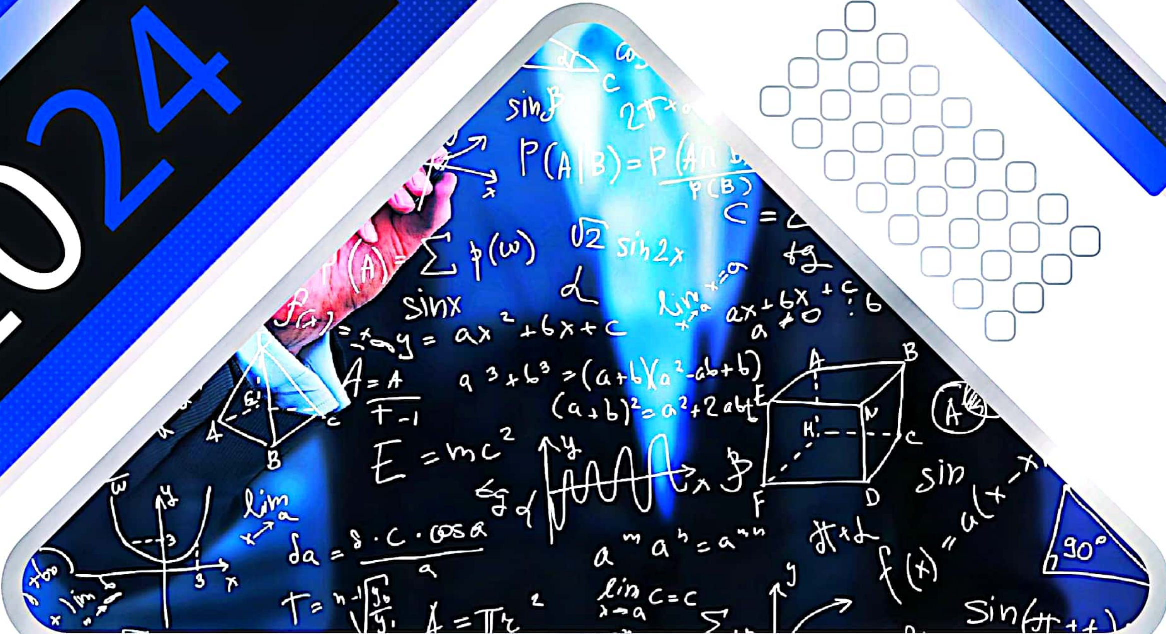
النهايات والاشتقاق

2024



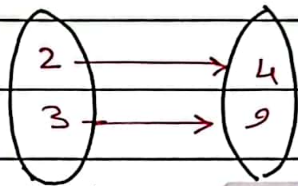
إعداد المدرس

محمد أحمد

0964848890

مدخل إلى النهايات والاستمرار

التابع: $f(x)=x^2$



مستقر (الجواب)

(المنطلق) (مجموعة التعريف)

هو علاقة تربط بين المنطلق والمستقر بحيث كل عنصر من المنطلق يرتبط بعنصر وحيد من المستقر.

أنواع التوابع:

1 الصحيح 2 الجذري
3 الكسري 4 مثلثي
5 لوغاريتمي 6 أسي
7 مختلط.

قواعد إيجاد مجموعة تعريف: D

① التابع الصحيح (كثير الحدود): معرف على $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

وهو من الشكل:

$f(x)=ax^n+bx^m+\dots+c$

حيث: b و c و a من $\mathbb{R}$.

(عدد الحدود لا يهم ......)

m و n من N طبيعي

أمثلة:

① $f(x)=3x^2-5x+7$

معرف على $\mathbb{R}$.

② $f(x)=\frac{1}{2}x^2+5x$

معرف على $\mathbb{R}$

③ $f(x)=-x$ معرف على $\mathbb{R}$.

2 التابع الجذري:

وهو من الشكل: $f(x)=\sqrt{P(x)}$

معرف $\Leftarrow$ $P(x)\geq 0$

(ما داخل الجذر أكبر أو يساوي 0)

أمثلة:

① $f(x)=\sqrt{x-3}$

$x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 3$

$\Rightarrow D_f=[3,+\infty[$

3 التابع الكسري:

وهو من الشكل: $f(x)=\dfrac{\text{رقم أو صحيح}}{\text{صحيح}}$

معرف على: $\mathbb{R}/\{$ القيم التي تعدم المقام $\}$

أمثلة:

① $f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$

$D_f=\mathbb{R}/\{3\}$.

② $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $D_f=\mathbb{R}/\{0\}$

③ $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$; $D_f=\mathbb{R}/\{\mp 1\}$.

4 التابع المثلثي:

$f(x) = \cos($ أي شيء محدود $)$

$f(x) = \sin($ أي شيء محدود $)$

معرف على $\mathbb{R}$.

مثال: 1 $f(x) = \sin(2x+5)$

معرف على $\mathbb{R}$.

2 $f(x) = \cos(7x-3)$

معرف على $\mathbb{R}$.

التابع اللوغاريتمي والأسي

سيتم شرحهما فيما بعد ....

(H.Work)

أوجد مجموعة تعريف كل مما يلي:

1 $f(x) = 2x^2 + 7x - 3$

2 $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$

3 $f(x) = \sqrt{x-6}$

4 $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$

"النهايات والاستمرار"

مصطلحات وخواص خاصة في النهايات

0^+ الصفر الموجب صغير جداً أكبر من الصفر بقليل.

0^- الصفر السالب صغير جداً أصغر من الصفر بقليل.

$0^- \neq 0^+$ & $-0 = +0$

1 $\dfrac{\text{عدد موجب تماماً}}{0^+} = +\infty$

$\dfrac{\text{عدد موجب تماماً}}{0^-} = -\infty$

$\dfrac{\text{عدد سالب تماماً}}{0^+} = -\infty$

$\dfrac{\text{عدد سالب تماماً}}{0^-} = +\infty$

أمثلة: $\dfrac{5}{0^+} = +\infty$, $\dfrac{-4}{0^-} = +\infty$

2 $(\text{عدد} \neq 0)(\infty) = \infty$

والإشارة حسب الموجود.

$(-5)(+\infty) = -\infty$

$(4)(+\infty) = +\infty$

$(-4)(-\infty) = +\infty$

3 $(\infty)(\infty) = \infty$

والإشارة حسب الموجود

$(-\infty)(+\infty) = -\infty$

$(-\infty)(-\infty) = +\infty$

4 $\sqrt{+\infty} = +\infty$

$\sqrt[3]{+\infty} = +\infty$

$\sqrt{-\infty} \Rightarrow$ مستحيل

5) $+\infty +$ عدد $= +\infty$

$+\infty -$ عدد $= +\infty$

$3 + \infty = +\infty$ ، $-4 + \infty = +\infty$

6) $-$ عدد $- \infty = -\infty$

$+$ عدد $- \infty = -\infty$

$-7 - \infty = -\infty$ ، $7 - \infty = -\infty$

7) هامة

$\frac{\text{عدد}}{\mp\infty} = 0$

$\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$ والإشارة حسب الموجود

حالات عدم التعيين:

$\frac{\infty}{\infty}$ ، $(0)(\infty)$ ، $+\infty - \infty$ ، $\frac{0}{0}$

ملاحظة هامة:

1) إذا كانت $x \to +\infty$

$\sqrt{x^2} = |x| = x$

2) إذا كانت $x \to -\infty$

$\sqrt{x^2} = |x| = -x$

قواعد النهايات:

1) نهاية التابع الثابت هي نفسه:

[1] $\lim\limits_{x \to \mp\infty} (-3) = -3$

2) نهاية كثير الحدود عند $\mp\infty$ هي نهاية حده الأعلى درجة (الزعيم)

* $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+3x+5) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2) = +\infty$

3) نهاية كثير الحدود عند $a \in D_f$ هي $f(a)$:

* $\lim\limits_{x \to 1} (x^2+7x-1) = (1)^2 + 7(1) - 1$

$= 1 + 7 - 1 = 7$

4) نهاية تابع كسري حدودي عندما x تسعى إلى $\mp\infty$ هي نهاية حده الأعلى درجة في البسط على حده الأعلى درجة في المقام.

(الزعيم في البسط على الزعيم في المقام)

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2+5x-2}{2x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{2x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{2} = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2+7x}{x^2+3x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2+8x+3}{x^3+3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^3}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$

5 نهاية تابع كسري محدود عند عدد a من مجموعة تعريفه هو $f(a)$:

(*) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x+5}{x-2} = \dfrac{2(3)+5}{3-2} = 11.$

6 نهاية تابع كسري محدود عند عدد لا ينتمي إلى مجموعة تعريفه

مثال: ليكن لدينا التابع الآتي:

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$

① جد D_f.

② $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

الحل:

① $D_f = \mathbb{R}/\{2\}$

② $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{2(2)+1}{0^+} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{2(2)+1}{0^-} = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

تدريب ص 34:

① احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ & $-\infty$.

[1] $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (-x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (-x^3) = -\infty$

[2] $f(x) = -3x^4 + 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (-3x^4) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (-3x^4) = -\infty$

H.work

[3] $f(x) = 8x^4 - 12x^3 + 5x^2 - x.$

فكرة هامة:

إذا طلب إيجاد A عدداً يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ ضمن المجال $]a,b[$:

فإننا نبحث عن: $c = \dfrac{a+b}{2} = \lim f(x)$

$r = \dfrac{b-a}{2}$

ونطبق القانون:

$|f(x) - c| < r$

$\frac{2}{34}$ احسب نهاية التابع f المعرّف بالعلاقة $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$.

ثم أعطِ عدداً حقيقياً A يحقق الشرط:
إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9 , 5.1[$

الحل:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$

$c=2$, $r=\frac{b-a}{2}=0.1$

$|f(x)-c|<r$

$\Rightarrow \left|\frac{5x-1}{x-1}-5\right|<\frac{1}{10}$

$\Rightarrow \left|\frac{5x-1-5x+5}{x-1}\right|<\frac{1}{10}$

$\Rightarrow \left|\frac{4}{x-1}\right|<\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{4}{|x-1|}<\frac{1}{10}$

بما أن $x\to+\infty$ فإن: $\Rightarrow x-1>0$

$\Rightarrow |x-1|=x-1$

$\frac{4}{x-1}<\frac{1}{10} \Rightarrow x-1>40 \Rightarrow \boxed{x>41}$

فنفرض أن $A=41$ يتم المطلوب

M-Ah

H.work مثال ص 33

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$ وفق: $f(x)=\frac{4x-5}{2x+3}$

① أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

② عيّن العدد A الذي يحقق الشرط:
إذا كان $x>A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح I الذي مركزه 2 ونصف قطره 0.05.

حالات عدم التعيين:

1] $\frac{\infty}{\infty}$ 2] $+\infty-\infty$

3] $\frac{0}{0}$ 4] $0.\infty$

5] 1^{∞}.

إزالة عدم التعيين:

هو تغيير شكل التابع بالاعتماد على بعض الإرشادات تفيدنا بإزالة عدم التعيين.

أولاً: إرشادات تفيدنا بإزالة ع.ت من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$:

1] نخرج من البسط والمقام أو إحداهما نختصر ونعوض.

2] $f(x)=\frac{x+c}{\sqrt{\ }-c}$

نضرب ونقسم على مرافق المقام.

3] $f(x)=\frac{\sqrt{\ }-c}{x+c}$

نضرب ونقسم على مرافق البسط.

أمثلة: عين نهاية كل تابع عند a:

1] $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$, $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$ ع.ت

$f(x)=\frac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}=\frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$=\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{1}=1$

2] $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+5}}{1-3x}$, $a=-\infty$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$:

$f(x)=\frac{\sqrt{x^2(4+\frac{5}{x^2})}}{x(\frac{1}{x}-3)}=\frac{|x|.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x(\frac{1}{x}-3)}$

$=\frac{-x.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x(\frac{1}{x}-3)}=\frac{-\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{\frac{1}{x}-3}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$

3] $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $a=+\infty$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$:

$f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{+\infty}=0$

4] $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ ، $a = +\infty$

حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$f(x) = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{\sqrt{x}.\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty(1-0)}{1-0} = \frac{\infty}{1} = +\infty$$

5] $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ ، $a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$$ "عدم تعيين"

$$f(x) = \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$$

M.Ah

ثانياً: إرشادات تفيد في إزالة عدم تعيين من الشكل: $+\infty - \infty$

1] $\sqrt{x^2+a} - x$ نضرب ونقسم على المرافق: $\sqrt{x^2+a} + x$

2] من الشكل: $\sqrt{\ } - \sqrt{\ }$ نضرب ونقسم على المرافق $\sqrt{\ } + \sqrt{\ }$

3] إخراج عامل مشترك.

