التابع اللوغاريتمي النبري

تابع مجموعة تعريفه (منطلقه) $R_+^* =]0,+\infty[$ و مستقره R

وقاعدة ربطه : $f(x) = ln(x)$ و يحقق

① $f(1) = ln(1) = 0$

② اشتقاقي على $R_+^* =]0,+\infty[$ $\left\{ f^\backslash(x) = [ln(x)]^\backslash = \frac{1}{x} \right\}$

③ مستمر على $R_+^* =]0,+\infty[$ لأنهنه اشتقاقي على هذا المجال

④ متزايد تماماً على $R_+^* =]0,+\infty[$ لان $[ln(x)]^\backslash = \frac{1}{x} > 0$

$x > 1$	$x = 1$	$0 < x < 1$
$ln(x) > 0$ موجب تماما	$ln(1) = 0$	$ln(x) < 0$ سالب تماما

نتيجة

يكون $\forall\, a, b > 0$ وعموما

- $a = b \Leftrightarrow ln(a) = ln(b)$
- $a < b \Leftrightarrow ln(a) < ln(b)$
- $a > b \Leftrightarrow ln(a) > ln(b)$

للمقارنة بين عددين موجبين تماما نقارن بين لوغاريتميهما فاللوغاريتم يحافظ على المساواة و الترتيب

نتائج هامة

1) $ln(x) = y \Leftrightarrow e^y = x$

2) $ln(1) = 0$, $ln(e) = 1$. $ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$

3) ليس للعدد السالب لوغاريتم

4) $ln(e^Z) = Z \ : Z \in R$ $ $e^{-ln(Z)} = \frac{1}{Z} \ : Z > 0$

$e^{ln(Z)} = Z \ : Z > 0$

5) للرسم فقط

$ln(2) = 0.7$. $ln(3) = 1.1$, $ln(4) = 1.4$

$ln(5) = 1.6$. $ln(6) = 1.8$, $ln(10) = 2.3$

كاسر خليل عتيق أحمد الخباز 0991267136 0988627664

خواص اللوغاريتمات

$a > 0$ $ $b > 0$ $ $n \in N^*$

① $ln(a.b) = ln(a) + ln(b)$

② $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$

③ $ln\left(\frac{1}{b}\right) = -ln(b)$

④ $ln\left(\frac{a}{b}\right) = -ln\left(\frac{b}{a}\right)$

⑤ $ln(a^n) = n\,ln(a)$

⑥ $ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} ln(a)$

ملاحظة لا يجوز تطبيق خواص اللوغاريتمات قبل إيجاد مجموعة التعريف

مبرهنات هامة في التابع اللوغاريتمي

① $\lim_{x\to+\infty}[ln(x)] = +\infty$ تجاوزاً $ln(+\infty) = +\infty$

② $\lim_{x\to 0^+}[ln(x)] = -\infty$ تجاوزاً $ln(0^+) = -\infty$

③ $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{ln(x)}{x}\right] = 0$ نتيجة $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{ln(x)}\right] = +\infty$

④ $\lim_{x\to 0}\left[\frac{ln(x+1)}{x}\right] = 1$ نتيجة $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{ln(x+1)}\right] = 1$

⑤ $\lim_{x\to 1}\left[\frac{ln(x)}{x-1}\right] = 1$ نتيجة $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-1}{ln(x)}\right] = 1$

⑥ $\lim_{x\to 0^+}[x.ln(x)] = 0^-$ نتيجة $\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x.ln(x)}\right] = -\infty$

⑦ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ نتيجة $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

مجموعة التعريف والمشتق

التابع اللوغارتمي: $f(x) = ln[u(x)]$ معرف بشرط : $u(x) > 0$

مشتق التابع المركب $ln0u$:

يكون $ln0u$ اشتقاقيا على مجال I اذا تحقق

$u(x)$ اشتقاقي على I

$u(x) > 0$ على I

$$f(x) = ln(u(x)) \to f^\backslash(x) = \frac{u^\backslash(x)}{u(x)}$$

حالات خاصة

① التابع : $f(x) = ln(x)$ معرف على : $]0, +\infty[$ ومشتقه: $f^\backslash(x) = \frac{1}{x}$

