كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الثانية   الفصل الثاني

توابع ومتغيرات

تحليل (4) -2012

د.غادة جوجة

إعداد

مكتبة روّاد الجامعة الفرقان أمام باب المدينة الجامعية الوحدة 16

هـ 2678676

الفضاءات المتجهية الشعاعية

* تعريف:

لتكن X مجموعة ما غير خالية ولنعرف على X عمليتين الاولى داخلية ونرمز لها بالرمز $+$ $(+ : X \times X \longrightarrow X)$

والثانية خارجية مجموعة مؤثراتها الحقل $\mathbb{R}$ نرمز لها بالرمز $\cdot$ $(\cdot : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X)$

نقول عن X مزود بهاتين العمليتين أنها تشكل فضاءاً "متجهياً" إذا تحققت الشروط الآتية:

1) $x + y = y + x$

وذلك أياً كان $x, y \in X$

2) $(x+y) + z = x + (y+z)$

وذلك أياً كان $x, y, z \in X$

3) يوجد عنصر من X نرمز له بـ θ (صفر الفضاء) من أجل أن يكون:

$x + \theta = x$

4) يوجد لكل عنصر $x \in X$ مقابل نرمز له بـ $-x$ من أجله يكون:

$x + (-x) = \theta$

ويسمى نظير العنصر x بالنسبة لعملية الجمع

أي أن $(X, +)$ تشكل زمرة تبديلية.

(5) $a\cdot(x+y)=a\cdot x+a\cdot y$

وذلك أياً كان $x,y\in X$ & $a\in\mathbb{R}$

(6) $(a+b)\cdot x=a\cdot x+b\cdot x$

وذلك أياً كان $x\in X$ & $a,b\in\mathbb{R}$

(7) $(a\cdot b)\cdot x=a\cdot(b\cdot x)$

وذلك أياً كان $x\in X$ & $a,b\in\mathbb{R}$

(8) أياً كان $x\in X$ فإن:

$$1\cdot X=X$$

مثال هام جداً:

إن $\mathbb{R}^n$ مجموعة جميع الجمل المرتبة المؤلفة من n مركبة حقيقية

$$\left(\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\dots,x_n)\ ;\ x_i\in\mathbb{R}\quad\forall i=1,\dots,n\}\right)$$

تشكل فضاءً متجهياً وذلك إذا عرفنا عليها عمليتي الجمع والضرب على النحو الآتي:

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)\ ;\ x,y\in\mathbb{R}^n$$

$$a\cdot x=(a\cdot x_1,\dots,a\cdot x_n)\ ;\ a\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n$$

حيث العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع يتعرف على النحو:

$$0 = (\underbrace{0, \ldots\ldots, 0}_{n \text{ مركبة}})$$

أما نظير العنصر x فهو يتعرف على النحو:

$$-x = (-x_1, \ldots\ldots, -x_n)$$

مثال 2 :

إن مجموعة جميع التوابع المعرفة و المستمرة على المجال $[a, b]$ تشكل فضاءً متجهياً و ذلك إذا عرفنا عليها عمليتي الجمع و الضرب على النحو الآتي :

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t)$$
$$(a \cdot x)(t) = a\, x(t)$$

حيث يتعرف العنصر الحيادي على أنه التابع الصفري أي : $0(t) = 0$

أما نظير العنصر x فهو يتعرف بالمساواة :

$$(-x)(t) = -x(t)$$

نرمز لهذا الفضاء بالرمز $C[a, b]$.

الفضاء المنظم : normed space :

* تعريف *

ليكن X فضاءً متجهياً ، إن النظيم على X و الذي نرمز له بالرمز $\|\cdot\|$ هو تابع حقيقي (لأن المستقر $\mathbb{R}$) غير سالب معرف على X ، أي :

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$$

وتحقق الشروط الآتية:

1) أياً كان $x \in X$ فإن:

$$\|x\| \geq 0$$

$$\|x\| = 0 \iff x = \theta$$

2) أياً كان $x \in X$ و $a \in \mathbb{R}$ فإن:

$$\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$$

3) أياً كان $x, y \in X$ فإن:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(متراجحة مثلث)

تسمى الثنائية $(X, \|\cdot\|)$ "فضاءاً منظماً".

مثال جداً هام:

الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^n$ هو فضاء منظم يتعرف النظيم فيه بالمساواة:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

وهو يحقق شروط النظيم لأن:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq 0$$

$$\|x\| = 0 \iff \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = 0$$

بالتربيع:

$$\iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1^2=0 \Leftrightarrow x_i=0 \Leftrightarrow x=\theta$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad \forall i$$

③

$$\|a x\|=\|(a x_1, a x_2, ----, a x_n)\|$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}(a x_i)^2\right)^{1/2}=|a|\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

$$=|a| \cdot \|x\|$$

④

$$\|x+y\|=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right)^{1/2}$$

استناداً إلى علاقة كوشي نستطيع أن نقول أن:

$$\|x+y\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}=\|x\|+\|y\|$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$$

ملحوظة:

علاقة كوشي هي:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

مثال 2 :

ليكن $C[a,b]$ فضاء مجموعة جميع التوابع المعرفة والمستمرة على المجال $[a,b]$

إن هذا الفضاء يؤول إلى فضاء منظم إذا عرفنا فيه النظيم بالمساواة :

$$\|x\| = \max|x(t)| \quad ; a \leq t \leq b$$

ومن الواضح أنه يحقق

مسلمات النظيم $C[a,b]$:

1) $|x(t)| \geq 0 \Rightarrow \max\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)| \geq 0$

$\Rightarrow \|x\| \geq 0$

* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \max\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)| = 0$

$\Leftrightarrow |x(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

2) $\|ax\| = \max\limits_{a\leq t\leq b}|(ax)(t)| = \max\limits_{a\leq t\leq b}|a(x)(t)|$

$= |a| \max\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)|$

$= |a| . \|x\|$

$\Rightarrow \|ax\| = |a| . \|x\|$

$$\therefore |x(t)+y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)|$$

$$\leq \max_{a\leq t\leq b} |x(t)| + \max_{a\leq t\leq b} |y(t)| = \|x\| + \|y\|$$

$$\Rightarrow |x(t)+y(t)| \leq \|x\| + \|y\|$$

نأخذ max الطرفين :

$$\max_{a\leq t\leq b} |x(t)+y(t)| \leq \|x\| + \|y\|$$

أعداد ثابتة الـ max هو نفسه

$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

انتهت المحاضرة الاولى

تعريف الجداء الداخلي:

ليكن X فضاءً متجهياً حقيقياً، إن الجداء الداخلي على الفضاء X هو:
كل تابع معرّف على $X \times X$ ويأخذ قيمة في $\mathbb{R}$ ونرمز له بالرمز:
$\langle \cdot , \cdot \rangle$ أو $(\cdot , \cdot)$ حيث:

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow \langle x,y \rangle$$

ويحقق الموضوعات الآتية:

1) $\forall x \in X ; \quad \langle x,x \rangle \geq 0$
$$\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

2) $\forall x,y \in X ; \quad \langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$

3) $\forall x,y,z \in X ; \quad \langle x+y, z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$
$$\langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$$

4) $\forall a \in \mathbb{R} , x,z \in X : \langle ax, z \rangle = \langle x, az \rangle = a \langle x,z \rangle$

تسمى الثنائية $(X , \langle \cdot , \cdot \rangle)$ فضاء جداء داخلي.

ملاحظة:

فضاء جداء داخلي هو فضاء متجهي ويحقق الشروط الأربعة السابقة.

ملاحظة:

إذا كان X فضاءً متجهياً مركباً (عقدياً) فإن الشرط 2 من الجداء الداخلي والشرط 4 يؤولان إلى الشكل:

③ $\forall x,y \in X : \langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$ مرافق

④ $\forall x,z \in X, a \in \mathbb{C} : \langle x, az \rangle = \bar{a} \langle x,z \rangle$

◆ **مثال** ◆

لنعرف على الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^n$ التابع:

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

على النحو:

$$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- إن التابع يعرف جداءً داخلياً، أي أن:
$\mathbb{R}^n$ مع التابع المعرف سابقاً هو فضاء جداء داخلي:

1) * $\langle x,x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0 \Longrightarrow$

$$\langle x,x \rangle \geq 0$$

* $\langle x,x \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = 0$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\iff x_i^2 = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\iff |x_i| = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\iff x_i = 0 \iff x = \theta$$

لأننا نعمل في $\mathbb{R}$ ← الضرب تبديلي

2) $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y,x\rangle$

إذاً: $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

3) $\langle x+y,z\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i) z_i$

وبما أننا نعمل على $\mathbb{R}$ فالضرب تجميعي (وتوزيعي على الجمع):

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + y_i z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i$$

$$\Longrightarrow \langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$$

4) $\langle ax,z\rangle = \sum_{i=1}^{n} (ax_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} a(x_i z_i)$

لأننا نعمل في $\mathbb{R}$

$$= a\sum_{i=1}^{n} x_i z_i = a\langle x,z\rangle$$

$$\Longrightarrow \langle ax,z\rangle = a\langle x,z\rangle$$

إذاً: من الشروط السابقة:

$\mathbb{R}^n$ مع التابع المعرف سابقاً هو فضاء جداء داخلي.

مثال 2

لنعرف على فضاء التوابع المعرفة والمستمرة على المجال $[a,b]$ التابع:

$$\langle \cdot,\cdot\rangle : C[a,b]\times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

على النحو:

$$\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)\cdot y(t)\,dt$$

- من الواضح أنه استناداً إلى خواص تكامل ريمن:
أن التابع المعطى يعرّف جداء "داخلياً"، تحقق من ذلك؟

تعريف:

ليكن X فضاء جداء داخلي ولنعرف على X التابع:

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

- إن التابع $\|\cdot\|$ المعرّف بالمساواة السابقة يُسمى بالنظيم المولد بالجداء الداخلي، وسنبيّن لاحقاً أن هذا التابع يحقق جميع شروط النظيم.

مبرهنة: مبرهنة شوارتز:

إن الجداء الداخلي والنظيم المولد به يحققان المتراجحة الآتية:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in X$$

قيمة مطلقة لأننا نشتغل على $\mathbb{R}$

- وتتحقق المساواة في الحالة التي يكون فيها:
x و y مرتبطان خطياً أي: x ينتج عن y بضربه بعدد.

البرهان:

- لدينا: $\|x - ay\|^2 \geq 0$

ولدينا:

$$\|x - ay\|^2 = \left(\sqrt{\langle x - ay, x - ay\rangle}\right)^2$$

$$= \langle x - ay , x - ay \rangle$$

$\Longrightarrow$

$$\|x - ay\|^2 = \langle x, x\rangle + \langle -ay, x\rangle + \langle x, -ay\rangle + \langle -ay, -ay\rangle$$

حسب الخاصة (3)

$$= \langle x, x\rangle - a\langle y, x\rangle - a\langle x, y\rangle + a^2\langle y, y\rangle$$

حسب الخاصة (4)

$$= \langle x, x\rangle - a\langle y, x\rangle - a\left[\langle x, y\rangle - a\langle y, y\rangle\right]$$

- نختار a بحيث ينعدم ما بين القوسين، أي:

$$a = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

عندئذ نجد:

$$\|x - ay\|^2 = \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle y, x\rangle$$

$\Longleftarrow$ حسب الخاصة (2):

$$= \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle x, y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle - \frac{(\langle x, y\rangle)^2}{\langle y, y\rangle}$$

وبما أن:

$$\Longleftarrow \|x - ay\|^2 \geqslant 0$$

$$\|x\|^2 - \frac{(\langle x, y\rangle)^2}{\langle y, y\rangle} \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 - \frac{(\langle x,y\rangle)^2}{\|y\|^2} \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 \geqslant \frac{(\langle x,y\rangle)^2}{\|y\|^2}$$

$$\Rightarrow (\langle x,y\rangle)^2 \leqslant \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \Rightarrow$$ بالجذر

عدد حقيقي

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

وباستبدال كل x بـ ay نجد أن المتراجحة تؤول إلى مساواة:

$$|\langle ay,y\rangle| = \|ay\| \cdot \|y\|$$

انتهت المحاضرة الثانية

* تتمة البرهان *

- برهان: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$

لنفرض أن x و y مرتبطان خطياً أي:

$x = ay \; ; \; a \in \mathbb{R}$

عندئذٍ بالتعويض في الطرف الأيسر من متراجحة شوارتز، يمكن أن نكتب:

الطرف الأول من المتراجحة $S_1 = |\langle x,y\rangle| = |\langle ay,y\rangle|$

حسب الخاصة (4)

$= |a\langle y,y\rangle|$

حسب خواص القيمة المطلقة ⟸

$= |a|.|\underbrace{\langle y,y\rangle}_{\text{موجب}}| = |a|.\langle y,y\rangle = |a|.\|y\|^2$

الطرف الثاني من المتراجحة $S_2 = \|x\|.\|y\| = \|ay\|.\|y\| = |a|.\|y\|.\|y\|$

$= |a|.\|y\|^2$

$\Rightarrow |\langle x,y\rangle| = \|x\|.\|y\|$

وذلك عندما تكون $x = ay$.

◆ مبرهنة ◆

إذا كانت X فضاء جداء داخلي فإن التابع:

$\|.\| : X \to \mathbb{R}$

المعرف بالعلاقة: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

تحقق جميع موضوعات النظيم.

البرهان: المطلوب: برهان أن التابع المعطى تحقق جميع موضوعات النظيم.

1) $\langle x, x\rangle \geq 0 \Longrightarrow \|x\| \geq 0$

وهذا صحيح لأننا نعمل على فضاء جداء داخلي.

