المستقيمات والمستويات في الفراغ

أولاً : مركز الأبعاد المتناسبة

① مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين :

1) مبرهنة الوجود :

بفرض A , B نقطتين وليكن α , β عددين يحققان $\alpha+\beta\neq 0$ عندئذٍ توجد نقطة وحيدة فقط G تحقق:

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

نسمي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β) .

2) علاقة الإنشاء: $\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$

3) إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين A , B لهما نفس التثقيل فإن G منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

4) مبرهنة الاختزال: G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β) عندئذٍ أياً كانت M فإن :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}}$$

5) إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-t)$, (B,t) عندئذٍ $\overrightarrow{AG}=t\,\overrightarrow{AB}$

****

تمرين ① : النقطتان A , B نقطتان مختلفتان عيّن في الحالات الآتية عددين α , β كي تكون النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β) .

$\boxed{1}$

$$2\overrightarrow{GB}-3\underbrace{\overrightarrow{AB}}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{GB}-3(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB})=\vec{0}$$
$$2\underbrace{\overrightarrow{GB}}-3\overrightarrow{AG}-3\underbrace{\overrightarrow{GB}}=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$\alpha=3\ ,\ \beta=-1$$
$$(A,3)\ ,\ (B,-1)$$

$\boxed{2}$

$$2\underbrace{\overrightarrow{AB}}+\overrightarrow{GA}-3\,\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB})+\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{AG}+2\underbrace{\overrightarrow{GB}}+\overrightarrow{GA}-3\underbrace{\overrightarrow{GB}}=\vec{0}$$
$$-2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$\alpha=1\ ,\ \beta=1$$
$$(A,1)\ ,\ (B,1)$$

تمرين ②: في الشكل الآتي التدريجات متساوية عبّر عن النقاط A , B , C بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الآخرين .

A : مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,β) , (C,γ) :

طريقة ① :

$$\overrightarrow{BA}=\frac{-3}{5}\underbrace{\overrightarrow{BC}}$$
$$5\overrightarrow{BA}=-3(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$$
$$\underbrace{-5\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{BA}}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$-8\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$8\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$(B,8)\ ,\ (C,-3)$$

طريقة ② :

$$\frac{AB}{AC}=\frac{3}{8}$$
$$8\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$$
$$8\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$(B,8)\ ,\ (C,-3)$$

B : مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (C,γ) :

طريقة ① :

$$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$$
$$8\overrightarrow{AB}=3\,\underbrace{\overrightarrow{AC}}$$
$$-8\overrightarrow{AB}+3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\vec{0}$$
$$-8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$
$$-5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$
$$(A,5)\ ,\ (C,3)$$

طريقة ② :

$$\frac{BA}{BC}=\frac{3}{5}$$
$$5\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{BC}$$
$$5\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$
$$(A,5)\ ,\ (C,3)$$

عند وضع الأشعة نتنبه للإشارة

C : مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β) :

طريقة ① :

$$\overrightarrow{AC}=\frac{8}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$3\overrightarrow{AC}=8\,\underbrace{\overrightarrow{AB}}$$
$$3\overrightarrow{AC}=8(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$$
$$\underbrace{-3\overrightarrow{AC}+8\overrightarrow{AC}}+8\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{AC}+8\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$
$$-5\overrightarrow{CA}+8\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{CA}-8\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$
$$(A,5)\ ,\ (B,-8)$$

طريقة ② :

$$\frac{CA}{CB}=\frac{8}{5}$$
$$5\overrightarrow{CA}=8\overrightarrow{CB}$$
$$5\overrightarrow{CA}-8\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$
$$(A,5)\ ,\ (B,-8)$$

تمرين ③: النقطتان A , B نقطتان مختلفتان في الحالات الآتية عيّن t التي تحقق $\overrightarrow{AM}=t\,.\overrightarrow{AB}$

1) M : مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-3)$, $(B,1)$:

طريقة ① : (حسب علاقة الإنشاء)

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,.\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{-2}\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow t=\frac{-1}{2}$$

طريقة ② : (حسب مبرهنة الوجود)

$$-3\overrightarrow{MA}+\underbrace{\overrightarrow{MB}}=\vec{0}$$
$$\underbrace{-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$-2\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AB}$$
$$2\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}\Rightarrow t=\frac{-1}{2}$$

2) M : مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$, $(B,5)$:

طريقة ① : (حسب علاقة الإنشاء)

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,.\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow t=\frac{5}{6}$$

طريقة ② : (حسب مبرهنة الوجود)

$$\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$MA+5(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$$
$$\underbrace{\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MA}}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$6\overrightarrow{MA}=-5\overrightarrow{AB}$$
$$-6\overrightarrow{AM}=-5\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}\Rightarrow t=\frac{5}{6}$$

وائل زعترية 0933699123
ياسر الساسة 0949198068
علاء رحال 0952480990

② مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط :

1) مبرهنة الوجود :

نتأمل ثلاث نقاط A , B , C وثلاثة أعداد حقيقية α , β , γ تحقق $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ عندئذٍ توجد نقطة وحيدة G تحقق:

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}+\gamma\,\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

نسمي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ)

2) علاقة الإنشاء : $\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}}$

من علاقة الإنشاء نستنتج أن الأشعة $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$ مرتبطة خطياً, لأننا استطعنا كتابة العلاقة السابقة بالشكل :

$\overrightarrow{AG}=k\,.\overrightarrow{AB}+t\,.\overrightarrow{AC}$ (تسمى المعادلة السابقة معادلة المستوي المار من النقطة A والموجه بالشعاعين $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

3) النقاط A و B و C و G تقع في مستو واحد .

لإثبات وقوع أربع نقاط في مستو واحد يكفي أن تكون إحدى هذه النقاط هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاث المتبقية.

4) إذا كانت $\alpha=\beta=\gamma$ فإن G هي مركز ثقل المثلث ABC

****

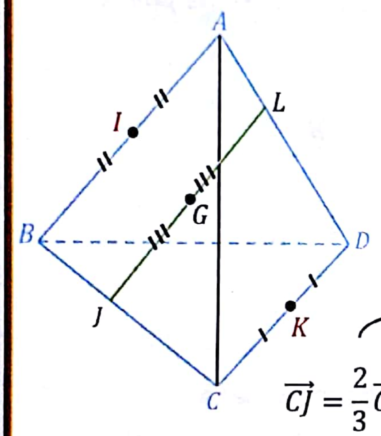
تمرين ①: $ABCD$ رباعي وجوه , I , K منتصفا الحرفين $[AB]$, $[CD]$

و J و L نقطتان معرفتان بالعلاقتين :

$$\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB},\quad \overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

و اخيراً G هي منتصف $[JL]$

اثبت ان النقاط G و I و K تقع على استقامة واحدة .



$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

بالمقارنة مع علاقة الإنشاء $\overrightarrow{AL}=\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\overrightarrow{AD}$

إذاً L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$, $(D,1)$

ومنه $(L,3)$

$\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

بالمقارنة مع علاقة الإنشاء $\overrightarrow{CJ}=\frac{\beta}{\gamma+\beta}\overrightarrow{CB}$

إذاً J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$, $(B,2)$

ومنه $(J,3)$

بما أن G منتصف $[JL]$ فإن G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(L,3)$ و $(J,3)$

و حسب الخاصة التجميعية G مركز أبعاد متناسبة للنقاط :

$$(D,1)\,,(C,1)\,,(B,2)\,,(A,2)$$

بما أن I منتصف $[AB]$ فإن I مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,2)$.

و بما أن K منتصف $[CD]$ فإن K مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,1)$.

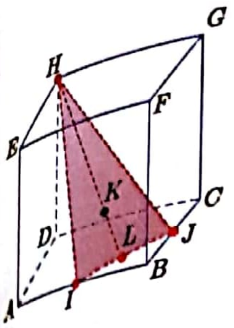
حسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,2)$, $(I,4)$

إذاً النقاط G و I و K تقع على استقامة واحدة .

حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

تمرين ② : $ABCDEFGH$ مكعب , I و J منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[BC]$ بالترتيب و K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(H,1)$

اثبت وقوع النقاط H,K,J,I في مستو واحد .



من الفرض لدينا I منتصف $[AB]$ $\Leftarrow$ I مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,1)$

و J منتصف $[BC]$ $\Leftarrow$ J مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(B,1)$ و $(C,1)$

و بما أن K مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(H,1)$

اي K مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $\overbrace{(B,1)و(B,1)}$ و $(C,1)$ و $(H,1)$

و حسب الخاصة التجميعية : K مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,2)$ و $(J,2)$ و $(H,1)$

إذاً النقاط H,K,J,I تقع في مستوٍ واحد .

****

تدرب صفحة 80 :

① النقطتان A , B نقطتان مختلفتان , في الحالات الآتية عيّن t التي تحقق $\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$

1) Mمركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-2)$ و $(B,1)$

طريقة ① :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{-1}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = -1.\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \boxed{t=-1}$$

طريقة ② :

$$-2\,\overrightarrow{MA} + \underbrace{\overrightarrow{MB}} = \vec{0}$$

$$-2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$-\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\boxed{t=-1}$$

2) M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,3)$

طريقة ① :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \boxed{t=\frac{3}{5}}$$

طريقة ② :

$$2\,\overrightarrow{MA} + 3\,\underbrace{\overrightarrow{MB}} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{MA} + 3[\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}] = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$5\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{AB}$$

$$-5\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB} \qquad \div -5$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \boxed{t=\frac{3}{5}}$$

② أعط في الحالات الآتية α و β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β)

$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$ (1

طريقة ① :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta=2\\ \alpha+\beta=7\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\beta=2\\ \alpha=5\end{array}$$

طريقة ② :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\underbrace{\overrightarrow{AB}}$$
$$7\overrightarrow{AM}=2[\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}]$$
$$7\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MB}$$
$$5\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$-5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\alpha=5\quad,\quad\beta=2$$

$2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (2

طريقة ① :

$$2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\left.\begin{array}{l}\beta=-1\\ \alpha+\beta=2\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\beta=-1\\ \alpha=3\end{array}$$

طريقة ② :

$$2\overrightarrow{AM}+\underbrace{\overrightarrow{AB}}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\alpha=3\quad,\quad\beta=-1$$

$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (3

طريقة ① :

$$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{AB}$$
$$-\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{AB}$$
$$\left.\begin{array}{l}\beta=-3\\ \alpha+\beta=1\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\beta=-3\\ \alpha=4\end{array}$$

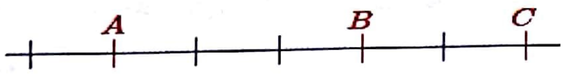
طريقة ② :

$$\overrightarrow{MA}-3\underbrace{\overrightarrow{AB}}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}-3[\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}]=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$4\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\alpha=4\quad,\quad\beta=-3$$

---

③ في الشكل الآتي التدريجات متساوية . عبّر في كل حالة عن كل واحدة من النقاط A و B و C بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الأخريين .