أمثلة: عين نهاية كل تابع عند كل a :

① $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ ، $a = +\infty$

حالة عدم تعيين من الشكل: $+\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{\left[\sqrt{x^2+1} - x\right]\left[\sqrt{x^2+1} + x\right]}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

2] $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$ ، $a = +\infty$

حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{\left[\sqrt{x-1} - \sqrt{x}\right]\left[\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\right]}{\left[\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\right]}$$

$$= \frac{x-1-x}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

3] $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+x$; $a=-\infty$

حالة ع.ت من الشكل: $+\infty-\infty$

$f(x)=\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x})}+x$

$=|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}+x$

$=-x.\sqrt{4+\frac{1}{x}}+x$

$=x(-\sqrt{4+\frac{1}{x}}+1)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty(-\sqrt{4}+1)$

$=+\infty$

H.work

$f(x)=x-\sqrt{x^2+8}$; $a=+\infty$

4] $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$; $a=+\infty$

حالة ع.ت من الشكل: $+\infty-\infty$

$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{(\sqrt{x^2+2x}+x)}$

$=\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$=\frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}+x}$

$=\frac{2x}{|x|.\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}=\frac{2x}{x.\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}$

$=\frac{\cancel{x}(2)}{\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1)}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{2}{2}=1$

ثالثاً: إرشادات تفيد في إزالة ع.ت $\frac{0}{0}$:

1] على البسط والمقام أو إحداهما نختصر ونعوض:

← تحليل مباشر.

← دلتا.

← إخراج عامل مشترك.

← مطابقات.

← قسمة إقليدية.

مثال: من نهاية التابع الآتي عند

(1) $f(x)=\frac{x^2+4x-12}{x^2-4}$; $a=+2$

حالة ع.ت من الشكل $\frac{0}{0}$

$f(x)=\frac{(x+6)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{x+6}{x+2}$

$\lim_{x\to+2} f(x)=\frac{8}{4}=2$

② $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$ ، $a=3$

حالة ع.ت من الشكل $\frac{0}{0}$:

$f(x)=\dfrac{x\cancel{(x-3)}}{(x-3)^{\cancel{2}}}=\dfrac{x}{x-3}$

(ينعدم المقام نفرض حالتين)

$\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\dfrac{3}{0^-}=-\infty$

③ $f(x)=\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ ، $a=2$

حالة ع.ت من الشكل $\frac{0}{0}$ لإزالتها

$f(x)=\dfrac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$=\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)(x^2+4)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}$

$=\dfrac{(x+2)(x^2+4)}{(x^2+2x+4)}$

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\dfrac{4(8)}{12}=\dfrac{8}{3}$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{ax+p}-c}{x-b}$

نضرب ونقسم على مرافق البسط.

$f(x)=\dfrac{x-b}{\sqrt{ax+p}-c}$

نضرب ونقسم على مرافق المقام.

مثال: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ ، $a=3$

عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$:

$f(x)=\dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$=\dfrac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$=\dfrac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+1}+2)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=\dfrac{1}{4}$

$f(x)=\dfrac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ ، $a=1$

$f(x)=\dfrac{(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)}{(x-1)(\sqrt{x}+x)}$

$=\dfrac{x-x^2}{(x-1)(\sqrt{x}+x)}=\dfrac{-x(-1+x)}{(x-1)(\sqrt{x}+x)}$

$=\dfrac{-x}{\sqrt{x}+x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{-1}{2}$

حالة $\frac{0}{0}$ موجود تابع مثلثي :

نتذكر :

* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ / $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

* $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$
* $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$
* $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
* $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.
* $\sin x = 2\sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}$.

$\sin(0) = 0$

$\cos(0) = 1$

إذا كانت تحوي Sinx نحولها نتخلص من الشكل :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{\sin^n x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^n x}{x^n} = 1$$

احسب نهاية كل تابع عند a :

① $f(x) = \frac{\sin x}{5x}$, $a = 0$

حالة ع.ت من الشكل $\frac{0}{0}$:

$f(x) = \frac{1}{5} \cdot \boxed{\frac{\sin x}{x}} \to = 1$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{5}(1) = \frac{1}{5}$$

② $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $a = 0$

$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}$

$= \sqrt{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \to = 1$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = (0)(1) = 0$$

③ $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$, $a = 0$

حالة ع.ت من الشكل $\frac{0}{0}$:

$f(x) = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

$= \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

④ $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{\sin x}$; $a = 0$

$f(x) = \dfrac{x(x-1)}{\sin x}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1(0-1) = -1$

H.work $f(x) = \dfrac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x}$; $a = 0$

رابعاً: حالة عدم تعيين من الشكل: $0 \cdot \infty$

نعوض كل تابع عند a:

① $f(x) = \dfrac{1}{x-3}(x^2 - 2x - 3)$; $a = 3$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{1}{0}(9 - 6 - 3)$

$= (\infty)(0)$ ع.ت

$f(x) = \dfrac{1}{(x-3)}(x^2 - 2x - 3)$

$= \dfrac{1}{\cancel{(x-3)}}\cancel{(x-3)}(x+1)$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3 + 1 = 4$

② $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $a = +\infty$

حالة ع.ت من الشكل $0 \cdot \infty$

$f(x) = \dfrac{x}{1} \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

مبرهنات الإحاطة

تذكر:

$-1 \le \sin x \le 1$

$-1 \le \cos x \le 1$

$0 \le \sin^2 x \le 1$

$0 \le \cos^2 x \le 1$

تابع الجزء الصحيح: $x - 1 < E(x) \le x$

مبرهنة الإحاطة (1):

إذا كان لدينا ثلاثة توابع من الشكل:

$g(x) \le f(x) \le H(x)$ ..... (*)

وكان: $\lim g(x) = \lim H(x) = \ell$

فإن: $\lim f(x) = \ell$

حيث: $\ell \in \mathbb{R}$

ملاحظة: غالباً ما نطبق الإحاطة إذا كان الناتج:

$\cos \mp\infty$

$\sin \mp\infty$

$\infty!$

$E(\infty)$

أو إذا كان ثلاث توابع كهذه (*)

مثال: احسب نهاية f عند $+\infty$

$$f(x)=\frac{2x+\sin x}{x+1}$$

الحل: $-1 \le \sin x \le 1$

$(+2x)\quad 2x-1 \le 2x+\sin x \le 2x+1$

$\div (x+1) > 0$

$$\frac{2x-1}{x+1} \le \frac{2x+\sin x}{x+1} \le \frac{2x+1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+1}=2$$

حسب مبرهنة الإحاطة نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$$

مثال (1) ص 43 H.work

$f(x)=\frac{\sin x}{x}\ ,\ a=+\infty$

M-AH

مثال: إذا كان

$$\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$$

أوجد نهاية $\frac{\cos x}{x+1}$ عندما $x\to+\infty$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

حسب مبرهنة "الإحاطة":

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1}=0$$

تدريب ص 46:

f تابع يحقق: $\frac{3x+\cos x}{x} \le f(x) \le \frac{3x+7}{x-1}$

إذا كان $x>1$ ما نهاية f عند $+\infty$.

الحل: $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow -1 \le \cos x \le 1$

$(+3x)\quad 3x-1 \le 3x+\cos x \le 3x+1$

في جوار $+\infty$ يكون $x>0$ نقسم عليه

$$\frac{3x-1}{x} \le \frac{3x+\cos x}{x} \le \frac{3x+1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x}=3 \ \& \ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x}=3$$

حسب مبرهنة "الإحاطة":

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\cos x}{x}=3$$

لماذا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+7}{x-1}=3$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

$\boxed{\frac{4}{67}}$

f هو التابع المعرف على $]1,+\infty[$

وفق: $f(x) = \dfrac{2x+\sin x}{x-1}$

① أثبت أن: $\dfrac{2x-1}{x-1} \le f(x) \le \dfrac{2x+1}{x-1}$

أياً كان $x>1$

② استنتج نهاية f عند $+\infty$.

الحل: $-1 \le \sin x \le 1$

$(+2x) \Rightarrow 2x-1 \le 2x+\sin x \le 2x+1$

$x>1 \Rightarrow x-1>0$

$$\frac{2x-1}{x-1} \le \frac{2x+\sin x}{x-1} \le \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\frac{2x-1}{x-1} \le f(x) \le \frac{2x+1}{x-1}$$

② $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x-1} = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = 2$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\left\{ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \right\}$$

مبرهنة الإحاطة (2):

$$|f(x) - \ell| \le g(x)$$

لا معلوم — معلوم حتماً

وكان: $\lim g(x) = 0$

فإن: $\lim f(x) = \ell$

تدريب ص 46 رقم (1):

f تابع يحقق: $|f(x)-3| \le \dfrac{1}{x+1}$

أياً كان $x>0$ ما نهاية f عند $+\infty$.

الحل: ① هي من الشكل $|f(x)-\ell| \le g(x)$

بما أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

مثال: $|f(x)-5| \le \sqrt{x^2-1} - x$

احسب نهاية f في جوار $+\infty$

الحل: $g(x) = \sqrt{x^2-1} - x$

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x^2-1} - x)(\sqrt{x^2-1} + x)}{(\sqrt{x^2-1} + x)}$$

$$= \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$$

أ.محمد أحمد
0964848890

مبرهنة الإحاطة (3):

$f(x) \ge g(x)$

صغير كبير

إذا كان: $\lim g(x) = +\infty$

فإن: $\lim f(x) = +\infty$

وإذا كان: $\lim f(x) = -\infty$

فإن: $\lim g(x) = -\infty$

مثال: f تابع يحقق $f(x) \ge \frac{1}{5}x^2$ نأخذ أن $x<0$ ما نهاية f عند $-\infty$.

الحل: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{5}x^2 = +\infty$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ملاحظات هامة:

1 أثناء استخدام مبرهنة الإحاطة إذا كان جواب الطرفان مختلفان نقول لا يوجد نهاية.

2 أثناء استخدام الإحاطة إذا كان جواب الطرفان $+\infty$ أو الطرفان $-\infty$ نطبق مبرهنة الإحاطة (3).

$\frac{10}{70}$ ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$g(x) = \frac{1}{3+2\sin x}$

1 أثبت أن g محدود.

2 استنتج كلاً من النهايتين:

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+2\sin x}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{3+2\sin x}$

الحل: 1 $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \le \sin x \le 1$

$\Rightarrow \times 2 \Rightarrow -2 \le 2\sin x \le 2$

$+3 \Rightarrow 1 \le 3+2\sin x \le 5$

بالقلب $\Rightarrow 1 \ge \frac{1}{3+2\sin x} \ge \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5} \le g(x) \le 1$ g محدود

2 لحساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+2\sin x}$

$\frac{1}{5} \le \frac{1}{3+2\sin x} \le 1$

نضرب بـ $x \to +\infty \Rightarrow x^2 > 0$

$\frac{1}{5}x^2 \le \frac{x^2}{3+2\sin x} \le x^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{5}x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+2\sin x} = +\infty$

وبحساب $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{3+2\sin x}$

$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3+2\sin x} \leq 1$

$x \to +\infty \Rightarrow x+\sin x > 0$

نضرب بطرفي المتراجحة

$\frac{1}{5}(x+\sin x) \leq \frac{x+\sin x}{3+2\sin x} \leq x+\sin x$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$

$(+x) \Rightarrow x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$

$\times(\frac{1}{5})$

$\Rightarrow \frac{1}{5}(x-1) \leq \frac{1}{5}(x+\sin x) \leq \frac{1}{5}(x+1)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5}(x-1) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5}(x+\sin x) = +\infty$

إذاً: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{3+2\sin x} = +\infty$

$\frac{2}{46}$ ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

① تحقق أن: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ أياً كان $x \geq 0$

② استنتج أن: $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

③ ما نهاية f عند $+\infty$

الحل:

① $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$

$= \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}$

$= \frac{1+x-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

②

$\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x} \geq \sqrt{1+x}+\sqrt{x} \geq \sqrt{x}+\sqrt{x}$

$2\sqrt{1+x} \geq \sqrt{1+x}+\sqrt{x} \geq 2\sqrt{x}$

$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

③ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} = 0$

دوّن ملاحظاتك: ↓↓

مثال: $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

احسب نهاية f عند الصفر.

الحل: نعلم أن:

$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$

$\times (x)$

حالة $x > 0$:

$-x \le x\sin\frac{1}{x} \le x$

$-x \le f(x) \le x$

$\lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

حسب الإحاطة $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ ①

حالة $x < 0$:

نضرب بـ x:

$-x \ge x\cdot\sin\frac{1}{x} \ge x$

$\Rightarrow -x \ge f(x) \ge x$

$\lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$

حسب الإحاطة: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ ②

من ① و ② $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

"نهاية تابع مركب"

"التابع المركب"

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$

توضيح: $f(x) = x^2 - 3x$

$g(x) = x+1$

أوجد $f(g(x))$ بدلالة x.