$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Longleftrightarrow \langle x, x\rangle = 0$

حسب خواص الجداء الداخلي

$\Longleftrightarrow x = \theta$

2) $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle}$

حسب خواص الجداء الداخلي 4

$= \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x\rangle}$

$= |\alpha| \cdot \|x\|$

3) $\|x+y\| = \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle}$

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

حسب خواص الجداء الداخلي 3

$= \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$

حسب خواص الجداء الداخلي 2

$= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$

$= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$

حسب خواص القيمة المطلقة

$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2$

حسب شوارتز :

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Longrightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Longrightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

◆ ملاحظة هامة :

استنادا إلى ما سبق يمكن القول أن كل جداء داخلي $\langle \cdot,\cdot \rangle$ يُعرف نظيماً $\|\cdot\|$ يُعطى بالمساواة:

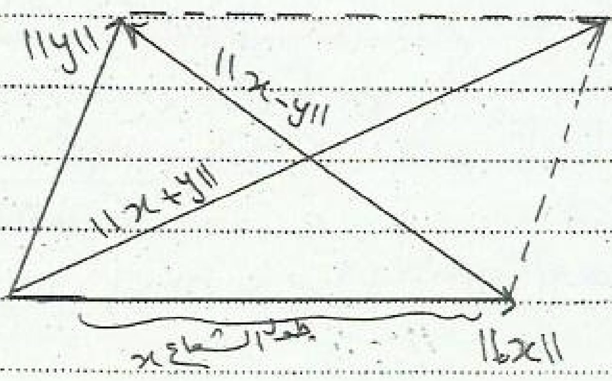
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

أي أن كل فضاء جداء داخلي هو فضاء متجهي منظم، السؤال هنا:
متى يكون النظيم مولداً من جداء داخلي ؟؟

- حتى يكون النظيم مولداً من جداء داخلي يجب أن تتحقق المساواة الآتية :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

وهي تُسمى بمساواة قاعدة متوازي الأضلاع.



مثال ♦ ورد على نظم في الامتحانات

لنعرف على $\mathbb{R}^2$ نظيماً بالعلاقة:

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| \quad ; \quad x = (x_1, x_2)$$

* برهن أن هذا النظيم لا يتولد من جداء داخلي

الحل:

(لإثبات النفي يكفي إيراد مثال)

لنأخذ:

$$x = (1, -1) \quad , \quad y = (1, 1)$$

لدينا:

$$\rightarrow \|x+y\| = \|(1+1, -1+1)\|$$

$$= \|(2, 0)\| = |2| + |0| = 2$$

$$\Longrightarrow \|x+y\|^2 = 4$$

$$\rightarrow \|x-y\| = \|(1-1, -1-1)\| = \|(0, -2)\|$$

$$= |0| + |-2| = 0 + 2 = 2$$

$$\Longrightarrow \|x-y\|^2 = 4$$

$$\rightarrow \|x\| = \|(1, -1)\| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$$

$$\Longrightarrow \|x\|^2 = 4$$

$$\rightarrow \|y\| = \|(1, 1)\| = |1| + |1| = 1 + 1 = 2$$

$$\Longrightarrow \|y\|^2 = 4$$

ومنه: نأخذ الطرف الأول:

$$S_1 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4 + 4 = 8$$

نأخذ الطرف الثاني:

$$S_2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(4+4) = 2(8) = 16$$

$$\Longrightarrow S_1 \neq S_2$$

أي أن النظيم غير مُولد من جداء داخلي وذلك لعدم تحقق قاعدة متوازي الأضلاع .

ملحوظة :

إذا جاء في الامتحان هل يُولد من جداء داخلي أو برهن أنه لا يولد من جداء داخلي نعطيها بمثال

مثال 2

برهن أن النظيم : $\|x\| = \max\limits_{0\leq t\leq 1} |x(t)|$

المُعرف على الفضاء $C[0,1]$ لا يُولد من جداء داخلي

الحل : نبحث عن مثال :

لنأخذ : $x(t)=1 \ , \ y(t)=t$

$\rightarrow \|x+y\| = \max\limits_{0\leq t\leq 1} |x(t)+y(t)| = \max\limits_{0\leq t\leq 1} |1+t| = 2$

$\Rightarrow \|x+y\|^2 = 4$

$\rightarrow \|x-y\| = \max\limits_{0\leq t\leq 1} |x(t)-y(t)| = \max\limits_{0\leq t\leq 1} |1-t| = 1$

$\Rightarrow \|x-y\|^2 = 1$

$\rightarrow \|x\| = \max\limits_{0\leq t\leq 1} |x(t)| = \max\limits_{0\leq t\leq} |1| = 1 \Rightarrow \|x\|^2 = 1$

$\rightarrow \|y\| = \max\limits_{0\leq t\leq 1} |y(t)| = \max\limits_{0\leq t\leq} |t| = 1 \Rightarrow \|y\|^2 = 1$

ومنه:

$$S_1 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4+1 = 5$$

$$S_2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 2(1+1) = 4$$

$$\Rightarrow S_1 \neq S_2$$

أي أن النظيم غير مولد من جداء داخلي وذلك لعدم تحقق قاعدة متوازي الأضلاع.

ملاحظة:
سبق أن وجدنا أن كل فضاء جداء داخلي هو فضاء خطي منظم إلا أنه ليس من الضروري أن يكون كل فضاء منظم خطي هو فضاء جداء داخلي

الفضاء المتري:

تعريف: لتكن X مجموعة غير خالية لنعرّف على X التابع:

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow d(x,y)$$

إذا حقق d الموضوعات الآتية:

1) $d(x,y) \geq 0 \;,\; d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (متراجحة المثلث)

وذلك أياً كان $x,y,z \in X$

نسمي d مسافة على X، أما X فتسمى المجموعة الرديفة كما تسمى الثنائية (X,d) فضاءً مترياً.

- يمكن البرهان على أن كل نظيم مُعرف على فضاء متجهي يعرف مسافة على X تُعطى بالمساواة:

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

* المسافة d تُحقق الشروط (أي برهان أن كل فضاء خطي منظم هو فضاء متري)

1) $d(x,y)=\|x-y\|\geqslant 0$

$d(x,y)=0 \Leftrightarrow \|x-y\|=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

2) $d(x,y)=\|x-y\|=\|(-1)(y-x)\|=|-1|\cdot\|y-x\|$

$=\|y-x\|=d(y,x)$.

3) $d(x,y)=\|x-y\|=\|x-z+z-y\|$

$\leqslant \|x-z\|+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y)$

$\Longrightarrow d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$

ملاحظة هامة

سبق أن وجدنا أن كل فضاء خطي منظم هو فضاء متري والسؤال هنا: هل كل مسافة يكون مولدة من نظيم

للرد على هذا التساؤل نطرح التوطئة التالية:

(توطئة لاتغير الانسحاب)

- توطئة لاتغير الانسحاب:

إذا كان d مسافة مولدة بالنظيم $\|\cdot\|$ على فضاء متجهي X فإن:

1) $d(x+z,y+z)=d(x,y)$

2) $d(ax,ay)=|a|\,d(x,y)$

وذلك أياً كان $a\in\mathbb{R}$ & $x,y,z\in X$

البرهان:

1) $d(x+z, y+z) = \|x+z-y-z\| = \|x-y\|$
$= d(x,y)$

2) $d(ax, ay) = \|ax-ay\| = \|a(x-y)\|$
$= |a| . \|x-y\| = |a| \, d(x,y)$

مثال

لتكن S مجموعة جميع المتتاليات الحقيقية أي:
$(x \in S : x = \{x_i\}_{i \geq 1} \subset \mathbb{R})$

المحدودة أو غير المحدودة.

لنعرف على S عمليتي الجمع والضرب بسلمي على النحو:

$$x+y = \{x_i\}_{i\geq 1} + \{y_i\}_{i\geq 1} = \{x_i + y_i\}_{i \geq 1}$$

$$ax = a\{x_i\}_{i\geq 1} = \{ax_i\}_{i\geq 1} \quad ; a \in \mathbb{R}$$

إن $(S, +, .)$ تشكل فضاءاً "متجهياً"، لنعرف الآن على S التابع:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} . \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$$

إن التابع d يُعرف مسافة على S إلا أن تلك المسافة غير مولدة من نظيم، لأن إذا استبدلنا كل x بـ ax وكل y بـ ay نجد:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} . \frac{|ax_i - ay_i|}{1+|ax_i - ay_i|} \neq |a| \, d(x,y) \, ;$$

انتهت المحاضرة الثالثة

* * *

الفضاء الإقليدي

تعريف

الفضاء الإقليدي هو مجموعة جميع الجمل المرتبة المؤلفة من n مركبة أي:

$$\mathbb{R}^n = \{ x ; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) ; x_i \in \mathbb{R} ; 1 \leq i \leq n \}$$

مزودة بعمليتي الجمع والضرب بعدد حقيقي على النحو:

$$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$

$$ax = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$$

وذلك أياً كان $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $a \in \mathbb{R}$

وهو مزود بجداء داخلي يتعرف بالمساواة:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

وهذا الجداء الداخلي يولد نظيماً في $\mathbb{R}^n$ يتعرف بالمساواة:

$$x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

بناءاً على ذلك تتعرف المسافة بهذا الفضاء بالمساواة:

$$x, y \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

(سنستعرض فيما يأتي جملة من التعاريف الضرورية واللازمة في الفضاء $\mathbb{R}^2$)

◆ تعاريف :

◆ تعريف ١ :

إذا كان X فضاءاً "متريا" وكان x_0 نقطة ما من X وكان r عدداً "حقيقياً" موجباً" عندئذ نسمي مجموعة النقاط :

$$\tilde{B}(x_0;r)=\{x ; d(x,x_0)=\|x-x_0\| \leqslant r\}$$

بكرة مغلقة .

- كما نسمي مجموعة النقاط :

$$B(x_0;r)=\{x ; d(x,x_0)=\|x-x_0\| < r\}$$

بكرة مفتوحة .

◆ تعريف 2 :

لتكن U مجموعة جزئية من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ نقول عن المجموعة U أنها مجموعة مفتوحة إذا وجد لكل نقطة $x \in U$ كرة مفتوحة مركزها النقطة x محتواة بأكملها في U .

- نسمي كل كرة مفتوحة مركزها النقطة x_0 ونصف قطرها $\varepsilon > 0$ جواراً "للنقطة x_0 (مجاورة) .

- يمكن تعريف جوار النقطة x_0 على أنه كل مجموعة مفتوحة تحوي النقطة x_0 .

◆ تعريف 3 :

نقول عن النقطة x من $\mathbb{R}^n$ أنها نقطة حدية للمجموعة S من $\mathbb{R}^n$ إذا تقاطع كل جوار للنقطة x مع S بنقطة واحدة على الأقل مغايرة لـ x.

* نسمي مجموعة النقاط الحدية باسم المجموعة المشتقة للمجموعة S ونرمز لها بالرمز S' أو $D(S)$.

◆ تعريف 4 :

نقول عن النقطة x من $\mathbb{R}^n$ أنها نقطة محيطية للمجموعة S من $\mathbb{R}^n$ إذا تقاطع كل جوار لـ x من S ومتممتها بنقطة واحدة على الأقل.

◆ تعريف 5 :

نقول عن النقطة x من $\mathbb{R}^n$ أنها نقطة تراكم للمجموعة S إذا تقاطع كل جوار لـ x مع S بعدد غير منتهي من النقاط أو بمجموعة غير منتهية من النقاط.

يمكن البرهان على أن الشرط اللازم والكافي كي تكون x نقطة حدية لمجموعة ما من $\mathbb{R}^n$ هو أن تكون x نقطة تراكم وذلك لكون $\mathbb{R}^n$ فضاءً متريًا.

◆ تعريف 6 :

نقول عن النقطة x أنها نقطة داخلية إذا وجد جوار لـ x محتوى بأكمله داخل S.

* يسمى مجموعة النقاط الداخلية بداخلية المجموعة S ونرمز لها S° أو $Inter(S)$.

◆ تعريف 7 :

نقول عن المجموعة S من $\mathbb{R}^n$ أنها مجموعة محدودة إذا وجدت كرة مفتوحة تحوي S أي: $S \subseteq N(x, r)$

على الهامش
يسمى مجموعة النقاط المحيطية باسم محيط المجموعة

انتهت المحاضرة الرابعة

مبرهنة ((تحديد طبيعة العلاقة بين نظيم عنصر من IR^n وبين القيمة المطلقة لمركباته))

إذا كان x عنصراً من IR^n $(x \in IR^n)$ فإن:

$$|x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\ \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

وذلك أياً كان $i = 1, 2, \ldots, n$

* نبرهن التراجح الأول:

استناداً لتعريف نظيم عنصر من IR^n يمكن أن نكتب:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

- من الواضح أنه $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ فإن:

$$\|x\|^2 \geq x_i^2$$

وبالتالي:

$$|x_i| \leq \|x\| \quad \ldots\ldots (1)$$

* نبرهن التراجح الثاني:

لنفرض:

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

عندئذٍ استناداً إلى تعريف النظيم يمكن أن نكتب:

$$\|x\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2$$

(بإمكاننا أن نبدل كل حد من هذه الحدود بحداً أصغر منه)

$$\Rightarrow \|x\|^2 \leq M^2 + M^2 + \dots + M^2 = nM^2$$
$$\Rightarrow \|x\|^2 \leq nM^2$$
$$\Rightarrow \|x\| \leq \sqrt{n}\, M$$
$$\Rightarrow \|x\| \leq \sqrt{n} \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \quad \text{--- ②}$$

من ① و ② يتم إثبات المطلوب.

* تسمى هاتين المتراجحتين بمتراجحتي شفارتز (شوارتز).

◊ تقارب المتتاليات في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$

- تذكرة :

* مفهوم التقارب في $\mathbb{R}$:

نقول عن المتتالية $\{x_n\}$ أنها تتقارب من x، $x_n \to x$ عندما :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists N_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon , \forall n > N_\varepsilon$$

تعريف :

لتكن $\{x_m\}_{m\geq 1}$ متتالية متقاربة ما من $\mathbb{R}^n$، نقول عن المتتالية $\{x_m\}_{m\geq 1}$

أنها متقاربة إلى العنصر x إذا وجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ عدد صحيح N_ε بحيث يكون :

$$d(x_m, x) = \|x_m - x\| < \varepsilon \; ; \; \forall \; m > N_\varepsilon$$

ونكتب :

$$x_m \xrightarrow[m \to \infty]{} x \quad \text{أو} \quad \lim_{m \to \infty} x_m = x$$

نتائج :

1* نهاية متتالية إن وجدت وحيدة .

2* الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتالية x_m من $\mathbb{R}^n$ إلى x هو أن يحوي أي جوار للنقطة x جميع عناصر المتتالية باستثناء عدد منتهٍ منها .

3* كل متتالية متقاربة من $\mathbb{R}^n$ إلى النقطة x هي مجموعة محدودة ولكن العكس غير صحيح أي : ليس كل مجموعة محدودة هي متتالية متقاربة) .

4* الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة الجزئية $S \subseteq \mathbb{R}^n$ مغلقة هو أن يكون لكل متتالية من عناصر S نهاية في S .

مبرهنة :

الشرط اللازم والكافي كي تتقارب المتتالية $\{x_m\}_{m\geq 1}$ حيث

الحد العام لها هو: $x_m = (x_{1m}, x_{2m}, \dots\dots, x_{nm})$; $m = 1, 2, \dots\dots$

إلى العنصر $x = (x_1, x_2, \dots\dots, x_n)$ في $\mathbb{R}^n$ هو أن تتقارب المتتاليات الحقيقية:

$\{x_{1m}\}, \{x_{2m}\}, \dots\dots, \{x_{nm}\}$ إلى:

$x_1, x_2, \dots\dots, x_n$ على الترتيب.

البرهان:

* لزوم الشرط

لنفرض أن x_m تتقارب إلى العنصر x من $\mathbb{R}^n$ $x_m \longrightarrow x$

عندئذ استناداً إلى تعريف تقارب متتالية نجد أنه من

أجل أي $\varepsilon > 0$ يوجد N_ε عدد صحيح من أجله يكون:

$$\|x_m - x\| < \varepsilon \;,\; \forall\, \varepsilon \geq N_\varepsilon$$

استناداً إلى متراجحة شوارتز نجد أن:

$$|x_{im} - x_i| \leq \|x_m - x\|$$

وبالتالي فإن:

$$|x_{im} - x_i| < \varepsilon \;;\; \forall\, i = 1, 2, \dots\dots, n$$
$$\& \; m = 1, 2, \dots\dots$$

الأمر الذي يعني أن المتتالية $\{x_{im}\}_{m\geq 1}$ تتقارب إلى x_i في $\mathbb{R}$ وهو المطلوب

* كفاية الشرط

لنفرض أن المتتالية $\{x_{im}\}_{m\geq 1}$ تتقارب من x_1 في IR^n عندئذ

استناداً لتعريف التقارب من IR من أجل أي $0 < \varepsilon$ يوجد N_ε بحيث يكون:

$$|x_{im} - x_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

استناداً لتعريف النظيم في الفضاء IR^n يمكن أن نكتب:

$$\|x_m - x\|^2 = (x_{1m} - x_1)^2 + (x_{2m} - x_2)^2 + \dots + (x_{nm} - x_n)^2$$

$$< \frac{\varepsilon^2}{n} + \frac{\varepsilon^2}{n} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \|x_m - x\|^2 < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \|x_m - x\| < \varepsilon \quad ; \quad \forall m > N_\varepsilon$$

أي أن:

المتتالية $\{x_m\}$ تتقارب من x في IR^n.

متتالية كوشي في IR^n

◆ تعريف

نقول عن المتتالية $m \in N$ ، $\{x_m\}$ أنها متتالية كوشي إذا وجد من أجل كل $0 < \varepsilon$ عدد موجب N_ε من أجله يكون:

$$\| x_m - x_\ell \| < \varepsilon \; ; \; \forall m, \ell > N_\varepsilon$$

(يمكن البرهان على أن كل متتالية متقاربة في الفضاء $\mathbb{R}^n$ هي متتالية كوشي).

* نسمي كل فضاء متري تكون فيه كل متتالية كوشي هي متتالية متقاربة بالفضاء التام.

* يمكن البرهان على أن كلاً من الفضائين $(\mathbb{R}^n, d)$ ، $(\mathbb{R}, d)$ تامان.

انتهت المحاضرة

المجموعات المتراصة في الفضاء $\mathbb{R}^n$

نقول عن أسرة المجموعات الجزئية u_i من $\mathbb{R}^n$ أنها تشكل تغطية للمجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}^n$ إذا كان $S \subseteq \bigcup_i u_i$

* إذا كانت عناصر u_i مجموعات مفتوحة وكانت $S \subseteq \bigcup_i u_i$ فإننا نقول عن تلك الأسرة إنها تشكل تغطية مفتوحة لـ S

* نقول عن المجموعة الجزئية $S \subseteq \mathbb{R}^n$ أنها مجموعة متراصة إذا حوت كل تغطية مفتوحة لـ S على تغطية جزئية منتهية لـ S.

مثال:

لتكن $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ مجموعة جزئية منتهية من $\mathbb{R}^n$، برهن على أن A مجموعة متراصة.

الحل:

لتكن لدينا:

$$\{u_i \ ; \ i \in I\}$$

تغطية مفتوحة اختيارية للمجموعة A

ولنأخذ من تلك الأسرة المجموعة $u_1, u_2, \ldots, u_n$ بحيث:

$$a_1 \in u_1, a_2 \in u_2, \ldots, a_n \in u_n$$

من الواضح أن تلك الأسرة منتهية، أكثر من ذلك

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} u_i$$

وهذا يعني أننا استخلصنا من التغطية المفتوحة تغطية جزئية منتهية للمجموعة A أي أن A متراصة.

{{ يمكن البرهان على أن الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة S متراصة في الفضاء $\mathbb{R}^n$ هو أن تكون S مغلقة ومحدودة }}

* يمكن تعميم هذا المفهوم في جميع الفضاءات المنتهية البعد وهذا ما يسمى بمبرهنة هاين - بوريل

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ متراصة $\Longleftrightarrow$ S مغلقة ومحدودة

يمكن أن يأتي في الامتحان
س اذكر نص هذه المبرهنة

♦ في مبرهنة (بولزانو - وايرشتراس) ♦

لكل مجموعة جزئية محدودة وغير منتهية من $\mathbb{R}^n$ نقطة حدية واحدة على الأقل.

البرهان:

لنفرض أن S مجموعة جزئية $\mathbb{R}^n$ محدودة وليس لها أي نقطة تراكم، ولنبرهن على أن هذا الفرض يؤدي إلى أن S منتهية.
إذا لم يوجد للمجموعة S أي نقطة حدية فإن هذا الأمر يعني أن S مجموعة مغلقة
وبالتالي استناداً إلى مبرهنة هاين - بوريل نجد أن S متراصة

- كما أنه من كون ليس لـ S أي نقطة حدية ينتج أنه لكل نقطة من S يوجد جوار وليكن U_x لا يحوي أي نقطة من S سوى x وبالتالي فإن أسرة الجوارات:

$$U = \{U_x ; x \in S\}$$

تُشكل تغطية مفتوحة لـ S كون S متراصة فإنه يمكن إيجاد تغطية جزئية منتهية من المجموعات المنتمية إلى U

- ولتكن تلك المجموعات $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$

بما أن هذه المجموعات تحوي فقط $x_1, x_2, \dots, x_n$

أي أن:

$$S \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

أي أن S منتهية الأمر الذي يناقض فرضنا أن S غير منتهية.

نهايات التوابع الحقيقية لعدة متغيرات

◆ تعريف

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}^n$ ولتكن x_0 نقطة حدية لـ S وليكن l عدداً حقيقياً

نقول أن $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ إذا وجد من أجل كل $\varepsilon > 0$

عدد صحيح موجب بحيث يكون $|f(x)-\ell| < \varepsilon$

عندما $\|x-x_0\| < \delta$

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x-x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon)$$

* يمكن البرهان على أن نهاية تابع إن وجدت وحيدة *

* ملحوظة:

كلما اقتربت x من x_0 فإن $f(x)$ تقترب من ℓ

انتهت المحاضرة السادسة

تعريف

ليكن f, g تابعين حقيقيين معرفين على المجموعتين الجزئيتين T, S على الترتيب من $\mathbb{R}^n$، عندئذ:

1) $f \mp g$ هو تابع حقيقي معرف على $T \cap S$ على النحو:

$$\underbrace{(f \mp g)(x)}_{\text{في } \mathbb{R}^n} = \underbrace{f(x) \mp g(x)}_{\text{في } \mathbb{R}}$$

وذلك أياً كان $x \in T \cap S$

2) $f \cdot g$ هو تابع حقيقي معرف على $T \cap S$ على النحو:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

وذلك أياً كان $x \in T \cap S$

3) f/g هو تابع حقيقي معرف على $W = (T \cap S) \setminus \{x : g(x) = 0\}$ على النحو:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

وذلك أياً كان $x \in W$

* اعتماداً على التعاريف السابقة وعلى مفهوم النهاية إذا كانت:

موجودتين ومحدودتين

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \& \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = k$$

فإن:

1) $$\lim_{x \to x_0} \underbrace{(f + g)(x)}_{\text{في } \mathbb{R}^n} = l + k$$

(2)

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = l \cdot k$$

(3)

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{k} \; ; \; k \neq 0$$

استمرار التوابع الحقيقية لعدة متغيرات

• تعريف

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية $S \subset \mathbb{R}^n$

* نقول عن التابع f إنه مستمر في النقطة ~~الحدية~~ x_0 إذا وجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ عدد موجب $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

وذلك عندما يكون $\|x - x_0\| < \delta$

$$(\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

{توضيح: ليس من الضروري أن تكون النقطة x_0 حدية إنما من S}

* نقول عن f إنه مستمر في المجموعة S إذا كان f مستمراً في كل نقطة من نقاط S.

← استناداً إلى مفهوم النهاية يمكن البرهان على أن إذا كان f تابعاً حقيقياً معرف على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$

فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون f مستمراً في النقطة x_0 هو أن يكون
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\text{مستمراً في النقطة الحدية } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

المجموعة المترابطة في الفضاء الإقليدي

تعريف

نقول عن مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ أنها غير مترابطة إذا وجدت مجموعتان مفتوحتان V ، U من S بحيث يكون اجتماعهما يساوي S $(U \cup V = S)$ وتقاطعهما خالٍ $(U \cap V = \phi)$
إذا لم يتحقق ذلك فإننا نقول عن S أنها مترابطة.

* كما يمكن تعريف المجموعة غير المترابطة على النحو:
نقول عن المجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}^n$ أنها غير مترابطة إذا وجدت مجموعتان مفتوحتان V ، U من $\mathbb{R}^n$ بحيث تكون المجموعتين $U \cap S$ ، $V \cap S$ منفصلتين وغير خاليتين واجتماعهما يساوي S.

* سبق أن وجدنا أن الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}$ $(S \subset \mathbb{R})$ مترابطة هو أن تكون S مجالاً.

$S \subset \mathbb{R}$ مترابطة $\Leftrightarrow$ S مجالاً

استناداً إلى ذلك يمكن البرهان على أن الفضاء $\mathbb{R}^n$ هو فضاء مترابط.

يمكن أن يأتي في الامتحان اكتب نص المبرهنة

مبرهنة بولزانو في القيمة المطلقة

ليكن f تابعاً حقيقياً مستمراً على مجموعة جزئية S مترابطة من $\mathbb{R}^n$، إذا كان x, y نقطتين من S وكانت λ (إيتا) بين $f(x)$ و $f(y)$ عندئذ يوجد على الأقل ξ (زيتا) بين x و y بحيث يكون: $f(\xi) = \lambda$

البرهان:

لما كانت S مجموعة مترابطة في $\mathbb{R}^n$ وكان f تابعاً مستمراً فإن $f(S)$ مجموعة مترابطة في $\mathbb{R}$، ولما كانت كل مجموعة مترابطة في $\mathbb{R}$ تشكل مجالاً فإن $f(S)$ مجال،

- بما أن y ، x نقطتان من S فإن $f(x)$ ، $f(y)$ تنتميان إلى المجال $f(S)$ وبالتالي فإن λ تنتمي لـ $f(S)$ أي ثمة نقطة واحدة على الأقل ξ بحيث يكون: $f(\xi) = \lambda$

نتيجة هامة (كتطبيقات) :

إذا كان f من المجال المغلق $[a,b]$ من $\mathbb{R}$ وكان $f(a) < 0 < f(b)$
فإنه يوجد عدد $b > c > a$ بحيث يكون $f(c) = 0$

تنويه ◆

من المعلوم أن كل مجال من $\mathbb{R}$ هو مجموعة مترابطة
وبالتالي يمكن نقل النظرية بولزانو إلى هذه النتيجة.

انتهت المحاضرة السابعة

هناك شيء واحد
في هذا الكون يمكنك أن تثق
بأنك تستطيع تحسينه بالتأكيد، هذا الشيء هو أنت.

التابع منتظم الاستمرار:

تعريف:

نقول عن التابع f المعرف على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ أنه منتظم الاستمرار على S إذا وجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ عدد موجب $\delta > 0$ بحيث أن:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

عندما يكون:

$$\|x - y\| < \delta$$

ونكتب:

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 : \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

وذلك أياً كان $x, y \in S$

من الواضح أنه إذا كان f منتظم الاستمرار فهو مستمر أما العكس غير صحيح في الحالة العامة.

- سنأتي بمثال يبين ذلك:

مثال:

ليكن لدينا $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

حيث $f(x) = x^2$

أثبت أن f مستمر إلا أنه ليس منتظم الاستمرار (غير مستمر بانتظام):

الحل:

من أجل أي $\varepsilon > 0$

لنضع $x = \frac{\varepsilon}{\delta}$ حيث $\delta > 0$ ، $y = x + \frac{\delta}{2}$

من الواضح أن $x, y \in \mathbb{R}$ كما أن:

$$|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

لدينا:

$$|f(y)-f(x)| = |y^2 - x^2|$$

$$= |y-x||y+x| = \frac{\delta}{2}\left|x + \frac{\delta}{2} + x\right|$$

$$= \frac{\delta}{2}\left|2x + \frac{\delta}{2}\right| = \frac{\delta}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)$$

$$= \varepsilon + \frac{\delta^2}{4} \not< \varepsilon$$

وبالتالي التابع ليس منتظم الاستمرار

ملاحظة:

إذا كان f تابعاً حقيقياً معرفاً ومستمراً على مجموعة مغلقة ومحدودة من $\mathbb{R}^n$ فإن f يكون مستمراً بانتظام.