(1



A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\gamma),(B,\beta)$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{3}{5}$$
$$5\,\overrightarrow{AB}=3\,\overrightarrow{AC}$$
$$5\,\overrightarrow{AB}-3\,\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

و بالتالي A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(C,-3)\,,(B,5)$

B مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\gamma),(A,\alpha)$

$$\frac{BA}{BC}=\frac{3}{2}$$
$$2\,\overrightarrow{BA}=-3\,\overrightarrow{BC}$$
$$2\,\overrightarrow{BA}+3\,\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$

عند وضع الأشعة نتتبه للإشارة

و بالتالي B مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(C,3)\,,(A,2)$

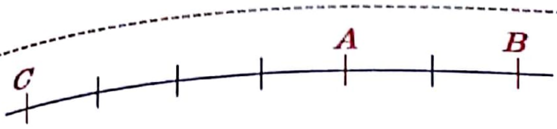
C مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β)

$$\frac{CA}{CB}=\frac{5}{2}$$

$$2\,\overrightarrow{CA}=5\,\overrightarrow{CB}$$

$$2\,\overrightarrow{CA}-5\,\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$

و بالتالي C مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$, $(B,-5)$



2)

B مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (C,γ)

$$\frac{BA}{BC}=\frac{2}{6}$$

$$6\,\overrightarrow{BA}=2\,\overrightarrow{BC}$$

$$6\,\overrightarrow{BA}-2\,\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$

و بالتالي B مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,6)$, $(C,-2)$

A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,β) , (C,γ)

$$\frac{AB}{AC}=\frac{2}{4}$$

$$4\,\overrightarrow{AB}=-2\,\overrightarrow{AC}$$

$$4\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

و بالتالي A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,4)$, $(C,2)$

C مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β)

$$\frac{CB}{CA}=\frac{6}{4}$$

$$4\,\overrightarrow{CB}=6\,\overrightarrow{CA}$$

$$4\,\overrightarrow{CB}-6\,\overrightarrow{CA}=\vec{0}$$

و بالتالي C مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-6)$, $(B,4)$

---

④ نتامل مثلثاً ABC في كل حالة مما يأتي، جد عددين x و y بحيث $\overrightarrow{AM}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$

1) M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$

طريقة ① :

من علاقة الإنشاء :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{1}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=1\,.\overrightarrow{AB}+1\,.\overrightarrow{AC}$$

$$x=1\ ,\ y=1$$

طريقة ② :

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C

(شال) $\quad -\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$$-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

$$-\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=1\,.\overrightarrow{AB}+1\,.\overrightarrow{AC}$$

$$x=1\ ,\ y=1$$

وائل زعترية 0933699123
ياسر الساسة 0949198068
علاء رحال 0952480990

2) M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$

طريقة ① :

من علاقة الإنشاء :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\,.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\,.\overrightarrow{AC}$$

$$x=\frac{1}{6}\quad,\quad y=\frac{1}{3}$$

طريقة ② :

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C

$$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\ (\text{شال})$$

$$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$$

$$3\underbrace{\overrightarrow{MA}}+\underbrace{\overrightarrow{MA}}+\overrightarrow{AB}+2\underbrace{\overrightarrow{MA}}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$6\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$$

$$-6\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$x=\frac{1}{6}\quad,\quad y=\frac{1}{3}$$

---

⑤ نتأمل مثلثاً ABC , في كل حالة مما يلي جد الأعداد α و β و γ لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ) .

1) $\boxed{\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}}$

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC})$$

$$\underbrace{\overrightarrow{BM}}=\underbrace{\overrightarrow{BM}}+\overrightarrow{MA}-\underbrace{\overrightarrow{BM}}-\overrightarrow{MC}$$

$$-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$(A,1),(B,1),(C,-1)$$

2) $\boxed{\overrightarrow{AM}=2\,\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}}$

$$\overrightarrow{AM}=2(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})-(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})$$

$$\underbrace{\overrightarrow{AM}}=2\,\underbrace{\overrightarrow{AM}}+2\,\overrightarrow{MB}-\underbrace{\overrightarrow{AM}}-\overrightarrow{MC}$$

$$0\,\overrightarrow{AM}+2\,\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$0\,\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$(A,0),(B,2),(C,-1)$$

3) $\boxed{\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})$$

$$\underbrace{\overrightarrow{AM}}=\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{AM}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$\left(A,\frac{1}{2}\right),(B,1),\left(C,\frac{1}{2}\right)$$

4) $\boxed{\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}$

$$\overrightarrow{CM}=3(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA})+2(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB})$$

$$\underbrace{\overrightarrow{CM}}=3\,\underbrace{\overrightarrow{CM}}+3\overrightarrow{MA}+2\,\underbrace{\overrightarrow{CM}}+2\overrightarrow{MB}$$

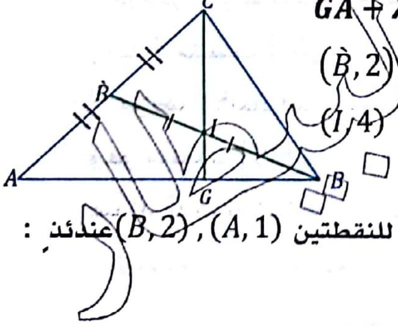
$$4\overrightarrow{CM}+3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$

$$-4\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$

$$(A,3),(B,2),(C,-4)$$

---

⑥ انطلاقاً من الشكل المجاور , جد الأمثال α و β و γ لتكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ) و استنتج λ التي تحقق : $\overrightarrow{GA}+\lambda\overrightarrow{GB}=\vec{0}$



$\grave{B}$ منتصف $[AC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$, $(C,1)$ وتكون $(\grave{B},2)$

I منتصف $[B\grave{B}]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,2)$, $(\grave{B},2)$ وتكون $(I,4)$

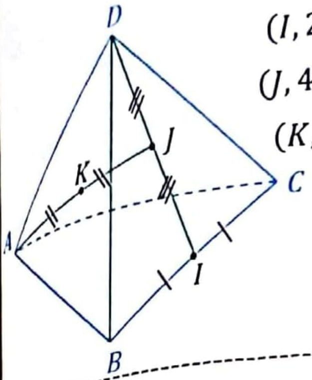
و منه $(I,4)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,1)$

بما أن G هي نقطة تقاطع المستقيمين (CI) و (AB) فإن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$, $(B,2)$ عندئذ :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{GA}+2\,\overrightarrow{GB}=\vec{0}\\ \overrightarrow{GA}+\lambda\,\overrightarrow{GB}=\vec{0}\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\lambda=2}$$

حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

⑦ انطلاقاً من الشكل المجاور ، جد الأمثال α و β و γ و δ
لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) .



لدينا I منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)\,,(C,1)$ و منه $(I,2)$

لدينا J منتصف $[DI]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,2)\,,(I,2)$ و منه $(J,4)$

لدينا K منتصف $[AJ]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,4)\,,(J,4)$ و منه $(K,8)$

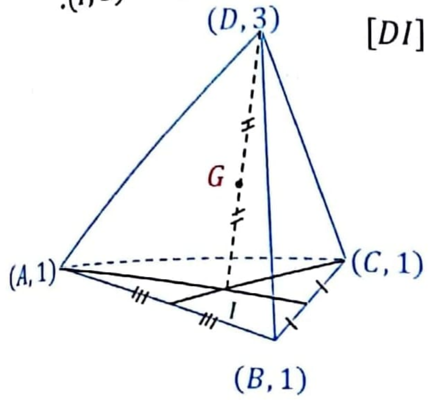
عندئذٍ حسب الخاصة التجميعية يكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$(D,2),(C,1),(B,1),(A,4).$

استعمل الخاصة التجميعية لتعيين موضع النقطة G في الحالات الآتية:

⑧ $ABCD$ رباعي وجوه،

1) G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,3),(C,1),(B,1),(A,1)$



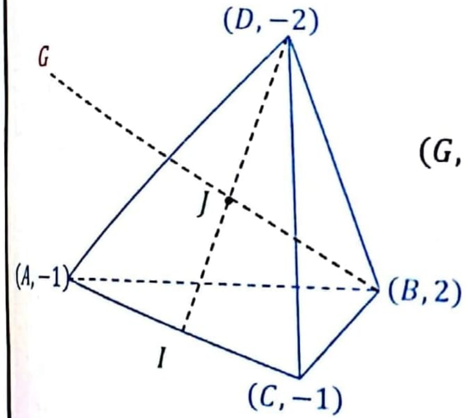
-لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,1),(C,1)$ وهو مركز ثقل المثلث ABC ومنه $(I,3)$.

- وليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3),(D,3)$ وهو منتصف $[DI]$

عندئذٍ حسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$(D,3),(C,1),(B,1),(A,1)$

2) Gمركزالأبعادالمتناسبةللنقاط $(D,-2),(C,-1),(B,2),(A,-1)$



- لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-1),(C,-1)$

و هي منتصف $[AC]$ ويكون $(I,-2)$

- و لتكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,-2),(I,-2)$

وهو منتصف $[DI]$ ويكون $(J,-4)$

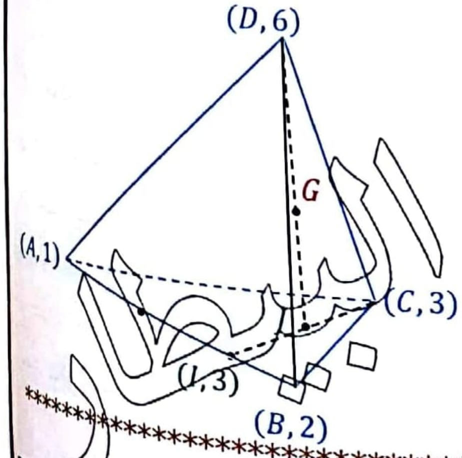
- و لتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,2),(J,-4)$ ومنه$(G,-2)$

- حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$D,C,B\,,A$ ويحقق:

$$\overrightarrow{BG}=\frac{-4}{-2}\overrightarrow{BJ}\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{BG}=2\,\overrightarrow{BJ}$$

3) G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,6),(C,3),(B,2),(A,1)$



- I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1),(B,2)$ويحقق $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

- J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3),(C,3)$

ومنه J منتصف $[IC]$ ويكون $(J,6)$

- G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J,6),(D,6)$

وهو منتصف $[DJ]$ ويكون $(G,12)$

عندئذ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $D,C,B\,,A$ منتصف $[DJ]$

ثانياً : التمثيلات الوسيطية

التمثيل الوسيطي لمستقيم :

بفرض d مستقيم معرف بنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ و بشعاع موجّه $\vec{u}(a,b,c)$ ، تنتمي النقطة $M(x,y,z)$ إلى d

إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث :

$$\overrightarrow{AM} = t\,.\vec{u} \qquad ;t \in R$$

$$\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{bmatrix} = t\,.\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{bmatrix} \qquad ;t \in R$$

أي أن : $z - z_0 = ct$, $y - y_0 = bt$, $x - x_0 = at$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \qquad ;t \in R$$

تسمى المعادلات السابقة المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار بالنقطة A و الموجه بالشعاع $\vec{u}$.

تمرين ①: أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة $A(2,-1,3)$ ويقبل شعاعاً موجّهاً $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

الحل : d يمر بالنقطة $A(2,-1,3)$ و يقبل شعاع موجّه $\vec{u}(2,-3,1)$

$$d: \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -3t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \qquad ;t \in R$$

تمرين ② : أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطتين $A(2,1,1)$ ، $B(-1,1,2)$.

الحل : d يمر بالنقطتين $B\,,A$ فهو يقبل شعاع موجّه $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(-3,0,1)$ و نختار النقطة A عندئذٍ :

$$d: \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = 1 \\ z = t + 1 \end{cases} \qquad ;t \in R$$

تمرين ③ : أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة $A(-1,2,1)$.

و يوازي المستقيم $\; :t \in R \quad \grave{d}: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 1 \\ z = -2t \end{cases}$.

الحل : $d \backslash\backslash \grave{d}$ عندئذٍ : $\vec{u} = \vec{u}'(1,1,-2)$ و يمر بالنقطة A عندئذٍ :

$$d: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = -2t + 1 \end{cases} \qquad ;t \in R$$

****

التمثيل الوسيطي لقطعة مستقيمة و لنصف مستقيم :

بفرض $A(x_0,y_0,z_0)$ ، $B(x_1,y_1,z_1)$ نقطتين من الفراغ و لنضع $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(a,b,c)$:

- عندئذٍ القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق :

$$[AB]:\begin{cases}x=at+x_0\\y=bt+y_0\\z=ct+z_0\end{cases}\quad : t\in[0,1]$$

- نصف المستقيم $[AB)$ الذي مبدؤه A و يمر بالنقطة B هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق :

$$[AB):\begin{cases}x=at+x_0\\y=bt+y_0\\z=ct+z_0\end{cases}\quad : t\in[0,+\infty[$$

تمرين : نتامل النقطتين $A(2,1,0)$ ، $B(3,2,-1)$ اعط تمثيلاً وسيطياً لكل من :

1) القطعة المستقيمة $[AB]$.