② التابع : $f(x) = ln\left[\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right]$ معرف على: $(a_1x + b_1).(a_2x + b_2) > 0$

ومشتقه: $f^\backslash(x) = \frac{a_1b_2 - b_1a_2}{(a_1x+b_1).(a_2x+b_2)}$

((ويمكن تطبيق خواص اللوغاريتم ثم الاشتقاق))

③ التابع : $f(x) = ln|u(x)|$ و $f(x) = ln[u^2(x)]$

معرف على: $R\backslash\{S\}$

حيث S هي القيم التي تعدم البسط و المقام في $u(x)$

ومشتقه: ((يمكن تطبيق خواص اللوغاريتم ثم الاشتقاق))

خواص اللوغاريتم

④ التابع: $f(x) = ln[u^n(x)] = n\ ln\ u(x)$

معرف بشرط : $u^n(x) > 0$ ومشتقه: $f^\backslash(x) = n\frac{u^\backslash(x)}{u(x)}$

⑤ التابع : $f(x) = (ln[u(x)])^n = ln^n\ [u(x)]$

معرف بشرط : $u(x) > 0$

$(u^n)^\backslash = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u^\backslash$

ومشتقه: $f^\backslash(x) = n\,.\,(ln[u(x)])^{n-1}\ .\ \frac{u^\backslash(x)}{u(x)}$

خوارزمية حل معادلة لوغاريتمية

1. نكتب شرط الحل
   - المضمون > 0 في كل لوغاريتم
   - نقاطع المجالات الناتجة فيكون شرط الحل
2. نستخدم خواص اللوغاريتم لكتابة المعادلة من الشكل

$$\ln g(x) = \ln h(x)$$

3. نحل المعادلة الناتجة عن تطبيق خواص تزايد تابع لوغاريتمي

$$g(x) = h(x)$$

4. نقبل الحلول التي تحقق شرط الحل

حالة خاصة

$ln\ g(x) = a$

طريقة الحل

- شرط الحل $g(x) > 0$
- $g(x) = e^a$
- نعزل x ونقبل الحلول التي تنتمي لشرط الحل

خوارزمية حل متراجحة لوغاريتمية

1. نكتب شرط الحل
   - المضمون > 0 في كل لوغاريتم
   - نقاطع المجالات الناتجة فيكون شرط الحل

أو نأخذ مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي الصغير في المتراجحة

2. نستخدم خواص اللوغاريتم لكتابة المتراجحة من الشكل

$\ln g(x)$ احدى اشارات التراجح $\ln h(x)$

3. نحل المتراجحة الناتجة عن تطبيق خواص تزايد تابع لوغاريتمي

$g(x)$ احدى اشارات التراجح $h(x)$

4. نقبل الحلول التي تحقق شرط الحل

كاسر خليل عتيق 0988627664 أحمد الخباز 0991267136

إعداد
أ. أحمد الخباز
أ. كاسر عتيق
أ. سلمان الموسى

ملاحظات في استنتاج رسم الخط C_1 للتابع f_1

من الخط C للتابع f المرسوم بعد دراسة تحولاته

نكتب قاعدة ربط $f_1(x)$ و نحاول كتابته بدلالة $f(x)$ فيكون :

1	$f_1(x)=f(x)+b$	$\Leftrightarrow$	C_1ينتج عن C بانسحاب شعاعه $\vec{V}=b.\vec{j}$ أي $M(x,y)$ تستبدل بـ $M_1\ x,y+b$
2	$f_1(x)=f(x+a)$	$\Leftrightarrow$	C_1ينتج عن C بانسحاب شعاعه $\vec{V}=-a.\vec{i}$ أي $M(x,y)$ تستبدل بـ $M_1\ x-a\ ,y$
3	$f_1(x)=f(-x)$	$\Leftrightarrow$	C_1نظير C بالنسبة لمحور التراتيب yy' أي $M(x,y)$ تستبدل بـ $M_1\ -x\ ,y$
4	$f_1(x)=-f(x)$	$\Leftrightarrow$	C_1نظير C بالنسبة لمحور الفواصل xx' أي $M(x,y)$ تستبدل بـ $M_1(x\ ,-y)$
5	$f_1(x)=-f(-x)$	$\Leftrightarrow$	C_1نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات $O(0,0)$ أي $M(x,y)$ تستبدل بـ $M_1\ -x\ ,-y$
6	$f_1(x)=k.f(x)$	$\Leftrightarrow$	C_1ينتج عن C بضرب كل y بالعدد k أي $M(x,y)$ تستبدل بـ $M_1\ x\ ,k.y$
7	$f_1(x)=\lvert f(x)\rvert$ أي $f_1(x)=\begin{cases} f(x) & : f(x)>0 \\ -f(x) & : f(x)<0 \end{cases}$	$\Leftrightarrow$	النقاط ذات الترتيب الموجب تبقى ذاتها ونرسم نظيرات النقاط ذات الترتيب السالب بالنسبة لمحور الفواصل
8	$f_1(x)=f(x)$	$\Leftrightarrow$	هنا سنلاحظ أن : $D_1\subset D$ أي f_1 مقصور f على D_1 أي C_1 جزء من C يوافق D_1

