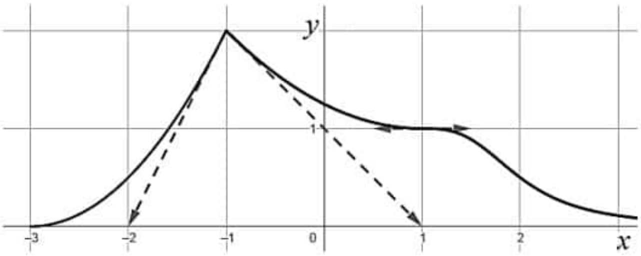
BAC MATHS	مذاكرة الاشتقاق الدرجة الكاملة : 300	الاسم : المدة :

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرّف على المجال $]-3;+\infty[$. المطلوب :



1) أوجد $f(1)$, $f'(1)$, $f(-1)$, $f(-3)$.
2) هل f اشتقاقي عند $x=-1$ ؟
3) أوجد $f'((-1)^+)$ و $f'((-1)^-)$.
4) ما عدد القيم الحديّة التي يمتلكها التابع f ؟

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرّف على المجال $[0;2]$ وفق : $f(x)=(x-2)\sqrt{x(2-x)}$. أثبت أنّ f اشتقاقي عند $x=2$.

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}x)}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}$. **المطلوب** :

1) أثبت أنّ $f(x)=\frac{2}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}-1$.
2) أثبت أنّ $f(-x)=f(x)$ و $f(x+2)=f(x)$. ماذا تستنتج ؟
3) ادرس تغيّرات f على المجال $[0;1]$, ثم ارسم C على المجال $[-2;2]$.

التمرين الثاني: ليكن f التابع المعرّف وفق : $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+2}$. **المطلوب :**

A- عيّن a و b إذا علمت أنّ $f(1)=1$ قيمة حديّة للتابع .

B- بفرض $a=1$ و $b=-2$:

1) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=\sqrt{10}$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]3;5[$, ثم جد هذا الحل جبرياً .
2) أوجد $f'(x)$ و استنتج $g'(x)$ حيث $g(x)=f(\cos x)$.

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف وفق : $f(x)=\frac{3x}{x^2-x+1}$. **المطلوب** :

1) تحقّق من أنّ $D_f=\mathbb{R}$.
2) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها , و دل على القيم الحديّة .
3) اكتب معادلة المماس T_0 للخط C في النقطة التي فاصلتها $x=0$, و ادرس وضعه النسبي .
4) اكتب معادلة المماس T_2 للخط C في النقطة التي فاصلتها $x=2$, و ادرس وضعه النسبي .
5) ارسم في معلم متجانس T_0 و T_2 ثم ارسم C .

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة الاشتقاق "2022-1"

أولاً : السؤال الأول :

1) $f(1)=1 \;,\; f'(1)=0 \;,\; f(-1)=2 ,\; f(-3)=0$

2) f غير اشتقاقي عند $x=-1$.

3) $$f'(-1)^- = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-0}{-1-(-2)} = 2$$

$$f'(-1)^+ = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-0}{-1-1} = -1$$

4) قيمتان حديتان (وهما $f(-3)=0, f(-1)=2$)

السؤال الثاني :

معدل التغير :

$$t(x) = \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{(x-2)\sqrt{x(2-x)}-0}{x-2}$$

$$t(x) = \sqrt{x(2-x)}$$

$$\lim_{x\to 2} t(x) = \sqrt{2(0)} = 0$$

فالتابع f اشتقاقي عند $x=2$ بحيث :

$$f'(2)=0$$

ثانياً : التمرين الأول :

1) $$\frac{2}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)} - 1 = \frac{2-1-\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}$$

$$= \frac{1-\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)} = \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}x)}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)} - 1$$

2) $$f(-x) = \frac{2}{1+\cos^2(-\frac{\pi}{2}x)} - 1$$

$$= \frac{2}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)} - 1 = f(x)$$

نستنتج أن التابع f زوجي .

$$f(x+2) = \frac{2}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x+\pi)} - 1$$

نعلم أنه $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos^2(\theta+\pi) = \cos^2\theta$$

باختيار $\theta = \frac{\pi}{2}x$

$$f(x) = \frac{2}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x)} - 1 = f(x+2)$$

نستنتج أن التابع f دوري . ودوره $T=2$.

3) f معرف ومستمر واشتقاقي على $[0,1]$

$f(0)=0 \;,\; f(1)=1$

$$f'(x) = \frac{(0) - 2\cdot\frac{\pi}{2}(-\sin\frac{\pi}{2}x)\cos(\frac{\pi}{2}x)\cdot 2}{(1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x))^2}$$

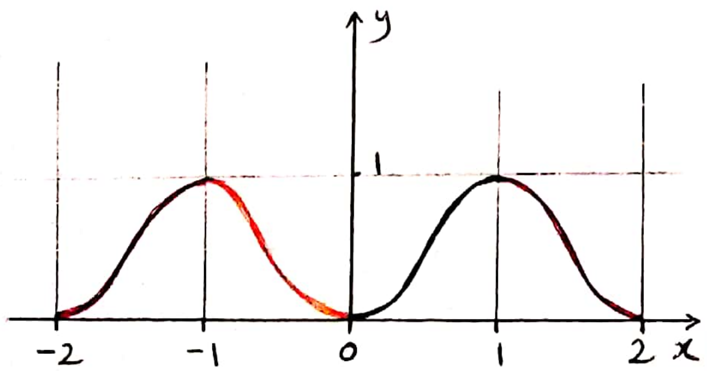
$$= \frac{\pi \sin \pi x}{(1+\cos^2(\frac{\pi}{2}x))^2}$$

$$f'(x)=0 \iff \sin \pi x = 0$$

$$\pi x = \pi K$$

$$\boxed{x=K} \qquad K\in\mathbb{Z}$$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1