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}(1,1,-1)$ و يمر من A عندئذٍ :

$$[AB]:\begin{cases}x=t+2\\y=t+1\\z=-t\end{cases}\quad : t\in[0,1]$$

2) نصف المستقيم $[AB)$.

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}(1,1,-1)$ و يمر من A عندئذٍ :

$$[AB):\begin{cases}x=t+2\\y=t+1\\z=-t\end{cases}\quad : t\in[0,+\infty[$$

3) نصف المستقيم $[BA)$:

$\vec{u}'=\overrightarrow{BA}(-1,-1,1)$ و يمر من A :

$$[BA):\begin{cases}x=-t+2\\y=-t+1\\z=t\end{cases}\quad : t\in[0,+\infty[$$

****

أوضاع مستقيمين في الفراغ

متوازيين | متقاطعين | متخالفين

المستقيمان المتوازيان: نوجد متجه توجيه المستقيم الأول والثاني $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ ويجب أن يكونا مرتبطين خطياً ولا يوجد نقاط مشتركة بين المستقيمين .

المستقيمان المتقاطعان: نثبت عدم الارتباط الخطي لـ $\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_1}$ ثم نكتب L_2,L_1 بالشكل الوسيطي ونحصل على ثلاث معادلات بمجهولين S,t نحل المعادلتين 1و2 ونعوض الحل في 3 ويجب أن يحقق المعادلة 3

المستقيمان المتخالفان: نثبت عدم الارتباط الخطي لـ $\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_1}$ ثم نكتب L_2,L_1 بالشكل الوسيطي ونحصل على ثلاث معادلات بمجهولين S,t نحل المعادلتين 1و2 ونعوض الحل في 3 وإذا لم تحقق 3 فالمستقيمين متخالفين.

تدرب صفحة 84 :

نعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

① اعط معادلة وسيطية للمستقيم d :

1) المستقيم d يمر بالنقطة $A(-1,2,0)$ و موجه بالشعاع $\vec{u}(0,1,-1)$.

$$d:\begin{cases} x=-1 \\ y=t+2 \\ z=-t \end{cases} \quad : t \in R$$

2) $d=(AB)$ حيث : $A(2,1,-1)$ ، $B(3,-1,1)$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}(1,-2,2)$ و يمر من A :

$$d:\begin{cases} x=t+2 \\ y=-2t+1 \\ z=2t-1 \end{cases} \quad : t \in R$$

---

② نتامل النقطتين $A(-2,1,0)$ ، $B(2,3,1)$ اعط تمثيلاً وسيطياً لكل من :

1) المستقيم (AB) : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(4,2,1)$ و يمر من A :

$$(AB):\begin{cases} x=4t-2 \\ y=2t+1 \\ z=t \end{cases} \quad : t \in R$$

2) القطعة المستقيمة $[AB]$: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(4,2,1)$ و يمر من A :

$$[AB]:\begin{cases} x=4t-2 \\ y=2t+1 \\ z=t \end{cases} \quad : t \in [0,1]$$

3) نصف المستقيم $[AB)$: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(4,2,1)$ و يمر من A :

$$[AB):\begin{cases} x=4t-2 \\ y=2t+1 \\ z=t \end{cases} \quad : t \in [0,+\infty[$$

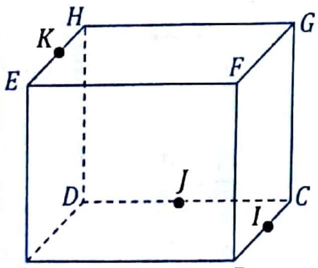
4) نصف المستقيم $[BA)$: $\vec{u}'=\overrightarrow{BA}(-4,-2,-1)$ و يمر من A :

$$[BA):\begin{cases} x=-4t-2 \\ y=-2t+1 \\ z=-t \end{cases} \quad : t \in [0,+\infty[$$

---

③ $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه (1) فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منتصف $[EH]$

نتامل المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1) اعط تمثيلاً وسيطياً لكل من (IK) و (FJ) .

لنوجد إحداثيات النقاط F, J, I, K :

$$F(1,0,1)\ ,J\left(\frac{1}{2},1,0\right)\ ,I\left(1,\frac{1}{2},0\right)\ ,K\left(0,\frac{1}{2},1\right)$$

(FJ)

$\vec{u}'=\overrightarrow{FJ}\left(-\frac{1}{2},1,-1\right)$

$$(FJ):\begin{cases} x=-\frac{1}{2}s+1 \\ y=s \\ z=-s+1 \end{cases} \quad : s \in R$$

(IK)

$\vec{u}=\overrightarrow{IK}(-1,0,1)$

$$(IK):\begin{cases} x=-t \\ y=\frac{1}{2} \\ z=t+1 \end{cases} \quad : t \in R$$

2) ايتقاطع المستقيمان (IK) و (FJ) ؟ هل تقع النقاط I و J و K و F في مستو واحد ؟

$\begin{cases} \overrightarrow{IK}(-1,0,1) \\ \overrightarrow{FJ}\left(-\frac{1}{2},1,-1\right) \end{cases}$ غير مرتبطين خطياً فإن المستقيمين غير متوازيين .

بالحل المشترك لجملة المعادلتين نجد ان :

$$-\frac{1}{2}s+1=-t \qquad ①$$

$$s=\frac{1}{2} \qquad ②$$

$$-s+1=t+1 \qquad ③$$

بالحل المشترك للمعادلتين ② و ③ نجد ان $s=\frac{1}{2}$, $t=\frac{-1}{2}$, نعوض هذا الحل في ① فنجد :

$$\left.\begin{array}{l} L_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+1=\frac{3}{4} \\ L_2=-\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \neq L_2$$

فالمستقيمين متخالفين .

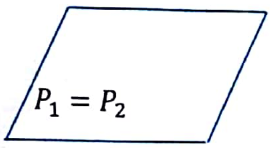
و بالتالي النقاط الأربعة I و K و J و F لا يمكن أن تقع في مستو واحد .

****

أوضاع مستويين

$$S:\begin{cases} P_1 \ : a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 & :(1) \\ P_2 \ : a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 & :(2) \end{cases}$$

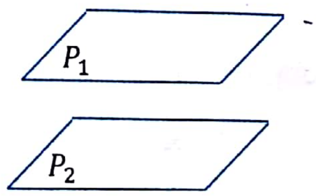
المستويان منطبقان



$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$$

حلول الجملة S كل ثلاثية (x,y,z) تكون حلاً للمعادلة (1) أو (2)

المستويان متوازيان ومختلفان



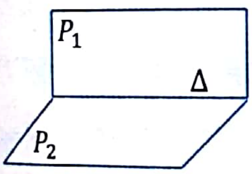
$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$$

أو

$\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ مرتبطان خطياً

ليس للجملة S حلول

المستويان متقاطعان



$\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ غير مرتبطين خطياً

حلول الجملة (S) هي نقاط Δ وهو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ حيث (x,y,z) هي حلول (S)

****

تمرين : تعامد المستويين :

$P_1: 2x - y - z + 2 = 0$

$P_2: x + 2y - z + 1 = 0$

تيقن ان هذين المستويين متقاطعان ثم جد تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d

الحل : $\overrightarrow{n_1}(2,-1,-1)$ و $\overrightarrow{n_2}(1,2,-1)$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستويان متقاطعان

$$\begin{cases} 2x - y - z + 2 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - z = -2 + y & : ① \\ x - z = -1 - 2y & : ② \end{cases}$$

$$\boxed{x = -1 + 3y}$$

نعوض في ②

$$-1 + 3y - z = -1 - 2y$$

$$\boxed{z = 5y}$$

بفرض $y = t$ و بذلك نحصل على التمثيل الوسيطي لمعادلة الفصل المشترك d :

$$d: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t \\ z = 5t \end{cases} \quad : t \in R$$

****

أوضاع مستقيم و مستو

$$d: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad \text{و} \quad P: ax + by + cz + d = 0$$

نعوض معادلات التمثيل الوسيطي d في معادلة المستوي P ونميز :

المعادلة مستحيلة الحل فإن:	المعادلة محققة من أجل أي قيمة لـ t $(0 = 0)$:	المعادلة محققة من أجل قيمة واحدة لـ t فإن:
$P \parallel d$ $n_P \perp u_d$	d محتوى في P	d قاطع لـ P

****

تدرب صفحة 87 :

نعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

① في الحالات الآتية تحقق من تقاطع P_1 ، P_2 و أعط تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك .

1) $P_1: x + y = 2$, $P_2: x + z = 1$

$\overrightarrow{n_1}(1,1,0)$ ، $\overrightarrow{n_2}(1,0,1)$ الناظمين غير مرتبطين خطياً فالمستويين متقاطعين .

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ z = 1 - x \end{cases}$$

باختيار $x = t$ نحصل على التمثيل الوسيطي لمعادلة الفصل المشترك d :

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -t + 2 \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad : t \in R$$

البيطار

طارق سعد الدين 0955561648 خلدون سيروان 0932791896 حسان البيطار 0933756454

2) $P_1: -x+y+z=3$ ، $P_2: 2x-y+2z=1$

$\overrightarrow{n_1}(-1,1,1)$
$\overrightarrow{n_2}(2,-1,2)$ الناظمين غير مرتبطين خطياً فالمستويين متقاطعين .

$$\begin{cases} -x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y=3-z & ① \\ \boxed{+} \\ 2x-y=1-2z & ② \end{cases}$$

$$\boxed{x=4-3z}$$

$$-4+3z+y=3-z$$

نعوض في ① نجد : $\boxed{y=7-4z}$

باختيار $z=t$ نحصل على التمثيل الوسيطي لمعادلة الفصل المشترك :

$$d: \begin{cases} x=-3t+4 \\ y=-4z+7 \\ z=t \end{cases} \quad : t \in R$$

---

② في الحالات الآتية اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d' و بيّن إذا كان $d \backslash\backslash d'$ او كان d منطبقاً على d' .

1) $: t \in R$ $d: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2t-1 \end{cases}$ ، $d': \begin{cases} 3x-y-2z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

$\overrightarrow{n_1}(3,-1,-2)$
$\overrightarrow{n_2}(1,-1,-1)$ الناظمين غير مرتبطين خطياً فالمستويين متقاطعين بفصل مشترك d' .

$$\begin{cases} 3x-y-2z=1 & ① \\ x-y-z=0 & ② \end{cases} \xRightarrow{\text{بالطرح}} 2x-z=1 \Rightarrow \boxed{z=2x-1}$$

$$x-y-2x+1=0$$

نعوض في ② : $\Rightarrow \boxed{y=-x+1}$

باختيار $x=s$ نحصل على التمثيل الوسيطي لمعادلة الفصل المشترك d' :

$$d': \begin{cases} x=s \\ y=-s+1 \\ z=2s-1 \end{cases} \quad : s \in R$$

أصبح لدينا : $\vec{u}(1,-1,2)$ ، $\overrightarrow{u'}(1,-1,2)$ شعاعا توجيه المستقيمان مرتبطان خطياً عندئذٍ : $d \backslash\backslash d'$

لنبحث فيما إذا كان d ، d' منطبقان و ذلك بحل جملة معادلات d مع معادلات d' حلاً مشتركاً :

$$\begin{cases} s=t & ① \\ -s+1=-t & ② \\ 2s-1=2t-1 & ③ \end{cases}$$

نعوض ① في ② : $-s+1=-s$

$1=0$ مستحيلة $\Leftarrow d,d'$ متوازيان و غير طبوقان

البيطار

Scanned by CamScanner

(2 $t \in R$: $d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = t + 1 \end{cases}$ و $d: \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - y - 2z = 5 \end{cases}$

$\overrightarrow{n_1}(1,1,-2)$
$\overrightarrow{n_2}(1,-1,-2)$ الناظمين غير مرتبطين خطياً فالمستويين متقاطعين بفصل مشترك d' :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - y - 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 + 2z \quad ① \\ \boxed{+} \\ x - y = 5 + 2z \quad ② \end{cases}$$

$$2x = 8 + 4z$$

$$\boxed{x = 4 + 2z}$$

نعوض في ①

$$4 + 2z + y = 3 + 2z$$

$$\boxed{y = -1}$$

باختيار $z = s$ نحصل على التمثيل الوسيطي لمعادلة المستقيم d' :

$$d': \begin{cases} x = 2s + 4 \\ y = -1 \\ z = s \end{cases} \quad : s \in R$$

اصبح لدينا : $\vec{u}(2,0,1)$ ، $\vec{v}'(2,0,1)$ شعاعا توجيه المستقيمان مرتبطان خطياً فهما متوازيان $d \backslash\backslash d'$

لنبحث فيما إذا كان d , d' منطبقان :

$$\begin{cases} 2s + 4 = 2t - 1 \quad ① \\ -1 = 2 \quad ② \\ s = t + 1 \quad ③ \end{cases}$$

نجد في المعادلة ② تناقض , إذاً d و d' ليسا منطبقان , إذاً : $d \backslash\backslash d'$.

