منشورات جامعة حلب
كلية العلوم

# نظرية القياس

د. شحادة الأسدي
أستاذ في قسم الرياضيات
جامعة حلب

د. غادة علي جوجة
مدرسة في قسم الرياضيات
جامعة دمشق

مديرية الكتب و المطبوعات
٢٠٠٩ - ٢٠١٠

منشورات جامعة حلب

كلية العلوم

# نظرية القياس

الدكتور

شحادة الاسدي

أستاذ في قسم الرياضيات – جامعة حلب

الدكتورة

غادة علي جوجة

مدرّسة في قسم الرياضيات – جامعة دمشق

لطلاب السنة الثالثة

قسم الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

١٤٣١هـ - ٢٠١٠م

# الفهرس

## الفصل الأول: نظرية القياس

## الفصل الثاني

## التوابع القيوسة



## الفصل الثالث

## نظرية التكامل

## الفصل الرابع

## القياسات في فضاءات الجداء ونظرية فوبيني



## ملحق

# المقدّمة

إنّ مفهوم القياس $\mu(A)$ لمجموعة $A$ هو تعميم طبيعي لمفهوم:

١) الطول $\ell(\Delta)$ لمجال $\Delta$.

٢) المساحة $S(F)$ لشكل مستوٍ $F$.

٣) الحجم $V(G)$ لجسم $G$.

٤) التزايد $\varphi(b)-\varphi(a)$ لتابع غير متناقص $\varphi(t)$ على المجال $[a,b)$.

إنّ مفهوم القياس قد ظهر في نظرية التوابع لمتحول حقيقي ، نتيجة لدراسة وتطوير مفهوم التكامل ومن ثم انتقل هذا المفهوم إلى نظرية الاحتمالات وإلى نظرية تحريك الجمل وإلى التحليل التابعي وغيرها من المواضيع الرياضية.

كُرّس الفصل الأول من الكتاب للمفاهيم الأساسية، فقد عرفنا فيه مفهوم قياس مجموعة والخواص البسيطة للقياس ثم انتقلنا إلى القياس الخارجي لمجموعة مفهوم المجموعة القيوسة، كما عرضنا في هذا الفصل مسألة تمديد القياس ووحدانية ذلك التمديد وفي هذا الفصل استعرضنا أيضاً مفهوم قياس ليبيغ للمجموعات الخطية والمحدودة، وكمثال هام عن مفهوم ليبيغ استعرضنا هذا المفهوم بالنسبة للمجموعات المحدودة وغير المحدودة من المحور الحقيقي ومن ثم بينا آلية نقل قياس ليبيغ إلى الفضاء الإقليدي ذي الـ $n$ بعداً.

استعرضنا في الفصل الثاني مفهوم التوابع القيوسة، هذا المفهوم الذي عرف أولاً من قِبل الرياضي ليبيغ في بنيته المتطورة لنظرية التكامل. في هذا الفصل درسنا أيضاً خواص التوابع القيوسة، كما درسنا الأشكال المختلفة لتقارب متتاليات التوابع القيوسة والصلة بين مختلف أشكال التقارب.

من المعلوم، في التحليل الرياضي، بأنه لا يمكن للتوابع القابلة للمكاملة وفق مفهوم ريمان أن تمتلك عدداً لا نهائياً من نقاط الانقطاع ومن السهل إعطاء مثال لتابع قيوس ومحدود وغير قابل للمكاملة وفق مفهوم ريمان وهو تابع ديرخليه، التابع المميز لمجموعة الأعداد العادية $\mathbb{Q}$.

خلافاً لتكامل ريمان تنحصر فكرة تكامل ليبيغ في تقسيم ساحة المكاملة إلى أجزاء بحيث يمكن في القسم الواحد ألاّ تجتمع القيم القريبة للمتغير وإنما بحيث تكون قيم التابع قريبة من بعضها. إنّ هذا المدخل يمكننا من تعميم عملية المكاملة ليس فقط من أجل التوابع القيوسة المتعددة الانقطاعات (يمكن أن تكون غير منتهية العدد) وإنما من أجل التوابع القيوسة المعرفة على فضاء مجرّد ذي قياس.

استعرضنا في الفصل الثالث تكامل ليبيغ ودرسنا خواصه كما درسنا الصلة بين تكامل ليبيغ وتكامل ريمان، وكُرّسَ الفصل الرابع من الكتاب للقياسات في فضاءات الجداء ونظرية فوبيني.

إنّ مواضيع الكتاب منسجمة مع منهاج نظرية القياس الذي يُدرّس في الفصل الثاني لطلاب السنة الثالثة في قسم الرياضيات ويمكن لطلاب الرياضيات التطبيقية ولاسيما الذين يدرسون نظرية الاحتمالات الاستفادة من وجهتي النظر النظرية والتطبيقية.

أخيراً نرجو أن يحقق هذا الكتاب الغاية المرجوة منه، والله ولي التوفيق.