بعبارة أخرى يمكن القول أنه في الفضاءات **المتراصة** لا فرق بين الاستمرار والاستمرار بانتظام.

تذكير:

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$
نقول عن f أنه محدود من الاعلى إذا كانت مجموعة قيمة $f(S)$
محدودة من الاعلى، ونقول أنه محدود من الادنى إذا كانت مجموعة
قيمة محدودة من الادنى،
ونقول أنه محدود إذا كانت مجموعة قيمة محدودة من الاعلى والادنى معاً.

- يمكن البرهان على أن الشرط اللازم والكافي كي يكون f محدوداً هو
أن يتحقق الشرط: $|f(x)| \leq M$
وذلك أياً كان $x \in S$ و $0 < M$

انتهت المحاضرة الثامنة نظري

البحث الثاني:

المشتقات وتفاضلات التوابع الحقيقية لعدة متغيرات

• تعريف:

ليكن $f(x)=f(x_1,x_2,\dots\dots,x_n)$ تابعاً "حقيقياً" معرّفاً "على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ ولتكن $C=(c_1,c_2,\dots\dots,c_n)$ نقطة داخلية في S إذا كانت نهاية:

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(c_1+h_1,c_2,\dots\dots,c_n)}{h_1}$$

إذا كانت نهاية النسبة موجودة فإننا نقول أن للتابع f مشتق جزئي بالنسبة للمتغير الأول x_1 في النقطة c ونرمز لتلك النهاية

ونكتب: $f'_{x_1}(c)$ أو $\frac{\partial f}{\partial(x_1)}(c)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)=\lim_{h_1\to 0}\frac{f(c_1+h_1,c_2,\dots\dots,c_n)-f(c_1,\dots\dots,c_n)}{h_1}$$

وبطريقة مماثلة تماماً يمكن تعريف المشتق الجزئي للتابع f بالنسبة للمتغير x_i حيث في النقطة c بالعلاقة:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)=\lim_{h_i\to 0}\frac{f(c_1,\dots\dots,c_i+h_i,\dots\dots,c_n)}{h_i}\ ;\ i=1,\dots\dots,n$$

وذلك في حال وجود النهاية .

مثال مهم :

ليكن لدينا :

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

معرفاً على النحو :

$f(x,y) = x^2 + x\sin y - x^y$

المطلوب :

أوجد $\frac{\partial f}{\partial x}$ (نتعامل مع y على أنه ثابت) , $\frac{\partial f}{\partial y}$ (نتعامل مع x على أنه ثابت)

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \sin y - y\,x^{y-1}$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 - x\cos y - y\ln x$

تعريف :

لنفرض أن المشتقات الجزئية من المرتبة الاولى للتابع f موجودة وأن كل منها هو تابع حقيقي معرّف على مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ إذا كان للتابع $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ مشتق جزئي بالنسبة لـ x_i فإننا نرمز له بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ ويسمى بالمشتق الجزئي من المرتبة (وليست درجة) الثانية بالنسبة للمتغير x_i .

- إذا كان للتابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ مشتقاً جزئياً بالنسبة للمتغير x_j فإننا نرمز له ب $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ أو $f''_{x_i x_j}$

ونسميه بالمشتق المختلط ونكتب:

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

* وبأسلوب مماثل تماماً يمكن تعريف المشتقات والمشتقات المختلطة حتى المرتبة m.

• مثال محلول:

ليكن $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ معرفاً على النحو:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

المطلوب:

أوجد $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، f''_{yx} ، f''_{xy}

الحل:

* $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\left[\dfrac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(تكملة حل التمرين في المحاضرة القادمة).

انتهت المحاضرة التاسعة

تتمة المثال في المحاضرة السابقة

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}$$

$$=\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_y=\begin{cases} x\left[\dfrac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$*\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f_{xy}(0,0)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h}=-1$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h^5}{h^4}-0}{h}=-1$$

بأسلوب مشابه:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f_{yx}(0,0)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h}=1$$

من الواضح أن $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$

والسؤال هنا متى يتساوى المشتقات المختلطان في نقطة (a,b) من ساحة تعريف تابع f.

للرد على هذا التساؤل نستعرض المبرهنة الآتية:

مبرهنة:

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة المفتوحة $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ولنفرض تحقق الشرطين الآتيين:

1) إذا كانت المشتقات f'_x , f'_y , f'_{xy} , f'_{yx} موجودة في كل نقطة من D.

2) المشتقات المختلطان f_{xy} , f_{yx} مستمران في النقطة $D(a,b)$ عندئذ يكون:

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

المشتق والمتجه:

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة الجزئية $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ولتكن c نقطة داخلية لـ D وليكن u عنصراً من $\mathbb{R}^n$ يحقق الشرط:

$$\boxed{\|u\| = 1}$$

إذا كانت النهاية:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+hu)-f(c)}{h}$$

موجودة فإننا نرمز لها بـ $\frac{\partial f}{\partial u}(c)$ وتسمى بالمشتق المتجهي للتابع f في النقطة c،

أو بعبارة أخرى مشتق f في النقطة c باتجاه u، ونكتب:

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+hu)-f(c)}{h}}$$

ملاحظة:

من الواضح أن المشتق الجزئي بالنسبة للمتغير x_i ما هو إلا عبارة عن المشتق المتجهي وفق الاتجاه $u_i=(0,0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0)$

مثال:

ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ معرفاً بالمساواة:

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & ; (x,y)=(0,0)\\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ; (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

والمطلوب: أوجد المشتق المتجهي للتابع f في النقطة $C(0,0)$

باتجاه $u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

الحل: لدينا:

$$\|u\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$c + hu = (0,0) + h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Longrightarrow f(c+hu) = f\left(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Longrightarrow f(c+hu) = \frac{\frac{h}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{h^2}{2}\right)}{\frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2}} = \frac{\frac{h^3}{2\sqrt{2}}}{h^2} = \frac{h}{2\sqrt{2}}$$

$$f(0,0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+hu) - f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2\sqrt{2}} - 0}{h} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(c) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

تفاضلات التوابع الحقيقية لعدة متغيرات

تعريف:

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية $D \subseteq IR^2$ ولتكن (a,b) نقطة داخلية لـ D عندئذ توجد كرة مفتوحة مركزها النقطة (a,b) ونصف قطرها δ محتواة بأكملها داخل D

لنفرض أن (h,k) نقطة من IR^2 تحقق الشرط:

$$\|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2} < \delta$$

عندئذ إذا وجد عددان حقيقيان A, B بحيث تتحقق الشرط:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\,\eta(h,k)$$

حيث $\eta(h,k)$ (الايتا) هي تابع للمتغيرين h,k يحقق الشرط:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \eta(h,k) = 0$$

عندئذ نقول عن التابع f أنه قابل للمفاضلة في النقطة (a,b)

من الواضح أنه إذا كان f قابلاً للمفاضلة وكان $k=0$ فإن:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = A = f'_x(a,b)$$

كما أنه من أجل $h=0$ و f قابلاً للمفاضلة فإن:

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a,b)}{k} = B = f_y(a,b)$$

أي أنه يمكن القول أنه إذا كان f قابلاً للمفاضلة في النقطة (a,b) فإن المشتقات الجزئيات f'_x و f'_y موجودان.

(يمكن الاعتماد على تعريف قابلية المفاضلة لإثبات وجود المشتقات)
وهكذا نجد أنه إذا كان f قابلاً للمفاضلة عند النقطة (a,b) فإن علاقة التعريف تأخذ الشكل:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = f'_x h + f'_y k + \sqrt{h^2+k^2}\,\eta(h,k)$$

◆ تعريف ◆

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ولتكن (a,b) نقطة داخلية في D عندئذ نسمي:

$$f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k$$

بتفاضل فريشه للتابع f عند النقطة (a,b) ونرمز لذلك $(\partial_{(a,b)} f)(h,k)$ ونكتب:

$$\boxed{(\partial_{(a,b)} f)(h,k) = f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k}$$

تفاضل فريشه

مثال:

أثبت أن التابع $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرف بالعلاقة:

$$f(x,y) = x^2 + 2xy$$

تابل المفاضلة في النقطة (a,b) من $\mathbb{R}^2$

- الحل: لنثبت أن f تابل المفاضلة:

لنبحث عن A و B والتأكد من أن $\eta(h,k)$ يسعى للصفر عند $h,k \to 0$

لدينا:

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = (a+h)^2 + 2(a+h)(b+k) - a^2 - 2ab$$

$$= h(2a+2b) + k(2a) + h^2 + 2kh$$

بالمقارنة مع تعريف قابلية المفاضلة:

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\,\eta(h,k)$$

$$A = 2a+2b$$

$$B = 2a$$

$$\sqrt{h^2+k^2}\,\eta(h,k) = h^2 + 2kh$$

$$\Longrightarrow \eta(h,k) = \frac{h^2+2kh}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$$

بما أن $\eta \to 0$ فإن f تابل المفاضلة عند النقطة (a,b)

وبالتالي فإن:

$$f'_x(a,b) = A = 2a + 2b$$

$$f'_y(a,b) = B = 2a$$

ملاحظة على التمرين:

حساب $\lim \eta(h,k)$

$$\lim_{h=k} \eta(h,k) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h\cdot h}{\sqrt{h^2+h^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^2}{\sqrt{2}\,h} = 0$$

$$\lim_{k=h} \eta(h,k) = \lim_{k\to 0} \frac{k^2+2k\cdot k}{\sqrt{k^2+k^2}} = \lim_{k\to 0} \frac{3k^2}{\sqrt{2}\,k} = 0$$

$$\lim_{\substack{h=\alpha k \\ k\to 0}} \eta(h,k) = 0$$

مثال 2 :

أثبت أن $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرف بالمساواة:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & ; (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

غير قابل للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

الحل: لدينا:

- $f_x(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$

- $f_y(0,0) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k}$

$= \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$

لدينا استناداً إلى تعريف قابلية المفاضلة:

$f(0+h,0+k) - f(0,0) = f'_x(0,0)h + f'_y(0,0)k + \sqrt{h^2+k^2}\,\eta(h,k)$

$\Longrightarrow \dfrac{hk}{h^2+k^2} = \sqrt{h^2+k^2}\,\eta(h,k)$

$\Longrightarrow \eta(h,k) = \dfrac{hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$

$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \eta(h,k) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \neq 0$

أي أن النهاية غير موجودة وبالتالي f غير قابل للفاضلة في النقطة (٠،٠).

$$\lim_{\substack{h=k \\ h \to 0}} \eta(h,k) = 0$$

$$\lim_{\substack{k=h \\ k \to 0}} \eta(h,k) = 0$$

$$\lim_{\substack{h=\alpha k \\ k \to 0}} \eta(h,k) = 0$$

انتهت المحاضرة العاشرة
نظري

ملاحظة:

يمكن تعميم تفاضل تابع حقيقي معرف على مجموعة جزئية D من $\mathbb{R}^n$ على النحو الآتي:

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية D من $\mathbb{R}^n$ ولتكن $c=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ نقطة داخلية لـ D.

عندئذ توجد كرة مفتوحة مركزها النقطة c ونصف قطرها صغير موجب δ محتواة بأكملها داخل D.

وليكن $h=(h_1, h_2, \dots, h_n)$ عنصراً ما من D من أجله يكون:

$$\|h\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2} < \delta$$

إذا وجدت النقطة $A=(A_1, A_2, \dots, A_n)$ من $\mathbb{R}^n$ من أجلها يكون:

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i A_i + \|h\| \eta(h)$$

$$= \langle h, A \rangle + \|h\| \eta(h)$$

حيث:

$$\eta(h) \to 0$$
$$\|h\| \to 0$$

حيث: η تابع لـ h من أجله يكون:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \eta(h) = 0$$

عندئذ نقول أن التابع f قابل للمفاضلة في النقطة c. إذا كان f قابلاً للمفاضلة عند النقطة c فعندئذ نسمي المجموع:

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$$

بتفاضل غريب للتابع f عند النقطة c ونرمز لذلك $(\partial_c f)(h)$

ونكتب:

$$(\partial_c f)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$$

أمسية بر الهدى

مبرهنة:

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية D من IR^n

ولتكن c نقطة داخلية لـ D.

إذا كان f قابلاً للمفاضلة عند النقطة c عندئذ يوجد عددان

موجبان k و δ بحيث أنه إذا تحقق الشرط:

$$\|x-c\| < \delta$$

فإن:

$$|f(x) - f(c)| < k\,\|x-c\|$$

عندئذ يكون f مستمراً في النقطة c.

البرهان:

بما أن f قابل للمفاضلة في النقطة c فإنه يوجد عدد

موجب δ_1 بحيث أنه إذا كانت $h = (h_1, \ldots, h_n)$

نقطة من IR^n تحقق الشرط:

$$\|h\| < \delta_1$$

أ. الدين قطماوي

عندئذ توجد نقطة $A=(A_1, A_2, \dots, A_n)$ من $\mathbb{R}^n$ من أجلها يكون:

$$f(c+h)-f(c)=\sum_{i=1}^{n} h_i A_i + \|h\| \eta(h)$$

حيث η هو تابع لـ h يحقق الشرط:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \eta(h)=0$$

من هنا نجد:

$$|f(c+h)-f(c)| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} h_i A_i\right| + \|h\| . |\eta(h)|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |h_i| . |A_i| + \|h\| . |\eta(h)|$$

استناداً إلى المبرهنة التي تحدد طبيعة العلاقة بين نظيم عنصر في $\mathbb{R}^n$ والقيمة المطلقة لإحدى مركباته نجد:

$$|h_i| \leq \|h\|$$

وبالتالي فإن:

$$|f(c+h)-f(c)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|h\| . |A_i| + \|h\| . |\eta(h)| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (|A_i| + |\eta(h)|) \|h\|$$

$$\Rightarrow |f(c+h)-f(c)| \leq \sum_{i=1}^{n} (|A_i| + |\eta(h)|) \|h\| \quad (*)$$

استناداً إلى تعريف نهاية تابع ولما كان:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \eta(h)=0$$

فإنه أياً كان العدد $1 = \varepsilon$ يوجد $\delta_2 > 0$ بحيث أنه
إذا كان $\|h\| < \delta_2$ فإن $|\eta(h)| < 1$.