الحل: $f(g(x)) = (x+1)^2 - 3(x+1)$

$= x^2 + 2x + 1 - 3x - 3$

$= x^2 - x - 2$

"نهاية تابع مركب"

لحساب $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$

1 نوجد: $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$

2 نوجد: $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$

3 نستنتج: $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = c$

مثال ص 47 ① ابحث عن نهاية

التابع: ① $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 - x + 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \sqrt{+\infty} = +\infty$

تدريب ص ٤٦:

$\boxed{\frac{1}{46}}$ أحسب نهاية f عند a:

① $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$; $D =]5,+\infty[$

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x+3}{x-5} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

② $f(x) = \sqrt{\frac{-x+1}{x^2+1}}$, $a = -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{-x+1}{x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \sqrt{0} = 0$$

③ $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{1-x}}$, $a = 1, -\infty$

$D_f =]-\infty, 1[$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = ?$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{1-x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sqrt{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

④ $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right)$

$a = +\infty$

$D = \mathbb{R} / \{-2\}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\pi x+1}{x+2} = \pi$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \cos(\pi) = -1$$

⑤ $f(x) = \sin\frac{1}{\sqrt{x}}$; $a = +\infty$

$D =]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = \sin(0) = 0$$

$\boxed{\frac{2}{46}}$ ليكن f التابع المعرف على المجال $]-5,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{x-3}{x+5}$$

① احسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

واستنتج $\lim_{x\to +\infty} f(f(x))$

② أعد حساب $\lim_{x\to +\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x

الحل:

① $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x\to +\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1-3}{1+5} = \frac{-2}{6}$$

② $f(f_{(x)}) = f\left(\dfrac{x-3}{x+5}\right)$

$$= \frac{\dfrac{x-3}{x+5} - 3}{\dfrac{x-3}{x+5} + 5} = \frac{\dfrac{x-3-3x-15}{\cancel{x+5}}}{\dfrac{x-3+5x+25}{\cancel{x+5}}}$$

$$f(f_{(x)}) = \frac{-2x+8}{6x+22}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(f_{(x)}) = \frac{-2}{6}$$

"المقاربات"

1 المقارب الأفقي:

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \text{عدد}$$

مقارب أفقي $\Leftarrow$ $y =$ عدد

2 المقارب الشاقولي:

$$\lim_{x \to \text{عدد}} f(x) = \mp\infty$$

مقارب شاقولي $\Leftarrow$ $X =$ عدد

3 المقارب المائل:

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \mp\infty$$

وهنا نقول إن من الممكن أن يكون هنالك مقارب مائل.

"المقارب المائل"

هو من الشكل: $\Delta : y = \underline{\underline{ax}} + b$

"درجة أولى"

لإثبات أن Δ مقارب مائل:

1 نوجد $f(x) - y_\Delta$

2 لنظهر: $\lim_{x \to \mp\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$

عندئذ يكون $\Delta : y = ax + b$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ أو $-\infty$.

لدراسة الوضع النسبي للمنحني C ومقاربه Δ ندرس إشارة:

$$\underbrace{f(x) - y_\Delta}$$

$f(x) - y_\Delta > 0$	$f(x) - y_\Delta < 0$	$f(x) - y_\Delta = 0$
C يقع فوق Δ	C يقع تحت Δ	C يقطع Δ

مثال ص 50:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة: $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}$

وليكن Δ المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$

① أثبت أن المستقيم Δ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

② ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ

الحل: ①

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x^2+3x+1}{x+2}-(x+1)$$

$$=\frac{x^2+3x+1-x^2-x-2x-2}{(x+2)}$$

$$=\frac{-1}{(x+2)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+2}=0$$

Δ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

② $f(x)-y_\Delta=\frac{-1}{x+2}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y_\Delta$		$+$	$\|\|$	$-$	

C يقع فوق Δ	C يقع تحت Δ

تدريب ص 51:

فيما يأتي بين معللاً إجابتك أن المستقيم Δ مقارباً مائلاً للخط البياني C_f للتابع f عند $+\infty$ أو $-\infty$ وادرس بعد ذلك الوضع النسبي للخط C ومقاربه Δ:

① $f(x)=2x+3+\frac{10}{x+1}$ ؛ $\Delta: y=2x+3$

$$f(x)-y_\Delta=2x+3+\frac{10}{x+1}-2x-3$$

$$=\frac{10}{x+1}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)-y_\Delta]=\frac{10}{\mp\infty}=\boxed{0}$$

ولدراسة الوضع النسبي:

$f(x)-y_\Delta=\frac{10}{x+1}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y_\Delta$		$-$	$\|\|$	$+$	

C يقع تحت Δ	C يقع فوق Δ

② $f(x)=-x+1-\frac{1}{x^2}$ ؛ $\Delta: y=-x+1$

$$f(x)-y_\Delta=\cancel{-x}+\cancel{1}-\frac{1}{x^2}\cancel{+x}\cancel{-1}=\frac{-1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)-y_\Delta]=\lim_{x\to\mp\infty}-\frac{1}{x^2}=0$$

ولدراسة الوضع النسبي:

$f(x)-y_\Delta=-\frac{1}{x^2}<0$

C يقع تحت Δ دوماً.

③ $f(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + \sin x}{x}$; $\Delta : y = -x - 4$

$f(x) - y_\Delta = \dfrac{-x^2 - 4x - \sin x}{x} + x + 4$

$= -\dfrac{x^2}{x} - \dfrac{4x}{x} - \dfrac{\sin x}{x} + x + 4$

$= \cancel{-x} \cancel{-4} - \dfrac{\sin x}{x} \cancel{+x} \cancel{+4}$

$= -\dfrac{\sin x}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \le \sin x \le 1$ .... ①

عندما $x \to +\infty$ يكون $x > 0$ نقسم عليه:

$-\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

حسب مبرهنة الإحاطة: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

Δ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

في جوار $-\infty$ وظيفة.

④ $f(x) = 3x + 7 - \dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$; $\Delta : y = 3x + 7$

$f(x) - y_\Delta = 3x + 7 - \dfrac{5}{\sqrt{|x|}} - 3x - 7$

$= -\dfrac{5}{\sqrt{|x|}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \mp\infty} [f(x) - y_\Delta]$

$= \lim -\dfrac{5}{\sqrt{|x|}} = 0$

Δ هو مقارب مائل لـ C في جوار $\mp\infty$.

ولدراسة الوضع النسبي:

$f(x) - y_\Delta = -\dfrac{5}{\sqrt{|x|}} < 0$

C يقع دوماً تحت Δ.

⑤ $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4}$ H.Work

; $\Delta : y = 2x + 1$

⑥ $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 5}{(x+1)^2}$; $\Delta : y = x - 2$

$f(x) - y_\Delta = \dfrac{x^3 - 3x - 5}{x^2 + 2x + 1} - x + 2$

$= \dfrac{x^3 - 3x - 5 - x^3 + 2x^2 - 2x^2 + 4x - x + 2}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{-3}{(x+1)^2} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \mp\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$

Δ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ ، $-\infty$

$f(x) - y_\Delta = \dfrac{-3}{(x+1)^2} < 0$

C يقع دوماً تحت Δ.

قاعدة اكتشاف المقارب المائل :

الحالة الأولى :

إذا كانت : $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$

وليكن $\Delta: y = ax+b$ هو المقارب لـ C_f عندئذٍ

$$a = \lim \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim [f(x) - ax]$$

تطبيق ص 64 :

ليكن f هو التابع المعرف على $[0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

أوجد معادلة المقارب المائل لـ C في جوار $+\infty$.

الحل : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

نفرض أن : $\Delta: y=ax+b$ مقارب مائل

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$ ع.ت

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}$$

$$= \frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \frac{\cancel{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \sqrt{1} = 1 = a$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = \lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+1} - x]$$

$= +\infty - \infty$ ع.ت

$$f(x) - ax = \frac{[\sqrt{x^2+1}-x][\sqrt{x^2+1}+x]}{[\sqrt{x^2+1}+x]}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{[\sqrt{x^2+1}+x]} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{+\infty} = 0 = b$$

ومنه $\Delta: y = x$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$.

حالات خاصة :

[1] تذكرة : إذا طلب إثبات أن $y = ax+b$ مقارب للتابع $y=f(x)$

نبرهن أن : $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0$

[2] أي تابع من الشكل :

$$f(x) = ax+b+g(x)$$

الباقي ← لدرجة أولى.

وكان : $\lim_{x\to\mp\infty} g(x) = 0$

فإن : $y = ax+b$ هو المقارب المائل

3) إذا كان التابع كسري حدودي و درجة البسط أكبر من درجة المقام بدرجة واحدة نقسم البسط على المقام قسمة إقليدية . فنحصل على الشكل

$f(x)=ax+b+g(x)$

تطبيق (2)

2/64) f هو التابع المعرف على $]0,+\infty[$

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x+3}$$

أوجد معادلة المقارب المائل له في جوار $+\infty$.

نقسم البسط على المقام قسمة إقليدية

$$\begin{array}{r|l} & 2x-6 \\ \hline x+3 & 2x^2 \quad +1 \\ & \mp 2x^2 \mp 6x \\ & -6x+1 \\ & \pm 6x \pm 18 \\ \hline & \boxed{19} \end{array}$$

$\boxed{19}$ ← الباقي

الكسر = الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{م.ع}}$

$$f(x)=2x-6+\frac{19}{x+3}$$

وهي من الشكل : $f(x)=ax+b+g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{19}{x+3}=0$$

إذاً $y=2x-6$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

دورة 2017 :

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

1) اكتب التابع f بالشكل :

$$f(x)=ax+b+\frac{1}{x+3}$$

2) أثبت أن $\Delta: y=ax+b$ مقارب مائل لـ C التابع f في جوار $+\infty$.

الحل : 1)

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline x+3 & x^2+2x-2 \\ & \mp x^2 \mp 3x \\ & -x-2 \\ & \pm x \pm 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

1 ← الباقي .

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x+3}$$

2) $\Delta: y=x-1$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+3}=0$$

Δ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$.

M-Ah

الحالة الثالثة:

$f(x) = \sqrt{(ax+b)^2 \pm \text{عدد}}$

لـ درجة أولى

$\Delta: y = |ax+b|$

عند $-\infty$: $y = -ax-b$

عند $+\infty$: $y = ax+b$

19/71 ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على IR وفق:

$f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$

① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

② a) اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية

b) استنتج وجود مقارب مائل للخط البياني c للتابع f في جوار $+\infty$ واكتب معادلته.

الحل:

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

② a) x^2+4x+5
$= x^2+4x+4-4+5$
$= (x+2)^2+1$

b) $f(x) = \sqrt{(x+2)^2+1}$

نخمن أن $\Delta: y = x+2$ مقارب مائل لـ c في جوار $+\infty$

$f(x) - y_\Delta = \sqrt{(x+2)^2+1} - (x+2)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] = +\infty - \infty$ ع.ت

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\left[\sqrt{(x+2)^2+1} - (x+2)\right]\left[\sqrt{(x+2)^2+1} + (x+2)\right]}{\left[\sqrt{(x+2)^2+1} + (x+2)\right]}$$

$$= \frac{(x+2)^2+1-(x+2)^2}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] = \frac{1}{+\infty} = 0$

إذاً $\Delta: y = x+2$ مقارب مائل لـ c في جوار $+\infty$.

7/68 ليكن التابع f المعرف على IR وفق:

$f(x) = \sqrt{2x^2+x+1}$

وليكن c خطه البياني المطلوب هو إثبات أن الخط البياني c يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$.

H.work

الحالة الرابعة :

إذا طلب حساب نهاية:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]$$

ووجدنا الجواب

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

نستنتج أن : $\Delta: y=ax+b$

مقارب مائل في جوار ∞ .

$\frac{18}{21}$ ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$

1) a) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ثم : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$

b) استنتج وجود معادلة مقارب مائل Δ للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$

c) ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

الحل :

1) a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)\right]=+\infty-\infty$$

ح.ع.ت

$$f(x)-(x+1)=\frac{\left[\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)\right]\left[\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)\right]}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$

$$=\frac{\cancel{x^2}+\cancel{2x}+4-\cancel{x^2}-\cancel{2x}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$$

b) نستنتج أن : $\Delta: y=x+1$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$.

c) ندرس إشارة :

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)$$

$$\sqrt{x^2+2x+4}>\sqrt{(x+1)^2}$$

$$\sqrt{x^2+2x+4}>(x+1)$$

$$\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)>0$$

$f(x)-y_\Delta>0$ C يقع فوق Δ

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: 21 / Z2

$f(x)=x+\sqrt{14x^2-11}$

احسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]$

واستنتج معادلة المقارب المائل.