**المؤلفان**

**حلب في ٤/١/ ٢٠١٠**

# الفصل الأول

## نظرية القياس

## *Measure Theory*

### 1§. العمليات على المجموعات. المجموعات المرتبة

### *Operation on Sets . Ordered Sets*

### 1 – العمليات على المجموعات:

سنستعرض فيما يأتي بعض التعاريف الأساسية المتعلقة بالعمليات على المجموعات وبعض خواص تلك العمليات. وسنرمز لتلك المجموعات بأحرف لاتينية كبيرة.

لتكن $A,B$ مجموعتين ما. نسمي المجموعة $A\bigcup B$ المؤلفة من جميع العناصر المنتمية لإحدى المجموعتين $A,B$ على الأقل باجتماع هاتين المجموعتين ونسمي المجموعة $A\bigcap B$ المؤلفة من جميع العناصر المنتمية لكلتا المجموعتين $A,B$ بتقاطع هاتين المجموعتين.

نسمي مجموعة العناصر $A\setminus B$ المؤلفة من عناصر المجموعة $A$ والتي لاتنتمي إلى $B$ بفرق المجموعتين $A,B$. (لا نفترض هنا أن $B\subseteq A$ )

إن الفرق التناظري $A\,\Delta B$ للمجموعتين $A,B$ هو بالتعريف :

$$A\Delta B=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$$

لتكن $X$ مجموعة ما، ولتكن $A$ مجموعة جزئية من $X$. إنّ متممة المجموعة $A$ هي بالتعريف:

$$\hat{A}=X\setminus A$$

## خواص العمليات على المجموعات

لتكن $X$ مجموعة ما غير خالية، ولتكن $A,B$ مجمـوعتين جـزئيتين مـن $X$ عندئـذ:

1) $(A\cup B)^{\wedge}=\hat{A}\cap\hat{B} \quad , \quad (A\cap B)^{\wedge}=\hat{A}\cup\hat{B}$

2) $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

3) $A\cap B=(A\cup B)\setminus(A\Delta B)$

4) $A\cup B=(A\Delta B)\Delta(A\cap B)$

5) $A\setminus B=A\Delta(A\cap B)$

6) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

## 2 - المجموعات المرتبة. توطئة زورن :

لتكن $X$ مجموعة ما غيـر خاليــة، نقــول إن $X$ مجموعــة مرتبــة جزئيــاً (*ordered Partially*) إذا عرفنا من أجل بعض أزواج عناصرها، علاقة ترتيــب $\leq$ تحقق الشروط الآتية :

1) $a\leq a$ (انعكاسية)

2) $a\leq b \ \wedge\ b\leq c \Rightarrow a\leq c$ (متعدية)

3) $a\leq b \ \wedge\ b\leq a \ \Rightarrow\ a=b$ (ضد تناظرية) (*antisymmetr*)

نسمي العنصرين $a,b\in X$ بعنصرين مقارنين (*comparable*) إذا تحقق مــن أجلهما $a\leq b$ أو $b\leq a$ . تسمى المجموعة $X$ مرتبة خطياً(*linearly ordered*) إذا كان أي عنصرين من $X$ مقارنين.

لتكن $X$ مجموعة مرتبة جزئياً . نقول عن المجموعة الجزئية $Y\subseteq X$ إنّهـا محدودة من الأعلى إذا وجد عنصر $b\in X$ بحيث إنّه مــن أجــل أي $y\in Y$ يكــون $y\leq b$. في هذه الحالة، يسمى $b$ حداً أعلى للمجموعة $Y$.

يسمى العنصر $c\in X$ عنصراً أعظمياً للمجموعة $X$ إذا أدى تحقــق العلاقــة $a\leq a$ إلى أن $a=c$.

**توطئة زورن (*Zorn's Lemma*)**

إذا وجد لأية مجموعة جزئية مرتبة خطياً من مجموعة مرتبة جزئيــاً $X$ حــداً أعلى، فإنه يوجد في $X$ عنصراً أعظمياً.

## § 2. جمل المجموعات *Systems of set* ابتداء المقرر

### 1 – حلقات وجبور المجموعات

لتكن $X$ مجموعة ما غير خاليــة، ســنرمز لمجموعــة أجـزاء $X$ بـــ $2^X$ أو $\mathfrak{M}(X)$ ونسمي كل مجموعة جزئية من $2^X$ جملة من أجزاء $X$ (أو صــفاً مــن أجزاء $X$) كما سنرمز لجمل المجموعات بأحرف قوطيــة كبيــرة (*Gothic Letters*) وسنعرف جملاً من المجموعات مغلقة بالنسبة لعمليات معينة.

**تعريف (2.1)**

تسمى جملة المجموعات غير الخالية $\mathfrak{R}$ حلقة، إذا نتج من كون $A, B \in \mathfrak{R}$ أن $A \cup B \in \mathfrak{R}$ وأن $A \setminus B \in \mathfrak{R}$.

بعبارة أخرى تكون $\mathfrak{R}$ حلقة إذا كانت مغلقة بالنسبة لعمليتي الاجتماع والفرق.

