حل ورقة عمل في بحثي العقدية وتطبيقاتها
للصف الثالث الثانوي العلمي (2021–2022)

السؤال الأول : حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $iz^2+(-3+4i)z+i-5=0$.

الحل

$$\Delta=(-3+4i)^2-4i(i-5)$$
$$=9-24i-16+4+20i$$
$$=-3-4i=w^2$$

لإيجاد w نفرض $w=x+yi$ فيكون $(x+yi)^2=-3-4i$ و $\left|w^2\right|=\left|-3-4i\right|$ ومنه

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & (1)\\ x^2-y^2=-3 & (2)\\ x\cdot y=-2 & (3)\end{cases}$$

❒ بجمع (1) و (2) نجد $2x^2=2$ ومنه $x^2=1$

وبالتالي $x=1$ أو $x=-1$.

❒ بطرح (2) من (1) نجد $2y^2=8$ ومنه $y^2=4$

وبالتالي $y=2$ أو $y=-2$.

❒ من (3) نجد أنّ $x\cdot y=-2<0$ ومنه x و y من إشارتين مختلفتين

ومنه $w_1=1-2i$ أو $w_2=-1+2i$

وبالتالي $\Delta=(1-2i)^2$ ومنه :

$$z_1=\frac{3-4i+1-2i}{2i}=\frac{4-6i}{2i}=\frac{4i+6}{-2}$$
$$\boxed{z_1=-3-2i}$$

$$z_2=\frac{3-4i-1+2i}{2i}=\frac{2-2i}{2i}=\frac{2i+2}{-2}$$
$$\boxed{z_2=-1-i}$$

السؤال الثاني : ليكن العدد $w=(1-i)e^{i\frac{\pi}{3}}$

❶ اكتب w بالشكل الجبري ثمّ بالشكل الأسي واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{11\pi}{12}$.

❷ جِدْ العددين p و q علماً أنّ للمعادلة $z^2+pz+q=0$ جذرين هما $2e^{i\frac{\pi}{12}}$ و $2e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

الحل

❶ $w=(1-i)e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $w=(1-i)(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ وبالتالي $w=(1-i)(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$ ومنه

$w=(\frac{\sqrt{3}+1}{2})+i(\frac{\sqrt{3}-1}{2})$ وهو الشكل الجبري للعدد w .

$w=(1-i)e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $w=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{3}}$ و منه $w=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$ وهو الشكل الأسي للعدد w .

بالمقارنة بين الشكل الجبري والأسي للعدد w نجد أنّ :

$$\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}} = (\frac{\sqrt{3}+1}{2}) + i(\frac{\sqrt{3}-1}{2})$$

ومنه $e^{i\frac{\pi}{12}} = (\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}) + i(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}})$ وبالتالي $\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = (\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}) + i(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}})$

ومنه : $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

$$\cos\frac{11\pi}{12} = \cos\frac{12\pi-\pi}{12} = \cos(\pi - \frac{\pi}{12}) = -\cos\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

❷ $z^2 + pz + q = 0$

$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = -p$ ومنه $2e^{i\frac{\pi}{12}} + 2e^{-i\frac{\pi}{12}} = -p$ وبالتالي $-2(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}) = p$ ومنه $-4\cos\frac{\pi}{12} = p$ وبالتالي

$\boxed{p = -\sqrt{6} - \sqrt{2}}$.

من جهة أخرى $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} = q$ ومنه $2e^{i\frac{\pi}{12}} 2e^{-i\frac{\pi}{12}} = 4 = q$ وبالتالي $\boxed{q = 4}$

والمعادلة هي : $z^2 + (-\sqrt{6} - \sqrt{2})z + 4 = 0$.

<u>السؤال الثالث</u>: اكتب العدد العقدي $z = \cos\theta + i\cos\theta$ بالشكل الأسي حيث $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

الحل

$z = \cos\theta + i\cos\theta$ ومنه $z = \cos\theta\,(1+i)$ وبالتالي $z = \cos\theta\,\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

ولمّا كانت $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ أي θ تقع في الربعين الثاني والثالث ومنه $\cos\theta < 0$ على هذا المجال ومنه

$z = -e^{i\pi}\cos\theta\,\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ وبالتالي $z = \underbrace{-\cos\theta}_{>0}\,\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ هو شكل أسي للعدد العقدي المفروض .

<u>السؤال الرابع</u>: ليكن العددان العقديان z_1 و z_2 المتمايزين و غير المعدومين حيث $z_1 \neq -z_2$

أثبت أنّه إذا كان $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ كان $\frac{z_1}{z_2}$ تخيّلياً بحتاً .

الحل

$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ ومنه $|z_1 + z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$ وبالتالي $(z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)$

ومنه $z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2$ و منه $2z_1\overline{z}_2 = -2z_2\overline{z}_1$ ومنه $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$

وبالتالي $\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = -\frac{z_1}{z_2}$ أي $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{z_1}{z_2}$ ومنه $\frac{z_1}{z_2}$ تخيّلي بحت .