على الهامش

$$\forall \varepsilon = 1 > 0 \ , \ \exists \delta_2 > 0 : \|h\| < \delta_2 \Rightarrow |\eta(h)| < 1$$

- بالتالي يكون لدينا وبفرض أن:

$$c + h = x$$

وأن $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\Rightarrow \|x - c\| = \|h\| < \delta$$

بالعودة إلى العلاقة (*) نجد:

$$|f(x) - f(c)| < \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i| + 1\right) \|h\|$$

لم نضع أو يساوي لأن $|\eta(h)| < 1$

$$\Rightarrow |f(x) - f(c)| < \ell \cdot \|x - c\| \ ; \ \ell = \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i| + 1\right)$$

بوضع:

$$\|x - c\| = \frac{\varepsilon}{\ell}$$

فإننا نجد:

$$|f(x) - f(c)| < \ell \cdot \frac{\varepsilon}{\ell} \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

عندما $\|x - c\| < \delta$ ، أي أن f مستمر عند النقطة c.

انتهت المحاضرة 11

Zh

مثال :

ليكن لدينا $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعاً معرفاً على النحو :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ y = 0 \\ \dfrac{x}{y} & ; \ y \neq 0 \end{cases}$$

أثبت أن f غير قابل للاشتقاق في النقطة $(0,0)$

الحل : لإثبات أن f غير قابل للاشتقاق في النقطة $(0,0)$ يكفي استناداً إلى المبرهنة السابقة إثبات أن f غير مستمر في تلك النقطة

لو كان f مستمراً في النقطة $(0,0)$ فإنه من أجل أي $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كان $\|x - x_0\| < \delta$ فإن :

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

من أجل $\varepsilon = \frac{1}{2}$ لنأخذ النقطة $x = \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$

من الواضح أنه :

$$\|x - x_0\| = \left\|\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) - (0,0)\right\|$$

$$= \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4}} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$$

الآن:

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|\frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}-0\right|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon$$

أي أن: f غير مستمر في النقطة $(0,0)$.

ملحوظة: وارد أن يأتي في الامتحان أثبت أن f غير قابل للاشتقاق بطريقتين مختلفتين:

1- إما أن نثبت أن f غير قابل للمفاضلة:

$$f(0+h,0+k)-f(0,0)=\underset{\text{توجد } A,B}{Ah+Bk}+M \not\to 0$$

2- أو أن نثبت أن f غير مستمر في النقطة

3- أو أن نحسب: $\frac{\partial f}{\partial x}=\lim \quad = ?$

مبرهنة:

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة الجزئية D من $\mathbb{R}^n$ ولتكن c نقطة داخلية لـ D إذا كانت جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\dots\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

موجودة ومستمرة في جوار ما للنقطة c عندئذ يكون f قابلاً للاشتقاق في تلك النقطة.

* يمكن نقل تلك المبرهنة على جميع نقاط D *

نتيجة :

ليكن f تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة الجزئية المفتوحة D من IR^n إذا كان جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الاولى للتابع f موجودة ومستمرة في D فإننا نقول عن f أنه قابل للاشتقاق في D.

بحكم العلاقة بين قابلية المفاضلة والاستقرار نجد أنه إذا كان f قابلاً للاشتقاق في المجموعة المفتوحة D فإنه يكون مستمراً عليها.

خواص التوابع القابلة للمفاضلة

ليكن f، g تابعين حقيقيين معرفين على المجموعة D من IR^n ولتكن c نقطة داخلية لـ D وليكن g و f قابلان للمفاضلة في النقطة c عندئذ:

$$d_c(f+g) = d_cf + d_cg \quad (1$$

$$d_c(\alpha f) = \alpha\, d_cf \;;\; \alpha \in IR \quad (2$$

$$d_c(f\cdot g) = (d_cf)\cdot g(c) + f(c)(d_cg) \quad (3$$

٤-٧ تتعلق بقابلية مفاضلة تابع التابع (قابلية مفاضلة تركيب تابعين قابلين للمفاضلة).

ليكن $u(x,y)$ و $v(x,y)$ تابعين حقيقيين معرفين على المجموعة المفتوحة D من $\mathbb{R}^2$ ولنفرض أن هذين التابعين مشتقات جزئية من المرتبة الاولى مستمرة.

وليكن $f(u,v)$ تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة D' من $\mathbb{R}^2$ ولنفرض أن للتابع f مشتقات جزئية من المرتبة الاولى مستمرة في D'

ولنضع:

$$g(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big)$$

عندئذ يوجد للتابع g مشتقات من المرتبة الاولى مستمران في D' وأكثر من ذلك:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

مثال:

ليكن: $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ معرف بالمساواة:

$$f(y,z) = y^2 - z^2$$

$$y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$y(x) = ax^2 \quad , \quad Z(x) = 2ax$

والمطلوب: أوجد $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

الحل:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial Z} = -2Z$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2ax$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 2a$$

بعوض:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2y)(2ax) + (-2Z)(2a)$$

$$= 4axy - 4aZ$$

$$= 4ax(ax^2) - 4a(2ax)$$

$$= 4a^2x^3 - 8a^2x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 4a^2x(x^2 - 2)}$$

انتهى البحث

البحث الثالث

تطبيقات الحساب التفاضلي لتوابع لعدة متغيرات

تذكرة:

إذا كان φ تابعاً حقيقياً معرفاً على المجال $(0,1)$ فإنه يوجد $0 < \theta < 1$ بحيث يكون:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$$

مبرهنة القيمة الوسطى:

ليكن $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة المفتوحة D من $\mathbb{R}^n$ ولنفرض أن D تحوي النقطتان c و $c+h$ وتحوي أيضاً القطعة المستقيمة الواصلة بينهما إذا كانت جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع f موجودة فإن:

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c+\theta h)$$

حيث $0 < \theta < 1$

البرهان:

لنفرض بالتعريف $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بالمساواة:

$$\varphi(t) = f(c+th) = f(c_1+th_1, c_2+th_2, \ldots\ldots, c_n+th_n)$$

استناداً إلى خاصة مشتق تابع التابع نجد أن:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c+th)\frac{\partial x_i}{\partial t}$$

والتي يمكن أن تكتب استناداً إلى مبرهنة مشتق تابع على النحو:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c+th)$$

توضيح:

$x_i = c_i + th_i$

$\frac{\partial x_i}{\partial t} = h_i$

استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى بالنسبة لمتغير حقيقي نجد:

$$u(1) - u(0) = u'(\theta) \;;\; 0 < \theta < 1$$

وبالتالي نجد:

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c+\theta h)$$

تمت

نتيجة:

إذا كان $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة المفتوحة والمترابطة D من $\mathbb{R}^n$ وكان f يملك مشتقات جزئية من المرتبة الأولى مستمرة في D وكان

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$ فإن:

$f = const$ (يعني ثابت)

تذكرة: معادلة قطعة مستقيمة الواصلة بين نقطتين هي:

$$z = x + ty \;\;;\; 0 < t < 1$$

انتهت المحاضرة

مبرهنة تايلور لعدة متغيرات

ليكن $f(x,y)$ تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة جزئية مفتوحة $D \subset \mathbb{R}^n$ $(f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$

ولنفرض أن $f(x,y)$ يملك جميع المشتقات الجزئية حتى المرتبة $(m+1)$ وأن تلك المشتقات مستمرة

ولنفرض أن النقطتان $(a+h, a+k)$ و (a,b) نقطتان من D

وأن القطعة المستقيمة الواصلة بينهما تقع بأكملها داخل D

عندئذ يُعطى دستور تايلور بالعلاقة:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^i (a,b) + R_{m+1}$$

حيث:

$$R_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{m+1} (x+\theta h, y+\theta k)$$

عندما $m \to \infty$ فإن $R_{m+1} \to 0$

عندئذ يؤول دستور تايلور إلى الشكل:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^i (a,b)$$

* نسمي:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{i}(a,b)$$

بتغير التابع f عند النقطة (a,b) ونرمز له $\Delta f(a,b)$

أي:

$$\Delta f(a,b)=f(a+h,b+k)-f(a,b)$$

- لنستبدل الآن في دستور تايلور كل $x=a+h$ و $y=b+k$

عندئذ يأخذ دستور تايلور الشكل:

$$\boxed{f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\left((x-a)\frac{\partial f}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{i}(a,b)}$$

وهو ما يسمى بنشر تايلور للتابع $f(x,y)$ بجوار النقطة (a,b)

$$f(x,y)=f(a,b)+\left((x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

$$+\frac{1}{2!}\left((x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right.$$

$$\left.+(y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right)+\frac{1}{3!}\left((x-a)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)\right.$$

$$+3(x-a)^2(y-b)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a,b)+3(x-a)(y-b)^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}+$$

$$+(y-b)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)+\cdots$$

مثال:

ليكن لدينا:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy$$

انشر f في جوار $(0,0)$.

الحل:

$$f(x,y) = f(a,b) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\left((x-a)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)$$

$$f(0,0) = 0$$

$$i=1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2ax + 2by \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2bx + c \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = c \end{cases}$$

$$i=2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2a \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2b \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 2b \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0 \end{cases}$$

$$i=3 \Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0 \,,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0 \,,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0$$

$$,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

أي جميع المشتقات من المرتبة الثالثة $(i=3)$ للتابع f معدومة.

وبالتالي:

$$f(x,y) = 0 + \left((x-0)0 + (y-0)c\right) + \frac{1}{2!}\left((x-0)^2(2a)\right.$$

$$\left. + 2(x-0)(y-0)(2b) + (y-0)^2(0)\right).$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y) = cy + \frac{1}{2}(2ax^2 + 4bxy)}$$

مثال ٤:

ليكن لدينا:

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ والمطلوب:

إذا كان $f(x,y)$ معرفاً بالشكل:

$$f(x) = x^2 + 3xy - 2y^3$$

أوجد تزايد f عند تغير (x,y) من $(1,2)$ إلى $(1+h, 2+k)$

الحل: لدينا:

$$\Delta f(1,2) = f(1+h, 2+k) - f(1,2)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^i (1,2)$$

$$i=1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 8 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x - 6y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -21 \end{cases}$$

$$i=2 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 2 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) = 3 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = -24 \end{cases}$$

$$i=3 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,2) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,2) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(1,2) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -12 \Rightarrow \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,2) = -12 \end{cases}$$

من الواضح أنه من أجل $i=4$ نلاحظ أن جميع المشتقات من المرتبة الرابعة والخامسة و ... معدومة.

بالتعويض نحصل على تغير التابع f .

$$\Delta f(1,2) = \Big(h\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + k\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\Big)$$

$$+\frac{1}{2!}\Big(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2)$$

$$+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)\Big) + \frac{1}{3!}\Big(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,2)$$

$$+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(1,2) + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + k^3$$

$$+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,2)\Big)$$

$$\Rightarrow \Delta f(1,2) = \big(h(8) + k(-21)\big) + \frac{1}{2!}\big(h^2(2)$$

$$+2hk(3) + k^2(-24)\big) + \frac{1}{3!}\big(0+0+0+k^3(-12)\big)$$

$$\Rightarrow \Delta f(1,2) = 8h - 21k + h^2 + 3hk - 12k^2 - 2k^3$$

• القيم العظمى والصغرى النسبية •

* تعاريف:

ليكن f تابعاً "حقيقياً" معرفاً على مجموعة جزئية $D \subseteq \mathbb{R}^2$ $(f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$:

1• نقول عن نقطة c أنها قيمة عظمى نسبية إذا وجد

جوار U للنقطة c محتوى في D بحيث يكون:

$$f(x) \leq f(c) \; ; \; \forall x \in U$$

2. نقول عن النقطة c أنها قيمة صغرى نسبية لـ f إذا وجد جوار U محتوى في D $(U \subset D)$ بحيث يكون:

$$f(x) \geq f(c) \; ; \; \forall x \in U$$

ملاحظة:

من الواضح أنه إذا كان c نقطة عظمى أو صغرى نسبية فإن c نقطة داخلية لـ D

إذا كانت c قيمة عظمى نسبية أو قيمة صغرى نسبية لـ f فإننا نقول أن c قيمة قصوى نسبية.

كل قيمة قصوى نسبية هي نقطة حرجة و لكن العكس غير صحيح

3. نسمي كل حل c لجملة المعادلات $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \; ; \; i = 1, 2, \dots, n$ نقطة حرجة للتابع f.

مبرهنة القيم العظمى والصغرى لتابع:

ليكن $f(x,y)$ تابعاً "حقيقياً" معرفاً على مجموعة جزئية $D \subset \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

ولنفرض أن للتابع مشتقات جزئية حتى المرتبة الثانية مستمرة ولتكن (a,b) نقطة حرجة لـ f ولنرمز بـ Δ للمعين الآتي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(a,b) & f_{xx}(a,b) \\ f_{yy}(a,b) & f_{xy}(a,b) \end{vmatrix}$$

٤) إذا كان $\Delta > 0$ وكان $f_{xx}(a,b) > 0$ فعندئذٍ تكون النقطة (a,b) قيمة صغرى نسبية.

٥) إذا كان $\Delta > 0$ وكان $f_{xx}(a,b) < 0$ فإن النقطة (a,b) قيمة عظمى نسبية.

٦) إذا كان $\Delta < 0$ فإن النقطة (a,b) ليست قيمة قصوى للتابع.

٧) إذا كان $\Delta = 0$ فإن النقطة (a,b) قيمة قصوى نسبية أو لا تكون عندئذٍ نلجأ إلى التعريف لبيان طبيعتها.

ملحوظة: "إذا طلب إيجاد القيم القصوى يجب إيجاد القيم الحرجة بداية"

ملاحظة:

من الواضح أن كل قيمة قصوى نسبية للتابع f هي نقطة حرجة إلا أن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

مثال:

أوجد النقاط الحرجة للتابع:

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

ثم بيّن أياً منها يكون قيمة قصوى نسبية.