---

③ في الحالات الآتية اثبت تقاطع d مع المستوي P وعيّن إحداثيات نقطة التقاطع .

(1 $d = (AB)$ حيث : $A(-1,2,3)$, $B(1,2,-1)$, $P: x + y + z = 1$

لنوجد أولاً معادلة d :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(2,0,-4)$ و نختار A :

$$d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = -4t + 3 \end{cases} \quad : t \in R$$

$\vec{n}_P(1,1,1)$, $\vec{u}_d(2,0,-4)$

$\vec{n}.\vec{u} = 2 + 0 - 4 = -2 \neq 0$

و هذا يثبت أن $d = (AB)$ و P متقاطعان .

نعوض معادلات d في P :

$$2t - 1 + 2 - 4t + 3 = 1 \quad \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 2 \\ y = 2 \\ z = -4\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow$$ نقطة التقاطع $I(2,2,-3)$

البيطار

2) d يمر بالنقطة $A(2,-1,0)$ و يوجهه الشعاع $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ و $P:\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-\frac{z}{6}=1$

لنوجد اولاً المعادلة الوسيطية لـ d :

للسهولة نضرب معادلة P بـ 6 :

$$d:\begin{cases}x=t+2\\y=-2t-1\\z=0\end{cases} \quad , \quad 3x+2y-z=6$$

$$\vec{n}_P(3,2,-1) \quad , \quad \vec{u}_d(1,-2,0)$$

$$\vec{n}\,.\vec{u}=3-4+0=-1\neq 0$$

و هذا يثبت ان d و P متقاطعان .

نعوض معادلات d في P :

$$3(t+2)+2(-2t-1)-0=6$$

$$3t+6-4t-2=6 \Rightarrow \boxed{t=-2}$$

$$\begin{cases}x=-2+2=0\\y=4-1=3\\z=0\end{cases} \Rightarrow$$

نقطة التقاطع $I(0,3,0)$

---

④ في الحالات الآتية , ادرس تقاطع المستقيم d و المستوي P .

1) $t\in R$: $d:\begin{cases}x=2t-1\\y=t\\z=1-3t\end{cases}$ و $P:x-y+z=1$

$$\vec{n}_P(1,-1,1) \quad , \quad \vec{u}_d(2,1,-3)$$

$$\vec{n}\,.\vec{u}=2-1-3=-2\neq 0$$

و هذا يثبت ان d و P متقاطعان .

نعوض معادلات d في P :

$$2t-1-t+1-3t=1 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}x=2\left(\frac{-1}{2}\right)-1=-2\\y=-\frac{1}{2}\\z=1-3\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{5}{2}\end{cases} \Rightarrow$$

نقطة تقاطع d مع P : $I\left(-2,-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

---

2) $d:\begin{cases}x=s+1\\y=2s+1\\z=8s-3\end{cases}$, $P:2x+3y-z=0$

$$\vec{n}_P(2,3,-1) \quad , \quad \vec{u}_d(1,2,8)$$

$$\vec{n}\,.\vec{u}=2+6-8=0$$

إما ان يكون المستقيم يوازي المستوي او محتوى فيه. وبتعويض المعادلات الوسيطية لـ d في P نجد :

$$2s+2+6s+3-8s+3=0$$

$8=0$ مستحيل

اي ان $d\,\backslash\backslash\,P$ ولا يوجد نقاط مشتركة بينهما .

****

وائل زعترية 0933699123
ياسر الساسة 0949198068
علاء رحال 0952480990

اوضاع ثلاث مستويات

متوازية

- النواظم مرتبطة خطياً مثنى مثنى
- جملة المعادلات الثلاثة مستحيلة الحل (لا توجد نقاط مشتركة)

حالة خاصة: (المستويات منطبقة)

- النواظم مرتبطة خطياً مثنى مثنى.
- لجملة المعادلات عدد غير منته من الحلول.

متقاطعة

بنقطة وحيدة

- النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى
- يوجد للجملة حل وحيد $I(x,y,z)$

بفصل مشترك (مستقيم)

- النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى
- يوجد لجملة المعادلات عدد غير منته من الحلول.
- نوجد مجهولين بدلالة المجهول الثالث ونكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم الذي هو الفصل المشترك.

****

ملاحظة: في حالة ثلاثة مستويات اثنان منها متوازيان تكون الجملة مستحيلة الحل أي لا يوجد نقاط مشتركة بين المستويات الثلاثة معاً.

تمرين: ادرس تقاطع المستويات:

$$\begin{cases} p_1: & x+y-2z=-1 \\ p_2: & 3x+y-z=-1 \\ p_3: & -2x-2y+4z=1 \end{cases}$$

$\overrightarrow{n_1}(1,1,-2)$, $\overrightarrow{n_2}(3,1,-1)$, $\overrightarrow{n_3}(-2,-2,4)$

نلاحظ أن: $\overrightarrow{n_3}=-2\overrightarrow{n_1}$ مرتبطان خطياً أي p_1 و p_3 متوازيان.

ومنه لا يوجد نقاط مشتركة بين المستويات الثلاثة وليس للجملة السابقة حلول.

****

تدريب صفحة 90 :

نعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ في كل من الحالات الآتية نعطى معادلات ثلاثة مستويات، حل الجملة الخطية الموافقة وبين إذا كانت هذه المستويات تشترك في نقطة فقط او في مستقيم مشترك أو لا تشترك بأي نقطة:

$\boxed{1}$
$$\begin{cases} p_1: & 5x+y+z=-5 \\ p_2: & 2x+13y-7z=-1 \\ p_3: & x-y+z=1 \end{cases}$$

$\overrightarrow{n_1}(5,1,1)$, $\overrightarrow{n_2}(2,13,-7)$, $\overrightarrow{n_3}(1,-1,1)$ وهي غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى.

نحل جملة المعادلات حلاً مشتركاً (نستخدم طريقة غاوس)

1. نثبّت المعادلة الأولى ونجعل أمثال x في المعادلتين الثانية والثالثة معاكساً لأمثال x في المعادلة الأولى وذلك بضرب كل منهما بعدد :

$$\begin{cases} 5x+y+z=-5 & :L_1 \\ -5x-\frac{65}{2}y+\frac{35}{2}z=\frac{5}{2} & :\frac{-5}{2}L_2 \\ -5x+5y-5z=-5 & :-5L_3 \end{cases}$$

2. نجمع كل من المعادلة الأولى مع الثانية والمعادلة الأولى مع الثالثة فنلاحظ اختفاء x في المعادلتين الثانية والثالثة:

$$\begin{cases} 5x + y + z = -5 & : L_1 \\ -\frac{63}{2}y + \frac{37}{2}z = \frac{-5}{2} & : \grave{L}_2 = L_1 + \frac{-5}{2}L_2 \\ 6y - 4z = -10 & : \grave{L}_3 = L_1 - 5L_3 \end{cases}$$

3. نثبّت المعادلة الثانية و نجعل امثال y في الثالثة معاكساً لأمثال y في الثانية :

$$\begin{cases} 5x + y + z = -5 & : L_1 \\ -63y + 37z = -5 & : 2\grave{L}_2 \\ 63y - 42z = -105 & : \frac{21}{2}\grave{L}_3 \end{cases}$$

4. نجمع المعادلتين الثانية والثالثة فنلاحظ اختفاء امثال y في الثالثة :

$$\begin{cases} 5x + y + z = -5 & : L_1 \\ -63y + 37z = -5 & : \grave{\grave{L}}_2 \\ -5z = -110 & : \grave{\grave{L}}_3 = 2\grave{L}_2 + \frac{21}{2}\grave{L}_3 \end{cases}$$

من المعادلة $\grave{\grave{L}}_3$ نجد: $\boxed{z = 22}$

نعوض في $\grave{\grave{L}}_2$: $-63y + 37(22) = -5$

$-63y + 814 = -5 \Rightarrow \boxed{y = 13}$

نعوض في L_1 : $5x + 13 + 22 = -5 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = -8}$

وبالتالي المستويات الثلاثة تتقاطع بنقطة واحدة $I(-8,13,22)$

$\boxed{2}$
$$\begin{cases} p_1: & x - 2y - 3z = 3 \\ p_2: & 2x - y - 4z = 7 \\ p_3: & 3x - 3y - 5z = 8 \end{cases}$$

$\overrightarrow{n_1}(1,-2,-3)$, $\overrightarrow{n_2}(2,-1,-4)$, $\overrightarrow{n_3}(3,-3,-5)$ غير مرتبطة خطياً.

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 & : L_1 \\ -x + \frac{1}{2}y + 2z = \frac{-7}{2} & : \frac{-1}{2}L_2 \\ -x + y + \frac{5}{3}z = \frac{-8}{3} & : -\frac{1}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 & : L_1 \\ -\frac{3}{2}y - z = \frac{-1}{2} & : \grave{L}_2 = L_1 + \frac{-1}{2}L_2 \\ -y - \frac{4}{3}z = \frac{1}{3} & : \grave{L}_3 = L_1 - \frac{1}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 & : L_1 \\ -\frac{3}{2}y - z = -\frac{1}{2} & : \grave{L}_2 \\ \frac{3}{2}y + 2z = -\frac{1}{2} & : -\frac{3}{2}\grave{L}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y-3z=3 & :L_1 \\ -\frac{3}{2}y-z=-\frac{1}{2} & :\grave{L}_2 \\ z=-1 & :\grave{\grave{L}}_3=\grave{L}_2-\frac{3}{2}\grave{L}_3 \end{cases}$$

من المعادلة $\grave{\grave{L}}_3$ نجد: $\boxed{z=-1}$

نعوض في $\grave{L}_2$: $-\frac{3}{2}y+1=-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y=1}$

نعوض في L_1: $x-2(1)-3(-1)=3 \Rightarrow \boxed{x=2}$

وبالتالي المستويات الثلاثة تتقاطع بنقطة واحدة $I(2,1,-1)$

$\boxed{3}$
$$\begin{cases} p_1: & 2x-y+3z=0 \\ p_2: & x+2y+z=0 \\ p_3: & 3x-4y+5z=0 \end{cases}$$

$\vec{n_1}(2,-1,3)$, $\vec{n_2}(1,2,1)$, $\vec{n_3}(3,-4,5)$ النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى.