الحل:

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]$

$=\lim_{x\to-\infty}[x+\sqrt{14x^2-11}+x]=$

$\lim_{x\to-\infty}[2x+\sqrt{14x^2-11}]=+\infty-\infty$

ع.ت

$f(x)+x=\dfrac{(2x+\sqrt{14x^2-11})(2x-\sqrt{14x^2-11})}{(2x-\sqrt{14x^2-11})}$

$=\dfrac{4x^2-14x^2-11}{2x-\sqrt{14x^2-11}}$

$x\to-\infty \Rightarrow 4x^2-1>0$

$14x^2-11=4x^2-1$

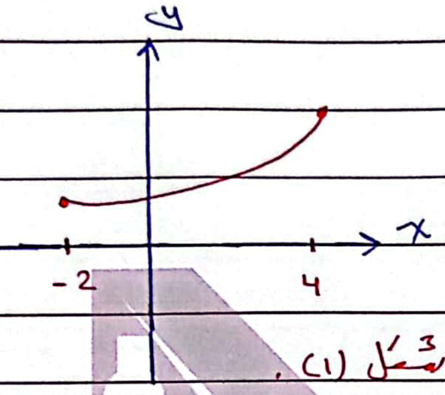
$f(x)+x=\dfrac{4x^2-(4x^2-1)}{2x-\sqrt{14x^2-11}}$

$=\dfrac{-1}{2x-\sqrt{14x^2-11}}$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\dfrac{1}{-(-x)}=\dfrac{1}{-\infty-\infty}=0$

$\Leftarrow$ $y=-x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

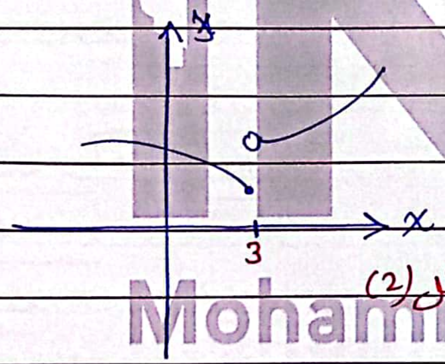
"الاستمرار"



شكل (1)

هل نستطيع أن نرسم شكل (1) دون أن نرفع القلم عن الدفتر الجواب: نعم

إذاً التابع مستمر على المجال $[-2,4]$



شكل (2)

هل نستطيع أن نرسم شكل (2) دون أن نرفع القلم الجواب: لا

إذاً التابع غير مستمر عند $x=3$

قاعدة:

لإثبات أن التابع $f(x)$ المعرف على D أنه مستمر عند a نبرهن:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

مثال: ليكن التابع

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x+1 & ; x\le 3\\ \frac{1}{3}x^2-1 & ; x>3\end{cases}$$

هل التابع مستمر عند $x=3$

الحل:

$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\frac{1}{3}(3)^2-1=2$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\frac{1}{3}(3)+1=2$

$f(3)=\frac{1}{3}(3)+1=2$

وجدنا: $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^-} f(x)=f(3)=2$

إذاً التابع مستمر عند $x=3$

28/73

$x>0 \quad x<0$

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$$

1) احسب نهاية التابع f عند الصفر

هل f مستمر عند الصفر

الحل:

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\right)$

$\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow -1\le\cos\frac{1}{x}\le 1$

نضرب بـ $x^2>0$ فنجد:

$-x^2\le x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\le x^2$

$\lim_{x\to 0}(-x^2)=0$ & $\lim_{x\to 0}(x^2)=0$

نحسب مبرهنة الإحاطة:

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$
$f(0)=0$
$\Big\}\ \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\Leftarrow$ f مستمر عند الصفر.

29/73 ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & ; x\neq 0\\ m & ; x=0\end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على $\mathbb{R}$.

الحل: كي يكون f مستمراً على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمراً عند الصفر يعني:

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}=m \ldots (*)$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{0}{0}$ عدم تعيين

$f(x)=\frac{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$

$=\frac{1-(x^2+1)}{x(1+\sqrt{x^2+1})}=\frac{-x^2}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$

$=\frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{2}=0$

$(*) \Rightarrow \boxed{0=m}$

مثال:

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; x\geq 1\\ x+2 & ; x<1\end{cases}$$

ادرس استمرار f عند 1

الحل:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2(1)+1=3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1+2=3$$

$$f(1)=2(1)+1=3$$

f مستمر عند 1.

16/71 ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}$$

جد الأعداد a و b و c و d علماً أن خواص التالية محققة.

- المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=3$ مقارب للخط c.
- المستقيم المائل الذي معادلته $y=2x-5$ مقارب للخط c عند $+\infty$ و $-\infty$.
- تنتمي النقطة $A(1,2)$ الى الخط c.

الحل:

- $D_f=\mathbb{R}/\{d\}$

$$=]-\infty,d[\cup]d,+\infty[$$

$$\lim_{x\to d^+} f(x)=ad+b+\frac{c}{0^+}=+\infty \text{ أو } -\infty$$

$$\lim_{x\to d^-} f(x)=ad+b+\frac{c}{0^-}=+\infty \text{ أو } -\infty$$

$x=d$ مقارب شاقولي لـ c في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

ولكن $x=3$ هو مقارب شاقولي لـ c

$$\Leftarrow \quad d=3$$

- بفرض $\Delta: y=ax+b$ عندئذ بالطرح:

$$f(x)-y_\Delta=ax+b+\frac{c}{x-d}-ax-b$$

$$=\frac{c}{x-d}\Rightarrow \lim_{x\to\mp\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$$

$\Delta: y=ax+b$ مقارب مائل لـ c في جوار $+\infty$ و $-\infty$

$y=2x-5$ مقارب مائل لـ c في جوار $+\infty$ و $-\infty$

$$a=2,\ b=-5$$

$$f(x)=2x-5+\frac{c}{x-3}$$

$$A(1,2)\in c\Rightarrow f(1)=2$$

$$2(1)-5+\frac{c}{1-3}=2$$

$$2-5+\frac{c}{-2}=2\Rightarrow -3+\frac{c}{-2}=2$$

$$\Rightarrow \frac{c}{-2}=5\Rightarrow c=-10$$

$$f(x)=2x-5+\frac{-10}{x-3}$$

$\frac{11}{70}$

ليكن f التابع المعين بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$$

1) عين مجموعة تعريف f

2) أوجد a, b, c التي تحقق:

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

أياً كان x من D_f.

الحل: 1)

$$f(x) = \frac{3x^2+6x}{(x+1)(x-2)}$$

$$D_f = \mathbb{R} / \{2, -1\}$$

$$=]-\infty, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, +\infty[$$

2)

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ x^2-x-2 & 3x^2+6 \\ & \mp 3x^2 \pm 3x \pm 6x \\ \hline & 9x+6 \end{array}$$

$$f(x) = 3 + \frac{9x+6}{x^2-x-2}$$

$$f(x) = 3 + \frac{9x+6}{(x-2)(x+1)}$$

ولكن:

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

بالمطابقة نستنتج أن: $a=3$

$$\frac{9x+6}{(x-2)(x+1)} = \frac{b}{(x+1)} + \frac{c}{x-2}$$

$(x-2) \quad (x+1)$

$$\Rightarrow \frac{9x+6}{(x-2)(x+1)} = \frac{bx-2b}{(x-2)(x+1)} + \frac{cx+c}{(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{9x+6}{(x-2)(x+1)} = \frac{bx-2b+cx+c}{(x-2)(x+1)}$$

$$\Rightarrow 9x+6 = bx+cx-2b+c$$

$$\Rightarrow 9x+6 = (b+c)x-2b+c$$

بالمطابقة:

$b+c=9$ ①

$-2b+c=6$ ②

بطرح ② من ①:

$3b=3 \Rightarrow b=1$

① $\Rightarrow 1+c=9 \Rightarrow c=8$

$$f(x) = \frac{3x^2+6x}{x^2-x-2} = 3 + \frac{1}{x+1} + \frac{8}{x-2}$$

"تابع الجزء الصحيح"

$E(0.2) = 0$

$E(3.2) = 3$

$E(1.7) = 1$

$E(1.2) = 1$

$E(-1.6) = -2$

$E(-3.9) = -4$

تمرين (1):

عندما $x \in [0,2]$

ما هي قيم $E(x)$.

عندما $x \in [0,1[\Leftarrow E(x)=0$

عندما $x \in [1,2[\Leftarrow E(x)=1$

عندما $x=2 \Leftarrow E(2)=2$.

تمرين (2):

$x \in [1,3[$

ما هي قيم $E(x)$.

عندما $x \in [1,2[\Leftarrow E(x)=1$

عندما $x \in [2,3[\Leftarrow E(x)=2$

31/73 ليكن التابع f المعرف على $[0,2]$ وفق: $f(x)=E(x)+[x-E(x)]^2$

① اكتب عبارة $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$.

② أثبت أن f مستمر على $[0,2]$

الحل:

① $x \in [0,1[$

$\Rightarrow E(x)=0 \Rightarrow f(x)=0+(x-0)^2=x^2$

$x \in [1,2[\Rightarrow E(x)=1 \Rightarrow f(x)=1+(x-1)^2$

$= x^2-2x+1+1$

$\Rightarrow f(x)=x^2-2x+2$

$x=2 \Rightarrow E(x)=2 \Rightarrow f(x)=2+(2-2)^2=2$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x \in [0,1[\\ x^2-2x+2 & ; x \in [1,2[\\ 2 & ; x=2 \end{cases}$$

$f(x)=x^2$ مستمر على مجموعة تعريفه أي مستمر على $[0,1[$

$f(x)=x^2-2x+2$ مستمر على مجموعة تعريفه أي مستمر على $]1,2[$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x^2) = 1$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (x^2-2x+2) = 1-2+2=1$

$\Rightarrow \lim_{x\to1} f(x) = 1$

$f(1) = 1^2-2(1)+2 = 1-2+2 = 1$

$\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$ f مستمر عند $x=1$

$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} (x^2-2x+2) = 2^2-2\times2+2$

$=2$

$f(2)=2$

$\lim_{x\to2^-} f(x) = f(2)$ f مستمر عند 2

مما سبق كله نستنتج أن f مستمر على $[0,2]$.

تم بعون الله وكرمه الانتهاء من بحث النهايات والاستمرار

أ. محمد أحمد 0964848890

2024

M-Ah

" بحث الاشتقاق "

قواعد الاشتقاق:

c خالي من x

[1] $f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$

a خالي من x

[2] $f(x)=ax \Rightarrow f'(x)=a$

[3] $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

[4] الثابت في الجداء نثبته.

$f(x)=ax^n \Rightarrow f'(x)=a.nx^{n-1}$

(5) الاشتقاق يتوزع على الجمع والطرح

$f(x)=2x^2+5x-3$

$f'(x)=4x+5$

(6) $f(x)=\sin P(x)$

$f'(x)=P'(x)\cos P(x)$

(7) $f(x)=\cos P(x)$

$f'(x)=-P'(x)\sin P(x)$

(8) مشتق التابع الجذري التربيعي

مشتق الجذر التربيعي = مشتق ماتحت الجذر / ضعفي الجذر

(9) مشتق الجداء:

$(f.g)'=f'.g+g'.f$

(10) مشتق القسمة:

$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'.g-g'.f}{f^2}$

(11) $f(x)=\tan P(x)$

$f'(x)=P'(x)[1+\tan^2 P(x)]$

أو $=\frac{P'(x)}{\cos^2 P(x)}$

ملاحظة: يمكن كتابة $\tan P(x)=\frac{\sin P(x)}{\cos P(x)}$ ونطبق قاعدة الكسر.