لنلاحظ أنه إذا كانت $\mathfrak{R}$ حلقة، فإنه من أجل أية مجمــوعتين $A, B \in \mathfrak{R}$ يكــون $A \Delta B \in \mathfrak{R}$ وأن $A \cap B \in \mathfrak{R}$. في الواقع إن هذا الأمر ينتج من كون أن:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
$$A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B)$$

أكثر من ذلك فإن $\varnothing \in \mathfrak{R}$، وذلك لأن $\varnothing = A \setminus A$.

بهذا نجد أن كل حلقة تكون مغلقة بالنسبة للاجتماع والفرق والفــرق التنــاظري وكذلك التقاطع.

من الواضح أن الحلقة تكون مغلقة بالنسبة للاجتماعات والتقاطعات المنتهية، أي إنه إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{R}$ فإنّ:

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_i \in \mathfrak{R}$$

وكذلك $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \Re$

**تعريف (2.2)**

الحلقة $\Re$ من المجموعات الجزئية من $X$ تسمى جبراً من المجموعات إذا احتوت على $X$.

من هذا التعريف، في حالة خاصة، ينتج أنه إذا كانت $\Re$ جبراً فإنه من $A \in \Re$ ينتج أن $\hat{A} \in \Re$ وذلك لأن:

$$\hat{A} = X \setminus A$$

**أمثلة :**

1 - لتكن $X$ مجموعة ما، عندئذ تكون $2^X$ مجموعة أجزاء $X$ جبراً.

2 - تشكل جملة جميع المجموعات المنتهية من الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ حلقة (إلا أنّها ليست جبراً).

3 - تشكل جملة جميع المجموعات الجزئية المحدودة من المحور الحقيقي حلقة (إلا أنّها ليست جبراً).

4 - لتكن $A$ مجموعة ما، عندئذ تشكل الجملة $\{\varnothing, A\}$ جبراً.

من المفيد في نظرية القياس إثبات صحة التوطئة الآتية.

**توطئة (2.1)**

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ متتالية ما من المجموعات المنتمية إلى الحلقة $\Re$، عندئذ توجد مجموعات $B_1, B_1, \ldots B_n, \ldots$ من $\Re$ تتمتع بالخواص الآتية:

نحن علينا بناءها

1 - $B_j \subseteq A_j \qquad (j = 1, 2, \ldots)$

2 - $B_j \cap B_k = \varnothing \qquad (j \neq k)$

3 - $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$

**البرهان**

لنبنِ المجموعات $B_j$ على النحو:

$$B_1 = A_1$$
$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$
$$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

بما أن $A_j$ من الحلقة $\mathfrak{R}$ فإن $B_j$ تكون كذلك، وكما أنه من الواضح أن $B_j$ تتمتع بالخواص المذكورة.

## 2 - الحلقات و σ – الجبور

من الضروري غالباً في نظرية القياس ألاّ نستعرض الاجتماعات والتقاطعات المنتهية فحسب وإنما القابلة للعد أيضاً. لذلك، فإنه من الطبيعي أن نعطي المفاهيم الآتية:

**تعريف (2.3)**

حلقة تامة

تسمى حلقة المجموعات $\mathfrak{R}$ ، σ – حلقة، إذا كان $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ وذلك من أجل أية متتالية من المجموعات $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ من $\mathfrak{R}$.

**تعريف (2.4)**

جبر تام

يسمى جبر المجموعات $\mathfrak{R}$، σ – جبراً، إذا كان $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ وذلك من أجل أية متتالية من المجموعات $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ من $\mathfrak{R}$.

من الواضح أنه إذا كان $\mathfrak{R}$، σ – حلقة (σ – جبر) فإن $\mathfrak{R}$ تحتوي على $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ وذلك من أجل أية متتالة $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ من $\mathfrak{R}$ .

كمثال على σ – جبر يمكن أن ناخذ $2^X$ مجموعة أجزاء $X$.

## 3 - تمديد الحلقات، تمديد الجبور

يتطلب الأمر غالباً في نظرية القياس تمديد جملة ما من المجموعات إلى حلقة (جبر) أو إلى σ – حلقة (σ – جبر) وسنبيّن هنا القضية الموافقة لذلك.

**مبرهنة (2.1)**

من أجل أية جملة غير خالية $\mathfrak{A}$ من المجموعات الجزئية من المجموعة $X$ توجد حلقة واحدة وواحدة فقط $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ تحتوي على الجملة $\mathfrak{A}$ ومحتواة في أية حلقة تحتوي على الجملة $\mathfrak{A}$.