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 & :L_1 \\ -2x-4y-2z=0 & :-2L_2 \\ -2x+\frac{8}{3}y-\frac{10}{3}z=0 & :-\frac{2}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 & :L_1 \\ -5y+z=0 & :\grave{L}_2=L_1-2L_2 \\ \frac{5}{3}y-\frac{1}{3}z=0 & :\grave{L}_3=L_1-\frac{2}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 & :\grave{L}_1 \\ -5y+z=0 & :\grave{L}_2 \\ 5y-z=0 & :3\grave{L}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 & :L_1 \\ -5y+z=0 & :\grave{L}_2 \\ 0=0 & :\grave{\grave{L}}_3=\grave{L}_2+3\grave{L}_3 \end{cases}$$

نلاحظ من $\grave{\grave{L}}_3$ أن للجملة عدد غير منته من الحلول وبالتالي المستويات الثلاثة تتقاطع في مستقيم ولإيجاد المعادلات الوسيطية لهذا المستقيم

من $\grave{L}_2$ نجد: $\boxed{z=5y}$ وبالتعويض في L_1 : $2x-y+3(5y)=0$ إذاً: $\boxed{x=-7y}$ وبفرض $y=t$ يكون:

$$d: \begin{cases} x=-7t \\ y=t \\ z=5t \end{cases} \quad ;t\in R$$

$\boxed{4}$
$$\begin{cases} P_1: & 2x-y+3z=2 \\ P_2: & x+2y+z=1 \\ P_3: & 3x-4y+5z=3 \end{cases}$$

$\vec{n}_1(2,-1,3)$ و $\vec{n}_2(1,2,1)$ و $\vec{n_3}(3,-4,5)$ النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى .

$$\begin{cases} 2x-y+3z=2 & :L_1 \\ -2x-4y-2z=-2 & :-2L_2 \\ -2x+\frac{8}{3}y-\frac{10}{3}z=-2 & :\frac{-2}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 & : L_1 \\ -5y + z = 0 & : \grave{L_2} = L_1 - 2L_2 \\ \frac{5}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 & : \grave{L_3} = L_1 - \frac{2}{3}L_3 \end{cases}$$

نلاحظ ان المعادلتين $\grave{L_2}$ و $\grave{L_3}$ متكافئتين وبالتالي المستويات الثلاثة تتقاطع بمستقيم.

ولإيجاد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك: لدينا من $\grave{L_2}$: $\boxed{z = 5y}$ نعوض في L_1 : $2x - y + 3(5y) = 2$

إذا $\boxed{x = -7y + 1}$ وبفرض $y = t$ يكون:

$$d: \begin{cases} x = -7t + 1 \\ y = t \\ z = 5t \end{cases} \quad ; t \in R$$

$\boxed{5}$ $\begin{cases} P_1: & 2x - y + 3z = 2 \\ P_2: & x + 2y + z = 1 \\ P_3: & 3x - 4y + 5z = 4 \end{cases}$

$\vec{n}_1(2,-1,3)$ و $\vec{n}_2(1,2,1)$ و $\vec{n}_3(3,-4,5)$ النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى .

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 & : L_1 \\ -2x - 4y - 2z = -2 & : -2L_2 \\ -2x + \frac{8}{3}y - \frac{10}{3}z = -\frac{8}{3} & : \frac{-2}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 & : L_1 \\ -5y + z = 0 & : \grave{L_2} = L_1 - 2L_2 \\ \frac{5}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{-2}{3} & : \grave{L_3} = L_1 - \frac{2}{3}L_3 \end{cases}$$

نلاحظ أن المعادلتين $\grave{L_2}$ و $\grave{L_3}$ متناقضتين فلا يوجد نقاط مشتركة والجملة مستحيلة الحل.

$\boxed{6}$ $\begin{cases} P_1: & x + y + z = 1 \\ P_2: & x - 2y + z = 1 \\ P_3: & 3x - 4y + 3z = -1 \end{cases}$

$\vec{n}_1(1,1,1)$ و $\vec{n}_2(1,-2,1)$ و $\vec{n}_3(3,-4,3)$ النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى .

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & : L_1 \\ -x + 2y - z = -1 & : -L_2 \\ -x + \frac{4}{3}y - z = \frac{1}{3} & : \frac{-1}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & : L_1 \\ +3y = 0 & : \grave{L_2} = L_1 - L_2 \\ \frac{7}{3}y = \frac{4}{3} & : \grave{L_3} = L_1 - \frac{1}{3}L_3 \end{cases}$$

نلاحظ أن المعادلتين $\grave{L_2}$ و $\grave{L_3}$ متناقضتين فلا يوجد نقاط مشتركة والجملة مستحيلة الحل .

تمرينات ومسائل صفحة 94

1. ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه وليكن α عدداً حقيقياً وI منتصف $[AB]$ وJ منتصف $[CD]$. النقطتان E وF معرفتان بالعلاقتين $\overrightarrow{AE} = \alpha\,\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF} = \alpha\,\overrightarrow{BC}$ واخيراً H منتصف $[EF]$.

1) تحقق ان E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,\alpha),(A,1-\alpha)$ وكذلك ان النقطة F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\alpha),(B,1-\alpha)$.

$$\overrightarrow{AE} = \alpha\,\underbrace{\overrightarrow{AD}}$$

$$\overrightarrow{AE} = \alpha\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}\right)$$

$$-\overrightarrow{EA} = \alpha\overrightarrow{AE} + \alpha\overrightarrow{ED}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{EA} - \alpha\overrightarrow{EA}} + \alpha\overrightarrow{ED} = \vec{0}$$

$$(1-\alpha)\overrightarrow{EA} + \alpha\overrightarrow{ED} = \vec{0}$$

E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين:

$(A,1-\alpha),(D,\alpha)$

وتكون $(E,1)$

$$\overrightarrow{BF} = \alpha\,\underbrace{\overrightarrow{BC}}$$

$$\overrightarrow{BF} = \alpha\left(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC}\right)$$

$$-\overrightarrow{FB} = \alpha\overrightarrow{BF} + \alpha\overrightarrow{FC}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{FB} - \alpha\overrightarrow{FB}} + \alpha\overrightarrow{FC} = \vec{0}$$

$$(1-\alpha)\overrightarrow{FB} + \alpha\overrightarrow{FC} = \vec{0}$$

F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين:

$(B,1-\alpha),(C,\alpha)$

وتكون $(F,1)$

2) a. اثبت ان H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1-\alpha),(C,\alpha),(D,\alpha),(A,1-\alpha)$

مما سبق : E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1-\alpha),(D,\alpha)$

F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,1-\alpha),(C,\alpha)$

عندئذ: حسب الخاصة التجميعية يكون H هو مركز الأبعاد للنقاط: $(B,1-\alpha),(C,\alpha),(D,\alpha),(A,1-\alpha)$

b. استنتج وقوع النقاط H,J,I على استقامة واحدة.

مما سبق لدينا H هو مركز الأبعاد للنقاط: $(B,1-\alpha),(C,\alpha),(D,\alpha),(A,1-\alpha)$

و لدينا I منتصف $[AB]$ فإن I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-\alpha),(B,1-\alpha)$

و لدينا J منتصف $[CD]$ فإن J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,\alpha),(C,\alpha)$

و بالتالي حسب الخاصة التجميعية يكون H هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(J,2\alpha),(I,2-2\alpha)$

إذاً النقاط H,J,I على استقامة واحدة.

---

2. $ABCD$ رباعي الوجوه أثبت في كل من الحالتين الآتيتين ان النقاط D,C,B,M يقع في مستو واحد ثم وضع النقطة M.

① $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA}$

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{DM} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,1),(C,1),(B,1)$ فالنقاط D,C,B,M تقع في مستو واحد.

و M هي مركز ثقل المثلث BCD.

② $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MB} + 2\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD}\right) = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MB} + \underbrace{2\overrightarrow{AM}} + 2\overrightarrow{MD} = \underbrace{2\overrightarrow{AM}} - \overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = \vec{0}$

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,2),(C,1),(B,1)$ فالنقاط $M\,,B\,,C\,,D$ تقع في مستو واحد.

---

3. نُعطى معلماً متجانساً في الفراغ $(o;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعطى النقطتين $B(4,3,-3),A(1,0,0)$

1) اتكون مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)\,,(B,\alpha)$ عندما تتحول α في R هي نفسها المستقيم المار بالنقطة A وشعاع توجيهه $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$؟

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha),(B,\alpha)$عندئذ:

أياً كانت$M(x,y,z)$نقطة من الفراغ : $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\alpha + 1 \\ y = 3\alpha \\ z = -3\alpha \end{cases} \qquad ;\alpha \in R$$

المعادلات السابقة تمثل جملة المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من النقطة A والموجه بالشعاع $\overrightarrow{AB}(3,3,-3)$

و لكن$\overrightarrow{AB} = 3\left(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)$

اي ان المستقيم السابق هو نفسه المستقيم المار من النقطة A والموجه بالشعاع $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

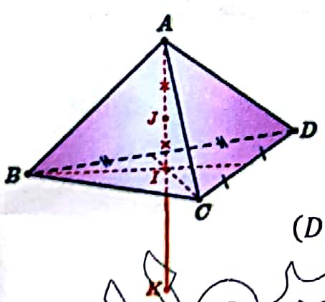
2) اتكون مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x-y)\,,(B,x),(O,y)$ عندما تتحول $x\,,y$ من R هي نفسها المستوي المار بالنقطة O ويقبل $\vec{i}$ ، $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ شعاعي توجيه؟

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x-y),(B,x),(O,y)$عندئذ حسب علاقة الإنشاء :

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AO}$$

المعادلة السابقة تمثل معادلة المستوي المار بالنقطة O والموجه بالشعاعين $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{AB}$

و نلاحظ ان $\overrightarrow{AB} = 3\left(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)$ و $\overrightarrow{AO} = -(\vec{i})$ و بالتالي المستوي السابق هو نفسه المستوي المار بالنقطة O ويقبل $\vec{i}$ ، $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ شعاعي توجيه .



4. ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه وليكن I مركز ثقل المثلث BCD

J منتصف $[AI]$ و k نظيرة A بالنسبة إلى I عبر عن k,J بصفتهما مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $A\,,B\,,C\,,D$ بعد تزويدها بأمثال مناسبة .

اولاً:

بما ان I مركز ثقل المثلث BCD فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)\,,(C,1)\,,(D,1)$ وعندها يكون $(I,3)$ وبما ان J منتصف $[AI]$ فإن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3)$ و $(A,3)$ وبالتالي حسب الخاصة التجميعية يكون J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)\,,(B,1)\,,(C,1)\,,(D,1)$

وائل زعترية 0933699123 ياسر الساسة 0949198068 علاء رحال 0952480990

ثانياً :

K نظيرة A بالنسبة لـ I $\Leftarrow$ $\overrightarrow{KA} = 2\,\overrightarrow{KI}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{KA} - 2\,\overrightarrow{KI} = \vec{0}$

وبما ان $(I,3)$ نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ $\frac{-3}{2}$ فيكون : $\frac{-3}{2}\overrightarrow{KA} + 3\,\overrightarrow{KI} = \vec{0}$

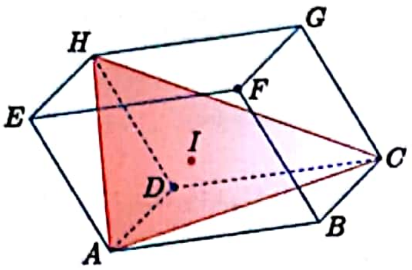
وبالتالي K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,3)$, $\left(A,\frac{-3}{2}\right)$

ولكن $(I,3)$ مركز ثقل المثلث BCD ومنه I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)\,,(C,1)\,,(D,1)$

وبالتالي حسب الخاصة التجميعية تكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $\left(A,\frac{-3}{2}\right),(B,1)\,,(C,1)\,,(D,1)$

---

5. ليكن $ABCDEFGH$ متوازي سطوح و ليكن I مركز ثقل المثلث AHC , اثبت ان النقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة و عيّن موقع I على $[DF]$.