(12) $f(x)=\cot P(x)$

$f'(x)=-P'(x)[1+\cot^2 P(x)]$

أو: $=\frac{-P'(x)}{\sin^2 P(x)}$

(13) مشتق قوة:

$f(x)=(\text{مقدار})^n$

$f'(x)=n(\text{مقدار})^{n-1}(\text{مقدار})'$

مثال: أوجد مشتق كل مما يلي:

(1) $f(x)=x^3+2x^2-3x+2$

$f'(x)=3x^2+4x-3$

(2) $f(x)=(2x^3-1)^5$

$f'(x)=5(2x^3-1)^4(6x^2-1)$

(3) $f(x)=\cos(3x+7)$

$f'(x)=-2\sin(3x+7)$

(4) $f(x)=\sqrt{\sin x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

(5) $f(x)=x+\sqrt{x-1}-7$

$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$f(x)=\frac{1-x}{(x^3+1)}$ H.work

$f(x)=x-\sqrt{x^2+8}$ H.work

⑥ $f(x) = \tan(3x) + 2$

$f'(x) = 3[1 + \tan^2(3x)]$

⑦ $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

مشتق التابع المركب:

$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \times f'(x)$

مثال: f معرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x) = 3x^2 - 1$

أوجد f' واستنتج مشتق $g(x) = 3\sin^2 x - 1$

الحل:

$f'(x) = 6x$

$g(x) = 3\sin^2 x - 1$

$g(x) = f(\sin x)$

$g'(x) = f'(\sin x).(\sin x)'$

$= 6\sin x . \cos x$

مثال: $\frac{15}{168}$ نتأمل التابع f المعرف على $\mathbb{R}/\{1\}$

$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

① احسب مشتق التابع f

② استنتج مشتق كل من التوابع الآتية:

① $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

② $h(x) = \frac{x^4+1}{x^2-1}$

③ $L(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$

④ $K(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1}$

الحل: ①

$f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1(x^2+1)}{(x-1)^2}$

$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

② $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

$g(x) = f(\sqrt{x})$

$g'(x) = f'(\sqrt{x}).(\sqrt{x})'$

$= \frac{x - 2\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}-1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$h(x) = \frac{x^4+1}{x^2-1}$

$h(x) = f(x^2)$

$h'(x) = f'(x^2).(x^2)'$

$= \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{(x^2-1)^2} \times 2x$

$L(x) = \sqrt{f(x)}$

$L'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}}$

$K(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1}$; $K(x) = f(\sin x)$

$K'(x) = f'(\sin x).(\sin x)'$

$= \frac{\sin^2 x - 2\sin x - 1}{(\sin x - 1)^2} \times \cos x.$

تدريب ص 94 :

$\frac{1}{94}$ احسب مشتق f على المجموعة D المشار إليها في كل حالة :

(1) $f(x) = (2x^3-1)^5 \ , \ D = \mathbb{R}$

$f'(x) = 5(2x^3-1)^4 . (2x^3-1)'$

$= 5(2x^3-1)^4 (6x^2)$

$= 30x^2 (2x^3-1)^4 .$

(2) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3 \ ; D = \mathbb{R}/\{-2\}$

$f'(x) = 3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 \left(\frac{x+1}{x+2}\right)'$

$= 3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 . \left(\frac{1(x+2)-1(x+1)}{(x+2)^2}\right)$

$= 3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 \left(\frac{x+2-x-1}{(x+2)^2}\right)$

$= 3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 \left(\frac{1}{(x+2)^2}\right)$

(3) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \ ; D = \mathbb{R}.$

$f'(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) . \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)'$

$= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) .$

(4) $f(x) = x . \sqrt{x^2+1} \ ; D = \mathbb{R}.$

$f'(x) = 1 \times \sqrt{x^2+1} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} (x)$

$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} . (x)$

$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

(6) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \ ; D = \mathbb{R} \setminus [-1, 2]$

$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}}$

$= \frac{\frac{-3}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}} = \frac{-3}{2(x-2)^2 . \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}}$

(10) $f(x) = \tan^2 x \ ; D = [0, \frac{\pi}{2}[$

$f'(x) = 2\tan x . (\tan x)'$

$= 2\tan x \, (1 + \tan^2 x)$

#انطلق!!!!!

كن ذا همة ولا تأس
بنفس القمم
أ. محمد أحمد

"سؤال امتحاني"

التابع الزوجي :

أثبت أن التابع $f(x)$ زوجي المعرف على D أي :

أثبت أن C متناظر بالنسبة لـ yy'

أي أثبت أن C متناظر بالنسبة للمستقيم $x=0$

الشرط الأول: $\forall x\in D \Rightarrow -x\in D$

الشرط الثاني: $f(-x)=f(x)$

التابع الفردي :

أثبت أن التابع $f(x)$ فردي المعرف على D.

أي: أثبت أن C متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

الشرط الأول: $\forall x\in D \Rightarrow -x\in D$

الشرط الثاني: $f(-x)=-f(x)$.

ولسوف يعطيك ربك فترضى

2024

BAC

"التقريب الخطي (التآلفي)"

إذا كان T مماس C_f في $A(a,f(a))$

فإن: $m_T = f'(a)$

$T: y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$T: y = f(a) + f'(a)(x-a)$

$T: y = f(a) + f'(a).h$

ملاحظات: $f(a+h) \approx y_T$

"$(x = a+h \Rightarrow x-a = h)$"

عبارة التقريب الخطي (التآلفي) عند

$\Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + f'(a).h$

مثال: ليكن لدينا التابع $f(x)=x^5-3x+2$

1) اكتب عبارة التقريب الخطي عند $a=1$

2) ثم احسب $f(1.1)$

$f(a+h) \approx f(a)+f'(a).h \quad , a=1$

$f(1+h) \approx f(1)+f'(1)\times h \quad ...(*)$

$f(1) = (1)^5 - 3(1) + 2 = 0$

f اشتقاقي على R، مشتقة: $f'(x)=5x^4-3$, $f'(1)=2$

$(*) \Rightarrow f(1+h) \approx 0+2\times h \Rightarrow f(1+h) \approx 2h$

2) لحساب $f(1.1)$ نضع مكان h العدد 0.1 فنجد:

$f(1+0.1) \approx 2(0.1) = 0.2$

$\Rightarrow f(1.1) \approx 0.2$

$f(1.1) \cong 0.31051$

a القسم الصحيح من المقدار

h القسم العشري وهو قريب من الصفر

المشتق من المراتب العليا والمشتق النوني:

سؤال: أوجد f''' & f'' & f' للتابع f

$f(x) = x^3+2x^2+7$

$f'(x) = 3x^2+4x$

$f''(x) = 6x+4$

$f'''(x) = 6 \quad ...... \quad f^{(4)} = 0$

$\boxed{\frac{4}{105}}$ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x+\sqrt{1+x^2}$

1) تحقق أن: $\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x) = f(x)$

2) استنتج أن: $(1+x^2)f''(x)+x\cdot f'(x)-f(x)=0$

الحل: 1) $f'(x) = 1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\times(\sqrt{1+x^2})$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\cdot f'(x) = \sqrt{1+x^2}+x$

$\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x) = f(x)$ ..... (*)

2) باشتقاق العلاقة (*):

$\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} f'(x) + f''(x)\cdot\sqrt{1+x^2} = f'(x)$

$\times(\sqrt{1+x^2})$

$x\cdot f'(x)+(1+x^2)\cdot f''(x) = \underbrace{\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)}_{f(x)}$

$x\cdot f'(x)+(1+x^2)\cdot f''(x) = f(x)$

$(1+x^2)\cdot f''(x)+x\cdot f'(x) = f(x)$

$(1+x^2)\cdot f''(x)+x\cdot f'(x)-f(x) = 0$

مثال ص 25: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق الصيغة $f(x) = \frac{1}{1-x}$ نريد أن نبرهن أن المشتق من المرتبة n بالصيغة $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ في حالة $x \neq 1$.

الحل: لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية:

أياً كان x من $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ كان $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

1) نثبت أن الخاصة صحيحة من أجل $E(1)$:

$f'(x) = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}} \Rightarrow L_1 = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$L_2 = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow L_1 = L_2$ الخاصة صحيحة من أجل $n=1$

نفرض أن الخاصة صحيحة من أجل n أي $E(n)$:

$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ (1)

نبرهن أن الخاصة صحيحة من أجل $n+1$ أي $E(n+1)$:

$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$ (*)

نشتق (1):

$f^{(n+1)}(x) = \frac{-(n+1)(-1)(1-x)^n\, n!}{(1-x)^{2n+2}}$

$= \frac{(n+1)\,n!\,(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$

إذاً الخاصة صحيحة من أجل $E(n+1)$

وبالتالي $E(n)$ صحيحة.

7 / 105

في كل حالة من الحالات الآتية احسب المشتقات من المراتب 1، 2، 3 للتابع f المعرف بالعلاقة المشار إليها وحدد في كل حالة المجموعة التي تحسب عليها المشتقات.

[1] $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+x-1$

f معرف واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$f'(x)=3x^2-x+1$

$f''(x)=6x-1$

$f'''(x)=6$

$f''''(x)=0$

(2) $f(x)=x.\sqrt{x}$

$x\geq 0 \Rightarrow D_f=[0,+\infty[$

واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}.x$

$=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}\,\cancel{\sqrt{x}}}{2\cancel{\sqrt{x}}}=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}$

$=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

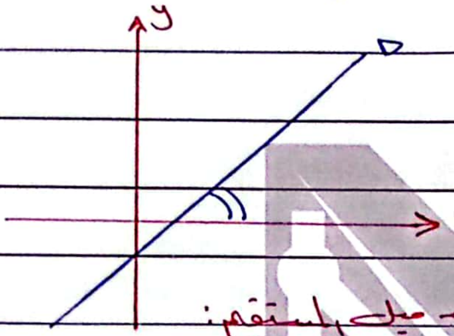
$f''(x)=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{3}{4}\times x^{-\frac{1}{2}}$

$f'''(x)=\frac{3}{4}\times(-\frac{1}{2}).x^{-\frac{1}{2}-1}$

$=-\frac{3}{8}.x^{-\frac{3}{2}}$

ميل المستقيم:

هو ظل (tan) الزاوية بين المستقيم ومحور xx' نرمز للميل m.



كيف نوجد ميل المستقيم:

[1] إذا علمت الزاوية بين المستقيم ومحور xx' فإن الميل $m=\tan\theta$

مثال: إذا كانت الزاوية بين المستقيم ومحور xx' هي $\frac{\pi}{3}$ أوجد ميل المستقيم.

$m=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

[2] إذا علمت نقطتان من المستقيم $A(x_1,y_1,\cancel{z_1})$ & $B(x_2,y_2,\cancel{z_2})$ فإن m:

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

مثال:

أوجد ميل المستقيم المار من النقطتين $A(3,2)$ & $B(5,1)$

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-1}{3-5}=\boxed{\frac{1}{-2}}$

[3] إذا علمت المعادلة المختزلة

$y=ax+b$

فإن الميل هو أمثال x $m=a$

مثال: أوجد ميل ما يلي:

$y=3x+2 \Rightarrow m=3$

$y=x \Rightarrow m=1$

$y=-x \Rightarrow m=-1$

4) إذا أعطيت المعادلة العامة:

$ax+by+c=0$

فإن: $m = -\dfrac{\text{أمثال } x}{\text{أمثال } y}$

أوجد ميل مستقيم شكل الحالة (3)

$2x+3y+5=0$

$m=-\dfrac{2}{3}$

أوجد ميل:

$3y=-2x-5$

$y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$

$m=-\dfrac{2}{3}$

5) ميل المستقيم الأفقي (يوازي xx') صفر.

مثال: أوجد ميل المستقيم:

$y=2 \Rightarrow m=0$

$y=0 \Rightarrow m=0$

6) كل مستقيم شاقولي (يوازي yy') ميله غير معرف.

7) ميل المستقيم يمس المنحني في نقطة منه $A(x_0,y_0)$.

8) الميل = المشتق.

$m=f'(x_0)$

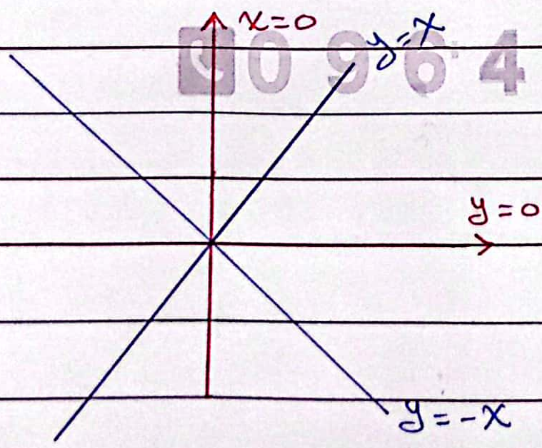
مثال: أوجد ميل المماس لمنحني التابع $f(x)=x^2+x$ في نقطة منه $(1,2)$.

الحل: $f'(x)=2x+1$

$m=f'(1)=2(1)+1=3$

بعض المستقيمات الشهيرة:

1. $y=0$ محور الفواصل xx'
2. $x=0$ محور التراتيب.
3. منصف الربع الأول والثالث $y=x$
4. منصف الربع الثاني والرابع $y=-x$
5. $y=ax$ مستقيم يمر من المبدأ.
6. $y=ax+b$ مستقيم مائل لا يمر من المبدأ.



شرط توازي مستقيمين: $m_1 = m_2$

شرط تعامد مستقيمين: $m_1 \cdot m_2 = -1$

معادلة المستقيم (بأنواعه مماس، ناظم، مقارب، محور ...):

نكتب: $y - y_1 = m(x - x_1)$

حيث: (x_1, y_1) نقطة من المستقيم

m ميل المماس.

مثال: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$

اكتب معادلة المماس C في النقطة M التي فاصلتها 2.

الحل:

$x = 2 \Rightarrow f(2) = -1$

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$f'(2) = 3(2)^2 - 4(2) = 12 - 8 = 4 = m$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 1 = 4(x - 2)$

تدرب ص 84:

I/84: اكتب معادلة المماس لـ C_f في النقطة A من C_f التي فاصلتها 4.