الحل: لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12$$

نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-15=0 \\ 6xy-12=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسيما على } 3} \begin{aligned} &x^2+y^2-5=0 \quad (1 \\ &xy-2=0 \quad (2 \end{aligned}$$

من 2) نجد:

$$xy-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{y}$$

نعوض في ①:

$$\frac{4}{y^2}+y^2-5=0 \Rightarrow 4+y^4-5y^2=0$$

$$\Rightarrow (y^2-4)(y^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=\mp 2 \\ y=\mp 1 \end{cases}$$

$$y=\mp 2 \Rightarrow x=\mp 1$$

$$y=\mp 1 \Rightarrow x=\mp 2$$

$P_1(1,2)$, $P_2(-1,-2)$, $P_3(2,1)$, $P_4(-2,-1)$

وهي النقاط الحرجة.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=6y$$

* من أجل $P_1(1,2)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)=6 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)=6 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)=12$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} f_{xy}(1,2) & f_{xx}(1,2) \\ f_{yy}(1,2) & f_{xy}(1,2) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}=108>0$$

وبما أن $\Delta>0$ فإن $P_1(1,2)$ ليست قيمة قصوى.

* من أجل $P_2(-1,-2)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-2) = -6 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-2) = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,-2) = -12$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(-1,-2) & f_{xx}(-1,-2) \\ f_{yy}(-1,-2) & f_{xy}(-1,-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= 144 - 36 = 108 > 0$$

وبما أن $\Delta>0$ فإن $P_2(-1,-2)$ ليست قيمة قصوى.

* من أجل $P_3(2,1)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = 12 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = 12 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(2,1) & f_{xx}(2,1) \\ f_{yy}(2,1) & f_{xy}(2,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 36 - 144 = -108 < 0$$

بما أن $\Delta<0$ و $f_{xx}(2,1)>0$ فإن $P_3(2,1)$ قيمة صغرى نسبية.

* من أجل $P_4(-2,-1)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-1) = -12 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,-1) = -12 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,-1) = -6$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(-2,-1) & f_{xx}(-2,-1) \\ f_{yy}(-2,-1) & f_{xy}(-2,-1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 144 = -108 < 0$$

بما أن $\Delta < 0$ و $f_{xx}(-2,-1) > 0$ فإن $P_4(2,1)$ قيمة صغرى نسبية.

للتأكد

تمرين:

ادرس القيم القصوى للتابع:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

(أو بصيغة أخرى أوجد النقاط الحرجة وبيّن طبيعة كل منها).

الحل: لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - \frac{1}{2}(x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + \frac{1}{2}(x-y)$$

نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} 4x^3 - \frac{1}{2}(x-y) = 0 \\ 4y^3 + \frac{1}{2}(x-y) = 0 \end{cases}$$

وبحل جملة المعادلتين نجد أن النقاط الحرجة للتابع f هي:

$$P_1(0,0),\ P_2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\ P_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}$$

* من أجل $P_1(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{1}{2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{1}{2}$$

الكتاب الاعتماد

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(0,0) & f_{xx}(0,0) \\ f_{yy}(0,0) & f_{xy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ فإن $P_1(0,0)$ قد تكون قيمة قصوى وقد لا تكون.
متكملة الحل في المحاضرة القادمة.

انتهت المحاضرة

تمرين

أوجد النقاط الحرجة للتابع:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

ثم بيّن طبيعة تلك النقاط.

الحل:

لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - \frac{1}{2}(x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + \frac{1}{2}(x-y)$$

نحل جملة المعادلتين:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

أي نحل:

$$\begin{cases} 4x^3 - \frac{1}{2}(x-y) = 0 \\ 4y^3 + \frac{1}{2}(x-y) = 0 \end{cases}$$

وبحل جملة المعادلتين نجد أن النقاط الحرجة للتابع هي:

$$P_1(0,0),\ P_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ P_3\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

* نبين الآن طبيعة كل نقطة:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}$$

* من أجل النقطة $P_1(0,0)$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} f_{xy}(0,0) & f_{xx}(0,0) \\ f_{yy}(0,0) & f_{xy}(0,0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

أي أن $P_1(0,0)$ قد تكون قصوى أو قد لا تكون.

لندرس طبيعة النقطة $(0,0)$ وذلك بدراسة التابع f في جوار تلك النقطة، من أجل ذلك لنحسب:

$f(0+h, 0+k)$

& $f(0+h, 0)$

& $f(0, 0+k)$

ونقارن هذه النتائج مع النقطة $(0,0)$:

لدينا:

$f(0,0) = 0$

$f(h,0) = h^4 - \frac{1}{4}h^2$

$= h^2\left(h^2 - \frac{1}{4}\right) < 0$

من الواضح أن:

$f(h,0) < 0 = f(0,0) \Longrightarrow \boxed{f(h,0) < f(0,0)}$

$$f(0,k) = k^4 - \frac{1}{4}k^2$$

$$= k^2\left(k^2 - \frac{1}{4}\right) < 0$$

من الواضح أن:

$$f(0,k) < 0 = f(0,0)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(0,k) < f(0,0)}$$

$$f(h,k) = h^4 + k^4 - \frac{1}{4}(h-k)^2$$

(بحالة خاصة) $h = k \Rightarrow f(h,h) = 2h^4 > 0 = f(0,0)$

$$\Rightarrow \boxed{f(h,h) > f(0,0)}$$

إذاً $P_1(0,0)$ ليست قيمة قصوى.

* من أجل $P_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$:

$$f_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$f_{yy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$f_{xy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{25}{4} = -\frac{24}{4} = -6$$

بما أن $\Delta_2 > 0$ وأن $f_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) > 0$ فإننا نقول

عن النقطة $P_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ أنها قيمة صغرى نسبياً".

* من أجل $P_3\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$f_{xx}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$f_{yy}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$f_{xy}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{25}{4} = -\frac{24}{4} = -6$$

بما أن $\Delta_3 < 0$, وأن $f_{xx}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) > 0$ فإننا نقول عن النقطة $P_3\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ أنها قيمة صغرى نسبياً".

تمرين: أوجد أصغر مسافة بين النقطة $(2, 1, -3)$ والمستوى الذي معادلته:

$$2x + y - 2z = 4$$

الحل:

لدينا حسب دستور المسافة بين نقطة معلومة ومستوي D :

$$l = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2}$$

إن قيمة z التي تحقق معادلة المستوي هي :

$$z = x + \frac{1}{2}y - 2$$

وبالتالي فإن :

$$l^2 = (x-2)^2+(y-1)^2+\left(x+\frac{1}{2}y-2+3\right)^2$$

- لإيجاد أقرب مسافة بين النقطة $(2,1,-3)$ والمستوي نشكل التابع :

$$l^2 = F(x,y)$$

- لنوجد النقاط الحرجة للتابع $F(x,y)$ وذلك بحل جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

أي حل :

$$\begin{cases} 2(x-2)+2\left(x+\frac{1}{2}y+1\right)=0 \\ 2(y-1)+\left(x+\frac{1}{2}y+1\right)=0 \end{cases}$$

فنجد أن النقطة الحرجة هي $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$

* نبين فيما إذا كانت تلك النقطة قيمة صغرى للتابع F *

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{xy}\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right) & F_{xx}\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right) \\ F_{yy}\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right) & F_{xy}\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ \frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - 10 = -9$$

من الواضح أن $\Delta < 0$ وأن $F_{xx} > 0$ وبالتالي فإن النقطة $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$ قيمة صغرى نسبياً.

وبالتالي فإن من أجل تلك النقطة يكون:

$$Z = \frac{-13}{9}$$

أي أن المسافة بين $(2, 1, -3)$ والمستوي تكون أصغر ما يمكن بين النقطة المعطاة والنقطة $\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{-13}{9}\right)$

$$l = \sqrt{\left(\frac{4}{9} - 2\right)^2 + \left(\frac{2}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{-13}{9} + 3\right)^2}$$

وبالتالي أصغر مسافة هي:

$$\Rightarrow l = \frac{7}{3}$$

تمرين وظيفة

أوجد أقصر مسافة بين النقطة $(1,-1,1)$

ومجموعة النقاط $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ; z=xy\}$

الحل:

إن المسافة بين النقطة $(1,-1,1)$ ونقطة من مجموعة النقاط

المفروضة تعطى بالعلاقة:

$$l=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2}$$

بتعويض $z=x.y$ والتربيع نجد:

$$f(x,y)=(x-1)^2+(y+1)^2+(xy-1)^2$$

- لنوجد النقاط الحرجة للتابع $f(x,y)$ وذلك بحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$$

أي بحل:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2(x-1)+2y(xy-1)=0\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)+2x(xy-1)=0\end{cases}\Longrightarrow$$

$$x-1+y(xy-1)=0 \qquad (1)$$
$$y+1+x(xy-1)=0 \qquad (2)$$

من (1) وعزل x بدلالة y:

$$x - 1 + xy^2 - y = 0 \Rightarrow x(1+y^2) - 1 - y = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{y+1}{y^2+1} \quad \ldots (3)$$

نعوض (3) في (2) فنجد:

$$y+1 + \frac{y+1}{y^2+1}\left(\frac{y^2+y}{y^2+1} - 1\right) = 0$$

$$y+1 + \frac{y+1}{y^2+1}\left(\frac{y^2+y}{y^2+1} - \frac{y^2+1}{y^2+1}\right) = 0$$

$$(y+1) + \frac{(y+1)(y-1)}{(y^2+1)^2} = 0$$

$$(y+1)\left(1 + \frac{y-1}{(y^2+1)^2}\right) = 0$$

إما $y+1 = 0 \Rightarrow y = -1$

أو $1 + \dfrac{y-1}{(y^2+1)^2} = 0$

$$(y^2+1)^2 + y - 1 = 0$$

$$y^4 + 2y^2 + 1 + y - 1 = 0$$

$$y^4 + 2y^2 + y = 0$$

$y(y^3+2y+1)=0$

إما $y=0$

أو $y^3+2y+1=0$

إما $y=0$ نعوض في 3 فنجد:

$x=1$

* يوجد نقطتان حرجتان $P_1(1,0)$ و $P_2(0,-1)$

* نبين فيما إذا كانت تلك القيمة صغرى للتابع f *

← من أجل $P_2(0,-1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}=2+2y^2 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x^2}(0,-1)=4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^2}=2+2x^2 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y^2}(0,-1)=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x\partial y}=4xy-2 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x\partial y}(0,-1)=-2$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} f_{xy}(0,-1) & f_{xx}(0,-1) \\ f_{yy}(0,-1) & f_{xy}(0,-1) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=4-8=-4$$

بما أن $\Delta<0$ و $f_{xx}(0,-1)>0$ ففي قيمة صغرى نسبياً

$x_0 = 0 , y_0 = -1 , z_0 = x_0 y_0 = 0$

فتنتج النقطة: $(0,-1,0)$.

نعوض في عبارة l:

$$l = \sqrt{(0-1)^2 + (-1+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

أيضاً ستكون $(1,0)$ قيمة صغرى نسبياً و أصغر مسافة هي $\sqrt{2}$

تمرين ٤

مثّل العدد الموجب $a > 0$ على شكل جداء ثلاثة أعداد موجبة بحيث يكون مجموع هذه الأعداد أصغر ما يمكن.

الحل:

$$F(x,y,z) = x + y + z$$

لنفرض أن تلك الأعداد هي x, y, z عندئذٍ يكون:

$$a = x \cdot y \cdot z$$

لنبحث الآن عن القيم القصوى للتابع:

$$F(x,y) = x + y + \frac{a}{xy}$$

بحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 - \dfrac{a}{y x^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 - \dfrac{a}{x y^2} = 0 \end{cases}$$

نجد أن النقطة الحرجة $P\left(a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{3}}\right)$

. لندرس طبيعة النقطة الحرجة وذلك بحساب:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P) \;\&\; \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P) \;\&\; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(P)$$

وبحساب المعين Δ نجد:

$$\Delta = \frac{-3}{\frac{3}{2}} < 0 \quad ; \quad a > 0$$

* وإن:

$$F_{xx}\left(a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{a^{\frac{1}{3}}} > 0 \quad ; \text{وأن } \Delta < 0$$

أي أن $P\left(a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{3}}\right)$ قيمة صغرى نسبية

. لنوجد Z:

$$Z = \frac{a}{a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{3}}$$

- بالتالي فإن الأعداد هي:

$$x = a^{\frac{1}{3}} \;,\; y = a^{\frac{1}{3}} \;,\; Z = a^{\frac{1}{3}}$$

انتهت المحاضرة
الرابعة عشر

م.ر.ج	السنة الثانية	قسم رياضيات	كلية العلوم	رقم المحاضرة
مكتبة رواد الجامعة	المادة: توابع متعددة متغيرات			15 نظري
267867	2011/4/25		د. غادة علي جوجة	

التوابع الضمنية

تمهيد:

ليكن $F(x,y)$ تابعاً حقيقياً معرفاً على المجموعة الجزئية المفتوحة $D\subset \mathbb{R}^2$ ولندرس تلك النقاط الواقعة في D والتي من أجلها $F(x,y)=0$ إذا قابلت كل قيمة للمتغير x من المجال I قيمة واحدة فقط للمتغير y $(y=f(x))$

بحيث تؤول المعادلة السابقة إلى مطابقة فإننا نقول عندئذ عن المعادلة $F(x,y)=0$ المحلولة بالنسبة لـ y أنها تعرف تابعاً ظاهرياً (استطعنا التعبير عن y مباشرة بدلالة x)،

أما إذا كانت المعادلة $F(x,y)=0$ غير محلولة بالنسبة لـ y فعندئذ نقول عن التابع $y=f(x)$ إنه يشكل تابعاً "ضمنياً"

($F(x,y)$ تعرف تابعاً ضمنياً).

على سبيل المثال:

لدينا المعادلة:

$$4x^2+y^2-1=0$$

من الواضح أن:

$$y=\sqrt{1-4x^2}$$

عدد الصفحات 11

b) $y = -\sqrt{1-4x^2}$

وهما تابعان معرفان في المجال $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

وإذا عوضنا كلاً منهما في المعادلة فإنها تؤول إلى مطابقة إلا أن الأمر ليس بهذه السهولة فمثلاً:

$$x^4 y^3 + 7x^2 y^7 - 6 = 0$$

فإننا نلاحظ أن التعبير عن y بدلالة x غير ممكن في حال وجوده.
(انتهى المثال)

* إن ما يهمنا هو موضوع وجود التابع الضمني المعطى بالمعادلة:

$$F(x,y) = 0$$

بغض النظر عن إمكانية التعبير عنه بشكل تحليلي.