**البرهان** نخبر مطهاوي

إن الحلقات التي تحتوي الجملة $\mathfrak{A}$ موجودة. على سبيل المثال، يمكن أن نأخذ $2^X$ مجموعة جميع أجزاء $X$ . لنستعرض تقاطع جميع الحلقات المحتوية على الجملة $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{A})=\bigcap_{\mathfrak{R}\in\Sigma}\mathfrak{R}$$

حيث $\sum$ مجموعة جميع الحلقات المحتوية على $\mathfrak{A}$. بما أنّ $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ تقاطع جميع الحلقات المحتوية على $\mathfrak{A}$ فإنها تكون محتواة في كل حلقة من تلك الحلقات ومن هنا تنتج وحدانية تلك الحلقة .

تسمى الحلقة $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ المبينة في المبرهنة (2.1) بالحلقة المولّدة بالجملة $\mathfrak{A}$ أو بالغطاء الحلقي للجملة $\mathfrak{A}$.

بعبارة أخرى، الغطاء الحلقي $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ المولد بالجملة $\mathfrak{A}$ هو تقاطع جميع الحلقات المحتوية على الجملة $\mathfrak{A}$ وهو أصغر حلقة محتوية على الجملة $\mathfrak{A}$.

**ملاحظة (2.1)**

إن البرهان المذكور للمبرهنة أعلاه ليس إنشائياً .إنه إذاً بسهولة نرى أنّ $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ هي جملة المجموعات الناجمة من مجموعات الجملة $\mathfrak{A}$ بتطبيق عدد منتهٍ من عمليات الاجتماع والفرق.

بالمثل، يبرهن على وجود $\sigma$ – حلقة المولّدة ، الجبر المولّد ، $\sigma$ – الجبر المولّد بالجملة $\mathfrak{A}$ .

**مبرهنة (2.2)**

من أجل أية جملة غير خالية $\mathfrak{A}$ من المجموعات الجزئية من $X$ يوجد $\sigma$ – جبر واحد وواحد فقط يحتوي على $\mathfrak{A}$ ومحتوى من أي $\sigma$ – جبر يحتوي على الجملة $\mathfrak{A}$ وهو أصغر $\sigma$ – جبر يحتوي على الجملة $\mathfrak{A}$ .

( نترك للطالب برهان هذا الأمر)

**أمثلة :**

1- ليكن $X=\mathbb{R}$ المحور الحقيقي ولتكن $\mathfrak{A}$ جملة جميع المجالات نصف المفتوحة من الشكل $[\alpha,\beta)$. من الواضح أن $\mathfrak{A}$ ليست حلقة وذلك لأنّ اجتماع مجالين نصف مفتوحين أو فرقهما في الحالة العامة ليس مجالاً نصف مفتوح.

لنبنِ الغطاء الحلقي $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ . بسهولة نجد أنّ الغطاء الحلقي يتألف من المجموعات التي هي اجتماع عدد منتهٍ من المجالات نصف المفتوحة من $\mathbb{R}$ . إنّ هذا الأمر ينتج من حقيقة أنّ فرق مجالين نصف مفتوحين من الشكل $[\alpha,\beta)$ هو إما مجموعة خالية أو مجال من النوع نفسه، أواجتماع لمجالين من النوع نفسه.

لنلاحظ أن $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ ليس جبراً وذلك لأن $\mathbb{R}\notin\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ .

2- ليكن $X=[a,b)$ مجالاً مثبتاً ولتكن $\mathfrak{A}$ جملة جميع المجالات نصف المفتوحة $[a,b)\supseteq[\alpha,\beta)$. في هذه الحالة، يكون الغطاء الحلقي هو اجتماع عدد منته من المجالات نصف المفتوحة من الشكل $[a,b)\supseteq[\alpha,\beta)$ . من الواضح، أن $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ جبر (إلا أنه ليس $\sigma$ – جبر)

**تعريف (2.3)**

ليكن $X$ فضاءً تبولوجياً، تسمي الجبر التام المولّد بصف المجموعات المفتوحة في $X$ بـــ $\sigma$ – جبر بوريل ونرمز له بـــ $B(X)$ أو $B_X$ ونسمي عناصر هذا الجبر التام مجموعات بوريلية .

من الواضح، أن كل مجموعة مغلقة في $X$ هي مجموعة بوريلية .

في حالة خاصة، من أجل $X=[a,b)$ نحصل على σ − الجبر $\mathfrak{B}([a,b))$ ونقول عن مجموعة $B \subseteq \mathbb{R}$ إنها بوريلية ومحدودة إذا كانت منتمية إلى $\mathfrak{B}([a,b))$.

**نتائج:**

1 - أي تقاطع لمجموعات مفتوحة في $X$ هو مجموعة بوريلية (إلاّ أنه ليس بالضرورة مفتوحة).

2 - أي اتحاد لمجموعات مغلقة في $X$ هو مجموعة بوريلية (إلاّ أنّه ليس بالضرورة مغلقة) .

3 - المجموعات من النمط $G_\delta$ (التقاطعات العدودة لمجموعات مفتوحة) والمجموعات من النمط $F_\sigma$ (الاجتماعات العدودة لمجموعات مغلقة) والمجموعات $G_{\delta\sigma}$ و $F_{\sigma\delta}$ (الاجتماعات العدودة لمجموعات من النمط $G_\delta$ والتقاطعات العدودة لمجموعات من النمط $F_\sigma$ على الترتيب) هي مجموعات بوريلية.