الحل : I مركز ثقل المثلث AHC

فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)\,,(H,1)\,,(C,1)$

$$\underbrace{\overrightarrow{IA}}_{D} + \underbrace{\overrightarrow{IH}}_{D} + \underbrace{\overrightarrow{IC}}_{D} = \vec{0}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{ID}} + \overrightarrow{DA} + \underbrace{\overrightarrow{ID}} + \overrightarrow{DH} + \underbrace{\overrightarrow{ID}} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$3\,\overrightarrow{ID} + \underbrace{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC}}_{\text{ثلاثية الأحرف}} = \vec{0}$$

$$3\,\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DF} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DF} = 3\,\overrightarrow{DI}$$

إذاً $\overrightarrow{DF}\,,\overrightarrow{DI}$ مرتبطان خطياً , فالنقاط $I\,,D\,,F$ على استقامة واحدة .

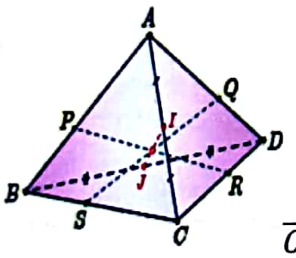
---

6. نتامل رباعي الوجوه $ABCD$ و لتكن x من المجال $]0,1[$ و لتكن $S\,,R\,,Q\,,P$ النقاط التي تحقق :

$$\overrightarrow{AP} = x\,.\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{AQ} = x\,\overrightarrow{AD} \quad , \quad \overrightarrow{CR} = x\,.\overrightarrow{CD} \quad , \quad \overrightarrow{CS} = x\,\overrightarrow{CB}$$

النقطتان I و J هما منتصفا الحرفين $[AC]\,,[BD]$

اثبت تلاقي المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) في نقطة واحدة .



① $\overrightarrow{CS} = x\,\overrightarrow{CB}$

وحسب علاقة الإنشاء فإن S مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,x)\,,(C,1-x)$ و يكون $(S,1)$

② $\overrightarrow{CR} = x\,\overrightarrow{CD}$

وحسب علاقة الإنشاء فإن R مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,x)\,,(C,1-x)$ ويكون $(R,1)$

③ $\overrightarrow{AQ} = x\,\overrightarrow{AD}$

وحسب علاقة الإنشاء فإن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,x)\,,(A,1-x)$ و يكون $(Q,1)$

④ $\overrightarrow{AP} = x\,\overrightarrow{AB}$

وحسب علاقة الإنشاء فإن P مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,x)\,,(A,1-x)$ ويكون $(P,1)$

⑤ I منتصف $[AC]$ وهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1-x)\,,(A,1-x)$ ويكون $(I,2-2x)$

⑥ J منتصف $[BD]$ وهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,x)\,,(D,x)$ ويكون $(J,2x)$

بما ان النقاط المثقلة $(A,1-x),(B,x),(C,1-x),(D,x)$ مجموع تثقيلاتها غير معدوم فإنه يوجد نقطة G مركز ابعاد متناسبة لها عندئذٍ :

- من ② و ④ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(R,1),(P,1)$ وهي منتصف $[PR]$.
- من ① و ③ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(Q,1),(S,1)$ وهي منتصف $[QS]$.
- من ⑤ و ⑥ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2-2x),(J,2x)$

الخلاصة: G تقع على كل من المستقيمات $[PR],[QS],[JI]$ أي ان المستقيمات السابقة تتقاطع في نقطة واحدة هي G

---

7. نتأمل رباعي وجوه $ABCD$، k نقطة ما من $[AB]$ تحقق $AK=\frac{1}{3}AB$, L نقطة من القطعة المستقيمة $[CD]$ تحقق $CL=\frac{2}{3}CD$ وأخيراً I منتصف $[AD]$ و J هي منتصف $[BC]$، نعرف G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,1),(C,1),(D,2)$.

1) a) اثبت ان النقاط G , I , J تقع على استقامة واحدة.

I منتصف $[AD]$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2),(D,2)$ ويكون $(I,4)$

J منتصف $[BC]$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1),(C,1)$ ويكون $(J,2)$

وبما ان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط$(A,2),(B,1),(C,1),(D,2)$

عندئذٍ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J,2)$و$(I,4)$

فالنقاط I , J , G على استقامة واحدة.

b) اثبت ان النقاط G , K , L تقع على استقامة واحدة.

بما ان k نقطة ما من $[AB]$ تحقق $AK=\frac{1}{3}AB$

فإن:

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

فإن k مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1),(A,2)$

بما ان L نقطة من القطعة المستقيمة $[CD]$ تحقق

$$CL=\frac{2}{3}CD$$

$$\overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

فإن L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,2),(C,1)$ ويكون $(L,3)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,3),(L,3)$ وهي منتصف $[LK]$ فالنقاط k , L , G على استقامة واحدة.

2) استنتج وقوع النقاط I , J , K , L في مستو واحد.

المستقيمان $[LK]$ و$[IJ]$ يتقاطعان في نقطة واحدة G فهما يعينان مستو وحيد

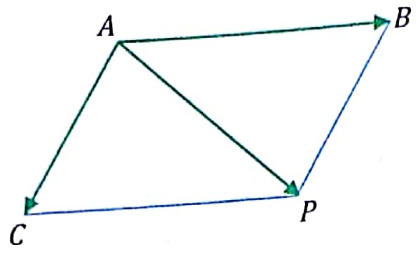
ومنه فالنقاط I , J , K , L تقع في مستو واحد.

البيطار

8. تتامل رباعي وجوه $ABCD$ والنقاط R, Q, P هي نقاط تجعل $ABPC$ و $ABQD$ و $ACRD$ متوازيات اضلاع , نهدف إلى إثبات تلاقي المستقيمات $(DP), (CQ), (BR)$.

1) a. اثبت ان النقطة P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1), (B,1), (C,1)$.

$ABPC$ متوازي أضلاع عندئذٍ :

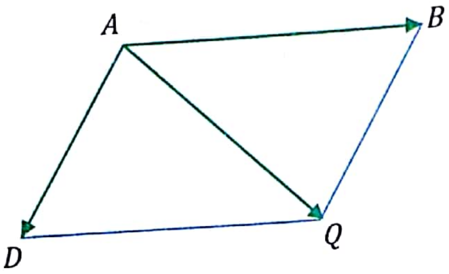


$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}$$
$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AP}$$
$$-\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

عندئذ $(P,1)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$, $(B,1)$, $(C,1)$

b. عبر بالمثل عن Q بصفتها مركز ابعاد متناسبة للنقاط A, B, D , وكذلك عن R بصفتها مركز ابعاد متناسبة للنقاط A, C, D .

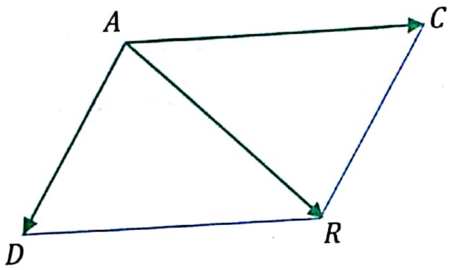
$ABQD$ متوازي أضلاع عندئذٍ :



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AQ}$$
$$\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QD}=\overrightarrow{AQ}$$
$$-\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD}=\vec{0}$$

عندئذٍ $(Q,1)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$, $(B,1)$, $(D,1)$

$ACRD$ متوازي أضلاع عندئذٍ :



$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AR}$$
$$\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{RD}=\overrightarrow{AR}$$
$$-\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{RD}=\vec{0}$$

عندئذٍ $(R,1)$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,-1)$, $(C,1)$, $(D,1)$

2) بالاستفادة من نقطة I و هي مركز ابعاد متناسبة مختارة للنقاط A, B, C, D ومن الخاصة التجميعية أثبت تلاقي المستقيمات (DP) , (CQ) , (BR) وعين موقع I على هذه المستقيمات .

I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$ واستناداً إلى الخاصة التجميعية يكون :

* بما أن P مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,-1), (B,1), (C,1)$ فإن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,1)$, $(P,1)$	* بما أن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,-1), (B,1), (D,1)$ فإن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C,1)$, $(Q,1)$	* بما أن R مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,-1), (C,1), (D,1)$ فإن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$, $(R,1)$

I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(P,1)$, $(D,1)$ وهي منتصف $[PD]$

I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(Q,1)$, $(C,1)$ وهي منتصف $[QC]$

I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(R,1)$, $(B,1)$ وهي منتصف $[RB]$

عندئذٍ المستقيمات $(DP), (CQ), (BR)$ تتلاقى في نقطة واحدة I تقع في منتصف كلاً منها

9. نتامل ثلاث نقاط A و B و C من الفراغ و عدداً حقيقياً k من المجال $[-1,1]$ ، ترمز G_k إلى مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,k^2+1)(B,k)(C,-k)$.

1) مثّل النقاط A و B و C و I منتصف $[BC]$ ، و انشئ النقطتين G_1 و G_{-1} .

G_k مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,k^2+1) و (B,k) و $(C,-k)$ عندئذٍ :

$$(k^2+1)\,\overrightarrow{G_kA}+k\,.\overrightarrow{G_kB}-k\,.\overrightarrow{G_kC}=\vec{0}$$

$\boxed{k=1}$

$$2\,\overrightarrow{G_1A}+\underbrace{\overrightarrow{G_1B}-\overrightarrow{G_1C}}=\vec{0}$$

$$2\,\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$

$$-2\,\overrightarrow{AG_1}=-\overrightarrow{CB}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{IB}}$$

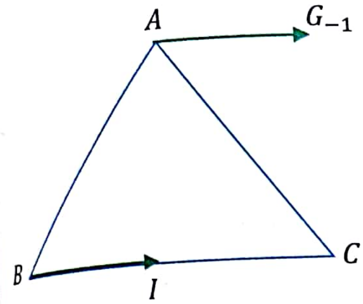
$\boxed{k=-1}$

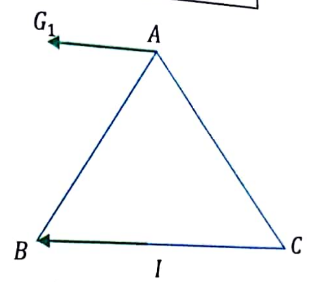
$$2\,\overrightarrow{G_{-1}A}-\underbrace{\overrightarrow{G_{-1}B}+\overrightarrow{G_{-1}C}}=\vec{0}$$

$$2\,\overrightarrow{G_{-1}A}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$

$$-2\,\overrightarrow{AG_{-1}}=-\overrightarrow{BC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AG_{-1}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}}$$





2) a. اثبت انه مهما كان العدد k من $[-1,1]$ كان : $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{1+k^2}\overrightarrow{BC}$.

G_k مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط ، عندئذٍ :

$$(1+k^2).\overrightarrow{G_kA}+\underbrace{k\,\overrightarrow{G_kB}-k\,.\overrightarrow{G_kC}}=\vec{0}$$

$$(1+k^2).\overrightarrow{G_kA}+k\,\underbrace{(\overrightarrow{G_kB}-\overrightarrow{G_kC})}=\vec{0}$$

$$(1+k^2)\overrightarrow{G_kA}+k\,.\,\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$

$$(1+k^2)\overrightarrow{G_kA}=-k\,.\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{G_kA}=\frac{-k}{1+k^2}\,.\overrightarrow{CB}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{1+k^2}\,.\overrightarrow{BC}}$$

b. ادرس تغيرات التابع f المعرف على المجال $[-1,1]$ بالصيغة $f(x)=\frac{-x}{1+x^2}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $[-1,1]$

$$f(-1)=\frac{1}{2}\quad,\quad f(1)=\frac{-1}{2}$$

$$f'(x)=\frac{-1(1+x^2)-2x(-x)}{(1+x^2)^2}=\frac{-1-x^2+2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2-1=0$$

$$x=1:\ f(1)=\frac{-1}{2}$$

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{1}{2}$$

x	-1		1
$f'(x)$	0	−	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{-1}{2}$

ومنه أياً يكن $x\in[-1,1]$ عندئذ $f(x)\in\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$

Scanned by CamScanner

ⓒ استنتج مجموعة النقاط G_k عندما تتحول k في المجال $[-1,1]$.

