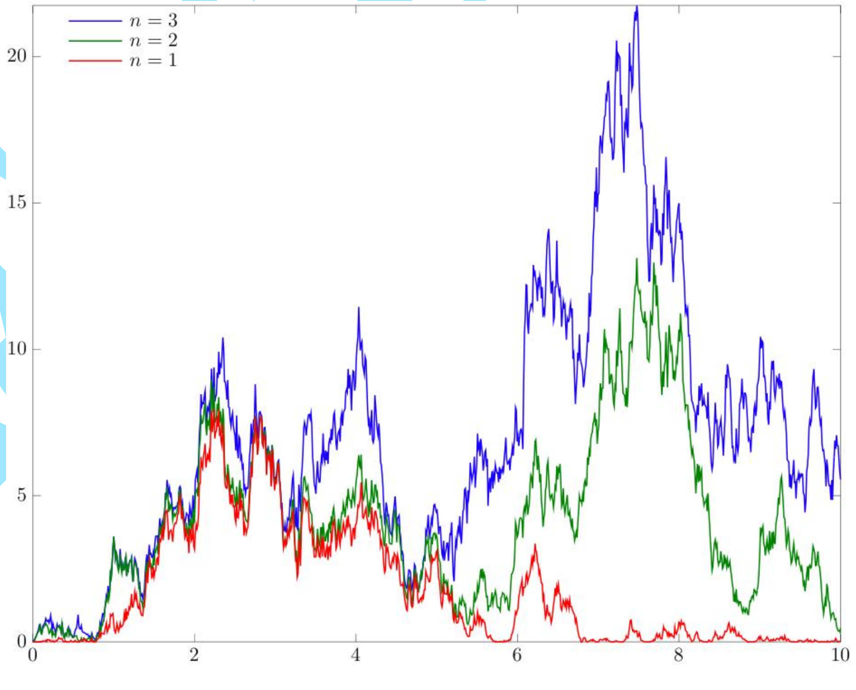
المحاضرة الرابعة

السنة الثالثة – إحصاء رياضي

طوريات عشوائية (1)



مدرس المقرر د. هادية طهماز

ماركوفيات

يصادفنا في كثير من المجالات التطبيقية النظرية على حد سواء صنف من الطوريات العشوائية التي تتمتع بالخاصية التالية:

إن الاحتمالات المستقبلية لهذا الطوري العشوائي لدى حاضر معلوم مستقلة عما يحدث في الماضي

تدعى هذه الخاصية **بخاصية ماركوف** للطوريات العشوائية.

بناءً على ذلك يمكننا تقديم الصيغة الرياضية للطوري العشوائي الماركوفي على النحو الآتي.

تعريف طوري ماركوف Markov Process:

ليكن $\{X_t\}_{t\in T}$ طوري عشوائي معطى، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يوجد $t_0, t_1, \dots, t_n \in T$ مع $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ وكل $y, x, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0 \in \mathbb{R}$ ، تكون العلاقة التالية محققة:

$$P\left(X_{t_n} = y \middle| X_{t_{n-1}} = x, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = x_0\right) = P\left(X_{t_n} = y \middle| X_{t_{n-1}} = x\right)$$

عندئذ يدعى هذا الطوري بطوري ماركوف.

تعريف دالة التوزيع الشرطية لطوري عشوائي:

ليكن $\{X_t\}_{t\in T}$ طوري عشـــوائي معطى عندئذ تعرف دالة التوزيع الشـــرطية لهذا الطوري بالعلاقة التالية :

$$F_X(t_1,x;t_2,y)=P(X_{t_2}<y|X_{t_1}=x)$$

تعريف الطوري الماركوفي المتجانس:

ليكن $\{X_t\}_{t\in T}$ طوري عشـــوائي ماركوفي، فإذا كان من أجل كل $t_1,t_2\in T$ مع $t_1<t_2$ وكل $y,x\in\mathbb{R}$ ، تكون العلاقة التالية محققة :

$$F_X(t_1,x;t_2,y)=F_X(0,x;t_2-t_1,y)$$

أي أن دالة التوزيع الشرطية صامدة أمام تغيرات الزمن(أي دالة التوزيع متعلقة بالفرق بين t_2-t_1 فقط)

مبرهنة:

ليكن $\{X_t\}_{t\in T}$ طوري عشوائي حقيقي ذو تزايدات مستقلة ومحققاً للعلاقة الآتية :

$$P(X_{t_0}=b)=1 \quad ;b\ is\ a\ real\ constant$$

عندئذ سيكون لدينا ما يلي :

1- الطوري العشوائي المعطى هو طوري ماركوفي.