① $f(x) = \frac{1}{x}$; $x = 4$

$f(4) = \frac{1}{4} \Rightarrow A(4, \frac{1}{4})$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(4) = -\frac{1}{16} = m$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{16}(x - 4)$

$\boxed{y = -\frac{1}{16}x + \frac{1}{2}}$

② $f(x) = x^2$; $x = 4$

$f(4) = (4)^2 = 16 \Rightarrow A(4, 16)$

$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(4) = 2(4) = 8 = m$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 16 = 8(x - 4)$

$y = 16 + 8x - 32$

$\boxed{y = 8x - 16}$

③ $f(x) = \sqrt{2x + 1}$; $x = 4$

$f(4) = \sqrt{2(4) + 1} = \sqrt{9} = 3$

$A(4, 3)$

$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$f'(4) = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} = m$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 4)$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

④ $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $x = 4$

H.Work

M-Ah

$\frac{1}{104}$) اكتب معادلة مماس T للخط البياني للتابع المعرف f في النقطة التي فاصلتها a:

① $f(x)=x\sqrt{x}$; $a=1$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$f'(x)=1\times\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\times x$

$=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

$m_T=f'(1)=\frac{3}{2}\sqrt{1}=\frac{3}{2}$

$y_A=f(x_A)=f(1)=1\times\sqrt{1}=1$

$\Rightarrow A(1,1)$ نقطة التماس.

$T: y-y_A=m(x-x_A)$

$T: y-1=\frac{3}{2}(x-1)$

$T: y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}+1$

$T: y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

② $f(x)=x^3+x^2-3x$

$a=0$

H.Work

③ $f(x)=\frac{x}{x-1}$; $a=0$

$y_A=f(x_A)=f(0)=\frac{0}{0-1}=0$

نقطة التماس $A(0,0)$.

$f'(x)=\frac{1(x-1)-(1)(x)}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}$

$=\frac{-1}{(x-1)^2}$

$m_T=f'(0)=\frac{-1}{(0-1)^2}=\frac{-1}{+1}=-1$

$T: y-0=-1(x-0)$

$T: y=-x$

"قابلية الاشتقاق"

إذا كان $a\in D_f$ وطلب منا الحكم فيما إذا كان f اشتقاقياً عند a وإثباتاً: نشكل تابع معدل التغير، وهو:

$g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; $D_g=D_f\setminus\{a\}$

ثم نأخذ: $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell\in\mathbb{R}$ ① أو

فإننا نقول إن f يقبل الاشتقاق عند a ويكون $f'(a)=\ell$

وهو يمثل ميل المماس في النقطة $A(a,f(a))$.

② $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\mp\infty$

فإننا نقول إن f لا يقبل الاشتقاق عند a.

نشاط ② ص ٩٥:

ادرس قابلية اشتقاق $f(x)=\sqrt{x}$ عند الصفر.

$D_f=[0,+\infty[$

$g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; $D_g=]0,+\infty[$

$g(x)=\frac{\sqrt{x}-0}{x}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

f لا يقبل الاشتقاق عند الصفر وهو يملك مماس شاقولي في $(0,0)$

و 105: في كل من الحالات الآتية ادرس قابلية الاشتقاق للتابع f عند الصفر.

① $f(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$, $D_f=[0,+\infty[$

$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\cdot\sqrt{x}-0}{x}$

$=\frac{x^2\cdot\sqrt{x}}{x}=x\cdot\sqrt{x}$; $D_g=]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} g(x)=0\cdot\sqrt{0}=0\in\mathbb{R}$

f يقبل الاشتقاق عند الصفر & $f'(0)=0$

② $f(x)=x|x|$; $D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x|x|}{x}=|x|$

$D_g=\mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x)=|0|=0\in\mathbb{R}$

$\Leftarrow$ f يقبل الاشتقاق عند الصفر $f'(0)=0$

③ $f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$; $D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x^2+|x|}{x^2+1}}{\frac{x}{1}}$

$=\frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)}$; $D_g=\mathbb{R}^*$

هنا نميز حالتين:

① $x\to 0^-$ يكون $x<0 \Rightarrow |x|=-x$

$g(x)=\frac{x^2-x}{x(x^2+1)} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} g(x)=\frac{0}{0}$ ع.ت

تمارين ③ ⑤ ص 102 :

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$$

1) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين T_1 لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,2)$

2) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليسار ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليسار T_2 لخطه البياني في النقطة $A(0,2)$

الحل: ① نشكل تابع معدل التغير:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad , \quad D_g = \mathbb{R}^*$$

$$g(x) = \frac{\frac{x+2}{|x|+1} - 2}{x} \Rightarrow x \to 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$g(x) = \frac{\frac{x+2}{x+1} - 2}{x} = \frac{\frac{x+2-2x-2}{x+1}}{\frac{x}{1}}$$

$$= \frac{\frac{-x}{x+1}}{\frac{x}{1}} = \frac{-1}{x+1}$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \frac{-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1 \in \mathbb{R}$$

f يقبل الاشتقاق عند $x=0$ من اليمين.

$$g(x) = \frac{x(x-1)}{x(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} g(x) = \frac{-1}{1} = -1 \in \mathbb{R}$$

f يقبل الاشتقاق عند الصفر من اليسار و $f'(0^-) = -1$

ميل نصف المماس من اليسار

② $x \to 0^+$ يكون $x > 0 \Leftarrow |x| = x$

$$g(x) = \frac{x^2+x}{x(x^2+1)} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} g(x) = \frac{0}{0} \quad \text{ع.ت}$$

$$g(x) = \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(x^2+1)} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} g(x) = \frac{1}{1} = 1 \in \mathbb{R}$$

$\Leftarrow$ f يقبل الاشتقاق عند الصفر من اليمين $f'(0^+) = 1$ ميل نصف المماس من اليمين.

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) \neq \lim_{x \to 0^+} g(x)$$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} g(x)$ غير موجودة

$\Leftarrow$ f لا يقبل الاشتقاق عند الصفر

M-Ah

ميل نصف المماس من اليمين $f'(0^+) = -1$

$T_1: y - y_A = m_{T_1}(x - x_A)$

$T_1: y - 2 = -1(x - 0)$

$T_1: y = -x + 2$

② $g(x) = \dfrac{\frac{x+2}{|x|+1} - 2}{x}$

عندما $x \to 0^-$ يكون: $x<0 \Rightarrow |x| = -x$

$$g(x) = \frac{\frac{x+2}{|x|+1}-2}{x} = \frac{\frac{x+2}{-x+1}-2}{x}$$

$$= \frac{\frac{x+2+2x-2}{-x+1}}{\frac{x}{1}} = \frac{\frac{3x}{-x+1}}{\frac{x}{1}}$$

$$= \frac{3x}{x(-x+1)} = \frac{3}{-x+1}$$

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \frac{3}{0+1} = 3 \in \mathbb{R}$

f اشتقاقي عند الصفر من اليسار

ميل نصف المماس من اليسار $f'(0^-) = 3$

$T_2: y - y_1 = m_{T_2}(x - x_1)$

$T_2: y - 2 = 3(x - 0)$

$T_2: \boxed{y = 3x + 2}$

بما أن $\lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x)$

$\Leftarrow \lim_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة.

إيجاد نهاية عن طريق تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

ملاحظة: نقوم بتطبيق هذه الطريقة عندما يكون $x \to$ عدد وبالمقام $x -$ عدد

مثال: أوجد نهاية $\frac{\sin x}{x}$ عند الصفر

الحل: نفرض $f(x) = \sin x$

نوجد $f(0)$: $f(0) = \sin(0) = 0$

نشتق $f'(x)$: $f'(x) = \cos x$

نوجد $f'(0)$: $f'(0) = \cos(0) = 1$

لأنه يكون هو دوماً النهاية

نعوض بالقانون:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - 0}{x - 0} = f'(0) = 1$$

M-Ah

نشاط (4) ص 101 :

ليكن f التابع المعرف بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

أوجد $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

الحل. ع.ت

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$$

نفرض أن : $g(x) = \sqrt{x+4}$

$g(0) = \sqrt{4} = 2$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$

$g'(0) = \frac{1}{4}$

$$f(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = \frac{1}{4}$$

(2) أوجد نهاية $f(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ عند $\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{0}{0} \quad \text{ع.ت}$$

نفرض أن : $g(x) = \cos x$

$g(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$g'(x) = -\sin x$

$g'(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$

$$f(x) = \frac{g(x) - g(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{g(x) - g(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = g'(\frac{\pi}{2})$$

$$= -1$$

(3) ادرس في كل حالة من الحالات الآتية نهاية التابع f في النقطة المشار إليها

(a) $f(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

عند $x = \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{1-1}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}} = \frac{0}{0} \quad \text{ع.ت}$$

نفرض أن : $g(x) = \tan x$

$g(\frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

$g'(x) = 1 + \tan^2 x$

$g'(\frac{\pi}{4}) = 1 + \tan^2 \frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2$

$$f(x) = \frac{g(x) - g(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$= g'(\frac{\pi}{4}) = 2$$

ⓑ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1}$ عند $x=1$

ع.ث $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{1-1} = \dfrac{0}{0}$

نفرض ن.ت : $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

$g(1) = \sqrt{2}$

$g'(x) = \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$g'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$f(x) = \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

سؤال ص 39 :

ادرس قابلية اشتقاق التابع $f(x) = \cos\sqrt{x}$ عند الصفر

$D_f = [0, +\infty[$

الحل: $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$; $D_g =]0, +\infty[$

ع.ث $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$

$g(x) = -\dfrac{(1-\cos\sqrt{x})}{x} = \dfrac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}$

$g(x) = \dfrac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\times\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}$

$= -\dfrac{2}{4} \times \left[\dfrac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right]^2$

ونعلم $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\dfrac{1}{2} \times 1^2 = -\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$

f يقبل الاشتقاق عند الصفر.

التابع f معرف على R وفق $f(0)=0$، $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$ في حالة $x \neq 0$

① هل f اشتقاقي عند الصفر؟ علل إجابتك

② احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

الحل: ① نشكل تابع معدل التغير:

$g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, $D_g = \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{x^{\cancel{2}} \cdot \cos\frac{1}{x} - 0}{\cancel{x}} = x \cdot \cos\frac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow -1 \le \cos\frac{1}{x} \le +1$

عندما $x \to 0^-$ يكون $x<0$ نضرب به:

$-x \ge x \cdot \cos\frac{1}{x} \ge x$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$

حسب مبرهنة المقارنة:

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[x \cdot \cos\frac{1}{x}\right] = 0$

عندما $x \to 0^+$ يكون $x>0$ نضرب به:

$$-x \le x\cdot\cos\frac{1}{x} \le x$$

$$\lim_{x\to 0^+}(-x) = \lim_{x\to 0^+}(x) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\cdot\cos\frac{1}{x}\right] = 0$$

f يقبل الاشتقاق عند الصفر

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \in R.$$

② $f(x)=x^2\cdot\cos\frac{1}{x}$

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \left(\cos\frac{1}{x}\right)'\cdot x^2$$

$$= 2x\cos\frac{1}{x} + \left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot x^2$$

$$= 2x\cos\frac{1}{x} + \left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^2$$

$$= 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

نص ثوابت (سؤال هام جداً):

$\boxed{1}$ $f(a)=b$ قيمة حدية و f اشتقاقي عند $x=a$ فإن: $f'(a)=0$

$\boxed{2}$ C يقبل مماس ميله m عند $x=a$ فإن: $f'(a)=m$

$\boxed{3}$ $A(a,b)\in C$ فإن: $f(a)=b$

$\boxed{4}$ C يقبل مماس أفقي عند $x=a$ فإن: $f'(a)=0$

($\frac{3}{89}$) ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x)=x^3-x^2+ax$

عين العدد الحقيقي a ليكون التابع f قيمة حدية محلية عند $x=1$

الحل: بما أن f اشتقاقي على R فهو اشتقاقي عند 1 وبما أن $f(1)$ قيمة حدية فإن:

$$f'(1)=0$$

$$f'(x)=3x^2-2x+a$$

$$f'(1)=0$$

$$\Rightarrow 3(1)^2-2(1)+a=0$$

$$\Rightarrow 3-2+a=0 \Rightarrow a=-1$$

($\frac{4}{89}$) ليكن f التابع المعرف على $R\setminus\{1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$$

والمطلوب:

أوجد قيمة a و b إذا علمت أن $f(-1)$ قيمة حدية محلية للتابع وهذه القيمة الحدية معدومة.

الحل: بما أن $f(-1)$ معدومة

$$\Rightarrow f(-1)=0$$

$$\frac{a(-1)^2+b(-1)+1}{-1-1}=0$$

$$\Rightarrow a(-1)^2+b(-1)+1=0$$

$$\Rightarrow a-b+1=0 \Rightarrow \boxed{a=b-1} \ldots ①$$

f اشتقاقي على $R\setminus\{1\}$ فهو اشتقاقي عند -1 وبما أن $f(-1)$ هي قيمة حدية للتابع $\Leftarrow f'(-1)=0$

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-1)-1(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$$

$f'(-1)=0$

$$\frac{(-2a+b)(-2)-1(a-b+1)}{(-2)^2}=0$$

$\Rightarrow (-2a+b)(-2)-1(a-b+1)=0$

$\Rightarrow 4a-2b-a+b-1=0$

$\boxed{3a-b-1=0}$ .... (2)

نعوض (1) في (2):

$3(+b-1)-b-1=0$

$3b-3-b-1=0 \Rightarrow 2b=4$

$\Rightarrow b=2 \Rightarrow a=2-1=1$

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$$

* ((تطبيقات الاشتقاق)) *

{ إطراد تابع اشتقاقي }

(1) نقول عن التابع أنه متزايد تماماً على المجال I إذا كان المشتق الأول موجباً ولا ينعدم أي: $f'(x)>0$

(2) نقول أن التابع متناقص تماماً على المجال I إذا كان المشتق الأول سالباً ولا ينعدم أي: $f'(x)<0$

دراسة تغيرات التابع:

(1) نوجد مجموعة التعريف والاستمرار والاشتقاق ونكتبها على شكل مجالاً أو مجالين أو اجتماع عدة مجالات.