4 - إذا كان $X=\mathbb{R}$ فإن كلاً من المجالات $[a,b],[a,b),(a,b]$ هو مجموعة بوريلية . إذًا إنه في الواقع لدينا:

$$[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\tfrac{1}{n},b+\tfrac{1}{n}\right)$$

$$[a,b)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\tfrac{1}{n},b\right)$$

$$(a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a,b+\tfrac{1}{n}\right)$$

5 - كل مجموعة وحيدة العنصر هي مجموعة بوريلية (لماذا ؟).

6 - كل مجموعة عدودة هي مجموعة بوريلية (لماذا ؟).

## 3. § مفهوم قياس مجموعة . الخواص البسيطة للقياس

***Measure of a set . Simple properties of measures***

إن المفهوم العام لقياس مجموعة هو تعميم لمفاهيم الطول، المساحة، الحجم، الكتلة، الشحنة، ... سنستعرض في هذه الفقرة مفهوم قياس مجموعة على أنه تابع مجموعة حقيقي يحقق جملة من الشروط والخواص.

**تعريف (3.1)**

ليكن $\mathfrak{R}$ جبراً من المجموعات من أجزاء $X$ وليكن $\mu$ تابعاً حقيقياً معرفاً في $\mathfrak{R}$ . أي أن:

$$\mathfrak{R} \ni A \longrightarrow \mu(A) \in \mathbb{R}$$

يسمى $\mu$ قياساً (*) ،إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1) أياً كانت $A$ من $\mathfrak{R}$ فإن

$$\mu(A) \geq 0 \quad , \quad \mu(\varnothing) = 0$$

2) من أجل أية $\mathfrak{R} \ni A_1, A_2, \ldots$ بحيث إن $A_j \bigcap A_k = \varnothing \quad (j \neq k)$ و $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{R}$، يكون:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

أي أن القياس $\mu$ هو تابع مجموعة حقيقي غير سالب ويحقق الخاصة الجمعية العدودة ( الخاصة σ – جمعية ) .

من الواضح أن القياس $\mu$ تابع جمعي، أي أنه من أجل أية $\mathfrak{R} \ni B, A$ بحيث إن $A \bigcap B = \varnothing$ يكون :

$$\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

كما أن $\mu(\varnothing) = 0$ ينتج من كون $\mu$ σ – جمعياً.

---

(*) كما يمكن تعريف القياس على σ – جبر.

لنستعرض الخواص البسيطة للقياس.

**الخواص البسيطة للقياس**

**1) اطراد القياس** $(Monotonicity)$

إذا كان $B,A \ni \mathfrak{R}$ وكان $A \subseteq B$ فإنّ $\mu(A) \le \mu(B)$

**البرهان**

بما أنّ:

$$B = A \bigcup (B \setminus A)$$

حيث $B \setminus A \in \mathfrak{R}$ و $A \bigcap (B \setminus A) = \varnothing$ فإنّه استناداً إلى جمعية القياس يكون:

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \qquad (3.1)$$

ومنه نجد أنّ :

$$\mu(B) \ge \mu(A)$$

**2) الفرقية** $( Subtractivity )$

إذا كان $B,A \ni \mathfrak{R}$ وكان $A \subseteq B$ فإنّ $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

**البرهان :**

ينتج من المساواة (3.1)

**3) الخاصة نصف الجمعية العدودة**

لتكن $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{R}$ وليكن $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{R}$ ، عندئذٍ .

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

(السلسلة في الطرف الأيمن يمكن أن تتباعد إلى $+\infty$)

**البرهان**

باستخدام التوطئة (2.1) لنبنِ المجموعات $B_1, B_2, \ldots \in \mathfrak{R}$ والتي من أجلها

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ و } B_j \subseteq A_j \text{ و } B_j \cap B_k = \varnothing \ ; \ (j \neq k)$$

عندئذٍ يكون :

$$\mu(B_j) \leq \mu(A_j)$$

استناداً إلى الخاصة $\sigma$ – جمعية للقياس $\mu$ ، نجد:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

**مبرهنة (3.1) (حول استمرار الاجتماع)**

ليكن $\mu$ قياساً معرفاً على $\sigma$ – جبر $\mathfrak{R}$ من أجزاء $X$ . إذا كانت

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq \ldots \text{ و } A_j \in \mathfrak{R} \ , \ \forall j$$

متتالية متزايدة من المجموعات، فإنّ:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

**البرهان**

لنلاحظ أنّ:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots$$

من الواضح أن الطرف الأيمن هو اجتماع أزواج غير متقاطعة من المجموعات ولذلك فإنّه باستخدام الخاصة الجمعية العدودة للقياس، نجد:

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) &= \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= \mu(A_1) + \lim_{n \to \infty} \sum_{j=2}^{n} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= \lim_{n \to \infty} \left[ \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{n} \left( \mu(A_j) - \mu(A_{j-1}) \right) \right] = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