من جدول التغيرات والعلاقة $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{1+k^2}.\overrightarrow{BC}$ نستنتج ان :

النقاط G_k عندما $k \in [-1,1]$ تمثلا القطعة المستقيمة $[G_{-1}G_1]$ المارة من A والموازية لـ $[BC]$ وطولها الأعظمي يساوي نصف طول $[BC]$

3) عين مجموعة النقاط ε المكونة من النقاط M التي تحقق:

$$\left\|\underbrace{2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}}_{G_1 \text{ مركز ابعاد متناسبة}}\right\| = \left\|\underbrace{2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}_{G_{-1} \text{ مركز ابعاد متناسبة}}\right\|$$

$$\|(2+1-1)\overrightarrow{MG_1}\| = \|(2-1+1)\overrightarrow{MG_{-1}}\| \text{(حسب مبرهنة الاختزال)}$$

$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|2\overrightarrow{MG_{-1}}\|$$

$$\underbrace{\|\overrightarrow{MG_1}\|}_{G_1 \text{ بعد } M \text{ عن }} = \underbrace{\|\overrightarrow{MG_{-1}}\|}_{G_{-1} \text{ بعد } M \text{ عن }}$$

بعد M عن G_1 بعد M عن G_{-1}

وبالتالي مجموعة النقاط ε هي المستوي المحوري للقطعة $[G_1G_{-1}]$

4) عين المجموعة $\mathcal{F}$ المكونة من النقاط M التي تحقق:

$$\left\|\underbrace{2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}}_{G_1 \text{ مركز ابعاد متناسبة}}\right\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|\underbrace{\overrightarrow{MA}} + \underbrace{\overrightarrow{MA}} - \underbrace{\overrightarrow{MB}} - \underbrace{\overrightarrow{MC}}\|$$

$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \left\|\underbrace{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}}_{\text{علاقة شعاع المتوسط}}\right\|$$

$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|2\overrightarrow{IA}\|$$

$$\|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{IA}\|$$

وبالتالي مجموعة النقاط $\mathcal{F}$ هي الكرة التي مركزها G_1 ونصف قطرها $[IA]$

---

10. نتامل معلماً متجانساً $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ وليكن G مركز ثقل المثلث ABC.

1) احسب إحداثيات G وتحقق ان (OG) عمودي على (ABC).

بما ان $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ معلم متجانس فإن: $C(0,0,1), B(0,1,0), A(1,0,0)$

G مركز ثقل المثلث ABCومنه $(C,1),(B,1),(A,1)$ عندئذ:

$$G\left(\frac{1+0+0}{3}, \frac{0+1+0}{3}, \frac{0+0+1}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

حتى يكون (OG) عمودي على (ABC) يجب أن يكون عمودي على مستقيمين متقاطعين فيه:

$$\overrightarrow{AC}(-1,0,1), \overrightarrow{AB}(-1,1,0), \overrightarrow{OG}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AB} &= -\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+0 = 0 \\ \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AC} &= -\tfrac{1}{3}+0+\tfrac{1}{3} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (OG)\perp(ABC)$$

2) تُعرف النقاط $\grave{A}(2,0,0), \grave{B}(0,2,0), \grave{C}(0,0,3)$ المستوي $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$

ⓐ اكتب معادلة المستوي $\grave{A}\grave{B}\grave{C}$

$$\overrightarrow{\grave{A}\grave{B}}(-2,2,0) \qquad \overrightarrow{\grave{A}\grave{C}}(-2,0,3)$$

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$ بشرط a,b,c ليست جميعها أصفار عندئذٍ

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{\grave{A}\grave{B}} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{\grave{A}\grave{C}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{\grave{A}\grave{B}} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{\grave{A}\grave{C}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 0 \\ -2a + 3c = 0 \end{cases}$$

باختيار $b = 1$ نجد ان $a = 1$ ، $c = \frac{2}{3}$

عندئذ معادلة $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$: $\vec{n}\left(1,1,\frac{2}{3}\right)$ ويمر من $\grave{A}$

$$1(x-2) + 1(y-0) + \frac{2}{3}(z-0) = 0$$

$$(\grave{A}\grave{B}\grave{C}) \ : \ \boxed{x + y + \frac{2}{3}z - 2 = 0}$$

ⓑ اثبت ان $M(x,y,z)$ تنتمي الى المستقيم (AC) إذا وجد k بحيث: $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases} : k \in R$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC}(-1,0,1)$$

نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (AC) :

نختار النقطة $A(1,0,0)$ حيث أن $\vec{u}\,(-1,0,1)$ عندئذ:

$$\overrightarrow{AM} = k.\vec{u}$$

$$(AC): \begin{cases} x - 1 = -k \\ y - 0 = 0 \\ z - 0 = k \end{cases} : k \in R \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases} : \ k \in R$$

ⓒ احسب إحداثيات النقطة k المشتركة بين المستقيم (AC) والمستوي $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$.

نعوض معادلات التمثيل الوسيطي للمستقيم (AC) في المستوي $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$

$$1 - k + 0 + \frac{2}{3}k - 2 = 0 \ \Rightarrow \boxed{k = -3}$$

نعوض في (AC) :

$$\begin{cases} x = 1 - (-3) \\ y = 0 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = -3 \end{cases} \ : \ k\,(4,0,-3)$$

3) ⓐ احسب إحداثيات النقطة L المشتركة بين المستقيم (BC) والمستوي $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$

أولاً: لنوجد معادلات التمثيل الوسيطي للمستقيم (BC)

$\vec{u} = \overrightarrow{BC}(0,-1,1)$ ونختار النقطة $B(0,1,0)$ عندئذ:

$$(BC): \begin{cases} x = 0 \\ y = -t + 1 \ : \ t \in R \\ z = t \end{cases}$$

ولإيجاد إحداثيات النقطة L نعوض معادلات التمثيل الوسيطي (BC) في المستوي $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$

$$0 - t + 1 + \frac{2}{3}t - 2 = 0 \ \Rightarrow \boxed{t = -3}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + 1 = 4 \\ z = -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad L\,(0,4,-3)$$

③ اثبت توازي المستقيمات (AB) , $(\grave{A}\grave{B})$, (KL)

$$\overrightarrow{AB}(-1,1,0)\ ,\ \overrightarrow{\grave{A}\grave{B}}(-2,2,0)\ ,\ \overrightarrow{KL}(-4,4,0)$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{KL}=4\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{KL}=2\overrightarrow{\grave{A}\grave{B}}\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}(KL)\backslash\backslash(AB)\\ (KL)\backslash\backslash(\grave{A}\grave{B})\end{matrix}$$

4) عين تقاطع المستويين (ABC) و $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$ بدلالة النقاط المعرفة سابقاً

$k\in(AC)\subset(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$

$L\in(BC)\subset(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$

$\boxed{(KL)\subset(\grave{A}\grave{B}\grave{C})}$

$k\in(AC)\subset(ABC)$

$L\in(BC)\subset(ABC)$

$\boxed{(KL)\subset(ABC)}$

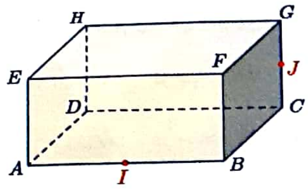
وبالتالي (ABC) و $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$ يتقاطعان بالفصل المشترك (KL)

---

11. ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$

النقطة I هي منتصف $[AB]$ و J هي منتصف $[CG]$

نتأمل المعلم المتجانس يعني طول $\left(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



1) احسب المسافتين DJ و IJ.

نوجد أولاً إحداثيات النقاط $D\ ,I\ ,J$:

$$I(1,0,0)\ ,\quad J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)\ ,\quad D(0,1,0)\ ,\quad \overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)\ ,\quad \overrightarrow{DJ}\left(2,0,\frac{1}{2}\right)$$

$$IJ=\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

$$DJ=\sqrt{4+0+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{17}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

2) اثبت ان المستقيمين (DI)و(IJ) متعامدان واحسب $\cos I\hat{J}D$

$$\overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)\ ,\quad \overrightarrow{ID}(-1,1,0)$$

$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{DI}=-1+1+0=0\Rightarrow$ متعامدان $(DI),(IJ)$

حساب $\cos I\hat{J}D$: نلاحظ ان $(I\hat{J}D)=(\overrightarrow{JI},\overrightarrow{JD})$

$$\overrightarrow{JI}\left(-1,-1,\frac{-1}{2}\right)\ ,\quad \overrightarrow{JD}\left(-2,0,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JD}=\|\overrightarrow{JI}\|.\|\overrightarrow{JD}\|.\cos(I\hat{J}D)$$

$$2+0+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{17}}{2}.\cos(I\hat{J}D)$$

$$\frac{9}{4}=\frac{3}{4}\sqrt{17}\cos(I\hat{J}D)$$

$$\cos(I\hat{J}D)=\frac{3}{\sqrt{17}}$$

3) ⓐ اعط معادلة للمستوي (DIJ).

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي (DIJ) بشرط c,b,a ليست جميعها اصفاراً:

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{ID}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{JI}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+b=0\\ -a-b-\frac{1}{2}c=0\end{cases}$$

باختيار $b=1$ نجد ان: $a=1$ ، $c=-4$ ومنه $\vec{n}(1,1,-4)$.

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

معادلة (DIJ): حيث $\vec{n}(1,1,-4)$ ويمر من النقطة D

$$1(x-0)+1(y-1)-4(z-0)=0$$

$$(DIJ):\boxed{x+y-4z-1=0}$$

ⓑ احسب بعد H عن المستوي (DIJ).

$$\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$H(0,1,1)$:

$$dist\,(H,(DIJ))=\frac{|0+1-4-1|}{\sqrt{1+1+16}}=\frac{4}{\sqrt{18}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}$$

4) احسب حجم رباعي الوجوه $(HDIJ)$

نلاحظ ان رباعي الوجوه $(HDIJ)$ راسه H وقاعدته (DIJ)

ويكون ارتفاعه: $h=dist\,(H,(DIJ))=\frac{4}{3\sqrt{2}}$

ومساحة القاعدة : (بعد ملاحظة أن المثلث DIJ قائم حسب عكس فيثاغورث)

[redacted]

$ID=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$:

$$S_{DIJ}=\frac{[IJ]\times[ID]}{2}=\frac{\frac{3}{2}\times\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$v=\frac{1}{3}.S_{DIJ}.h=\frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{2}}{4}.\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$$

5) ⓐ اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة J عمودياً على المستوي (HDI)

بما ان المستقيم d عمودي على المستوي (HDI) فإن ناظم المستوي هو شعاع توجيه المستقيم d.