السؤال الخامس: لتكن النقاط A و B و C التي تمثّلها الأعداد العقدية :

$c=3-2\sqrt{3}\,i$ و $b=\sqrt{3}\,i$ و $a=3+2\sqrt{3}\,i$

❶ احسب العدد $\dfrac{a-b}{c-b}$ واستنتج نوع المثلث ABC .

❷ عيّن العدد العقدي d الممثّل للنقطة D ليكون $ABCD$ مستطيلاً.

الحل

❶ $\dfrac{a-b}{c-b}=\dfrac{3+i2\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{3-i2\sqrt{3}-i\sqrt{3}}=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{3-i3\sqrt{3}}$ ومنه $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-3i}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-3i)}=\dfrac{a-b}{c-b}$ وبالتالي

$\dfrac{a-b}{c-b}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-3i}$ نضرب بالمرافق ونقسّم عليه فنجد :

$\dfrac{a-b}{c-b}=\dfrac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+3i)}{3+9}$ ومنه $\dfrac{a-b}{c-b}=\dfrac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+3i)}{3+9}=\dfrac{4\sqrt{3}i}{12}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}i$

$\dfrac{a-b}{c-b}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}i$

وبالتالي $\arg(\dfrac{a-b}{c-b})=\arg(\dfrac{1}{\sqrt{3}}i)$ ومنه $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\dfrac{\pi}{2}$ فالمثلث ABC قائم في B .

❷ لمّا كان المثلث ABC قائماً في B يكفي حتى يكون $ABCD$ مستطيلاً أن يكون متوازي أضلاع . أي يكفي أن يتحقّق الشرط $Z_{\overrightarrow{AD}}=Z_{\overrightarrow{BC}}$ ومنه $d-a=c-b$ وبالتالي $d=a+c-b$ ومنه

$d=3+2\sqrt{3}i+3-2\sqrt{3}i-\sqrt{3}i=6-\sqrt{3}i$.

السؤال السادس :

❶ اكتب العدد $8i$ بالشكل الأسي ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة الآتية : $z^3=8i$.

❷ لتكن النقطتان A و B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية : $z_A=\sqrt{3}+i$ و $z_B=-\sqrt{3}+i$.

a. أثبت أنّ A و B تنتميان إلى الدائرة Γ التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 2 .

b. أوجد العدد العقدي الممثّل للنقطة C التي تجعل O مركز ثقل المثلث ABC.

c. بفرض أنّ العدد العقدي الممثل للنقطة C هو $z_C=-2i$ تحقق أنّ النقطة C تنتمي إلى الدائرة Γ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

الحل

❶ $8i=8e^{i\frac{\pi}{2}}$

لحل المعادلة $z^3=8i$ نفرض $z=re^{i\theta}$ ومنه $r^3e^{i3\theta}=8e^{i\frac{\pi}{2}}$ و منه $r^3=8$ وبالتالي $\boxed{r=2}$ و $e^{i3\theta}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه

$3\theta=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ وبالتالي $\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi k}{3}:k\in\{0,1,2\}$

❐ عندما $k=0$ يكون $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ ومنه $z_1=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

❐ عندما $k=1$ يكون $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$ ومنه $z_2=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

❐ عندما $k = 2$ يكون $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ومنه $z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

❷ $OA = |z_A| = \sqrt{1+3} = 2$

$OB = |z_B| = \sqrt{1+3} = 2$

بما أنّ $OA = OB = 2$ ومنه A و B تنتميان إلى الدائرة Γ التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 2 .

.b $z_O = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$ ومنه $z_C = -z_A - z_B$ ومنه

$z_C = -\sqrt{3} - i + \sqrt{3} - i = -2i$

.c $OC = |z_C| = \sqrt{4} = 2$ ومنه النقطة C تنتمي إلى الدائرة Γ بما أنّ النقطة O مركز ثقل المثلث ABC

وهي مركز الدائرة المارة برؤوسه فالمثلث ABC متساوي الأضلاع .

السؤال السابع : ليكن $P(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}$

❶ تحقّق أنّ $i\sqrt{2}$ جذر للمعادلة $P(z) = 0$.

❷ a) عيّن العددين الحقيقين a و b حيث $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$.

b) حل المعادلة $P(z) = 0$.

❸ لتكن النقاط A و B و I التي تمثّلها الأعداد العقدية: $z_A = -7 + 5i$ و $z_B = -7 - 5i$ و $z_I = i\sqrt{2}$

a) عيّن العدد العقدي z_C الممثّل للنقطة C صورة النقطة I وفق الدوران الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.

b) بافتراض $z_C = 1 + i$ عيّن العدد العقدي z_D الممثّل للنقطة D التي تجعل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

c) بافتراض $z_D = 1 + 11i$ احسب النسبة $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ وتحقّق أنّ المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان .

واستنتج عندئذٍ نوع الرباعي $ABCD$.

الحل

❶ $P(i\sqrt{2}) = (i\sqrt{2})^3 + (14 - i\sqrt{2})(i\sqrt{2})^2 + (74 - 14i\sqrt{2})(i\sqrt{2}) - 74i\sqrt{2}$ ومنه

$P(i\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}i + (14 - i\sqrt{2})(-2) + (74i\sqrt{2} + 28) - 74i\sqrt{2}$ وبالتالي

$P(i\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}i + -28 + i2\sqrt{2} + 74i\sqrt{2} + 28 - 74i\sqrt{2} = 0$ ومنه $i\sqrt{2}$ جذر للمعادلة $P(z) = 0$.

❷ a) $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$ ومنه $P(z) = z^3 + az^2 + bz - i\sqrt{2}z^2 - ia\sqrt{2}z - ib\sqrt{2}$ وبالتالي

$P(z) = z^3 + (a - i\sqrt{2})z^2 + (b - ia\sqrt{2})z - ib\sqrt{2}$ بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} a - i\sqrt{2} = 14 - i\sqrt{2} & (1) \\ b - ia\sqrt{2} = 74 - 14i\sqrt{2} & (2) \\ -ib\sqrt{2} = -74i\sqrt{2} & (3) \end{cases}$$

من المعادلة (1) أنّ $a = 14$ ومن (3) نجد أنّ $b = 74$ ونجد أنهما يحققّان المعادلة (2) وضوحاً .

وبالتالي $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + 14z + 74)$.

b) $P(z) = 0$ يكافئ أن يكون $(z - i\sqrt{2})(z^2 + 14z + 74) = 0$

ومنه إما $\boxed{z_1 = i\sqrt{2}}$ أو $z^2 + 14z + 74 = 0$ وبالتالي

$\Delta = 196 - 4(1)(74) = -100 < 0$ للمعادلة حلّان في $\mathbb{C}$ هما

$z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{-14 + i10}{2} = \boxed{-7+5i}$ و $z_3 = \overline{z}_2 = \boxed{-7-5i}$

❸ a) $z_C = e^{-\frac{i\pi}{4}} z_I = (\cos\dfrac{-\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\pi}{4})(i\sqrt{2})$ ومنه $z_C = (\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}})(i\sqrt{2}) = \boxed{i+1}$

b) يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا كان $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ وهذا يكافئ $Z_{\overrightarrow{AD}} = Z_{\overrightarrow{BC}}$ ومنه $z_D - z_A = z_C - z_B$

ومنه $z_D = z_A + z_C - z_B = -7 + 5i + 1 + i + 7 + 5i$ وبالتالي $z_D = 1 + 11i$

c) $\dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B} = \dfrac{-7+5i-1-i}{1+11i+7+5i} = \dfrac{-8+4i}{8+16i}$ ومنه $\dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B} = \dfrac{-2+i}{2+4i}$ نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B} = \frac{(-2+i)(2-4i)}{4+16} = \frac{-4+8i+2i+4}{20}$$

ومنه $\dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B} = \dfrac{1}{2}i$

نلاحظ أنّ $\arg(\dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B}) = \arg(\dfrac{1}{2}i)$ ومنه $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}) = \dfrac{\pi}{2}$ فالمستقيمان (BD) و (CA) متعامدان

أي قطرا متوازي الأضلاع $ABCD$ متعامدان فهو معيّن .

السؤال الثامن : ليكن العددان العقديّان : $z_1 = -1 + i$ و $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

❶ احسب كلاً من $z_1 + z_2$ و $z_1 \cdot z_2$ بالشكل الجبري .

❷ استنتج في $\mathbb{C}$ جذري المعادلة : $z^2 - i(1-\sqrt{3})z - 1 + \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3}) = 0$.

❸ اكتب كلاً من z_1 و z_2 و $z_1 \cdot z_2$ بالشكل المثلثي واستنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$.

❹ في مستوٍ منسوب إلى معلمٍ متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقاط A و B و C التي تمثّلها الأعداد العقدية z_1 و z_2 و $-\overline{z}_1$

بيّن أنّ المثلث ABC قائم في C .

الحل

❶ $z_1 + z_2 = -1 + i + 1 - i\sqrt{3} = i(1-\sqrt{3})$

$z_1 \cdot z_2 = (-1+i)(1-i\sqrt{3}) = (-1+\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$.

❷ $z^2 - i(1-\sqrt{3})z - 1 + \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3}) = 0$

نحن نعلم أنّه إذا كان z_1 و z_2 جذري المعادلة التربيعية فإنّ المعادلة تكتب بالشكل : $z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = 0$

وبالتالي جذرا المعادلة السابقة $z_1 = -1 + i$ و $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

❸ $z_1 = -1 + i$ ومنه $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ ومنه $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

بالمقارنة بين الشكل الجبري والشكل الأسي للعدد $z_1 \cdot z_2$ نجد $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}} = (-1+\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$ ومنه

$e^{i\frac{5\pi}{12}} = (\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}) + i(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}})$ وبالتالي $\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12} = (\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}) + i(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}})$

ومنه $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

❹ $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{z_1 + \overline{z}_1}{z_2 + \overline{z}_1} = \frac{-2}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i}$ ومنه $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{2}{i(\sqrt{3}+1)} = \frac{-2}{(\sqrt{3}+1)}i$.

