3.3 : مراجعة التكامل *

① $\int x^5 - x^4 + 3x^2 + 5x - 12 \, dx$

Sol : $\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 12x + c$

قاعدة

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

② $\int_1^2 (2x - 3) \, dx$

Sol : $\left[\frac{2x^2}{2} - 3x \right]_1^2$ نعوض $= (2)^2 - 3(2) - \left((1)^2 - 3(1) \right)$

$= -2$ داخل $= 0$ خارج

3.3 : راجع الكتاب لقراءة السؤال

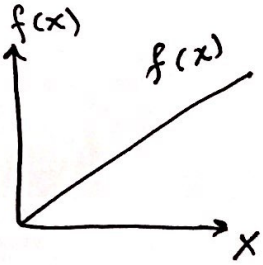
Sol Ex : Let X be a continuous random variable with density function : $f_X(x) = 2x$, $0 \le x \le 1$

Ex (3.3.6) ص 123

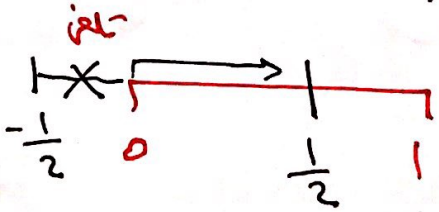
a) أثبت أن f دالة كثافة احتمالية ⇐ يجب أن تكون التكامل على المجال يساوي 1

من الأكبر 1 ، الأصغر 0

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 2x \, dx = \left[\frac{2x^2}{2} \right]_0^1 = (1)^2 - (0)^2 = 1 .$$



b) $P\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \, dx$



$$= \left[\frac{2x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (0)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{و.ب}$$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow$ Ex (3.3.6) P 123 ص.ك

c) distribution function F_x .

Sol: قانون $\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{0}^{x} 2t\,dt$

$\int 2x\,dx = \frac{2x^2}{2}$ $= \frac{2t^2}{2}\Big]_0^x = \boxed{x^2} = F_x$

$$\Rightarrow F_x = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ x^2 & , \ 0 \le x \le 1 \\ 1 & , \ x > 1 \end{cases}$$

d) $E(X)$ mean قانون $= \int_0^1 x \cdot f(x)\,dx$

$= \int_0^1 x \cdot 2x\,dx$

$= \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2x^3}{3}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}} = E(x)$

$\boxed{Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$: Variance ب

Now; $E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\,dx$

$= \int_0^1 2x^3\,dx = \frac{2x^4}{4}\Big]_0^1 =$ بسيط $\boxed{\frac{1}{2}} = E(X^2)$

$\Rightarrow Var(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$ بسيط $\boxed{0.056}$ → Variance

$\Rightarrow$ Stand. dev. $(\sigma) = \sqrt{0.056} = \boxed{0.24}$

Scanned with CamScanner

دوال p.d.f

Cont. سؤال إضافي:

Ex: Let $f(x) = cx, \quad 0 \le x \le 3$

① Find c?

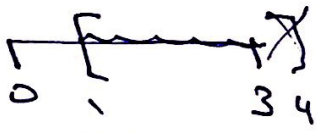
Sol: $\int_0^3 cx\,dx = 1 \Rightarrow c\frac{x^2}{2}\Big]_0^3 = 1$

$c\left(\frac{9}{2}\right) - 0 = 1 \Rightarrow c\left(\frac{9}{2}\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{9}$

$\frac{9}{2}$ $\quad \frac{9}{2}$

$$f(x) = \frac{2}{9}x, \quad 0 \le x \le 3$$

② $P(1 \le x < 4) = \int_1^3 \frac{2}{9}x\,dx$



$= \frac{2}{9}\frac{x^2}{2}\Big]_1^3 = \frac{2}{9}\left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{8}{9}$

③ mean: $E(x) = \int_0^3 x \cdot \frac{2}{9}x\,dx = \int_0^3 \frac{2}{9}x^2\,dx = \dots = 0$

④ Var(x)? بدي: $E(x^2) = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{2}{9}x\,dx = \int_0^3 \frac{2}{9}x^3\,dx$

$= \square$

$Var(x) = \square - (0)^2 = \triangle$

⑤ F(x)? $\int \frac{2}{9}x\,dx = \frac{2}{9}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{9}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{9}, & 0 \le x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