التمرين الثاني : A -

$f(1)=1 \Rightarrow \sqrt{a+b+2}=1$

$a+b+2=1$

$a+b=-1 \quad \dots (*)$

$f'(1)=0$

$$f'(x)=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+2}}$$

$$f'(1)=\frac{2a+b}{2}=0$$

$2a+b=0 \quad — (**)$

بالحل المشترك نجد أنّ $a=1\,,\ b=-2$

B - 1)

$f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$

$$f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}>0 \quad \forall x\in]3,5[$$

الناتج f مستمر ومطرد تماما على $]3,4[$

$f(3)=\sqrt{5}<\sqrt{10}$

$f(5)=\sqrt{17}>\sqrt{10}$

بالتالي حسب مبرهنة القيمة الوسطى المعادلة $f(x)$. $f(x)=\sqrt{10}$ تقبل حلا وحيداً في المجال $]3,5[$

$f(x)=\sqrt{10} \iff$

$\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{10}$

$x^2-2x+2=10$

$x^2-2x-8=0$

$(x-4)(x+2)=0$

$x_1=-2 \notin]3,5[$

$x_2=4$

$\boxed{\alpha=4}$

2)

$$f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$g(x)=f(\cos x)$

g اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$g'(x)=-\sin x \cdot f'(\cos x)$

$$g'(x)=-\sin x \cdot \frac{\cos x-1}{\sqrt{\cos^2 x-2\cos x+2}}$$

الثالث: 1) f معرفة بشرط $x^2-x+1\neq 0$

نحل المعادلة $x^2-x+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=1-4=-3<0$

المعادلة مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$.

فالناتج f معرفة على $\mathbb{R}$ أي $D_f=\mathbb{R}$.

2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{3(x^2-x+1)-(2x-1)(3x)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$=\frac{3x^2-\cancel{3x}+3-6x^2+\cancel{3x}}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$$

$f'(x)=0 \iff 1-x^2=0$

$x_1=-1 \quad , \quad x_2=1$

$f(-1)=-1 \ , \ f(1)=3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

حيث $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

$f(-1)=-1$ قيمة حدية صغرى.

$f(1)=3$ قيمة حدية كبرى.

(3 $T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 3$

$$\boxed{T_0 : y = 3x}$$

$$f(x) - y_{T_0} = \frac{3x - 3x(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{\cancel{3x} - 3x^3 + 3x^2 - \cancel{3x}}{x^2-x+1}$$

$$= 3x^2 \, \frac{1-x}{x^2-x+1}$$

إشارة الفرق تماثل إشارة المقدار $(1-x)$:

في حالة $x=1$ يتقاطع C مع T_0 .

في حالة $x<1$ يكون C فوق T_0 .

في حالة $x>1$ يكون C تحت T_0 .

(4 $T_2 : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$f(2) = \frac{6}{3} = 2$, $f'(2) = \frac{-9}{3^2} = -1$

$$y = -(x-2) + 2$$

$$\boxed{T_2 : y = -x + 4}$$

$$f(x) - y_{T_2} = \frac{3x}{x^2-x+1} - (-x+4)$$

$$= \frac{3x + x^3 - x^2 + x - 4x^2 + 4x - 4}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^2-x+1}$$

مجموع المعاملات = 0

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 + 8x - 4 & x-1 \\ \hline -x^3 + x^2 & x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \\ -4x^2 + 8x - 4 & \\ +4x^2 - 4x & \\ 4(x-1) & \\ -4(x-1) & \\ 0 & \end{array}$$

$$f(x) - y_{T_2} = \frac{(x-1)(x-2)^2}{x^2-x+1}$$

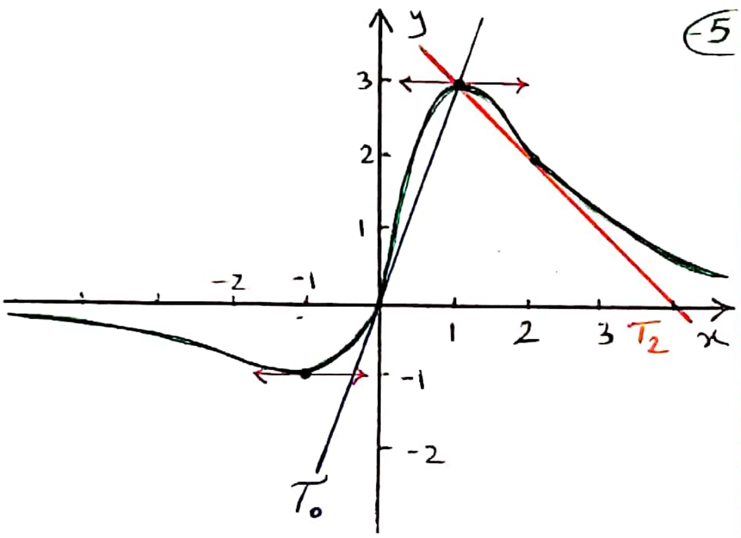
إشارة الفرق $f(x) - y_{T_2}$ تماثل إشارة $(x-1)$

من أجل $x=1$ يتقاطع C مع T_2 .

من أجل $x<1$ يقع C تحت T_2 .

من أجل $x>1$ يقع C فوق T_2 .

(5



عبد الملك خير الله 2021/11/3

BAC MATHS