$\arg\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \arg(\frac{-2}{(\sqrt{3}+1)}i)$ ومنه $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}) = \frac{-\pi}{2}$ فالشعاعان $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدان فالمثلث ABC قائم في C .

السؤال التاسع : لتكن النقاط A و B و G الممثّلة للأعداد العقدية: $z_A = \sqrt{3} - i$ و $z_B = -\sqrt{3} - 3i$ و $z_G = \dfrac{4z_B}{3\sqrt{3}\, z_A}$

❶ اكتب كلاً من الأعداد العقدية z_A و z_B و z_G بالشكل الأسي .

❷ احسب العدد $\dfrac{z_B}{z_A}$. و استنتج نوع المثلث AOB .

❸ لتكن النقطة I منتصف $[AB]$ أوجد العدد العقدي z_I الممثّل للنقطة I .

❹ أوجد قياساً للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OG})$ واستنتج أنّ النقاط O و G و I تقع على استقامةٍ واحدة .

❺ تحقّق أنّ النقطة G مركز ثقل المثلث OAB .

الحل

❶ $z_A = \sqrt{3} - i$

$$r = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \dfrac{-1}{2}\end{array}\right\}\theta = -\frac{\pi}{6}$$

ومنه $z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_B = -\sqrt{3} - 3i$

$$r = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\theta = \frac{4\pi}{3}$$

ومنه $z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$z_G = \dfrac{4z_B}{3\sqrt{3}\, z_A}$ ومنه $z_G = \dfrac{4(2\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}})}{3\sqrt{3}\,(2e^{-i\frac{\pi}{6}})} = e^{i(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{9\pi}{6}}$ وبالتالي $z_G = \dfrac{4}{3}e^{i\frac{3\pi}{2}} = \dfrac{4}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

❷ $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\dfrac{4}{3}z_G = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ومنه

$\arg(\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O}) = \arg(\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}})$ وبالتالي $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \dfrac{-\pi}{2}$ فالشعاعان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ متعامدان فالمثلث OAB قائم في O

❸ النقطة I منتصف $[AB]$ ومنه $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - 3i}{2} = -2i$.

❹ $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OG}) = \arg(\dfrac{z_G}{z_I}) = \arg(\dfrac{-\frac{4}{3}i}{-2i}) = \arg(\dfrac{2}{3}) = 0$ فالشعاعان $\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OG}$ مرتبطان خطيّاً .

فالنقاط O و I و G تقع على استقامةٍ واحدة .

❺ $\dfrac{z_O + z_A + z_B}{3} = \dfrac{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - 3i}{3} = -\dfrac{4}{3}i = z_G$

ومنه النقطة G مركز ثقل المثلث OAB .

السؤال العاشر :

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة الآتية : $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

❷ لتكن النقطتان A و B اللتان يمثّلهما العددان العقديان : $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ و $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$.

a) اكتب كلاً من z_A و z_B بالشكل الأسي .

b) احسب الأطوال : OA و OB و AB واستنتج نوع المثّلث OAB .

❸ لتكن النقطة C التي يمثّلها العدد العقدي $z_C = -\sqrt{3} + i$.

أوجد العدد العقدي z_D الممثّل للنقطة D صورة C وفق الدوران الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{3}$.

❹ لتكن النقطة E التي يمثّلها العدد العقدي $z_E = 4\sqrt{3} + 6i$

احسب العدد $\frac{z_E - z_C}{z_D - z_C}$ ثمّ استنتج وقوع النقاط C و D و E على استقامةٍ واحدة .

❺ أثبت أنّ $\frac{z_C - z_A}{z_E - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ واستنتج نوع المثلث ACE .

الحل

❶ $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 64(3) - 4(1)(64) = -64 < 0$ فللمعادلة حلّان في $\mathbb{C}$

$$\sqrt{-\Delta} = 8$$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 4\sqrt{3} - 4i$$

❷ a) $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$

$$r = \sqrt{48 + 16} = \sqrt{64} = 8$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \theta = -\frac{\pi}{6}$$

ومنه $z_A = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ولمّا كان $z_B = \overline{z_A} = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $OA = |z_A| = \sqrt{48 + 16} = 8$ و $OB = |z_B| = |\overline{z_A}| = |z_A| = 8$

$AB = |z_B - z_A| = |8i| = 8$ ومنه $OA = OB = AB$ فالمثلث OAB متساوي الأضلاع .