**مبرهنة (3.2) (حول استمرار التقاطع)**

ليكن $\mu$ قياساً معرفاً على $\sigma$ – جبر $\Re$ من أجزاء $X$ . إذا كانت :

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq \dots \quad ; \quad A_j \in \Re \quad , \quad \forall j$$

متتالية متناقصة من المجموعات، فإنّ :

$$\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

**البرهان**

لنستعرض المجموعة $A_1$ كفضاء يحتوي على جميع المجموعات $A_j$ ،عندئذٍ وفقاً لقانون دي مورغان يمكن أن نكتب :

$$A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(A_1 \setminus A_j\right)$$

وبالتالي نجد:

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(A_1 \setminus A_j\right)$$

بما أنّ $\{A_1 \setminus A_j\}_{j\geq 1}$ تشكل متتالية متزايدة من المجموعات، فإنّه استناداً إلى المبرهنة السابقة يكون :

$$\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_1 \setminus A_n\right)$$
$$= \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \left(\mu(A_1) - \mu(A_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

**ملاحظة (3.2)**

تسمى المتتاليات المتزايدة والمتتاليات المتناقصة بمتتاليات مطردة ( *Sequnees monotone* )

من أجل هذه المتتاليات يُعرف مفهوم النهاية:

إذا كانت $\dots \subseteq \dots \subseteq A_1 \subseteq A_2$ فإنّ $\lim_{n\to\infty} A_n : \stackrel{def}{=} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$

إذا كانت $\dots \supseteq \dots \supseteq A_1 \supseteq A_2$ فإنّ $\lim_{n\to\infty} A_n : \stackrel{def}{=} \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$

في إطار هذه الرموز يمكننا دمج المبرهنتين السابقتين (3.2) و (3.1) في مبرهنة واحدة وعلى وجه التحديد.

**مبرهنة (3.3)**

إذا كان $\mu$ قياساً معرفاً على $\sigma$ - الجبر $\mathfrak{R}$ من أجزاء $X$. وكانت $X \supset \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية مطردة من المجموعات فإنّ:

$$\mu\,(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

وهو ما يفسر تسميتها بمبرهنة حول الاستمرار.

## § 4. القياس الخارجي *Outer Measure*

لتكن $X$ مجموعة ما، وليكن $\mathfrak{R}$ جبراً من مجموعات جزئية من $X$، وليكن $\mu$ قياساً على الجبر $\mathfrak{R}$. من الطبيعي أن نحاول تعميم القياس $\mu$ على صف أوسع من المجموعات الجزئية من $X$، على سبيل المثال، على $\sigma$ - جبر. من أجل ذلك، سنستخدم مفهوم القياس الخارجي.

إنّ أية مجموعة $A \subseteq X$ يمكن بشكل عام، تغطيتها بمجموعات من $\mathfrak{R}$ ، أي أنه توجد مجموعات مثل $E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{R}$ وبحيث إنّ:

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

على سبيل المثال، يمكن أن نضع $E_1 = X$ و $E_2 = E_3 = \cdots = \varnothing$ من أجل أية مجموعة $A \subseteq X$، لنضع بالتعريف:

$$\mu^*(A) := \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \tag{4.1}$$

حيث إن الحد الأدنى الأعظمي يؤخذ من أجل جميع التغطيات الممكنة للمجموعة $A$ بالمجموعات $E_j \in \mathfrak{R}$.

يُسمى التابع $\mu^*$ بالقياس الخارجي. وهو يعرف من أجل جميع المجموعات الجزئية من $X$:

$$X \supseteq A \longrightarrow \mu^*(A) \in \mathbb{R}$$

لنستعرض الآن بعض خواص القياس الخارجي.

**مبرهنة (4.1)**

إذا كانت $A \in \mathfrak{R}$، فإنّ: $\mu^*(A) = \mu(A)$.

**البرهان**

بما أنّ $A \in \mathfrak{R}$ فإنّ $A$ تُغطى بمجموعة واحدة $E_1 = A$. لذلك فإنّ، المجموع $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ في العلاقة (4.1) يحتوي على حدٍ مساوٍ $\mu(A)$ وبالتالي فإنّ:

$$\mu^*(A) \le \mu(A) \qquad (4.2)$$

بالإضافة لذلك، استناداً لتعريف الحد الأدنى الأعظمي، من أجل أي $\varepsilon > 0$ توجد تغطية $\{E_j\}$ للمجموعة $A$ بالمجموعات $E_j \in \mathfrak{R}$، وبحيث إن :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) < \mu^*(A) + \varepsilon \qquad (4.3)$$

بما أنّ:

$$A = A \cap \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left( A \cap E_j \right)$$

فإنّه بالأخذ بعين الاعتبار الخاصة نصف الجمعية العدودة وخاصة اطراد القياس، نجد أنّ:

$$\mu(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap E_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

واستناداً إلى العلاقة (4.3) يكون:

$$\mu(A) < \mu^*(A) + \varepsilon$$

بما أنّ $\varepsilon$ كيفي فإنّه ينتج أنّ:

$$\mu(A) \le \mu^*(A) \qquad (4.4)$$

من العلاقتين (4.2) و (4.4) نجد أنّ $\mu^*(A) = \mu(A)$.