* 3.3 ج.ت

Exponential distribution : التوزيع الأسي

① $P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ← احتمالية أصغر

② $P(X \ge x) = e^{-\lambda x}$ ← احتمالية أكبر

③ mean $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ = average

④ $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Ex (3.3.7) راجع الكتاب ص 126 لقراءة السؤال

P: 126

average = 15 $\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 15 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{15}}$

a) $P(X < 6) = 1 - e^{-\lambda x}$

$= 1 - e^{-\frac{1}{15}(6)}$ حاسبة $= \boxed{0.3297}$

b) $P(X > 18) = e^{-\lambda x} = e^{-\frac{1}{15}(18)}$ حاسبة $= \boxed{0.3012}$

c) Variance $= \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(\frac{1}{15})^2} = \boxed{225}$

stand. dev. $\sigma = \sqrt{225} = \boxed{15}$

Scanned with CamScanner

Ex (3.3.2) : p.d.f
P: 121

Find the probability distributio function (density) f(x)?

① $F(x) = \frac{x^4}{16}$ ← نشتقه ← $f(x) = \frac{4x^3}{16} = \frac{x^3}{4}$.

② $F(x) = 1 - e^{-5x}$ ← نشتقه ← $f(x) = 5e^{-5x}$.

ملاحظة : ① $F(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 20x - 10$

نشتقه $f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 6x + 20$.

② $F(x) = e^{3x-2}$ ← نشتقه ← $f(x) = 3e^{3x-2}$

لأنه : نشتقه الأس × ضرب الدالة نفسها

ملاحظة ① : اذا أعطى السؤال $F(x)$ وطلب $f(x)$ ← نشتقه

$f(x)$ وطلب $F(x)$ ← تكامل

② = = = 0

Ex (3.3.5) page: 123 : Let $F(x) = 1 - e^{-x}(1+x)$, $x \geq 0$

Find $P(1 \leq x < 2)$

Sol: $P(1 \leq x < 2) = F(2) - F(1)$

نعوض $= [1 - e^{-2}(1+2)] - [1 - e^{-1}(1+1)]$

$= 0.329$.

Scanned with CamScanner

شرط استخدام الجداول ⇐ يجب أن تكون المساحة المطلوبة أصغر.

6

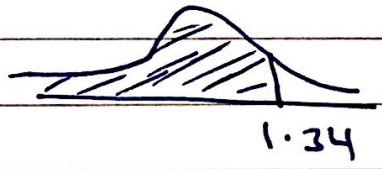
3.3 : Continuous random Variable :

→ Normal distribution : التوزيع الطبيعي

Ex. Let Z be a Standard normal dist. Find:

① $P(Z \leq 1.34)$ أصغر مباشر

Sol : 0.9099



② $P(Z \geq 2.1)$ أكبر ← نحولها لأصغر — نطرح من 1

Sol : $1 - P(Z < 2.1) = 1 - 0.9821 = \boxed{0.0179}$

③ $P(-1.3 \leq Z \leq 1.04)$ بين ← نفصل — نفصل بإشارة أصغر

Sol : $P(Z \leq 1.04) - P(Z \leq -1.3)$

$= 0.8508 - 0.0968 = \boxed{0.754}$

ملاحظة : ④ $P(Z = 1.5) = \text{Zero}$

↓

اذا جاءت مساواة لوحدها

في الطبيعي ⇐ الاجابة = صفر

Scanned with CamScanner

الاستاذة الكلامية ← X ← ؟

(74)

Ex (3.3.8) لدينا الكتاب ص 130 لقراءة السؤال normal

$\mu = 80, \quad \sigma = 5$

a) $P(X < 75)$ below أقل ⟶ نحول X لـ Z ⇒ $\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$

$P\left(Z < \frac{75-80}{5}\right)$

$P(Z < -1) \overset{\text{من الجدول}}{=} 0.1587$

b) $P(76 < X < 82)$ نحوّل ثم ← نفصل :

$P\left(\frac{76-80}{5} < Z < \frac{82-80}{5}\right)$

$P(-0.8 < Z < 0.4)$ نفصل باشارة أصغر

$= P(Z < 0.4) - P(Z < -0.8)$

$= 0.6554 - 0.2119 = \boxed{0.4435}$

عكس

Ex (3.3.9) من الكتاب ص 131

a) $P(Z \leq z) = 0.4090$ ← نبحث عنه داخل الجدول السالب .