❸ $z_D = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_C = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\sqrt{3} + i)$

ومنه $z_D = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\sqrt{3} + i) = 2i$.

❹ $\frac{z_E - z_C}{z_D - z_C} = \frac{4\sqrt{3} + 6i + \sqrt{3} - i}{2i + \sqrt{3} - i} = \frac{5\sqrt{3} + 5i}{\sqrt{3} + i} = 5$

ومنه $\arg\frac{z_E - z_C}{z_D - z_C} = \arg(5) = 0$ أي $0 = (\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE})$ فالشعاعان $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ مرتبطان خطياً فالنقاط C و D و E تقع على استقامةٍ واحدة .

❺ $\frac{z_C - z_A}{z_E - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + i - 4\sqrt{3} + 4i}{4\sqrt{3} + 6i - 4\sqrt{3} + 4i} = \frac{-5\sqrt{3} + 5i}{10i}$ ومنه $\frac{z_C - z_A}{z_E - z_A} = \frac{i^2 5\sqrt{3} + 5i}{10i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{i\frac{\pi}{3}}$

نلاحظ أنّ $(z_C - z_A) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_A)$ ومنه C هي صورة E وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

فالمثلث AEC متساوي الأضلاع .

السؤال الحادي عشر : في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$:

لتكن النقاط A و B و C التي تمثّلها الأعداد العقدية : $z_A = -2\sqrt{3}$ و $z_B = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $z_C = 2i$ بالترتيب .

❶ اكتب z_A و z_C بالشكل الأسي و z_B بالشكل الجبري .

❷ عيّن العدد العقدي z_E الممثّل للنقطة E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(C,3)$.

❸ بفرض $z_E = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$. احسب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_E}$ واستنتج ماذا يمثّل المستقيم (BE) في المثلث ABC .

الحل

❶ $z_A = -2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\pi}$ و $z_C = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $z_B = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i) = \sqrt{3} - 3i$.

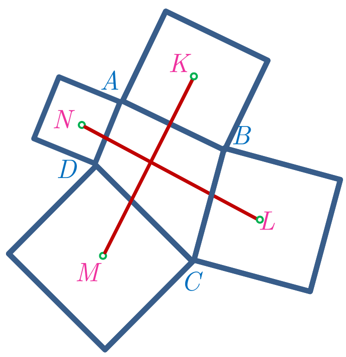
❷ $z_E = \frac{z_A + 3z_C}{4} = \frac{-2\sqrt{3} + 6i}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

❸ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_E} = \frac{2i + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}$ ومنه $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_E} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2}i} = \frac{4\sqrt{3} + 4i}{3\sqrt{3} - 9i}$ وبالتالي

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_E} = \frac{4(\sqrt{3} + i)}{3\sqrt{3}(1 - \sqrt{3}i)} = \frac{8e^{i\frac{\pi}{6}}}{6\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{2}}$ (ونستطيع بأسلوب آخر ضرب البسط والمقام بمرافق المقام)

وبالتالي $\arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_E}) = \arg(\frac{4}{3\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2}$ أي $(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ أي (BE) يعامد (AC) فالمستقيم (BE) ارتفاع في المثلث ABC .

السؤال الثاني عشر :



نتأمّل في مستوٍ مزوّد بمعلم متجانس رباعياً محدباً $ABCD$.

وننشئ على أضلاعه مربعات كما في الشكل المجاور :

ولتكن النقاط : K و L و M و N هي مراكز هذه المربعات .

لنفترض أنّ الشكل مرسوم في المستوي الموجّه ، وقد زوّدناه بمعلم متجانس مباشر

ولنرمز a و b و c و d إلى الأعداد العقدية التي تمثّل النقاط A و B و C و D

وكذلك الأمر لنرمز k و l و m و n إلى الأعداد العقدية التي تمثّل النقاط

K و L و M و N.

❶ الدوران الذي مركزه K وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ينقل A إلى B استعمل الصيغة العقدية لتثبت أنّ : $k = \frac{b-ia}{1-i}$.

❷ استنتج بالمثل l و m و n بدلالة الأعداد العقدية a و b و c و d .

❸ احسب $\frac{m-k}{n-l}$ ، ثمّ أثبت أنّ قطري الرباعي $KLMN$ متعامدان ومتساويان .

❹ أثبت أنّه حتى يكون الرباعي $KLMN$ مربعاً يجب أن تتحقق العلاقة: $a+c=b+d$ ما نوع الرباعي $ABCD$ عندئذٍ؟

الحل

❶ $R_{K,\frac{\pi}{2}}(A) = B$ ومنه $(b-k) = i(a-k)$ وبالتالي $b-k = ia-ik$ ومنه $b-ia = k-ik$

وبالتالي : $b-ia = k(1-i)$ وأخيراً $k = \frac{b-ia}{1-i}$.