التابع الأسي النبري

تعريفه (منطقه) R و مستقره $R_+^* =]0,+\infty[$

وقاعدة ربطه : $f(x)=e^x$ و يحقق

مجموعة التعريف: $f(x)=e^{u(x)}$; $D_f = D_u$

1. $f(0)=e^0=1$
2. اشتقاقي على R $\quad f^\backslash(x) = [e^x]^\backslash = e^x$
3. مستمر على R لأنه اشتقاقي على هذا المجال
4. متزايد تماماً على R لان $[e^x]^\backslash = e^x > 0$

$x \in]-\infty,0[$	$x=0$	$x\in]0,+\infty[$
$0<e^x<1$	$e^0=1$	$1<e^x<+\infty$

نتيجة

$\forall a,b \in R$

$a=b \Leftrightarrow e^a=e^b$

$a<b \Leftrightarrow e^a<e^b$

$a\le b \Leftrightarrow e^a\le e^b$

للمقارنة بين عددين حقيقيين نقارن بين e^a و e^b فالتابع الاسي يحافظ على المساواة و الترتيب

نتائج وخواص

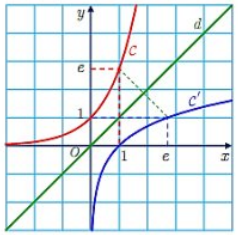
$x=e^y \Rightarrow \ln x = y$ فإن $\forall x>0$

$\forall y>0 \quad x=e^y \Rightarrow \ln x=y$

$\ln(e^x)=x \ : x\in R$ و $e^{\ln x}=x \ : x>0$

التابع الاسي هو التقابل العكسي للتابع اللوغاريتمي

الخط البياني للتابع الاسي $C^\backslash$ هونظير الخط البياني للتابع اللوغاريتمي C بالنسبة $y=x$



كاسر خليل عتيق 0988627664 أحمد الخباز 0991267136 سلمان موسى 0988437381

$e^0=1$, $e^1=e$ و $e^{-1}=\frac{1}{e}$ $\rightarrow$ $e^{-n}=\frac{1}{e^n}$

خواص جبرية

$\forall a.b \in R \ \ \$ \ P\in Z$

1. $e^0=1$ و $x=0$ الحل الوحيد للمعادلة $e^x=1$
2. $e^{-a}=\frac{1}{e^a}$
3. $e^{a+b}=e^a\times e^b$
4. $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$
5. $(e^a)^p=e^{ap}$

مجموعة التعريف والمشتق

اذا كان u تابعا اشتقاقيا على مجال I فان التالبع $f(x)=e^{u(x)}$ اشتقاقي على I وعند كل x من I لدينا

$$f^\backslash(x)=u^\backslash(x)e^{u(x)}$$

التابع الاسي بالاساس a

$$a^x=e^{x\ln a}$$

$$(a^x)^\backslash=\ln a \,.\, a^x \begin{cases} \text{متزايد تماما} & a>1 \\ \text{متناقص تماما} & 0<a<1 \end{cases}$$

$$a^{g(x)}=e^{g(x)\ln a} \rightarrow (a^{g(x)})^\backslash=\ln a \,.\, g^\backslash(x)\, a^{g(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(a)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln a}=\begin{cases} e^{+\infty}=+\infty & \text{عندما } a>1 \\ e^{-\infty}=0 & \text{عندما } 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(a)^x=\lim_{x\to-\infty}e^{x\ln a}=\begin{cases} e^{-\infty}=0 & \text{عندما } a>1 \\ e^{+\infty}=+\infty & \text{عندما } 0<a<1 \end{cases}$$