تعريف:

ليكن $F(x,y)$ تابعاً "حقيقياً" معرفاً "على مجموعة مفتوحة $D \subset \mathbb{R}^2$:

يقال عن المعادلة $F(x,y)=0$ إنها تحدد تابعاً ضمنياً (يعبر عنه بالتابع الظاهر) ويساوي $y=f(x)$ في المستطيل R المعبر عنها بالمتراجحتين:

$$R: |x-x_0|<\delta \ , \ |y-y_0|<\delta$$

إذا قابل كل $]x_0-\delta , x_0+\delta[$ جذراً واحداً ويساوي $y=f(x)$ في المجال $]y_0-\delta , y_0+\delta[$

في هذه الحالة يكون التابعان:

$y=f(x)$ و $F(x,y)=0$

متكافئين في المستطيل R.

سنستعرض فيما يأتي المبرهنة التي تعطي الشروط التي يجب أن يخضع لها التابع لكي يعبر عنه بتابع ظاهر.

مبرهنة:

ليكن $F(x,y)$ تابعاً حقيقياً معرفاً على مجموعة مفتوحة $D\subset R^2$ ويحقق الشروط الآتية:

1) يوجد للتابع $F(x,y)$ مشتقان جزئيان في جوار النقطة (x_0,y_0) وهذان المشتقان مستمران في تلك النقطة.

2) $F(x_0,y_0)=0$

3) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

عندئذ تحقق لدينا ما يلي:

a) يوجد مستطيل R يحقق المتراجحتين:
$|x-x_0|<\delta \ , \ |y-y_0|<\delta$
بحيث يقابل كل نقطة x من المجال $]x_0-\delta , x_0+\delta[$ حل وحيد $y=f(x)$.

b) قيمة التابع f في النقطة x_0 هي y_0 أي:
$y_0=f(x_0)$

c) التابع الظاهر f تابع مستمر في المجال $]x_0-\delta , x_0+\delta[$

d) مشتق التابع f:

$$f'(x)=-\frac{F_x}{F_y}$$

مثال 1

ليكن $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرف بالشكل:

$$F(x,y) = x - y^3$$

- المطلوب: هل يمكن حل المعادلة بشكل وحيد بالنسبة للنقطة $(1,1)$

الحل:

1- من الواضح أن المشتقات الجزئيات من المرتبة الأولى موجودان في جوار النقطة $(1,1)$ مستمران عندها.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3y^2$$

2- $F(1,1) = 0$

3- $F_y(1,1) = -3 \neq 0$

a) وبالتالي يوجد مستطيل R يحقق المتراجحتين:

$$|x-1| < \delta \; , \; |y-1| < \delta$$

فيقابل كل x حل وحيد $y = f(x)$

b) $f(1) = 1$

c) $y = f(x)$ مستمر في المجال $]1-\delta, 1+\delta[$

d) $f'(1) = -\frac{1}{3}$

مثال 2 :

أعد المثال السابق ولكن في النقطة (٠،٠)

ملاحظة

إن المبرهنة السابقة تحدد شروطاً" كافية لو تحققت لتأكد وجود التابع الضمني المطلوب إلا أن هذه الشروط ليست لازمة إذ أنه قد يختل أحد الشروط ومع ذلك يكون التابع ضمنياً" (بمعنى آخر يمكن التعبير عنه بظاهر).

* على سبيل المثال:

في المثال السابق لدينا:

$F_y(0,0)=0$

مع ذلك فإن التابع المعطى يعبر عنه بالشكل:

$y=\sqrt[3]{x}$

إلا أننا نلاحظ أن f عند النقطة (٠،٠) غير موجود وهو الأمر الذي يبين ما سبق.

- لننتقل إلى الحالة الأعم:

ليكن f تابعاً معرفاً" على مجموعة جزئية مفتوحة $D\subset\mathbb{R}^5$ ولنبحث في مسألة وجود حل

$w = g(x, y, z)$

و $u = f(x, y, z)$

للمعادلتين

$G(x, y, z, u, w) = 0$

و $F(x, y, z, u, w) = 0$

على الترتيب.

* بعد ذلك لنعرف المعين اليعقوبي:

لتكن لدينا:

$G(x, y, z, u, w) = 0$

$F(x, y, z, u, w) = 0$

يُعرف المعين اليعقوبي بالنسبة لـ u و w على النحو:

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, w)} = \begin{vmatrix} F_u & F_w \\ G_u & G_w \end{vmatrix}$$

$F(x, y, z, u, w)$ و $G(x, y, z, u, w)$

تابعين حقيقين معرفين على مجموعة مفتوحة $D \subset \mathbb{R}^5$

يحققان الشروط الآتية:

1) للتابعين F, G مشتقات جزئية من المرتبة الاولى

بالنسبة لجميع متغيراته بجوار النقطة $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$
وهذه المشتقات يجب أن تكون مستمرة .

2) $F(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$

$G(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$

3) المعين اليعقوبي للتابعين F و g بالنسبة لـ u و v
غير معدوم في النقطة $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ عندئذ :

a) يوجد مستطيل R يحقق المتراجحات :

$|x - x_0| < \delta$ و $|y - y_0| < \delta, |z - z_0| < \delta$

$, |u - u_0| < \delta', |v - v_0| < \delta'$

بحيث يقابل كل نقطة حل وحيد $u = f(x, y, z)$
& $v = g(x, y, z)$

b) $v_0 = g(x_0, y_0, z_0)$ و $u_0 = f(x_0, y_0, z_0)$

c) التابعان f, g مستمران في جوار النقطة (x_0, y_0, z_0)

d) يوجد للتابعان مشتقات جزئية من المرتبة الاولى مستمرة
تعطى بالعلاقة :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,v)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,z)}$$

مثال

هل يمكن حل جملة المعادلتين :

$F: u+v-x^2+y=0$

$G: u^2+v^2-x^2-y=0$

بشكل وحيد بالنسبة لـ u, v أي:

$$(u = f(x,y),\ v = g(x,y))$$

وذلك في جوار:

$$(2,1,1,2)$$

الحل:

1- من الواضح أن كلاً من f و g يملك مشتقات جزئية من المرتبة الأولى في جوار تلك النقطة وهي مستمرة عندها.

2- $F(\overset{x}{2},\overset{y}{1},\overset{u}{1},\overset{v}{2}) = 0$

$G(2,1,1,2) = 0$

3- المعين اليعقوبي:

$$J = \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{(2,1,1,2)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

أي أنه يوجد مستطيل يحقق المتراجحات:

$$|x-2| < \delta \quad , \quad |y-1| < \delta$$

$|u-1| < \delta'$, $|v-2| < \delta'$

بحيث يقابل كل نقطة (x,y) حل وحيد $v = g(x,y)$
$u = f(x,y)$

انتهت المحاضرة

رقم المحاضرة	كلية العلوم	قسم رياضيات	السنة الثانية	م.ر.ج
16 نظري	المادة: توابع متعددة المتغيرات			مكتبة رواد الجامعة 267867
	د. غادة علي موجة	2012/4/29		

مبادئ نظرية التوابع الشعاعية (المتجهية) لعدة متغيرات

تناولنا فيما سبق مفاهيم النهاية والاستمرار والاشتقاق وقابلية المفاضلة لتوابع حقيقية لعدة متغيرات، سنحاول فيما يأتي تعميم تلك المفاهيم على التوابع الشعاعية لعدة متغيرات أي تلك التوابع المعرفة على مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ والتي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}^m$ وسنقوم بذلك بإيجاز.

• **تعريف**:

ليكن $f: D\subset\mathbb{R}^n$ تابعاً معرفاً على مجموعة جزئية $D\subset\mathbb{R}^n$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}^m$ عندئذ نقول عن f أنه تابع شعاعي (متجهي) لـ n متغير أي:

$$f: D\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$x=(x_1,\dots,x_n)\mapsto (f_1(x),\dots\dots,f_m(x))$$

يسمى f_i ; $i=1,\dots\dots,m$ مركبات التابع f.

$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $i=1,\dots,m$

مثال:

التابع $f: D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بـ:

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$$

حيث: $f(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$

من الواضح أن مجموع قيم f هي عبارة عن الجزء العلوي من الكرة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2=1$

مثال ٣

ليكن لدينا $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ ، أن مجموعة قيم
$t\to(\cos t,\sin t,t)$

التابع f هي :
من الواضح أن مجموعة قيم f هي عبارة عن لولب واقع داخل الاسطوانة معادلتها هي :
$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x^2+y^2\leq1\}$

ملاحظة :

يمكن نقل العمليات الجبرية من جمع وطرح ، جمع وقسمة ، ضرب وقسمة من التوابع الحقيقية لعدة متغيرات إلى التوابع المتجهية لعدة متغيرات.

• تعريف التابع الخطي •

نقول عن التابع f من $\mathbb{R}^n$ في $\mathbb{R}^m$: $(f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$
أنه تابع خطي إذا حقق الشرطين الآتيين :

1) $f(x+y)=f(x)+f(y)\quad;\quad\forall\, x,y\in\mathbb{R}^n$

2) $f(\alpha x)=\alpha f(x)\quad;\quad\alpha\in\mathbb{R}\,,\ x\in\mathbb{R}^n$

بعبارة أخرى نقول عن f أنه خطي إذا كان يحقق الخاصة الجمعية ويحقق خاصة التجانس.

يمكن دمج الشرطين 1 و 2 بشرط مكافئ:

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y) \;;\; \forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ x,y\in\mathbb{R}^n$$

نرمز لأي عنصر $x\in\mathbb{R}^n$ بمصفوفة العمود:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

كما نرمز للتابع f: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ والذي مركباته: $(f_1,f_2,\dots,f_m)$

بمصفوفة العمود:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

مبرهنة

الشرط اللازم والكافي كي يكون: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ "خطياً" هو أن يكون:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

حيث a_{ij} أعداد حقيقية.

البرهان:

بما أن f خطي فإن:

$$f(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = a_1 f(x_1) + \cdots + a_n f(x_n)$$

حيث $a_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$

إن كل عنصر $x \in \mathbb{R}^n$ يمكن أن يكتب على الشكل:

$$x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

أي:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

حيث : $x_i \in \mathbb{R} \; ; \forall i = 1, \dots, n$ و $\{e_i\}_i$ هي القاعدة القانونية في $\mathbb{R}^n$ ، بحكم خطية f نجد :

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots\dots + x_n f(e_n)$$

بفرض أن : $f(e_i) = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$ فإننا نجد أن :

$$f(x) = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots\dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$f(x) = \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

والتي تكتب بالشكل (يمكن أن نكتب) :

$$f(x)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

وهي مصفوفة التطبيق f في الجبر

انتهت المحاضرة السادسة عشر

ملاحظة :

مثال 09 :

في نص المبرهنة : (تصليح)

فإن : $|f(x)-f(c)|<k\,\|x-c\|$ وليس $|f(x)-f(c)|<k$

مثال :

برهان : $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\cdot\|y\|$ وليس

$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$

" الأخيرة "

السنة: الثانية
د. غادة

((توابع متعددة المتغيرات))
((نظري))

المحاضرة: الحادية عشر
٢٠١٣/٥/٢١

مبادئ نظرية التوابع لعدة متغيرات

استعرضنا من ما سبق مفاهيم النهاية والاستمرار والاشتقاق وقابلية المفاضلة للتوابع الحقيقية لعدة متغيرات

$$(f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})$$

سنستعرض فيما يأتي (بإيجاز) تعميم تلك المفاهيم على التوابع الشعاعية لعدة متغيرات أي تلك التوابع المعرفة على مجموعة جزئية من الفضاء $\mathbb{R}^n$ وتأخذ قيمها من $\mathbb{R}^m$

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

"تعريف"

ليكن f تابعاً معرفاً على المجموعة الجزئية D من $\mathbb{R}^n$ ويأخذ قيمه من $\mathbb{R}^n$ أي:

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \longrightarrow$$

$$f(x) = (f_1(x_i), \ldots\ldots, f_n(x_i))$$

حيث $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_i$

$; i = 1, 2, \ldots, n$

نسمي f تابعاً "شعاعياً" لـ n متغير حقيقي.

نسمي كل من $f_i(x)$; $(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$

بمركبات هذا التابع

"مثال"

ليكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ تابعاً "معرفاً" على النحو

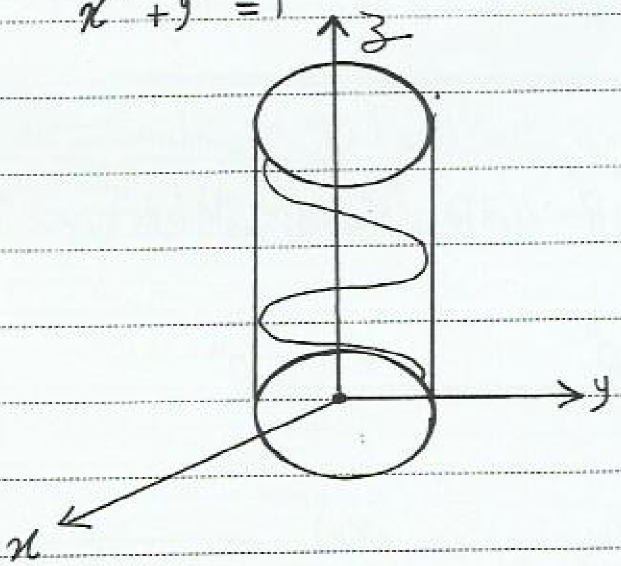
$$f(T) = (\cos T , \sin T , T)$$

إن f تابع شعاعي لمتحول حقيقي

"الحل"

من الواضح أن مجموعة قيم التابع f هي عبارة عن لولب واقع على اسطوانة قاعدتها الدائرة

$x^2 + y^2 = 1$



"ملاحظة"

يمكن تعريف عملية الجمع ، الطرح ، الضرب على صف التوابع الشعاعية لعدة متغيرات

كما عرفت على مجموعة التوابع الحقيقية .