2- من أجل أي عدد طبيعي $n\in\mathbb{N}$ سيكون لدينا :

$$X_{t_n} = b + \sum_{m=1}^{n} (X_{t_m} - X_{t_{m-1}}) \quad p-a.s$$

تمرين:

ليكن $\{X_t\}_{t\in T}$ طوري ماركوفي مع $t_0 \leq t < a$ لكل $t \in T$ علماً أن a ثابت محدد، وكذلك تحقق العلاقة : $P(X_{t_0} = 0) = 1$، المطلوب بين فيما إذا كان هذا الطوري ذو تزايدات مستقلة.

الحل:

من أجل ذلك ليكن $t_1, t_2 \in T$ مع $t_0 \leq t_1 < t_2 < a$ و كل $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ كيفيات، يمكننا أن نكتب ما يلي (من خاصية ماركوف) :

$$P(X_{t_2} = x_2 | X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = 0)$$

$$= P(X_{t_2} = x_2 | X_{t_1} = x_1) \dots (2)$$

من جهة أخرى حسب تعريف الاحتمال الشرطي لدينا :

$$P(X_{t_2} = x_2 | X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = 0)$$

$$= \frac{P(X_{t_2} = x_2, X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = 0)}{P(X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = 0)} \dots (3)$$

$$P(X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = 0)$$

$$= P(X_{t_0} = 0).P(X_{t_1} = x_1 | X_{t_0} = 0) \quad \dots (4)$$

الآن من العلاقات السابقة (1) و(2) و(3) و(4) يمكننا أن نكتب:

$$P(X_{t_2} = x_2, X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = 0)$$

$$= P(X_{t_2} = x_2 | X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = 0)$$

$$= P(X_{t_2} - X_{t_1} = x_2 - x_1 | X_{t_1} - X_{t_0} = x_1, X_{t_0} = 0) \dots (5)$$

$$P(X_{t_2} = x_2, X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = 0)$$

$$= P(X_{t_2} = x_2 | X_{t_1} = x_1) * P(X_{t_1} = x_1 | X_{t_0} = 0) \quad \dots (6)$$

لنفترض جدلاً أن الطوري المعطى ذو تزايدات مستقلة، عندئذ يمكننا أن نكتب:

$$P(X_{t_2} = x_2, X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = 0)$$

$$= P(X_{t_2} - X_{t_1} = x_2 - x_1) * P(X_{t_1} - X_{t_0} = x_1) * \mathrm{P}(X_{t_0} = 0) \dots (7)$$

بمقارنة العلاقات (5) و(6) و(7) نلاحظ أن المتغير X_{t_2} مســتقل عن المتغير X_{t_1}،

وكذلك X_{t_1} مســتقل عن X_{t_0}، وهذا اختراق لخاصــية ماركوف لأن X_{t_2} متعلق بـ

X_{t_1} وسبب هذا الاختراق هو فرضنا الجدلي بأن هذا الطوري ذو تزايدات مستقلة، ولإزالة هذا التناقض يجب أن يكون هذا الطوري غير متمتع بخاصية التزايدات المستقلة.

نتائج:

1- نستنتج من التمرين السابق والمبرهنة السابقة أن الطوريات العشوائية الحقيقية ذات التزايدات المستقلة والتي تحقق العلاقة $P\left(X_{t_0}=b\right)=1$ هي طوريات ماركوفية ولكن العكس غير صحيح، أي أنه ليس كل الطوريات الماركوفية تتمتع بخاصية التزايدات المستقلة.

2- بالرجوع لتعريف الطوري البواسوني المتجانس نجد أنه طوري ماركوفي.

تمرين:

ليكن $\{X_t\}_{t\in T}$ طوري ماركوف متجانس بتزايدات مســـتقلة عندئذ بين فيما إذا كان

هذا الطوري يتمتع بخاصية التزايدات المتجانسة أم لا؟

الحل:

$$F_{X_t-X_s}(x)=P_{X_t-X_s}\big((-\infty,x)\big)=P(X_t-X_s<x)$$

$$=P(X_t-X_s<x|X_s\in\mathbb{R})$$

$$=P(X_{t-s}<x|X_s\in\mathbb{R})=P(X_{t-s}<x)$$

$$=F_{X_{t-s}}(x)$$

وبحسـب تعريف التزايدات المتجانسـة لطوري عشـوائي فإنه سـينتج لدينا أن الطوري المعطى يتمتع بخاصية التزايدات المتجانسة.