❷ $R_{L,\frac{\pi}{2}}(B) = C$ بالمثل نجد $\boxed{l = \frac{c-ib}{1-i}}$ و $R_{M,\frac{\pi}{2}}(C) = D$ ومنه $\boxed{m = \frac{d-ic}{1-i}}$

$R_{N,\frac{\pi}{2}}(D) = A$ ومنه $\boxed{n = \frac{a-id}{1-i}}$.

❸ $\frac{m-k}{n-l} = \frac{d-ic-b+ia}{a-id-c+ib} = \frac{-i^2d-ic+i^2b+ia}{a-id-c+ib}$ وبالتالي

$$\frac{m-k}{n-l} = \frac{i(a-id-c+ib)}{a-id-c+ib} = i$$

❒ $\arg(\frac{m-k}{n-l}) = \arg(i)$ ومنه $(\overrightarrow{LN}, \overrightarrow{KM}) = \frac{\pi}{2}$ فالمستقيمان (LN) و (KM) متعامدان .

❒ $\left|\frac{m-k}{n-l}\right| = |i|$ ومنه $\frac{|m-k|}{|n-l|} = 1$ وبالتالي $\frac{KM}{LN} = 1$ ومنه $KM = LN$.

وبالتالي قطرا الرباعي $KLMN$ متعامدان ومتساويان .

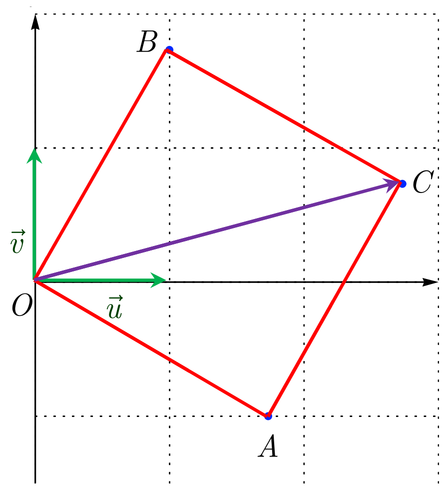
❹ يكون الرباعي $KLMN$ مربعاً إذا تحقّق شرط إضافي على القطرين وهو أن يكونا متناصفين

أي يجب أن يتحقّق $\frac{l+n}{2} = \frac{m+k}{2}$ ومنه $m+k = n+l$ وبالتالي $d-ic+b-ia = a-id+c-ib$

ومنه $d-ic+b-ia = a-id+c-ib$ وبالتالي $d+b-i(c+a) = a+c-i(d+b)$ وتتحقّق المساواة السابقة عندما

يكون $a+c = b+d$ ومنه $\frac{b+d}{2} = \frac{a+c}{2}$ أي قطرا الرباعي $ABCD$ متناصفان فيكون متوازي أضلاع عندئذٍ .

السؤال الثالث عشر :



في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$.

لدينا النقاط A و B و C التي تمثّلها الأعداد العقدية :

$z_A=\sqrt{3}-i$ و $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=z_A+z_B=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$

❶ اكتب بالشكل الأسي كلاً من العددين z_A و z_B .

❷ احسب $\frac{z_B}{z_A}$ ثمّ استنتج نوع المثلّث OAB . وتحقّق أنّ $OACB$ مربّع .

❸ a) بملاحظة أنّ: $(\vec{u},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=(\vec{u},\overrightarrow{OC})$ استنتج أنّ $(\vec{u},\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{12}$

b) احسب $|z_C|$ ثمّ اكتب العدد العقدي z_C بالشكل الأسي .

c) استنتج قيمة $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$.

الحل

❶ $z_A=\sqrt{3}-i=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_B=1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

❷ $\frac{z_B}{z_A}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

❒ $\arg(\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O})=\arg(e^{i\frac{\pi}{2}})$ وبالتالي $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{2}$ فالمثلث OAB قائم في O .

❒ $\left|\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right|$ ومنه $\frac{|z_B-z_O|}{|z_A-z_O|}=1$ وبالتالي $\frac{OB}{OA}=1$ ومنه $OB=OA$ فالمثلث OAB متساوي الساقين

فأصبح المثلث OAB قائم في O ومتساوي الساقين .

ولمّا كان $z_C=z_A+z_B$ كان $z_C-z_A=z_B-z_O$ ومنه $z_{\overrightarrow{AC}}=z_{\overrightarrow{OB}}$ وهذا يكافئ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$ فالشكل $OACB$ متوازي أضلاع وفيه زاوية قائمة فهو مستطيل وفيه ضلعان متجاوران متساويان فهو مربع .

❸ a) $(\vec{u},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=(\vec{u},\overrightarrow{OC})$ ومنه $(\vec{u},\overrightarrow{OC})=\arg(z_A)+\frac{\pi}{4}$ ومنه $(\vec{u},\overrightarrow{OC})=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}=\arg(z_C)$

b) $z_C=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$ ومنه $|z_C|=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

ووجدنا في الطلب السابق أنّ $\arg(z_C)=\frac{\pi}{12}$ فالشكل الأسي للعدد العقدي z_C هو $z_C=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

c) بالمقارنة بين الشكل الأسي والجبري للعدد العقدي z_C نجد أنّ $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$ ومنه

$e^{i\frac{\pi}{12}}=(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}})+i(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}})$ وبالتالي $\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}=(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}})+i(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}})$ ومنه

$\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$ و $\boxed{\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$.

