حساب المسندات

التعريف: (١) الجملة المفتوحة (أو المسند)

جملة تحتوي على عدد منتهٍ من المتغيرات.
ونرمز لها P , أو $P(x)$ أو $P(x,y)$ ...

(٢) ليكن P جملة مفتوحة نسمي D أو D_P
مجال الجملة P هو مجموعة المتغيرات حيث استبدالها
بقيمة يكون للجملة معنى.

مجال صواب الجملة P هو جزء من D ونرمز له T_P
حيث أي استبدال متغيرات من T_P تكون الجملة صائبة.

ملاحظة: ليكن $P(x)$ جملة مفتوحة و D مجالها.
اذا كان $a \in D$ قيمة ثابتة بـ D فان $P(a)$ تقرير

مثال: (١) $D = \mathbb{Z}$, $P(x): x + 5 > 8$

الاعداد الصحيحة: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$$T_p = \{4, 5, 6, \dots\}$$

(٢) $D = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $P(x, y): 2x + 8y = 2$

لدينا: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ فإن $T_p = \phi$

(٣) $D = \mathbb{R}$, $P(x): x^2 + 5 > 2$

$$T_p = \mathbb{R}$$

ملاحظة: $A \times B = \{(x, y) : x \in A , y \in B\}$

مثال

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(1,1), (1,2), \dots, (2,1), (2,2), \dots, (3,1), ($
$\dots\}$

$$A = \{1, 2\} ; B = \{a, b, c\}$$

$A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$

$B \times A = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$

المسورات

المسور الشمولي ونرمز له $\forall$ ونقرأ
لكل أو لجميع أو لأي

$\forall x \in D, P(x)$: لكل $x \in D$, $P(x)$ صائبة

العبارة : $\forall x \in D, P(x)$ صائبة إذا كان $T_p = D$

العبارة : $\forall x \in D, P(x)$ خاطئة إذا كان $T_p \neq D$

المسور الوجودي ونرمز له $\exists$ ونقرأ يوجد (على الأقل).

$\exists x \in D, P(x)$: يوجد (على الأقل) $x \in D$ حيث $P(x)$ صائبة

العبارة $\exists x \in D, P(x)$ تكون صائبة إذا كان يوجد على الأقل $a \in D$ حيث $P(a)$ صائبة : $T_p \neq \phi$

العبارة $\exists x \in D, P(x)$ تكون خاطئة إذا كان لكل $a \in D$, $P(a)$ خاطئة : $T_p = \phi$

$$\boxed{\neg(\forall x \in D, P(x)) \equiv (\exists x \in D, \neg P(x))}$$

$$\boxed{\neg(\exists x \in D, P(x)) \equiv (\forall x \in D, \neg P(x))}$$

الجملة الشرطية : $P(x) \longrightarrow Q(x)$

العبارة الشرطية : $(\forall x \in D, P(x) \longrightarrow Q(x))$

$$\boxed{\neg(\forall x \in D, P(x) \longrightarrow Q(x)) \equiv (\exists x \in D, P(x) \wedge \neg Q(x)}$$

ملاحظة

$$\neg(P \longrightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$$

$$(P \longrightarrow Q) \equiv (P \wedge Q) \vee \neg P$$

P	Q	$P \longrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

نفي المسورات:

$$(\exists x \in D, \neg P(x)) \equiv \neg(\forall x \in D, P(x))$$

$$(\forall x \in D, \neg P(x)) \equiv \neg(\exists x \in D, P(x))$$

الجملة الشرطية

العبارة: $\boxed{\forall x \in D, P(x) \longrightarrow Q(x)}$

ملاحظة:

اذا كان لدينا أن $\underline{\text{لكل } x \in D,\ P(x)}$ $(T_P = D)$

فيمكن أن نكتب: $\forall x \in D, Q(x)$ عوض

$$\forall x \in D, P(x) \longrightarrow Q(x)$$

نفي الجملة الشرطية

$$\neg(\forall x \in D, P(x) \longrightarrow Q(x))$$

$$\equiv \neg(\forall x \in D, \neg P(x) \vee Q(x))$$

$$\equiv (\exists x \in D, \neg(\neg P(x) \vee Q(x)))$$

$$\equiv (\exists x \in D, (P(x) \wedge \neg Q(x)))$$

$$\boxed{\neg(\forall x \in D, P(x) \longrightarrow Q(x)) \equiv (\exists x \in D, P(x) \wedge \neg Q(x))}$$

نلاحظ

$$\neg(\exists x \in D, P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x \in D, (\neg P(x) \vee \neg Q(x)))$$

$$\boxed{\neg(\exists x \in D, P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x \in D, P(x) \longrightarrow \neg Q(x))}$$