(2) نوجد الصور عند أطراف المجالات المغلقة والنهايات عند أطراف المجالات المفتوحة لمجالات التعريف.

(3) نشتق وندرس إشارة المشتق ومنها نعرف جهة إطراد التابع.

(4) ندرج المعلومات السابقة ضمن الجدول الآتي الذي ندعوه جدول التغيرات.

x	مجموعة التعريف + الأعداد التي تعدم المشتق
$f'(x)$	إشارة المشتق
$f(x)$	جهة الإطراد + النهايات + الصور

خطوات لرسم C_f:

(1) نحاول رسم المقاربات والمماسات والنقاط المميزة ونقاط تقاطع مع المحورين إن وجدت

ثم نرسم C_f بالاعتماد على جدول التغيرات

القيم الحدية (القيمة الكبرى أو الصغرى محلياً):

* نقول عن $f(x_0)$ أنها قيمة كبرى محلية للتابع f إذا وفقط إذا وجد مجال J مفتوح يضم x_0 بحيث يتحقق:
$\forall x \in J \cap D_f \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$.

* ونقول عن $f(x_0)$ أنها قيمة صغرى محلية للتابع f إذا وفقط إذا وجد مجال مفتوح J يضم x_0 بحيث يتحقق:
$\forall x \in J \cap D_f \Rightarrow f(x) \ge f(x_0)$.

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

قيمة كبرى محلية

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

قيمة صغرى محلية

x		0	
$f'(x)$	$+$	$\parallel$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

قيمة كبرى محلية

x		0	
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

قيمة صغرى محلية

كن مع الله ولا تبالي

M-Ah

مبرهنة الحل الوحيد:

إذا كان التابع متزايد تماماً أو متناقص تماماً ولا ينعدم المشتق عندئذ إذا كانت K من $[f(a), f(b)]$ فإنه يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x)=K$ ضمن المجال $[a,b]$.

مثال ص:

التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق:
$$f(x)=x^3-3x^2+1$$
علل لماذا يكون للمعادلة $f(x)+1=0$ ثلاثة حلول حقيقية.

الحل: f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$
$$f'(x)=3x^2-6x$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x=0$$
$$\Rightarrow (\div 3) \quad x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0 \Rightarrow \text{إما } \boxed{x=0}$$
$$\text{أو: } \boxed{x=2}$$
$$f(0)=(0)^3-3(0)^2+1=1$$
$$f(2)=(2)^3-3(2)^2+1=-3$$

$f(x)+1=0 \iff f(x)=-1$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty,0[$

$f(]-\infty,0[) =]-\infty,1[\ni -1$

$\Leftarrow$ يوجد للمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد في المجال $]-\infty,0[$.

f مستمر ومتناقص تماماً على $[0,2]$

$f([0,2]) = [-3,1] \ni -1$

$\Leftarrow$ يوجد للمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد في المجال $[0,2]$

f مستمر ومتزايد تماماً على $]2,+\infty[$

$f(]2,+\infty[) =]-3,+\infty[\ni -1$

يوجد للمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد في المجال $]2,+\infty[$

مما سبق كله نستنتج أن للمعادلة $f(x)+1=0$ ثلاثة حلول في R

26/73 ليكن f التابع المعرف على $I=[0,3]$ وفق:

$f(x)=x^2-2x-3$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

② استنتج قيم x التي تحقق: $f(x)=0$

③ عين $f([0,3])$.

الحل: ① f معرف ومستمر واشتقاقي على R فهو مستمر واشتقاقي على $[0,3]$

$f(0)=(0)^2-2(0)-3=-3$

$f(3)=(3)^2-2(3)-3=0$

$f'(x)=2x-2 \Rightarrow f'(x)=0$

$2x-2=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$

$f(1)=(1)^2-2(1)-3=-4$

x	0		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

② $f(x)=0$ ننظر إلى سطر $f(x)$ ونبحث عن الصفر ثم ننظر إلى الرقم الذي فوقه فنجد $x=3$

③ $f([0,3])=f([0,1])\cup f([1,3])$

$=[-4,-3]\cup[-4,0]=[-4,0]$

لا يمكن كتابتها مباشرة

$\frac{5}{89}$ ليكن $f(x) = x^3 - 3x + 5$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

2) تحقق أن للمعادلة $f(x)=0$ جذراً وحيداً يقع بين -3 و -2

الحل: 1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

إما: $\boxed{x = 1} \Rightarrow f(1) = (1)^3 - 3(1) + 5 = 3$

أو: $\boxed{x = -1} \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 5 = 7$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

2) f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty, -1]$

$$0 \in]-\infty, 7] = f(]-\infty, -1])$$

$\Leftarrow$ يوجد للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في المجال $]-\infty, -1]$

f مستمر ومتناقص تماماً على $[-1, 1]$

$$0 \notin [3, 7] = f([-1, +1])$$

$\Leftarrow$ وبالتالي ليس للمعادلة $f(x)=0$ حل في المجال $[-1, +1]$.

$$0 \notin [3, +\infty[= f([1, +\infty[)$$

فليس للمعادلة $f(x)=0$ حل في المجال $[1, +\infty[$

مما سبق نستنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في R هو α.

$$f(-3) = (-3)^3 - 3(-3) + 5 = -13 < 0$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 5 = 3 > 0$$

$$f(-2) \cdot f(-3) < 0$$

$$\alpha \in]-3, -2[.$$

حالة خاصة:

إذا كان f مستمراً ومطرداً على المجال $I = [a, b]$ وكان $f(a) \cdot f(b) < 0$ (أي أحدهما موجب والآخر سالب) كان للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في I.

$\frac{4}{104}$ ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

2) تحقق أن للمعادلة $f(x)=0$ ثلاثة جذور.

H.Work

التابع الدوري :

نقول عن التابع $y=f(x)$ أنه دوري دوره T إذا تحقق: $f(x+T)=f(x)$

ملاحظات :

إذا أردنا أن نوجد دور التابع بشكل سريع :

$f(x)=\cos(ax+b)$ دوره : $T=\frac{2\pi}{|a|}$

مثال : $f(x)=\cos x$

دوره $T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

$f(x)=\sin(ax+b)$ دوره : $T=\frac{2\pi}{|a|}$

مثال : $f(x)=\sin x$

دوره $T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

هام : لدراسة تغيرات تابع مثلثي :

ندرس تغيراته على المجال $D\cap[0,T]$

حيث T دوره و D مجموعة التعريف

وإذا كان فردي أو زوجي نكمل دراسته $[0,\frac{T}{2}]$.

$f(x)=\tan(ax+b)$ دوره $T=\frac{\pi}{|a|}$

$f(x)=\cot(ax+b)$ دوره $T=\frac{\pi}{|a|}$

*بعض المعادلات الخاصة المثلثية :

① $\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$\sin x=0 \Rightarrow x=\pi k$

مثال : التابع $f(x)=\tan x$

87

① أوجد مجموعة التعريف

② أثبت أنه فردي

③ أثبت أن f تابع دوري ودوره π

④ استنتج كفاية دراسة f على $[0,\frac{\pi}{2}[$ وادرس تغيرات f عليه.

⑤ ارسم c_f في $[0,\frac{\pi}{2}[$

الحل : ① $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$

البسط معرف على R والمقام على R

جذور المقام $\cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k \,;\, k\in Z$

معرف $D_f=R/\{\frac{\pi}{2}+\pi k \,;\, k\in Z\}$

② $x\in D_f \Rightarrow -x\in D_f$

$f(-x)=-f(x)$

$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-f(x)$

إذاً التابع فردي أي متناظر بالنسبة للمبدأ

③ $f(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}$

$\frac{\sin x}{\cos x}=f(x)$ دوري دوره $T=\pi$

④ بما أن f دوري دوره π فنكتفي دراسته على المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ والذي طوله π

وبما أن f فردي فمنحنيه متناظر بالنسبة للمبدأ لذلك نكتفي دراسته على $[0, \frac{\pi}{2}[$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $[0, \frac{\pi}{2}[$

$$f(0) = \tan(0) = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\Delta_1 : x = \frac{\pi}{2}$ مقارب شاقولي لـ C_f في جوار $+\infty$.

$$f'(x) = (\tan x)' = 1 + \tan^2 x > 0$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

تمرينات ومسائل البحث الثالث:

2/104 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$$

① أعط معادلة لمماس C في النقطة التي تساوي فاصلتها $x = 1$.

② هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $\Delta_1 : y = -4x$

③ هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $\Delta_2 : y = 3x - 2$

الحل:

① $y_A = f(x_A)$

$$\Rightarrow f(1) = \frac{1^2 - 3(1) + 1}{1 + 1} = \frac{1 - 3 + 1}{2} = \frac{-1}{2}$$

$A(1, -\frac{1}{2})$ نقطة التماس.

f اشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ومشتقه:

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1) - 1(x^2 - 3x + 1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - 3x - 3 - x^2 + 3x - 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} \; ; \; m = f'(1) = \frac{1 + 2 - 4}{4}$$

$$= \boxed{\frac{-1}{4}}$$

$$T : y - y_A = m(x - x_A).$$

$$T : y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

$\times 4$

$\Rightarrow T: 4y+2=-1(x-1)$

$\boxed{T: 4y+x+1=0}$

② بفرض أن C يقبل مماساً T_0 يوازي Δ

فلها نفس الميل أي: $m=-4$

وبفرض أن $M_0(x_0, y_0)$

هي نقطة التماس.

$m_2 = f'(x_0) = -4$

$\frac{x_0^2+2x_0-4}{(x_0+1)^2} = -4$

$\Rightarrow x_0^2+2x_0-4 = -4(x_0+1)^2$

$\Rightarrow x_0^2+2x_0-4 = -4(x_0^2+2x_0+1)$

$\Rightarrow x_0^2+2x_0-4 = -4x_0^2-8x_0-4$

$\Rightarrow x_0^2+2x_0-4+4x_0^2+8x_0+4=0$

$\Rightarrow 5x_0^2+10x_0=0$

$\Rightarrow x_0(5x_0+10)=0$

إما: $x_0=0$

أو: $5x_0+10=0 \Rightarrow 5x_0=-10$

$\Rightarrow x_0=-2$

$\Leftarrow$ C يقبل مماسين يوازيان Δ_1

③ $m_{\Delta_2} = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$

بفرض أن المماس المطلوب هو T_1

وبما أن $T_1 // \Delta_2 \Leftarrow$ $m_{T_1} = \frac{3}{2}$

بفرض $M_1(x_1, y_1)$ نقطة التماس.

$m_{T_1} = f'(x_1) = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{x_1^2+2x_1-4}{(x_1+1)^2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 2(x_1^2+2x_1-4) = 3(x_1+1)^2$

$\Rightarrow 2x_1^2+4x_1-8 = 3(x_1^2+2x_1+1)$

$\Rightarrow 2x_1^2+4x_1-8 = 3x_1^2+6x_1+3$

$\Rightarrow 2x_1^2+4x_1-8-3x_1^2-6x_1-3=0$

$\Rightarrow -x_1^2-2x_1-11=0$

$\Rightarrow \Delta = (-2)^2-4(-1)(-11)$

$= 4-44 = -40 < 0$

$\Leftarrow$ المعادلة مستحيلة الحل

لا يوجد مماس يحقق المطلوب.

H.work $\frac{6}{105}$

ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = 3x^4+4x^3-12x^2+4$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

أ. محمد أحمد ......

0964848890

M-Ah

14/108

التابع f معرف على $[0,1[$ وفق: $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ والمطلوب:

① هل f اشتقاقي عند الصفر

② احسب f' على $]0,1[$.

الحل:

① $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$= \frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}-0}{x}$; $D_g=]0,1[$

$\lim_{x\to 0} g(x)=\frac{0}{0}$ ح.ع.ت

$g(x)=\frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}{x}$

عندما $x\to 0^+$ فإن $x>0 \Leftarrow x=\sqrt{x^2}$

$g(x)=\frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}{\sqrt{x^2}}=\sqrt{\frac{\frac{x^3}{1-x}}{x^2}}=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

$\lim_{x\to 0} g(x)=0\in\mathbb{R}$

f يقبل الاشتقاق عند الصفر و $f'(0)=0$

② $f'(x)=\frac{\left(\frac{x^3}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$

$=\frac{\frac{3x^2(1-x)-(-1)(x^3)}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$

$=\frac{\frac{3x^2-3x^3+x^3}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$

$=\frac{\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}=\frac{3x^2-2x^3}{2(1-x)^2\cdot\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$

$=\frac{3x^2-2x^3}{2\sqrt{(1-x)^4\times\frac{x^3}{1-x}}}=\frac{3x^2-2x^3}{2\sqrt{(1-x)^3x^3}}$

18/108

ليكن f التابع المعرف وفق: $f(x)=ax^3+bx^2+1$

هل يمكن تعيين a و b كي يقبل C_f مماساً أفقياً في النقطة $A(1,2)$ منه.