السؤال الرابع عشر:

لتكن المعادلة : $(E):\quad z^4-3z^3+\frac{9}{2}z^2-3z+1=0$

❶ أثبت أنّه إذا كان z_0 جذراً للمعادلة (E) كان $\overline{z}_0$ و $\frac{1}{z_0}$ جذرين أيضاً لهذه المعادلة .

❷ تحقّق أنّ $1+i$ جذر للمعادلة (E) .

❸ استنتج حلول المعادلة (E) .

❹ بفرض النقاط $A(1+i)$ و $B(1-i)$ و $C(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)$ و $D(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)$.

أثبت أنّ A و B و C و D تقع على دائرة واحدة عيّن مركزها واحسب نصف قطرها .

الحل

❶ بما أنّ z_0 جذر للمعادلة (E) فإنّ $z_0^{\ 4}-3z_0^{\ 3}+\frac{9}{2}z_0^{\ 2}-3z_0+1=0$ لنأخذ المرافق للطرفين

$\overline{z}_0^{\ 4}-3\overline{z}_0^{\ 3}+\frac{9}{2}\overline{z}_0^{\ 2}-3\overline{z}_0+1=0$ ومنه $\overline{z}_0$ جذر للمعادلة المفروضة .

لنتحقّق أن $\frac{1}{z_0}$ جذر للمعادلة (E) : $\frac{1}{z_0^{\ 4}}-3\frac{1}{z_0^{\ 3}}+\frac{9}{2z_0^{\ 2}}-\frac{3}{z_0}+1=\frac{1}{z_0^{\ 4}}(1-3z_0+\frac{9}{2}z_0^{\ 2}-3z_0^{\ 3}+z_0^{\ 4})=\frac{1}{z_0^{\ 4}}(0)=0$

ومنه $\frac{1}{z_0}$ جذر للمعادلة (E).

❷ $(1+i)^4-3(1+i)^3+\frac{9}{2}(1+i)^2-3(1+i)+1=(2i)^2-6i(1+i)+\frac{9}{2}(2i)-3-3i+1$

ومنه $(2i)^2-6i(1+i)+\frac{9}{2}(2i)-3-3i+1=-4-6i+6+9i-3i-2=0$

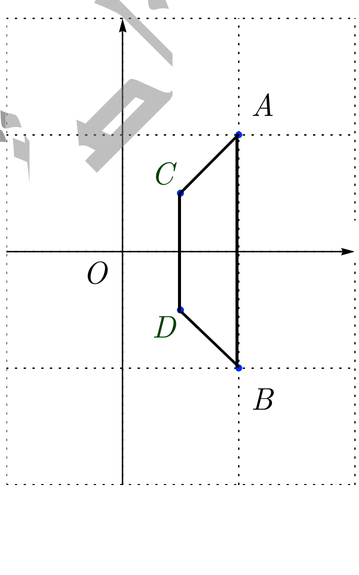
وبالتالي $1+i$ جذر للمعادلة (E) .

❸ لدينا $z_0=1+i$ جذر للمعادلة (E) ومنه $\overline{z}_0=1-i$ أيضاً جذر لها

وكذلك الأمر $\frac{1}{z_0}=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ جذر للمعادلة (E) ومنه $\overline{(\frac{1}{z_0})}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ جذراً لها .

ولمّا كانت المعادلة (E) من الدرجة الرابعة لها أربعة حلول في $\mathbb{C}$ وهي :

$1+i$ و $1-i$ و $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ و $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.



❹ لنرسم النقاط $A(1+i)$ و $B(1-i)$ و $C(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)$ و $D(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)$ في مستوٍ :

بما أنّ B هي نظيرة A بالنسبة إلى xx' و D هي نظيرة C بالنسبة إلى xx'

فالمستقيمان (AB) و (CD) متوازيان لأنهما (عمودان على مستقيم واحد في مستوٍ واحد)

و كذلك $AC=BD$ (لأنّ التناظر بالنسبة إلى مستقيم يحافظ على الأطوال)

فأصبح الشكل $ABDC$ شبه منحرف متساوي الساقين) فهو رباعي دائري

أي النقاط A و B و C و D تقع على دائرة واحدة .

مركز الدائرة I يقع على محور وتر فيها فهو يقع على xx' فإحداثياته من الشكل $I(x,0)$ لتعيين x نضع

$IA = IC$ أي $IA^2 = IC^2$ ومنه $(x-1)^2+(0-1)^2=(x-\frac{1}{2})^2+(0-\frac{1}{2})^2$ ومنه

$x^2-2x+1+1=x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ ومنه $x=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ومنه $I(\frac{3}{2},0)$ (مركز الدائرة)

$R=IA=\sqrt{(\frac{3}{2}-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ (نصف قطر الدائرة)

السؤال الخامس عشر : لتكن النقطتان A و B اللتان يمثّلهما العددان العقديان : $b=e^{i\frac{7\pi}{6}}$ و $a=i$.