حل المعادلة التفاضلية

$y^\backslash=ay \Rightarrow y=k\,e^{ax}$

$y^\backslash=ay+b \Rightarrow y=k\,e^{ax}-\frac{b}{a}$

نهايات هامة في التابع الأسي النبري

① $\lim_{x\to+\infty}[e^x]=+\infty$ تجاوزاً $e^{+\infty}=+\infty$

② $\lim_{x\to-\infty}[e^x]=0$ تجاوزاً $e^{-\infty}=0$

$\frac{0}{0}$ تابع قسمة فيه تابع اسي نبري

نستفيد من المبرهنة

$\lim_{x\to0}\left[\frac{e^x-1}{x}\right]=1$ نتيجة $\lim_{g(x)\to0}\left[\frac{e^{g(x)}-1}{g(x)}\right]=1$ والمقلوب صحيح

$\frac{\infty}{\infty}$ تابع قسمة فيه تابع اسي نبري

نستفيد من المبرهنة

① $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{x^n}\right]=+\infty$

② $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^n}{e^x}\right]=0$

بعد اخراج أعلى اس من البسط عامل مشترك واخراج اعلى اس من المقام عامل مشترك

$0\times\infty$ تابع كثير حدود مع تابع اسي نبري

نستفيد من المبرهنة $\{\forall n\in N\}$

$\lim_{x\to-\infty}[x^n.e^x]=0$ نميز

$\lim_{x\to-\infty}[x.\ e^x]=0^-$

$\lim_{x\to-\infty}[x^2..e^x]=0^+$

$+\infty-\infty$ تابع كثير حدود مع تابع اسي نبري

نخرج الاس عامل مشترك ثم نحسب النهاية

نهايات مميزة

$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

كاسر خليل عتيق 0988627664 أحمد الخباز 0991267136 سلمان موسى 0988437381

خوارزمية حل معادلة(متراجحة) اسية نبرية

① نكتب شرط الحل
- مجموعة تعريف كل تابع اسي
- نقاطع المجالات الناتجة فنحصل على شرط الحل

② نستخدم خواص التابع الاسي لكتابة المعادلة من الشكل

$e^{V(x)}$ [= أو احدى اشارات التراجح] $e^{U(x)}$

③ نحل المعادلة الناتجة عن تطبيق خواص تزايد التابع الاسي النبري

$V(x)$ [= أو احدى اشارات التراجح] $U(x)$

④ نقبل الحلول التي تحقق شرط الحل

حالة خاصة

$e^{g(x)}$ [= أو احدى اشارات التراجح] a

طريقة الحل
- شرط الحل D_g
- $g(x)$ [= أو احدى اشارات التراجح] $\ln a$
- نعزل x ونقبل الحلول التي تنتمي لشرط الحل

حالة خاصة

$E: ae^{2x}+be^x+c$ [= أو احدى اشارات التراجح] 0

طريقة الحل
1. نضع $e^x=Z$
2. ونحل

$E^\backslash: aZ^2+bZ+c$ [= أو احدى اشارات التراجح] 0

3. وحلول E ان وجدت هي x_0 التي تحقق $x_0=\ln Z_0$ حيث ان Z_0 حل موجب تماما لـ $E^\backslash$

التكامل والتوابع الأصلية

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث F تابع أصلي لـ f : يحقق F مستمر على $I=[a,b]$ + قابل للاشتقاق

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

✓ قواعد التكامل + التوابع الأصلية

✓ تكامل بالتجزئة

$$\int_a^b u \cdot v' = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v$$

$$\int_a^b x^n \ln(\alpha x)$$

1, x, x^2

تجزئة مرة واحدة

$u = \ln(\alpha x) \longrightarrow u'$

$v' = x^n \xrightarrow{\int} v$

$$\int x^n \cdot e^{\alpha x},\ \sin \alpha x,\ \cos \alpha x,\ \sqrt{\alpha x + \beta}$$