نوجد معادلة المستوي (HDI): نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (HDI) بشرط c,b,a ليست جميعها أصفاراً.

$$\overrightarrow{HD}(0,0,-1)\ ,\qquad \overrightarrow{ID}(-1,1,0)$$

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{HD}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{ID}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-c=0\\ -a+b=0\end{cases}$$

باختيار $b=1$ نجد ان $a=1$, $c=0$ ومنه $\vec{n}(1,1,0)$

معادلة المستوي (HDI): حيث $\vec{n}(1,1,0)$ ويمر من النقطة D

$$1(x-0)+1(y-1)+0(z-0)=0$$

$$(HDI):\boxed{x+y-1=0}$$

عندئذ: $\vec{u}=\vec{n}(1,1,0)$ والنقطة $J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$:

$$d:\begin{cases}x=t+2\\ y=t+1\\ z=\frac{1}{2}\end{cases};t\in R$$

(b) احسب إحداثيات النقطة $\hat{J}$ نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي (HDI):

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي (HDI)

$$t+2+t+1-1=0 \Rightarrow t=-1$$

$$\begin{cases} x=-1+2=1 \\ y=-1+1=0 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad : \hat{J}\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$$

(c) جد بطرائق مختلفة بُعد النقطة J عن المستوي (HDI):

الطريقة الأولى:

$$dist\left(J,(HDI)\right)=\frac{|2+1-1|}{\sqrt{1+1+0}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

الطريقة الثانية: وجدنا في الطلب الرابع أن حجم الرباعي الوجوه $(HDIJ)$ هو $\frac{1}{3}$ ومنه بأخذ رأس رباعي الوجوه النقطة J وقاعدته (HDI) نجد:

$$v=\frac{1}{3}.S_{HDI}.h$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.\frac{[HD]\times[DI]}{2}.h \quad , \quad HD=\sqrt{0+0+1}=1 \ , DI=\sqrt{2}$$

$$2=1\times\sqrt{2}.h \Rightarrow \boxed{h=\sqrt{2}}$$

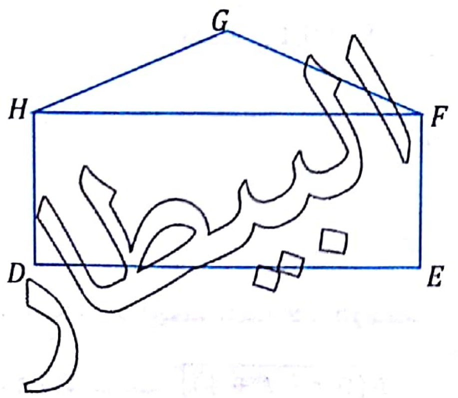
الطريقة الثالثة: بما أن المستقيم d يعامد المستوي (HDI) و $\hat{J}$ هي نقطة تقاطعهما فإن البعد المطلوب هو $J\hat{J}$

$$J\hat{J}=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$$

---

12. في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, نتامل الهرم $S-OABC$ حيث $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\overrightarrow{OC}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OS}=\vec{k}$. و ليكن t عدداً يحقق $0<t<1$. نهدف إلى تعيين مقطع الهرم بالمستوي P الذي معادلته $x+y=t$, و تعيين قيمة t التي تجعل مساحة المقطع اعظمية .

1) a. يقطع المستوي P المستقيمات (OA) و (OC) و (SC) و (SB) و (SA) في D و E و F و G و H بالترتيب . ارسم شكلاً و بيّن طبيعة هذا المقطع .



و طبيعة هذا المقطع شكل خماسي .

b.اثبت ان الرباعي $DEFH$ مستطيل , و عبّر عن مساحته بدلالة t .

إحداثيات رؤوس الهرم هي $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,0)$, $S(0,0,1)$

لإثبات ان الرباعي $DEFH$ مستطيل , نثبت أنه متوازي أضلاع ثم تعامد الشعاعين $\overrightarrow{HD}$ و $\overrightarrow{DE}$

إذاً لنوجد إحداثيات النقاط D و E و F و H وذلك عن طريق دراسة تقاطع المستوي P مع أحرف الهرم .

لحساب إحداثيات D ندرس تقاطع المستقيم (OA) مع المستوي P.

المستقيم (OA)

نقطة $O(0,0,0)$ شعاع توجيه $\overrightarrow{OA}(1,0,0)$

$$(OA):\begin{cases} x = h_1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad : h_1 \in R$$

و لدينا معادلة المستوي Pهي : $x + y = t$

وبالحل المشترك لجملة المعادلات الوسيطية لـ (OA) مع معادلة المستوي P نجد: $h_1 = t$

إذاً إحداثيات النقطة $\boxed{D(t,0,0)}$

لحساب إحداثيات E ندرس تقاطع المستقيم (OC) مع المستوي P.

المستقيم (OC)

نقطة $O(0,0,0)$ شعاع توجيه $\overrightarrow{OC}(0,1,0)$

$$(OC):\begin{cases} x = 0 \\ y = h_2 \\ z = 0 \end{cases} \quad : h_2 \in R$$

و لدينا معادلة المستوي P هي: $x + y = t$

و بالحل المشترك لجملة المعادلات الوسيطية لـ (OC) مع معادلة المستوي P نجد: $h_2 = t$

إذاً إحداثيات النقطة $\boxed{E(0,t,0)}$

لحساب إحداثيات F ندرس تقاطع المستقيم (SC) مع المستوي P.

المستقيم (SC)

نقطة $S(0,0,1)$ شعاع توجيه $\overrightarrow{SC}(0,1,-1)$

$$(SC):\begin{cases} x = 0 \\ y = h_3 \\ z = -h_3 + 1 \end{cases} \quad : h_3 \in R$$

و لدينا معادلة المستوي P هي : $x + y = t$

وبالحل المشترك لجملة المعادلات الوسيطية لـ (SC) مع معادلة المستوي P نجد: $h_3 = t$

إذاً إحداثيات النقطة $\boxed{F(0,t,-t+1)}$

لحساب إحداثيات H ندرس تقاطع المستقيم (SA) مع المستوي P.

$$\overbrace{\text{نقطة } S(0,0,1) \qquad \text{شعاع توجيه } \overrightarrow{SA}(1,0,-1)}^{\text{المستقيم } (SA)}$$

$$(SA): \begin{cases} x = h_4 \\ y = 0 \\ z = -h_4 + 1 \end{cases} \quad : h_4 \in R$$

و لدينا معادلة المستوي P هي : $x + y = t$

و بالحل المشترك لجملة المعادلات الوسيطية لـ (SA) مع معادلة المستوي P نجد: $h_4 = t$

إذاً إحداثيات النقطة $\boxed{H(t,0,1-t)}$

$\Leftarrow \overrightarrow{DH}(0,0,1-t)$, $\overrightarrow{EF}(0,0,1-t)$ نلاحظ أن $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DH}$ فالرباعي $DEFH$ متوازي أضلاع لتساير ضلعين متقابلين فيه , $\overrightarrow{DE}(-t,t,0)$, $\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{DE} = (0).(-t) + (0).(t) + (1-t).(0)$

$$\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{DE} = 0$$

فالضلعان $[HD]$ و $[DE]$ متعامدان , فالرباعي $DEFH$مستطيل .

مساحة المستطيل = الطول × العرض , أي : $S_{DEFH} = [HD].[DE]$

$\overrightarrow{HD}(0,0,t-1) \quad \Rightarrow HD = \sqrt{0^2 + 0^2 + (1-t)^2} = 1 - t$

$\overrightarrow{DE}(-t,t,0) \quad \Rightarrow DE = \sqrt{(-t)^2 + t^2 + 0^2} = \sqrt{2}\,t$

$\boxed{S_{DEFH} = \sqrt{2}\,t.(1-t)}$

c. احسب إحداثيات النقطة G , ثم مساحة المثلث FGH بدلالة t .

لحساب إحداثيات G ندرس تقاطع المستقيم (SB) مع المستوي P.

$$\overbrace{\text{نقطة } S(0,0,1) \qquad \text{شعاع توجيه } \overrightarrow{SB}(1,1,-1)}^{\text{المستقيم } (SB)}$$

$$(SB): \begin{cases} x = h_5 \\ y = h_5 \\ z = -h_5 + 1 \end{cases} \quad : h_5 \in R$$

و لدينا معادلة المستوي P هي : $x + y = t$

و بالحل المشترك لجملة المعادلات الوسيطية لـ (SB) مع معادلة المستوي P نجد: $h_5 = \frac{t}{2}$

إذاً إحداثيات النقطة $\boxed{G\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, \frac{-t}{2} + 1\right)}$

لحساب مساحة المثلث FGH نحسب اطوال اضلاعه:

$$\overrightarrow{HG}\left(\frac{-t}{2},\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right) \Rightarrow HG=\sqrt{\left(\frac{-t}{2}\right)^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.t$$

$$\overrightarrow{FG}\left(\frac{t}{2},\frac{-t}{2},\frac{t}{2}\right) \Rightarrow FG=\sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2+\left(\frac{-t}{2}\right)^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.t$$

$$\overrightarrow{FH}(t,-t,0) \Rightarrow FH=\sqrt{t^2+(-t)^2+0^2}=\sqrt{2}\,t$$

و منه فإن المثلث FGH متساوي الساقين، فالارتفاع هو متوسط ومنصف ومحور.

لنوجد إحداثيات النقطة N منتصف $[FH]$: $N\left(\frac{t}{2},\frac{t}{2},-t+1\right)$ ، ومنه :

$$\overrightarrow{NG}\left(0,0,\frac{t}{2}\right) \Rightarrow NG=\sqrt{0^2+0^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2}=\frac{t}{2}$$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2}\times$ القاعدة $\times$ الارتفاع ، أي $S_{FGH}=\frac{1}{2}.[FH]\,.[NG]$ ومنه:

$$\boxed{S_{FGH}=\frac{1}{2}.\sqrt{2}t.\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}t^2}$$

d. استنتج عبارة $A(t)$ مساحة المقطع المنشود بدلالة t .

مساحة المقطع P هي: مساحة المستطيل + مساحة المثلث ، أي: $A(t)=S_{DEFH}+S_{FGH}$ ، ومنه

$$A(t)=\sqrt{2}\,t.(1-t)+\frac{\sqrt{2}}{4}t^2 \Rightarrow A(t)=\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}t^2+\frac{\sqrt{2}}{4}t^2$$

$$\boxed{A(t)=\sqrt{2}\,t-\frac{3\sqrt{2}}{4}t^2}$$

2) ادرس اطراد A على المجال $]0,1[$ ، واستنتج قيمة t التي تجعل مساحة المقطع اعظمية.

$:0<t<1$

$$A(t)=\sqrt{2}\,t-\frac{3\sqrt{2}}{4}t^2$$

$$\grave{A}(t)=\sqrt{2}-3\frac{\sqrt{2}}{2}t$$

التابع A اشتقاقي على المجال $]0,1[$.

$$\grave{A}(t)=0 \Rightarrow \sqrt{2}-3\frac{\sqrt{2}}{2}t=0 \Rightarrow t=\frac{2}{3}$$

$$A\left(\frac{2}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow A\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

t	0		$\frac{2}{3}$		1
$\grave{A}(t)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$A(t)$	‖	↗	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	↘	‖

و تكون المساحة اعظمية عندما $t=\frac{2}{3}$.

Scanned by CamScanner

3) استنتج أن المستوي المار بمركز ثقل المثلث OAC و يقبل $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{OS}$ شعاعي توجيه يوافق مقطعاً أعظمي المساحة.

نرمز للمستوي المار بمركز ثقل المثلث OAC ويقبل $\overrightarrow{AC}(-1,1,0)$ و $\overrightarrow{OS}(0,0,1)$ شعاعي توجيه $\grave{P}$

النقطة M هي مركز ثقل المثلث OAC بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ حيث $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

$$\left.\begin{matrix} O(0,0,0) \\ A(1,0,0) \\ C(0,1,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{M\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)}$$

$\vec{n}\,.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \boxed{-a+b=0}$ ①

$\vec{n}\,.\overrightarrow{OS} = 0 \Rightarrow \boxed{c=0}$ ②

بفرض $a=1$ نجد $b=1$ إذاً $\boxed{\vec{n}(1,1,0)}$

[redacted]

فمعادلة المستوي من الشكل: $\grave{P}: x+y+d=0$ ، نعوض إحداثيات النقطة M في المعادلة فنجد $d=\frac{-2}{3}$

إذاً $\grave{P}: x+y=\frac{2}{3}$

وهو نفسه المستوي الذي يوافق مقطعاً أعظمي المساحة.