❶ لتكن النقطة C التي يمثّلها العدد العقدي c هي صورة النقطة B وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

عيّن العدد العقدي c واكتب كلاً من b و c بالشكل الجبري .

❷ وضّع النقاط A و B و C في مستوٍ .

❸ لتكن النقطة D التي يمثّلها العدد العقدي d هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A,2)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$

جِد العدد العقدي d .

❹ أثبت أنّ النقاط A و B و C و D تقع على دائرة واحدة .

❺ ليكن H التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 . أوجد العدد العقدي e الممثّل للنقطة E صورة النقطة D وفق H.

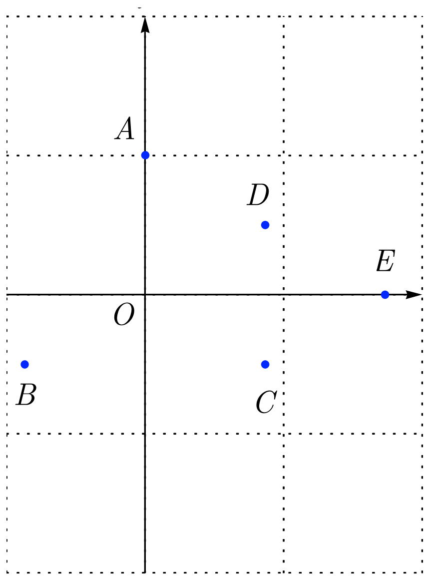
❻ احسب العدد $\frac{d-c}{e-c}$ واستنتج نوع المثلث DEC .

الحل

❶ $R_{O,\frac{2\pi}{3}}(B)=C$ ومنه $c=e^{i\frac{2\pi}{3}}b$ وبالتالي $c=e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{7\pi}{6}}=e^{i\frac{11\pi}{6}}=e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ومنه $\boxed{c=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$

$b=e^{i\frac{7\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

❷



❸ $d=\frac{2a-b+2c}{3}=\frac{2i+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+\sqrt{3}-i}{3}$ ومنه $d=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}}$

❹ لمّا كان $OA=|a|=|i|=1$ و $OB=|b|=\left|e^{i\frac{7\pi}{6}}\right|=1$ و $OC=|c|=\left|e^{-i\frac{\pi}{6}}\right|=1$ و $OD=|d|=\left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|=1$

كان $OA=OB=OC=OD=1$ فالنقاط A و B و C و D تقع على دائرة واحدة مركزها O ونصف قطرها يساوي 1

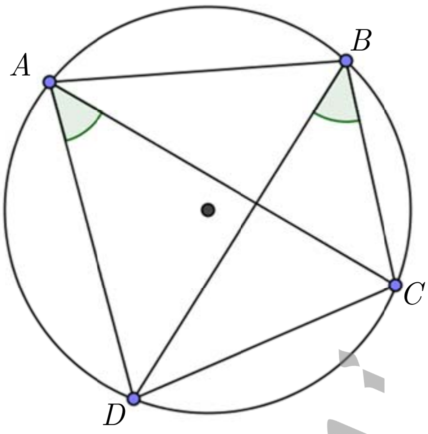
❺ $\underset{A,2}{H}(D)=E$ ومنه $e-a=2(d-a)$ وبالتالي $e-i=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-i)$ ومنه $e-i=\sqrt{3}+i-2i$

وبالتالي $\boxed{e=\sqrt{3}}$.

❻ $\frac{d-c}{e-c}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}$ وبالتالي

$\frac{d-c}{e-c}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $d-c=e^{i\frac{\pi}{3}}(e-c)$ وبالتالي D هي صورة E وفق دوران مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$

فالمثلث DEC متساوي الأضلاع .



السؤال السادس عشر : في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثّلها الأعداد العقدية :

a و b و c و d نحن نعلم أنّ النقاط A و B و C و D

تقع على دائرة واحدة إذا كان $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC})$

أثبت أنّ ذلك يكافئ أن يكون العدد العقدي $\frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}$ حقيقياً .

الحل

$(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC})$ يكافئ $\arg(\frac{c-a}{d-a})=\arg(\frac{c-b}{d-b})$

يكافئ $\arg(\frac{c-a}{d-a})-\arg(\frac{c-b}{d-b})=0$

يكافئ $\arg\left(\frac{\frac{c-a}{d-a}}{\frac{c-b}{d-b}}\right)=0$ يكافئ $\arg\left(\frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}\right)=0$ فالعدد العقدي $\frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}$ حقيقي .

....انتهت الأجوبة...