إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة AB : $M\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{8}\right)$

انتهى حل المسألة الثانية