**مبرهنة (4.2)**

القياس الخارجي لأية مجموعة غير سالب، أي أن: $0 \le \mu^*(A)$ وأن $\mu^*(\varnothing) = 0$.

**البرهان**

إنّ كون القياس الخارجي غير سالب ينتج مباشرة من العلاقة (4.1). إضافة إلى ذلك، وبما أن $\varnothing \in \Re$ فإنه استناداً إلى المبرهنة (4.1) يكون:

$$\mu^*(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$$

**مبرهنة (4.3)**

القياس الخارجي مطرد، أي أن:

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$$

**البرهان**

وفقاً لتعريف القياس الخارجي، لدينا:

$$\mu^*(B) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j)$$

حيث $F_j \in \Re$ و $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$. بما أن $A \subseteq B$ فإن المجموعات $\{F_j\}$ تشكل أيضاً تغطية للمجموعة $A$ . ولهذا فإن :

$$\mu^*(A) \le \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j)$$

أي أن:

$$\mu^*(A) \le \mu^*(B)$$

**مبرهنة (4.4)**

القياس الخارجي نصف جمعي عدود ،أي أنه، من أجل أي $A_1, A_2, \ldots \subseteq X$ تتحقق المتراجحة:

$$\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

**البرهان** غير مطلوب البرهان

إذا تباعدت سلسلة الطرف الأيمن فإنّ المتراجحة المطلوبة تتحقق.

لنفرض أن السلسلة متقاربة . عندئذٍ ينتج من تعريف القياس الخارجي أنه، من أجل أي $\varepsilon > 0$ و $j$ مثبت، يمكن ايجاد متتالية من المجموعات $\{E_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث إن $E_{jk} \in \Re$ و $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{jk} \supseteq A_j$ ويكون في الوقت ذاته

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(E_{jk}\right) < \mu^*\left(A_j\right) + \frac{\varepsilon}{2^j} \tag{4.5}$$

بجمع المتراجحات (4.5) بالنسبة لـ $j$ من 1 حتى $\infty$ نجد :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(E_{jk}\right) < \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*\left(A_j\right) + \varepsilon \tag{4.6}$$

بالإضافة إلى ذلك، من الواضح أن:

$$\bigcup_{j,k=1}^{\infty} E_{jk} \supseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

واستناداً إلى تعريف القياس الخارجي.

$$\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{jk}) \tag{4.7}$$

من العلاقتين (4.6) و (4.7) نجد:

$$\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*\left(A_j\right) + \varepsilon$$

ومن هنا وبحكم كون $\varepsilon$ كيفياً ينتج المطلوب .

**ملاحظة (4.1)**

من المناسب أحياناً تعريف القياس الخارجي ليس بدلالة قياس معطى على جبر من المجموعات . يسمى التابع الحقيقي $\mu^*$ المعرف على مجموعة جميع المجموعات الجزئية من $X$ قياساً خارجياً، إذا كان:

1) $\mu^*(\varnothing)=0 \;,\; \mu^*(A)\geq 0 \quad , \quad \forall\, A\subseteq X$

2) $\mu^*$ تابع مطرد.

3) $\mu^*$ تابع نصف جمعي عدود.

## § 5. المجموعات القيوسة وتمديد القياس

***Measurable Sets . Extension of a Measure***

سنبين في هذه الفقرة إمكانية تمديد القياس المعرف على جبر مجموعات $\mathfrak{R}$ إلى قياس معرف على $\sigma$ – جبر يحتوي على $\mathfrak{R}$. وذلك باستخدام مفهوم القياس الخارجي.

لتكن $X$ مجموعة ما غير خالية، وليكن $\mathfrak{R}$ جبراً من مجموعة أجزاء $X$، و $\mu$ قياساً على $\mathfrak{R}$، وليكن $\mu^*$ القياس الخارجي المعرف بالعلاقة (4.1) من أجل أية $A\subseteq X$.

**تعريف (5.1)**

نقول عن المجموعة $A\subseteq X$ إنها قيوسة (أو $\mu^*$ – قيوسة، أوقيوسة وفق كارتيودوري) إذا تحققت من أجل أية مجموعة $E\subseteq X$ المساواة:

$$\mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap \hat{A}) \tag{5.1}$$

لنرمز لمجموعة جميع المجموعات القيوسة بـ $\widetilde{\mathfrak{R}}$ ولمقصور القياس الخارجي $\mu^*$ على $\widetilde{\mathfrak{R}}$ بـ $\widetilde{\mu}$، أي أن:

$$\mu^*\big|_{\widetilde{\mathfrak{R}}}=\widetilde{\mu}$$

**ملاحظة (5.1)**

بما أن $E=(E\cap A)\cup(E\cap\hat{A})$ فإنه استناداً إلى الخاصة نصف الجمعية للقياس الخارجي، نجد:

$$\mu^*(E)\leq \mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap\hat{A}) \quad ; \quad \forall\; E\subseteq X$$

تبعاً لذلك فإنّه لبرهان قيوسة مجموعة $A$ يكفي التأكد من تحقق المتراجحة المعاكسة للمتراجحة الأخيرة.