$z = -0.23$

---

b) $P(Z > z) = 0.025$ ← نطرحها من 1

$1 - 0.025 = \boxed{0.975}$ ← نبحث عنه داخل الجدول الموجب .

$\boxed{z = 1.96}$

Scanned with CamScanner

*Chapter 4 : 4.1 :

Ex (4.12) 144

$\bar{x}$ توزيع

$\mu = 3, \quad \sigma = 2.5, \quad n = 225$

a) distribution ⇒ normal.

b) $\mu_{\bar{x}} = \mu = 3$

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2.5}{\sqrt{225}} = \boxed{0.17}$

ملخص

$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$: خواص

① $\mu_{\bar{x}} = \mu$ → mean

② $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$ → Variance

③ $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ → standard deviation

* ④ $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ → قانون التحويل

* c) $P(\bar{x} > 3)$ → Z لـ $\bar{x}$ نحول

$P\left(Z > \frac{3-3}{2.5/\sqrt{225}}\right) = P(Z > 0)$

$= 1 - P(Z < 0)$

$= 1 - 0.5000 = \boxed{0.5}$

← طريقة أخرى: الاحتمالية المتماثلة

cap! Find the probability that the sample mean ($\bar{x}$) between (2.5) and (3.1)

$P(2.5 \leq \bar{x} \leq 3.1)$: Z لـ $\bar{x}$ نحول

$P\left(\frac{2.5-3}{2.5/\sqrt{225}} \leq Z \leq \frac{3.1-3}{2.5/\sqrt{225}}\right)$

$P(-3 \leq Z \leq 0.6)$

$= P(Z \leq 0.6) - P(Z < -3) = 0.7257 - 0.0013 = \square$

Scanned with CamScanner

Proportion : $(\hat{p})$ توزيع النسبة

حفظ : قاعدة * $\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

$\Rightarrow$ ① $\mu_{\hat{p}} = p$ → mean

② $\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{p(1-p)}{n}$ → Variance

③ $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ → standard deviation

*④ $z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$ لحساب الاحتمال:

في المعطيات ← مجتمع — عينة ← الأول

Note :

	population	sample
① size	N	n
* ② mean	μ	$\bar{x}$
③ Variance	σ^2	S^2
④ Stand. dev.	σ	S
* ⑤ proportion	p	$\hat{p}$

Scanned with CamScanner

Ex (4.1.3): $p = 0.20$, $n = 225$

ص 145

(a) distribution $\Rightarrow$ normal.

b) mean $\mu_{\hat{p}} = p = 0.20$.

واجب Standard error $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.20(1-0.20)}{225}}$

$= 0.0267$

c) $P(\hat{p} < 0.25) \longrightarrow z \leftarrow \hat{p}$ نحول

$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$

$P\left(z < \frac{0.25 - 0.20}{\sqrt{\frac{0.20(1-0.20)}{225}}}\right)$

$P(z < 1.87) = 0.9693$

واجب d) $P(\hat{p} > 0.15)$

Scanned with CamScanner

4.2 : Estimation of population Mean

قانون : Confidence interval (CI) فترة الثقة للمتوسط

نسب المئوية

- 90% → Z = 1.645
- 95% → Z = 1.96
- 99% → Z = 2.57 .

حفظ

فترة الثقة ←

$$\bar{x} \pm Z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{or} \quad \bar{x} \pm Z \times \frac{S}{\sqrt{n}}$$

point estimate

σ : known

σ : unknown .

Ex (4.2.3) page: 151 : $n = 120$, $\bar{x} = 2.71$, $S = 0.51$,

90% → Z = 1.645

Sol : CI : $\bar{x} \pm Z \times \frac{S}{\sqrt{n}}$

$$2.71 \pm 1.645 \times \frac{0.51}{\sqrt{120}}$$

حاسبة

(−) 2.63 → lower

(+) 2.79 → upper .

$\Rightarrow$ (2.63 , 2.79)

Ex (4.2.4) page: 151 واجب

* Estimate the Sample Size for mean

قانون $n = \left[\frac{Z \times \sigma}{\delta}\right]^2$ تقدير حجم العينة للمتوسط

δ: error

Ex(4.2.5) : How many n?