مرتين x^2

مرة واحدة x

تجزئة

$u = x^n \longrightarrow u'$

$v' = \ldots \xrightarrow{\int} v$

$$\int_a^b e^{\alpha x} \cos \beta x\,dx$$

$$\int_a^b e^{\alpha x} \sin \beta x\,dx$$

$u = e^{\alpha x}$ تجزئة مرتين

مع العودة لنفس التكامل

تكامل توابع الكسور

درجة البسط ≥ درجة المقام ← تقسيم البسط على المقام

درجة البسط < درجة المقام

$$\int \frac{g'}{g} = \ln|g|$$

البسط ليس مشتق المقام

تفريق المقام

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b}$$

نوحد المقامات ونطابق

مساحات وحجوم

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$x'x$ و C

C_1 و C_2:

$$S = \int_a^b |f_1 - f_2|\,dx$$

D و C

$$S = \int_a^b |f - y_0|\,dx$$

الحجم

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

قواعد تكاملية

$f(x) = k \longrightarrow F(x) = kx$

$f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$f(x) = g' \cdot g^n \longrightarrow F(x) = \dfrac{g^{n+1}}{n+1}$

$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \longrightarrow F(x) = \dfrac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}}$

$f(x) = \dfrac{g'}{g^n} \longrightarrow F(x) = \dfrac{-1}{(n-1)\,g^{n-1}}$

$f(x) = \dfrac{1}{x} \longrightarrow F(x) = \ln|x|$

$f(x) = \dfrac{k}{ax+b} \longrightarrow F(x) = \dfrac{k}{a}\ln|ax+b|$

$f(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)} \Rightarrow F(x) = \ln|g(x)|$

$f(x) = \sqrt[n]{x^m} \longrightarrow F(x) = \dfrac{n}{n+m}\sqrt[n]{x^{n+m}}$

$f(x) = g' \sqrt[n]{g^m} \longrightarrow F(x) = \dfrac{n}{n+m}\sqrt[n]{g^{n+m}}$

$f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow F(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$

$f(x) = \sin x \longrightarrow F(x) = -\cos x$

$f(x) = g' \cdot \sin g \longrightarrow F(x) = -\cos g$

$f(x) = \cos x \longrightarrow F(x) = \sin x$

$f(x) = g' \cos g \longrightarrow F(x) = \sin g$

$f(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \rightarrow F(x) = \tan x$

$f(x) = 1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} \rightarrow F(x) = -\cot x$

تكامل كسر

درجة البسط ≥ درجة المقام → نقسم البسط على المقام ثم نكامل

درجة البسط < درجة المقام → نسأل

هل البسط مشتق المقام؟

نعم: $\int \dfrac{g'}{g} = \ln|g|$

كلا: نجرب كل ما يمكن تفرقته

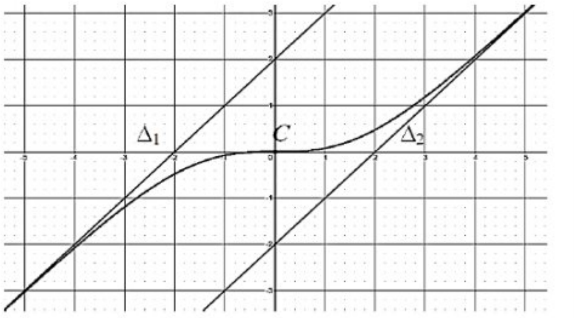
تحليل المقام ثم تجزئة

$f(x) = e^x \longrightarrow F(x) = e^x$

$f(x) = g'(x)\, e^{g(x)} \longrightarrow F(x) = e^{g(x)}$

$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow F(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \dfrac{g'}{2\sqrt{g(x)}} \longrightarrow F(x) = \sqrt{g(x)}$



السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ ،

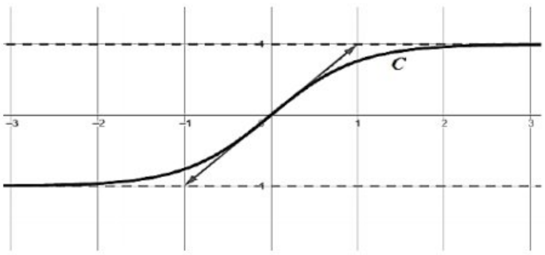
و المستقيمين Δ_1 و Δ_2 مقاربين مائلين ل C **و المطلوب :**

1− أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2− أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

3− عيّن العددين الحقيقيّين a و b بحيث يكون :

$f(x) = x + a + \frac{b}{1+e^{x}}$



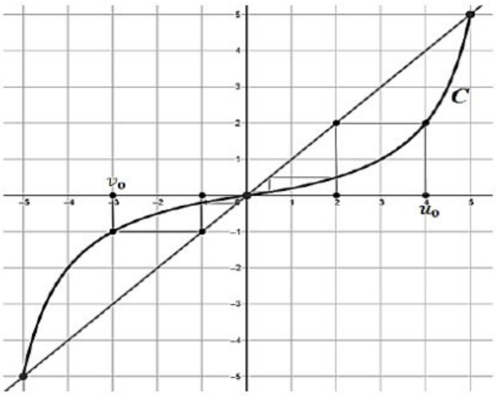
السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ **و المطلوب :**

1− أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2− أوجد $f(0)$ و $f'(0)$.

3− أوجد $f(\mathbb{R})$.

4− ما عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{1}{e}$ ؟



السؤال الأول: نتأمّل C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $[-5,5]$

و نعتبر المتتاليتين المعرفتين وفق $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1– هل التابع f فردي أم زوجي ؟

2– ما حلول المعادلة $f(x) = x$ ؟

3– أوجد u_1 و v_1 .

4– هل المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان ؟ علل إجابتك .

5– ما النهاية المشتركة للمتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ ؟

<u>السؤال الأول</u> : نجد جانبا جدول تغيرات التابع f المعرف على $]1,+\infty[$ و المطلوب :

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	||	- - -	0	+ + +	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	1	↗	3

1 اوجد $\lim_{x\to+\infty} (f(x))$ ثم $\lim_{x\to+\infty} [f(f(x))]$ 2 اكتب معادلة كل مستقيم مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C_f

3 هل يوجد مقاربات مائلة للخط C_f . علل ذلك ؟ 4 ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$ ؟

5 اكتب معادلة المماس لمنحني التابع في نقطة منه فاصلتها $x = 3$

تجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ و الذي خطة البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty \| \| +\infty$	$\searrow$	-3

❶ – اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني

❷ – اوجد $f\left(\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right)$

❸ – برهن أن للمعادلة $2.f(x)+5=0$ حل وحيد

❹ – اوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(f(x)\right)$.

<u>السؤال الأول</u> : نجد جانبا جدول تغيرات التابع f المعرف على $]-3,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ و المطلوب :

x	-3		-1		0		1		$+\infty$
$f^{\backslash}(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	$3\|\|-2$	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty \| \| -\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty \| \| -\infty$	$\nearrow$	3

① اكتب معادلة كل مستقيم مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C_f

② هل $f(-3)$ قيمة حدية ؟ علل اجابتك

③ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ ؟

④ اكتب معادلة نصف مماس لمنحني التابع في نقطة منه فاصلتها $x=0$ من اليسار

f ، f^{-1} مناقشات … للصف الأول

مثال : ① $f(x)=e^{x}-3$, $x\in\mathbb{R}$

أثبت أن f تابع تقابل وأوجد تابعه العكسي:

f تقابل إذا كان للمعادلة $f(x)=y$ حل وحيد.

نعزل x : $e^{x}-3=y$

$e^{x}=y+3$

بالفرض $y>-3$ ومنه $y+3>0$

$x=\ln(y+3)$

للمعادلة حل وحيد.

باستخدام الرمز المألوف

التابع العكسي : $f^{-1}(x)=\ln(x+3)$, $x\in]-3,+\infty[$

② $f(x)=\ln x-2$, $x\in]0,+\infty[$

f تقابل أوجد f^{-1}

$f(x)=y$

$\ln x-2=y$

$\ln x=y+2$

له حل وحيد $x=e^{y+2}$

f تقابل

باستخدام الرمز المألوف

$f^{-1}(x)=e^{x+2}$

③ $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$

أوجد f^{-1}

$f(x)=y$

نعزل x : $\dfrac{x-2}{x+1}=y$

$x-2=y\cdot x+y$

$x-y\cdot x=y+2$

$x(1-y)=y+2$

$x=\dfrac{y+2}{1-y}$

باستخدام الرمز المألوف

$f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{1-x}$

نجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ والذي خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-3

1. – اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني
2. – اوجد $f(\mathbb{R}\setminus\{-1\})$
3. – برهن أن للمعادلة $2.f(x)+5=0$ حل وحيد
4. – اوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$

شاقولي
$x=-1$

أفقي

① $y=0$
$y=-3$

② $f(R\setminus\{-1\}) =]-3,+\infty[$

③ $2f(x)+5=0$
$f(x)=-\frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2} \notin f(]-\infty,-1[)=[-2,+\infty[$ متزايد

ليس للمعادلة $f(x)=-\frac{5}{2}$ حل في $]-\infty,-1[$

في المجال f مستمر و متناقص تماماً على $]-1,+\infty[$

$-\frac{5}{2} \in f(]-1,+\infty[) =]-3,+\infty[$

للمعادلة $f(x)=-\frac{5}{2}$ حل وحيد

إذاً للمعادلة $f(x)=-\frac{5}{2}$ حل وحيد على $R\setminus\{-1\}$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = f(-3) = -2$

السؤال الأول : نجد جانبا جدول تغيرات التابع f المعرف على $[-3,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ و المطلوب :

<u>السؤال الأول</u> : نجد جانبا جدول تغيرات التابع f المعرف على $[-3,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ و المطلوب :

x	-3		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	||	$+$	$3 \| -2$	$-$	||	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$ 2	5	$\searrow$ 2	$-\infty$ || $-\infty$	2 $\nearrow$	3 تقارب

① اكتب معادلة كل مستقيم مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C_f

② هل $f(-3)$ قيمة حدية ؟ علل اجابتك

③ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ ؟

④ اكتب معادلة نصف مماس لمنحني التابع في نقطة منه فاصلتها $x=0$ من اليسار

① $x=-1$ مقارب شاقولي
" " $x=1$
أفقي " $y=3$

② $-3 \in D_1 =]-4,-2[$
بحيث $x \in D_1 \cap D = [-3,-2[$
$f(x) \leq 2$
$f(x) \leq f(-3)$
$f(-3)=2$ قيمة حدية كبرى

③ ثلاثة

④ $x=0 \Rightarrow y=f(0)=5$
$m=f'(0)=3$
$y=f'(0)(x-0)+f(0)$
$y=3x+5$

⑤ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=2$
اربع حلول

السؤال الأول : نجد جانبا جدول تغيرات التابع f المعرف على $]1,+\infty[$ و المطلوب :

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	||	---	0	+++	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	1	↗	3

① اوجد $\lim_{x\to+\infty} (f(x))$ ثم $\lim_{x\to+\infty} [f(f(x))]$ ② اكتب معادلة كل مستقيم مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C_f

③ هل يوجد مقاربات مائلة للخط C_f . علل ذلك ؟ ④ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ ؟

⑤ اكتب معادلة المماس لمنحني التابع في نقطة منه فاصلتها $x=3$

① $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = f(3) = \boxed{1}$

② $x=1$ شاقولي

$y=3$ أفقي

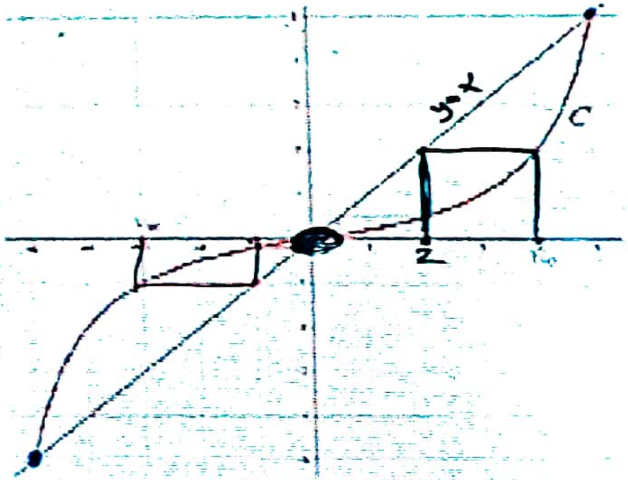
③ كلا لأن وجود المقارب الأفقي

يمنع وجود المقارب المائل

④ معدوم

⑤ مماس أفقي

$y=1$



السؤال الأول: نتأمل C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[-5,5]$

و نعتبر المتتاليتين المعرفتين وفق $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1- هل التابع f فردي أم زوجي ؟

2- ما حلول المعادلة $f(x) = x$ ؟

3- أوجد u_1 و v_1 .