الحل:

$A(1,2)\in C \Rightarrow f(1)=2$

$a(1)^3+b(1)^2+1=2$

$a+b+1=2 \Rightarrow \boxed{a=-b+1}$ ①

بما أن المماس في A أفقي فميله معدوم $\Leftarrow f'(1)=0$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$.

$f'(x)=3ax^2+2bx$

$f'(1)=0\Rightarrow 3a(1)^2+2b(1)=0$

$\Rightarrow 3a+2b=0$ نعوض ① في ②

$\Rightarrow 3(-b+1)+2b=0$

$-3b+3+2b=0 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$① \Rightarrow \boxed{a} = -3+1 = -2$

$f(x) = -2x^3+3x^2+1$

19X08

a و b عددان حقيقيان

C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=\frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$$

عين a و b لتكون $y=4x+3$ معادلة المماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها 0 منه.

الحل: لتكن A نقطة التماس

$A\in T \Rightarrow y_A = 4(0)+3 = 3$

$A(0,3)$

$A\in C_f \Rightarrow f(0)=3$

$$\Rightarrow \frac{3(0)^2+a(0)+b}{(0+1)^2}=3$$

$\Rightarrow b=3$

f اشتقاقي على R:

$$f'(x)=\frac{(9x^2+a)(x^2+1)-2x(3x^3+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$m_T = 4 \Rightarrow f'(0)=4$

$$\frac{(a)(1)-0}{1}=4 \Rightarrow a=4$$

$$f(x)=\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$$

ص 109

a عدد حقيقي و f هو التابع المعرف على R وفق:

$f(x)=ax^3+3x^2+3x$ هل يمكن تعيين a ليكون للتابع f قيمة حدية $x=1$

الحل: بما أن f اشتقاقي على R فهو اشتقاقي عند 1 وبما أن له قيمة حدية

$f'(1)=0$

$f'(x)=3ax^2+6x+3$

$f'(1)=0 \Rightarrow 3ax^2+6x+3=0$

$\Rightarrow 3a+9=0$

$\Rightarrow 3a=-9 \Rightarrow a=-3$

24 ص 109

ليكن f التابع المعرف على $[1,+\infty[$ وفق: $f(x)=x+\sqrt{x-1}-4$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً لها وأثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً

② احسب حصراً للقيمة التقريبية لذلك الجذر.

الحل ①: f معرف ومستمر واشتقاقي على $[1,+\infty[$

واشتقاقي على $]1,+\infty[$

$f(1)=1+\sqrt{1-1}-4=-3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty+\infty=+\infty$

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2\sqrt{x-1}+1}{2\sqrt{x-1}}>0$$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-3 ↗	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على $[1,+\infty[$

$0 \in [-3,+\infty[= f([1,+\infty[)$

⇐ يوجد للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في المجال $[1,+\infty[$

(2) $f(x)=0 \Rightarrow x+\sqrt{x-1}-4=0$

$\Rightarrow \sqrt{x-1}=-x+4$

$x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$

$-x+4\geq 0 \Rightarrow x\leq 4$

$\Big\}\ x\in D_f=[1,4]$

$\Rightarrow$ بالتربيع $\Rightarrow x-1=(-x+4)^2$

$\Rightarrow x-1=x^2-8x+16$

$\Rightarrow x^2-9x+17=0$

$\Delta=(-9)^2-4(1)(17)=81-68$

$=13>0$

فالمعادلة حلان:

$x_1=\frac{9+\sqrt{13}}{2}\approx 6,25\notin D$

$x_2=\frac{9-\sqrt{13}}{2}\approx 2,25\in D$

"كن مع الله ولا تبالي"

2024

تمرين (27/110) ← في معلم متجانس

نفرض أن (C) هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

(1) أوجد نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$

(2) أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل للخط C

(4) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً لها.

(5) أثبت أن النقطة $I(-1,-3)$ مركز تناظر للخط C.

(3) ادرس نهاية f عند -1 وماذا تستنتج فيما يتعلق بالخط C.

(6) ارسم مقاربات C ثم ارسم C.

(انتبه الى ترتيب الطلبات.)

(حسب الأرقام حل الترتيب)

الحل:

(1) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x}=\pm\infty$

(2) $f(x)-y_d=\frac{2x^2+x+7}{x+1}-(2x-1)$

$=\frac{2x^2+x+7-2x^2+x-2x+1}{(x+1)}$

$=\frac{8}{(x+1)} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y_d]=0$

d مقارب مائل لـ C_f في جوار $\pm\infty$.

③ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \dfrac{2-1+7}{0^-} = \dfrac{8}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \dfrac{8}{0^+} = +\infty$

$\Delta : x=-1$ هو مقارب شاقولي لـ C_f في جوار $\pm\infty$

④ f مستمر ومعرف واشتقاقي على $R\setminus\{-1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{(4x+1)(x+1) - 1(2x^2+x+7)}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{4x^2+4x+x+1-2x^2-x-7}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x^2+4x-6=0$

$\xRightarrow{(\div 2)} x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

إما $x=-3 \Rightarrow f(-3) = \dfrac{18-3+7}{-2} = -11$

أو: $x=1 \Rightarrow f(1) = \dfrac{2+1+7}{2} = 5$

x	$-\infty$	-3	-1	$+1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ ‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	-11	$\searrow -\infty$ ‖ $+\infty \searrow$	5	$\nearrow +\infty$

⑤ لإثبات أن $I(-1,-3)$ مركز تناظر C_f

$2x_0 - x = 2(-1) - x = -2-x$

$\forall x \in D_f \Rightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$\Rightarrow -x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$\xRightarrow{-2} -2-x \in]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$\Rightarrow 2x_0 - x \in D_f$ ---①

$f(2x_0-x) = \dfrac{2(-2-x)^2+(-2-x)+7}{-2-x+1}$

$= \dfrac{2[(-2)^2-2(-2)(x)+(x)^2]-2-x+7}{-1-x}$

$f(2x_0-x) = \dfrac{2(4+4x+x^2)+5-x}{-1-x}$

$= \dfrac{8+8x+2x^2+5-x}{-1-x} = \dfrac{2x^2+7x+13}{(-1-x)}$

$2y_0 - f(x) = 2(-3) - \dfrac{2x^2+x+7}{x+1}$

$= \dfrac{-6x-6-2x^2-x-7}{x+1}$

$= \dfrac{-2x^2-7x-13}{x+1} = \dfrac{-(2x^2+7x+13)}{(x+1)}$

$2y_0 - f(x) = \dfrac{2x^2+7x+13}{(x+1)}$

$\Rightarrow f(2x_0-x) = 2y_0 - f(x)$ ---②

من ① و ② نستنتج أن C_f متناظر بالنسبة لـ $I(-1,-3)$

$\frac{29}{110}$ في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+8}$$

① احسب نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$ هل يقبل C مقارباً أفقياً.

② تحقق أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C

③ نظم جدولاً بتغيرات f

④ ارسم مقاربات C ثم ارسم C.

الحل: ①

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty-\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty-\infty \quad \text{ع.ت}$$

$$f(x) = \frac{(x-\sqrt{x^2+8})(x+\sqrt{x^2+8})}{(x+\sqrt{x^2+8})}$$

$$= \frac{x^2-(x^2+8)}{x+\sqrt{x^2+8}} = \frac{x^2-x^2-8}{x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$= \frac{-8}{x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-8}{+\infty} = 0$$

$y=0$ مقارب لـ C منطبق على $x'x$ في جوار $+\infty$

$d: y = 2x-1$

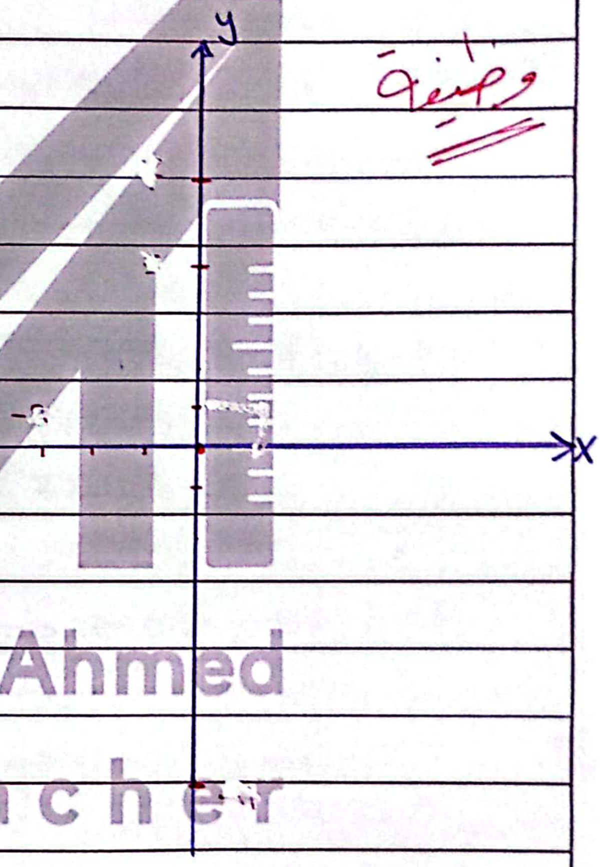
x	0	1
y	-1	1

$x=0 \Rightarrow f(0) = 7$

$(0,7)$

⇐ عام مع

وظيفة



(2)

$f(x) - y_d = x - \sqrt{x^2+8} - 2x$

$= -x - \sqrt{x^2+8}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - y_d] = +\infty - \infty$ ع.ت

$f(x) - y_d = \dfrac{[-x - \sqrt{x^2+8}](-x + \sqrt{x^2+8})}{(-x + \sqrt{x^2+8})}$

$= \dfrac{x^2 - (x^2+8)}{-x+\sqrt{x^2+8}} = \dfrac{x^2 - x^2 - 8}{-x + \sqrt{x^2+8}}$

$= \dfrac{-8}{-x+\sqrt{x^2+8}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - y_d] = \dfrac{-8}{+\infty+\infty} = 0$

d مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

(3)

f معرف وقابل للاشتقاق على $]-\infty, +\infty[$

$f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+8}} = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

$= \dfrac{\sqrt{x^2+8} - x}{\sqrt{x^2+8}} \Rightarrow f'(x) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+8} - x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+8} = x$

شرط الحل هو $x \geq 0$ بالتربيع نجد

$x^2 + 8 = x^2 \Rightarrow \boxed{8 = 0}$ مستحيلة

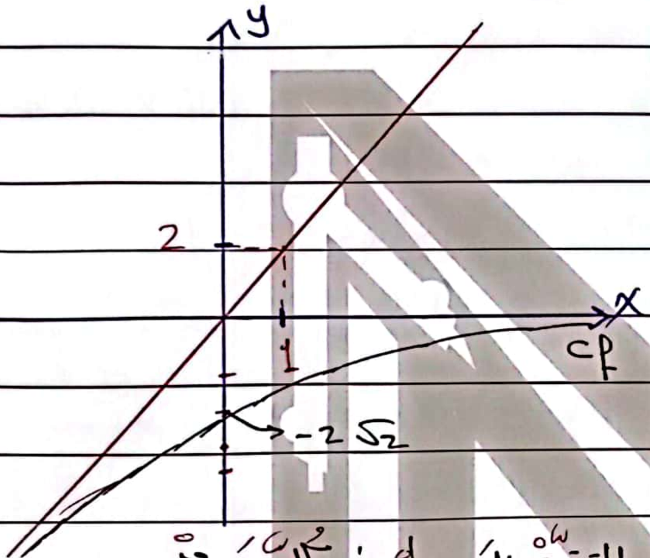
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

$d: y = 2x$

x	0	1
y	0	2

$x = 0 \Rightarrow f(0) = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$

C يمر من $(0, -2\sqrt{2})$



التقدم البسيط في كل يوم .....

يؤدي إلى نتائج أكبر .....

2024

#Bac-2024

أ. محمد .....

#لا تقلقوا 0964848890

M-Ah

تم بعون الله الانتهاء من كرّاس

النهايات & الاشتقاق 2024

ترقبوا!!!!! ..... الجلسة الامتحانية 2024

#لا!!! تقلقوا ..... 2024 Bac


مكثفة المنهاج كاملاً
في مادة الرياضيات
لطلاب البكالوريا 2024
مع المدرس : محمد أحمد
الفرقان مفرق مكتبة الرسالة
ALL US : 0964848890