P: 152 $\delta = 0.5$, 95% $\Rightarrow$ $Z = 1.96$

σ = 0.96 ← من مثال سابق

Sol: $n = \left[\frac{Z \times \sigma}{\delta}\right]^2 = \left[\frac{1.96 \times 0.96}{0.5}\right]^2$

$= 14.162$ حاسبة $\simeq$ 15 لذلك

توضيح كيفية استخراج قيمة Z من الجدول إذا علمت النسبة:

95% $\Rightarrow$ $1-\alpha$ 5% $\Rightarrow$ α قاعدة $\boxed{1 - \frac{\alpha}{2}} = 1 - \frac{0.05}{2}$

$= \boxed{0.975}$ نبحث عنها داخل الجدول الموجب

$Z = 1.96$

5% = 0.05

10% = 0.10

Scanned with CamScanner

4.3 : Estimation of the population proprtion

[1] Confidence interval for proportion فترة الثقة

CI: قانون:

$$\hat{p} \pm Z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$\hat{p} = \frac{k}{n}$ متغير كبير

$\hat{p}$: point estimate — التقدير بنقطة

margin of error — هامش الخطأ

Ex (4.3.2) page 155 : $n = 1000$, $k = 320$.

a) point estimate $(\hat{p}) = \frac{k}{n} = \frac{320}{1000} = 0.32 = \hat{p}$

b) $90\% \Rightarrow Z = 1.645$

$$\hat{p} \pm Z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$0.32 \pm 1.645 \times \sqrt{\frac{0.32(1-0.32)}{1000}}$$

حاسبة:
- (−) 0.296 → lower
- (+) 0.344 → upper

$\Rightarrow (0.296, 0.344)$

c) margin error $= Z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$$= 1.645 \times \sqrt{\frac{0.32(1-0.32)}{1000}}$$ حاسبة $= 0.024$

علق على النتيجة

d) Comment . We conclude that 90% CI that the population proprtion between :

29.6% and 34.4%

Scanned with CamScanner

* تقدير حجم العينة في النسبة :

قانونه

$$n = \left(\frac{Z}{\delta}\right)^2 \times \hat{p} \times (1-\hat{p})$$

δ : error

$\hat{p}$: نسبة

ملاحظة : اذا لم تُعطى النسبة $\hat{p}$ بالسؤال نفرضها $\hat{p} = 0.50$

Ex (4.3.6) : How large Sample n ?

page: 158 $\delta = 0.01$, $95\% \rightarrow Z = 1.96$

لم تعطى ← $\hat{p} = 0.50$

Sol : $n = \left(\frac{Z}{\delta}\right)^2 \times \hat{p}(1-\hat{p}) = \left(\frac{1.96}{0.01}\right)^2 \times 0.50(1-0.50)$

$= 9604$ حاسبة

---

* قانون آخر لحساب حجم العينة

$$n = \left(\frac{Z}{L}\right)^2 .$$

L : Length of CI طول الفترة

Ex (4.3.7) : n ? $90\% \Rightarrow Z = 1.645$, $L = 0.03$ 3%

page: 159

Sol : $n = \left(\frac{Z}{L}\right)^2 = \left(\frac{1.645}{0.03}\right)^2 = 3006.69$

$n = 3007$

Scanned with CamScanner

chapter 4 : Testing hypothesis : ① اختبار الفروض

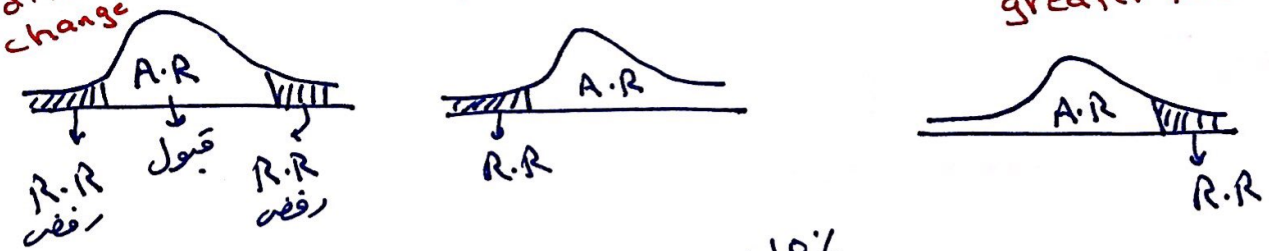
4.4

1 Testing hyp. for mean اختبار الفرض للمتوسط

① $H_0: \mu =$ ، $H_1: \mu \neq$ ⟵ different change

$H_0: \mu \geq$ ، $H_1: \mu <$ ⟵ less than

$H_0: \mu \leq$ ، $H_1: \mu >$ ⟵ greater than



② level of significance (α) ⟵ 10% / 5% / 1% ⟹ جدول Z / جدول Z

لـ مستوى المعنوية

اختبار الاحصائي

③ Test statistic (T.S) :