4- هل المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان ؟ علل إجابتك .

5- ما النهاية المشتركة للمتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ ؟

1) f فردي لأن f متناظر بالنسبة للمبدأ $(0,0)$

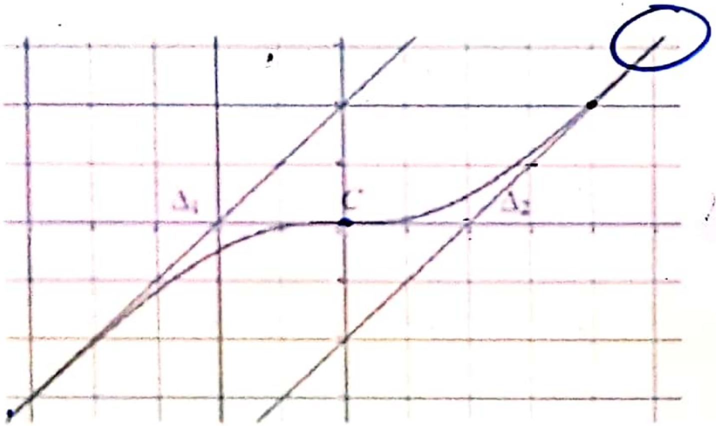
2) $x = 0$ ، $x = -5$ ، $x = 5$ $\Leftrightarrow f(x) = x$ فواصل نقاط التقاطع

3) $u_1 = 2$ ، $v_1 = -1$

4) نعم متجاورتان
(u_n) متناقصة
(v_n) متزايدة
$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$
(من الرسم البياني)

5) $\boxed{\ell = 0}$

السؤال الأول : نجد جانبا جدول تغيرات التابع f المعرف على $]1,+\infty[$ و المطلوب :



السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ ، و المستقيمين Δ_1 و Δ_2 مقاربين مائلين لـ C و المطلوب :

1- أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2- أوجد $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

3- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون :

$$f(x) = x + a + \frac{b}{1+e^x}$$

$O(0,0) \in C_f \rightarrow f(0) = 0$

نقطة رجوع

$a + \frac{b}{1+e^0} = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0$

$f'(x) = 1 + \frac{-b e^x}{(1+e^x)^2}$

$f'(0) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{b e^0}{(1+e^0)^2} = 0$

$1 - \frac{b}{4} = 0 \Rightarrow b = 4$

$a + \frac{4}{2} = 0 \Rightarrow a + 2 = 0$

$a = -2$

$f(x) = x - 2 + \frac{4}{1+e^x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m = \frac{y_B - y_1}{x_B - x_1} = \frac{1-0}{3-2} = 1$

$A(2,0) \in \Delta$ ، $B(3,1) \in \Delta$

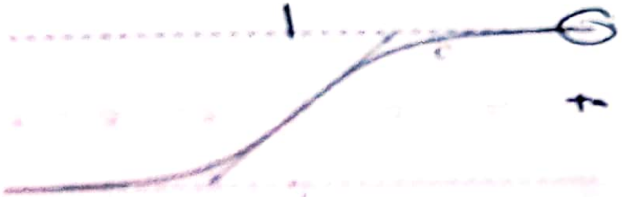
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 0$

مماس أفقي

File Edit View Window Help

Tools Fill & Sign Comment

السؤال الأول: يتأمل جانبا الخط البياني C للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ و المطلوب



1- أوجد $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

2- أوجد $f(0)$ و $f'(0)$.

3- أوجد $f(\mathbb{R})$

4- هل ... $f(x) = \frac{?}{x}$?

① $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

الخط المقارب أفقي $y = 1$

$y = -1$

② $f(0) = 0$

الميل $(0,0)$ $(1,1)$ $f'(0) = m = 1$

③ $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$

④ هل f زوجي أم فردي

f فردي

لأن f متناظر بالنسبة ...