"مثال"

$$f : D_1 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g : D_2 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f+g : D_1 \cap D_2 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \cdot g_{(x)} = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f+g)_{(x)} = f(x) + g(x)$$

بالعودة للملاحظة على سبيل المثال

إذا كان لدينا

$$f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$g : D_2 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m .$$

$$f+g = D_1 \cap D_2 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(f+g)_{(x)} = f(x) + g(x) \quad \forall \quad x \in D_1 \cap D_2$$

"تعريف"

ليكن f تابعاً "معرفاً" على $\mathbb{R}^n$ ويأخذ قيمه من $\mathbb{R}^m$

نقول عن f أنه تابع خطي إذا حقق الشرطين :

① $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n$$

② $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n$$
$$\alpha \in \mathbb{R}$$

بعبارة أخرى نقول عن f أنه خطي إذا كان تحقق الخاصة الجمعية وتحقق خاصة التجانس .

يمكن دمج الشرطين ① و ② بشرط مكافئ

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$
$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n \ ; \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

سبق أن وجدنا أن أي عنصر x بحيث :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

يمكن أن يمثل بمصفوفة عمود

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

أو بمصفوفة سطر

$$(x_1 \ \dots \ x_n)$$

كما أنه $f(x) = (f_1(x) \;--\;--\; f_n(x))$

يمكن أن يمثل بمصفوفة العمود

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

أو بمصفوفة سطر $(f_1(x) \quad f_2(x) \;------------\; f_n(x))$

"مبرهنة"

الشرط اللازم والكافي كي يكون التابع

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

خطياً" هو أن يكون

$$f(x) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ ---------------- \\ ---------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

حيث a_{ij} أعداد حقيقية

"البرهان"

بما أن f خطي فإن.

$$f(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)$$
$$= a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_n f(x_n)$$

حيث $a_i \in \mathbb{R}$

و $x_i \in \mathbb{R}^n$

إن كل عنصر $x \in \mathbb{R}^n$ يمكن أن يكتب بالشكل.

$$x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

$$(\forall\ i = 1, 2, 3, \ldots, n) \quad . \quad x_i \in \mathbb{R}$$

e_i هي القاعدة القانونية من $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n)$$

بفرض أن

$$f(e_i) = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

$$f(x) = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

أي :

$$f(x) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل .

$$f(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

// تعريف //

ليكن f تابعاً شعاعياً لعدة متغيرات

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

ولتكن c نقطة داخلية لـ D

نقول عن f أنه قابل للمفاضلة في النقطة c إذا كان كل من مركباته

$$f_i ; (f_i : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad i = 1, 2, \ldots)$$

تابعاً قابل للمفاضلة في النقطة c

يمكن البرهان على أن الشرط اللازم والكافي كي يكون التابع الشعاعي f قابلاً للمفاضلة في النقطة c هو أن توجد مصفوفة A ذات سعة $(m \times n)$ من أجلها يكون :

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c) - A(x - c)}{\|x - c\|} = 0$$

عندئذ تعطى هذه المصفوفة بالشكل

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(c) \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(c) \end{bmatrix}$$

تسمى هذه المصفوفة بمصفوفة مشتقات التابع f

"تعريف هام جداً"

نسمي التطبيق $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
متآلفاً" أو أمينياً
إذا أمكن كتابته على الشكل :

$$g(x) = b + A(x - c)$$

حيث
b : نقطة مثبتة من $\mathbb{R}^m$ (مصفوفة عمود من m سطر)
c : نقطة مثبتة من $\mathbb{R}^n$ (مصفوفة عمود من n سطر)
A : هي مصفوفة ذات سعة $m \times n$

يمكن البرهان على أنه إذا كان f قابلاً" للإشتقاق في النقطة c فإنه يكون مقرباً" بصورة جيدة من تطبيق متآلف
في جوار النقطة c
وعندئذٍ تأخذ المصفوفة A شكل مصفوفة مشتقات مركبات f
أما b فهي :

$$b = f(c)$$

"مثال"
أوجد التطبيق المتآلف للتطبيق f المعرف

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

على النحو:

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x^2 + y + z \\ \sin(x+y+z) \\ e^{xyz} \end{bmatrix}$$

في النقطة $C(1,-1,0)$

أي أنه المطلوب البحث عن $g = b + A(x - C)$

والمتآلف مع f ؟

الحل//

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(C) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(C) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(C) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(C) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(C) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(C) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(C) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(C) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(C) \end{bmatrix}$$

بعوض النقطة C نجد

$$A = \begin{bmatrix} 2x & 1 & 1 \\ \cos(x+y+z) & \cos(x+y+z) & \cos(x+y+z) \\ yz\,e^{xyz} & xy\,e^{xyz} & xy\,e^{xyz} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x - C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \\ z \end{pmatrix}$$

$$A(x - C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 1 \\ y + 1 \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x + y + z - 1 \\ x + y + z \\ -z \end{bmatrix}$$

ولإيجاد جاكوبيان النقطة c في التابع f .

$$b = f(c) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي التطبيق المتآلف مع f هو

$$g(x) = b + A(x - c)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x + y + z - 1 \\ x + y + z \\ -z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x + y + z - 1 \\ x + y + z \\ 1 - z \end{bmatrix}$$

«حل بعض التمارين العملي»

«التمرين الأول»

إذا كان

$$f(x, y) = x^2 e^{y/x}$$

① أوجد عبارة التفاضل لـ f

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

"الحل"

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\, e^{y/x} + x^2\left(\frac{-y}{x^2}\right)e^{y/x}$$

$$= (2x-y)\, e^{y/x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\left(\frac{1}{x}\right)e^{y/x}$$

$$= x\, e^{y/x} \Longrightarrow$$

$$df = (2x-y)\, e^{y/x}\, dx + x\, e^{y/x}\, dy$$

التمرين الثاني

ليكن التابع $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
المعرف بالعلاقة.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

① برهن على أن مشتق f في النقطة $(0,0)$ باتجاه $U(a,b)$
غير موجود في الحالة

$$a \cdot b \neq 0$$

② برهن على أن f غير مستمر في النقطة $(0,0)$ وبين أن ←

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

"الحل"

ليكن $U(a,b)$ شعاع بحيث

$$\|u\|=\sqrt{a^2+b^2}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+hu)-f(c)}{h}$$

$$c+hu=(0,0)+h(a,b)$$
$$=(ha,hb)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2ab}{h^2(a^2+b^2)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a.b}{(a^2+b^2)h}$$

إذا كان $a.b\neq 0$ فإن النهاية السابقة تساوي ∞

وبالتالي:

$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ غير موجود

إذا كان $a.b=0$ فإن النهاية السابقة تساوي الصفر

وبالتالي:

$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$

موجود ويساوي الصفر

"التمرين الثالث"

أوجد أقصر مسافة بين النقطة (١، -١، ١) والسطح

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; Z = xy\}$

"الحل"

إن المسافة بين النقطة (١، -١، ١) ونقطة من السطح المخروطي تعطى بالعلاقة:

$$l = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (Z-1)^2}$$

بتعويض $Z = x.y$ والتربيع والإصلاح نجد

$$l^2 = f(x.y) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (x.y-1)^2$$

لنوجد القيم القصوى.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-1) + 2y(xy-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1) + 2x(x.y-1).$$

نحل جملة معادلتين

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(x-1) + y(xy-1) = 0 \quad \ldots \; ①$$

$$(x+1) + x(xy-1) = 0 \quad \ldots \; ②$$

من ① نعزل x بدلالة y فنجد.

$$x-1+xy^2-y=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{y+1}{1+y^2} \text{ ----- } (3)$$

نعوض (3) في (2) فنجد .

$$y+1+\frac{y+1}{y^2+1}\left(\frac{y^2+y}{y^2+1}-1\right)=0$$

$$y+1+\frac{y+1}{y^2+1}\left(\frac{y^2+y-y^2-1}{y^2+1}\right)=0$$

$$y+1+\frac{(y+1)\quad(y-1)}{(y^2+1)^2}=0 \Rightarrow$$

$$y+1\left[1+\frac{y-1}{(y^2\quad+1)}\right]=0$$

$\{\underbrace{\overbrace{x=0}}\} \Leftarrow y=-1$ إما

$$1+\frac{y-1}{(y^2+1)^2}$$ أو

$$\Rightarrow (y^2+)^2+y-1=0$$

$$\Rightarrow y^4+2y^2+1+y-1=0$$

$$\Rightarrow y^4+2y^2+y=0$$

$$\Rightarrow y(y^3+2y\quad+1)=0$$

$y=0$ إما

$$\Rightarrow x=1$$

يوجد نقطتان حرجتان

$P_2(1,0)$ & $P_1(0,-1)$

$$P_1 = \Delta_1 = \begin{vmatrix} F_{xy}(0,-1) & F_{xx}(0,-1) \\ F_{yy}(0,-1) & F_{xy}(0,-1) \end{vmatrix}$$

ولدينا :

$$F_{xx} = 2 + 2y^2 \Rightarrow F_{xx}(0,-1) = 4$$

$$F_{xy} = 4xy - 2 \Rightarrow F_{xy}(0,-1) = -2$$

$$F_{yx} = 4xy - 2 \Longrightarrow F_{yx}(0,-1) = -2$$

$$F_{yy} = 2 + 2x^2 \Longrightarrow F_{yy}(0,-1) = 2$$

$$P_1 = \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} .$$

$$= -4 < 0$$

وبما أن $\Delta_1 < 0$ وأن $F_{xx}(0,-1) > 0$ فإن
النقطة تمثل قيمة صغرى نسبية

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = -1 \\ Z_0 = x_0 \\ y_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

نتبع النقطة (٠، ١- ، ٠) نعوض في العلاقة

$$l = \sqrt{(0-1)^2 + (-1+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

وأيضاً ستكون النقطة P_2 قيمة صغرى نسبية وأصغر مسافة هي $\sqrt{2}$

"التمرين الرابع"

ليكن التابع f معطى بالشكل:

$$f(x,y) = 2x + 4y - x^2y^4$$

عين النقاط الحرجة التابع $f(x,y)$ وبين أياً منها قيمة قصوى.

$$f_x = 2 - 2xy^4$$
$$f_y = 4 - 4x^2y^3$$

"الحل"

لإيجاد النقاط الحرجة نحل جملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{rcases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{rcases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2xy^4 = 0 \\ 4 - 4x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 - xy^4 = 0 \quad \text{--- } (1) \\ 1 - x^2y^3 = 0 \quad \text{---} (2) \end{cases}$$

من (1) نعزل x فنجد:

$$1 - xy^4 = 0 \Rightarrow 1 = xy^4$$

$$\Rightarrow \left\{ x = \frac{1}{y^4} \right\} \quad (3)$$

نعوض (3) في (2) فنجد:

$$1 - \left(\frac{1}{y^4}\right)^2 y^3 = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{y^8} y^3 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{y^5} = 0$$

$$\Rightarrow y^5 - 1 = 0 \Rightarrow \left\{ y^5 = 1 \right\}$$

وهذه المعادلة ليس لها حل حقيقي سوى

$$\left\{ y = 1 \right\} \quad \dots (4)$$

نعوض (4) في (2) نجد: $\left\{ x = 1 \right\}$

إذاً

النقطة $(1,1)$ نقطة حرجة

لنوجد الآن المشتقات الجزئية الثانية

$$f_{xx} = -2y^4$$

$$f_{xy} = -8xy^3$$

$$f_{yx} = -8xy^3$$

$$f_{yy} = -12x^2y^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx}(1,1) & f_{xy}(1,1) \\ f_{yx}(1,1) & f_{yy}(1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -8 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= 64 - 24 = 40$$

وبما أن $\Delta > 0$ إذاً $N(1,1)$ توافق قيمة قصوى

"التمرين الخامس"

ليكن التابع: $f(x,y) = e^{ax^2+by^2}$

حيث a و b ثوابت حقيقية: بيّن متى تكون النقطة $(0,0)$ قيمة صغرى "نسبياً" للتابع f.

"الحل"

لنوجد المشتقات الجزئية الأولى لـ f:

$$f_x = 2ax\, e^{ax^2+by^2}$$

$$f_y = 2by\, e^{ax^2+by^2}$$

واضح أن $(0,0)$ نقطة حرجة للتابع f.

لنوجد المشتقات الجزئية الثانية لـ f

$$f_{xx} = 2a\, e^{ax^2+by^2} + 4a^2x^2\, e^{ax^2+by^2}$$

$$f_{xx} = (2a + 4a^2x^2)\, e^{ax^2+by^2}$$

$$f_{xy} = 4a.b.x.y\, e^{ax^2+by^2}$$

$$f_{yx} = 4a.b.x.y\, e^{ax^2+by^2}$$

$$f_{yy} = (2b + 4b^2y^2)\, e^{ax^2+by^2}$$

والآن لنوجد Δ:

$\Leftarrow$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy}(0,0) & f_{xx}(0,0) \\ f_{yy}(0,0) & f_{yx}(0,0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2a \\ 2b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4ab$$

حتى تكون $(0,0)$ قيمة صغرى يجب أن يكون $\Delta < 0$

أي: $-4a.b<0$

$\Rightarrow a.b>0$

أي إما $a,b>0$

أو $a.b<0$

"الحالة الأولى"

إذا كان $a,b>0$ عندها

$f_{xx}(0,0) = 2a > 0$

فتكون $(0,0)$ قيمة صغرى نسبياً" التابع f

"الحالة الثانية"

إذا كان $a,b<0$ عندها

$f_{xx}(0,0) = 2a < 0$

فتكون (٥،٥) قيمة عظمى نسبياً" للتابع f .

بالنتيجة تكون (٥،٥) قيمة صغرى نسبياً" للتابع f

إذا كان a.b > ٥

انتهت المحاضرة الحادية عشر نظري

توابع متعددة المتغيرات

الأخيرة

(ياسمين الشام وفاطمة أحمد شما)

انتهى المقرر بإذنه تعالى

"ابتسم فإن الله ما أخذ منك إلا ليعطيك وما أشقاك إلا ليسعدك"

"التجربة الناجحة أتي بعد عدة تجارب فاشلة"

كن واثق بأنك تستطيع النجاح رغم كل الظروف القاسية لأنه لا يولد الأقوياء إلا من قلوب الضعفاء.