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{or} \quad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

$\bar{x}$: متوسط العينة (Sample mean)

μ : متوسط المجتمع (population mean)

④ عمل

⑤ decision : قرار
- reject H_0 : رفض H_0
- accept H_0 . H_0 قبول (don't reject H_0)

ملاحظة : ① الكلمة المقابلة بالمسألة يأخذها H_1 ويحدد الرمز

② المساواة دائماً H_0 .

③ المنطقة المقابلة (α) تمثل منطقة الرفض R.R .

④ H_0 : Null hypothesis فرض عدمي .

H_1 : = alternative فرض بديل .

Scanned with CamScanner

اختبار الفرضيات لمتوسط

4.4 ✓ 4.5 : Testing hypothesis for Mean

Ex (4.5.1) : $\mu = 20$, $n = 49$, $\bar{x} = 22.6$,
p: 168 $\sigma = 2.5$, $\alpha = 0.02$

Sol: ① $H_0: \mu \leq 20$ (=)
$H_1: \mu > 20$

H_1 أكبر ← more than
حالة يمين (اتجاه واحد)

$H_0: \mu = 20$

② $\alpha = 0.02 \Rightarrow$ جدول Z
$1 - 0.02 = 0.98$ ← ضمن داخل الجدول

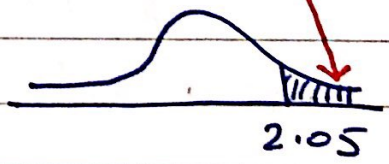
$Z = 2.05$ ← Critical مرجة
لـ توضح بارحة

قانون T.S:

③ $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{22.6 - 20}{2.5/\sqrt{49}} =$ حاسبة 7.28

④ رسم

⑤ reject H_0. ← decision قرار



نتيجة, we Conclude that the mean is greater than 20.

واجب

Ex (4.5.2)
p: 169

Scanned with CamScanner

Ex (4.5.3) page: 170 : $\sigma = 1$, $n = 100$, $\bar{x} = 3.2$, $\alpha = 0.05$, $\mu = 3$.

Sol: ① $H_0: \mu = 3$

$H_1: \mu \neq 3$

different

two tails ← جربتين

② $\alpha = 0.05 \xrightarrow{\text{جدول}} 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975 \rightarrow Z = \pm 1.96$

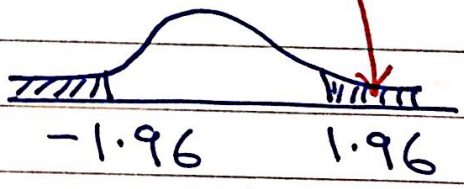
متناظرة ← لأنه جربتين.

توزيع عادي

③ $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{3.2 - 3}{1/\sqrt{100}} = 2$

④

⑤ decision: reject H_0



نتيجة we Conclude that the mean is not equal 3.

Scanned with CamScanner

4.6 : Testing hypothesis for proportion :

Ex (4.6.1) : $p = 0.02$ (نسبة المجتمع) , $n = 400$, $\hat{p} = \frac{13}{400} = 0.0325$ (نسبة العينة)

P : 174

$\alpha = 0.05$

H1 أكبر ← large (حجم العينة)

Sol: ① $H_0 : p \leq 0.02$ (=)

$H_1 : p > 0.02$

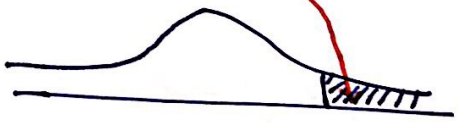
② $\alpha = 0.05 \xrightarrow{\text{جدول } Z} 1 - 0.05 = 0.95$ ⇒ $Z = 1.645$

③ T.S. (قانون) : $Z = \dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \dfrac{0.0325 - 0.02}{\sqrt{\frac{0.02(1-0.02)}{400}}}$

$= 1.79$ (محسوبة)

④ (حرر)

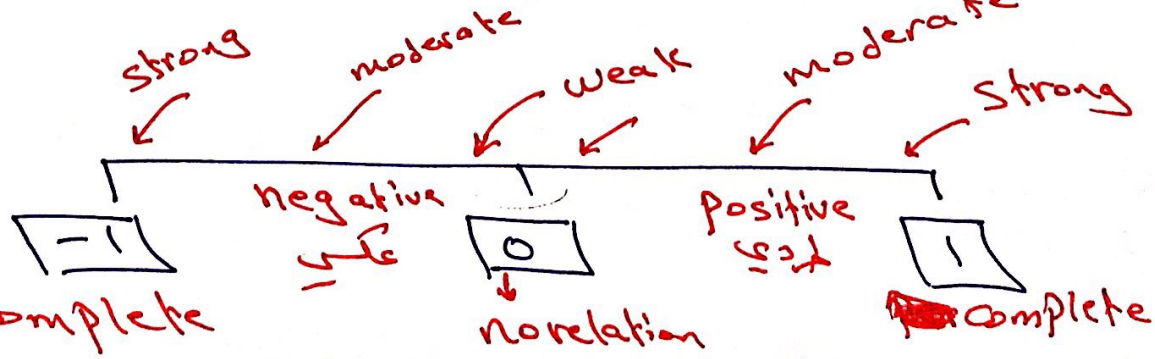
⑤ decision : reject H_0.



interpret ⇒ We Conclude that the population proportion greater than 0.02.

ch.5 ~~معامل ارتباط~~ معامل ارتباط بيرسون 189

Note : Correlation Coefficient (r)



Scanned with CamScanner

Ex(4.6.2) : $p=0.04$, $n=500$, $\hat{p}=\frac{16}{500}=0.032$ (2)

p:175

$\alpha=0.05$,

Sol: ① $H_0: p=0.04$ $\neq H_1$ ← change

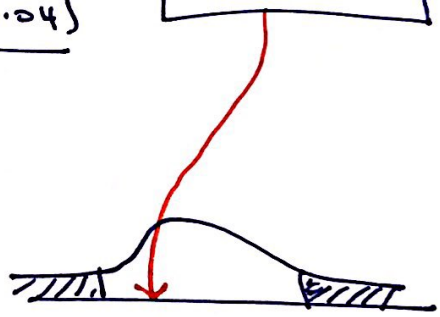
$H_1: p\neq 0.04$ ← جديد

② $\alpha=0.05$ ← جدول

$1-\frac{0.05}{2}=0.975$ → $Z=\pm 1.96$

③ $$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}=\frac{0.032-0.04}{\sqrt{\frac{0.04(1-0.04)}{500}}}=-0.913$$

④ ←



⑤ decision : dont reject H_0

Conclusion ⇒ We conclude that the population proprtion equal 0.04

ملاحظة : راجع الكتاب ص 188

لتحديد نوع الارتباط (الفصل الخامس).

+ جدول تحديد قوة الارتباط

جدول ص 189 كتاب

ch.5

3

*The following table present the degrees of five students in two courses exams:

Course 1 (X)	1	2	3	4	5
Course 2 (Y)	2	3	4	6	5

a) Evaluate Σx , Σx^2 , Σy , Σy^2 , Σxy.

b) Calculate the correlation coefficient between x and y. (r) معامل الارتباط

c) Determine the type of the relation. ما نوع العلاقة

d) Estimate the regression line (regression equation). معادلة الانحدار

e) Estimate the value of y when x=10. $x=10$ قدّر y إذا علمت أن:

الحل:

X	Y	X.Y	X^2	Y^2
1	2	2	1	4
2	3	6	4	9
3	4	12	9	16
4	6	24	16	36
5	5	25	25	25
15	20	69	55	90
ΣX	ΣY	ΣXY	ΣX^2	ΣY^2

$n=5$ عدد البيانات

a)

b) $$r=\frac{n\cdot\Sigma xy-\Sigma x\cdot\Sigma y}{\sqrt{[n\cdot\Sigma x^2-(\Sigma x)^2][n\cdot\Sigma y^2-(\Sigma y)^2]}}=\frac{5\times69-15\times20}{\sqrt{[5\times55-(15)^2][5\times90-(20)^2]}}$$

$=0.9$ حاسبة ⇒ c) strong positive طردي قوي

ضعيف