### مبرهنة (5.1)

إنّ $\overline{\mathfrak{R}}$ مجموعة جميع المجموعات القيوسة تشكل σ – جبراً من المجموعات يحتوي على الجبر $\mathfrak{R}$ ، كما أنّ $\overline{\mu}$ مقصور القياس الخارجي $\mu^*$ على المجموعات القيوسة هو قياس على σ – الجبر $\overline{\mathfrak{R}}$ .

### البرهان

سنستعرض البرهان على مراحل عدة.

I - لنبين أولاً أنه إذا كانت $A_2,A_1$ من $\overline{\mathfrak{R}}$ فإنّ $A_1 \cup A_2 \in \overline{\mathfrak{R}}$.

في الواقع ، بما أنّ $A_2$ قيوسة ، فإنّه من أجل أية $E \subseteq X$ و $A = A_2$ تتحقق المساواة (5.1) . باستبدال $E$ بـ $E \cap A_1$ في هذه المساواة نجد.

$$\mu^*(E \cap A_1) = \mu^*(E \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_1 \cap \hat{A}_2) \qquad (5.2)$$

وبالمثل باستبدال $E$ بـ $E \cap \hat{A}_1$ في العلاقة (5.1) نجد:

$$\mu^*(E \cap \hat{A}_1) = \mu^*(E \cap \hat{A}_1 \cap A_2) + \mu^*(E \cap \hat{A}_1 \cap \hat{A}_2) \qquad (5.3)$$

بجمع (5.2) و (5.3)، وبما أنّ $A_1$ مجموعة قيوسة نجد أنّ الطرف الأيسر يكون $\mu^*(E)$ وبالتالي فإنّ:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_1 \cap \hat{A}_2) + $$
$$+ \mu^*(E \cap \hat{A}_1 \cap A_2) + \mu^*(E \cap \hat{A}_1 \cap \hat{A}_2) \quad , \quad \forall E \subseteq X \qquad (5.4)$$

باستبدال $E$ بـ $E \cap (A_1 \cup A_2)$ في المساواة الأخيرة. نجد أنّ الحدود الثلاثة الأولى في الطرف الأيمن لاتتغير (تأكد من ذلك !) أما الحد الرابع فيؤول إلى:

$$\mu^*\left(E \cap (A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_2)^{\wedge}\right) = \mu^*(\varnothing) = 0$$

( استخدمنا هنا قانون دي مورغان)، وبالتالي فإنّ:

$$\mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*(E \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*\left(E \cap A_1 \cap \hat{A}_2\right) + $$
$$+ \mu^*(E \cap \hat{A}_1 \cap A_2) \quad , \quad \forall E \subseteq X \qquad (5.5)$$

بمقارنة (5.4)، (5.5) نجد أنه من أجل أية $E \subseteq X$:

$$\mu^*(E) = \mu^*\left(E \cap (A_1 \cup A_2)\right) + \mu^*\left(E \cap (A_1 \cup A_2)^{\wedge}\right)$$

أي أنّ المساواة $(A_1 \cup A_2)$ قيوسة.

**II** - بما أنّ المساواة $(5.1)$ لا تتغير باستبدال $A$ بـ $\hat{A}$، فإنّه من قيوسة المجموعة $A$ تنتج قيوسة متممتها $\hat{A}$.

بذلك نكون قد بينا أنّ:

$$A_1 , A_2 \in \widetilde{\Re} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \widetilde{\Re}$$

وأنّ:

$$A \in \widetilde{\Re} \Rightarrow \hat{A} \in \widetilde{\Re}$$

أي أن $\widetilde{\Re}$ جبر مجموعات.

**III** - ليكن $A_1 , A_2 \in \widetilde{\Re}$ و $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ عندئذٍ تأخذ العلاقة $(5.5)$ الشكل

$$\mu^*\left(E \cap (A_1 \cup A_2)\right) = \mu^*\left(E \cap A_1\right) + \mu^*\left(E \cap A_2\right) \qquad \forall E \subseteq X$$

بالاستقراء الرياضي يمكن تعميم هذه العلاقة على أي عدد منتهٍ من المجموعات، بعبارة أخرى، إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \widetilde{\Re}$ وكانت $A_j \cap A_k = \varnothing$ $(j \neq k)$ فإن

$$\mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{n} A_j)) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j) \quad ; \quad (\forall\, E \subseteq X) \tag{5.6}$$

**IV** - لنبرهن الآن أنّ $\widetilde{\Re}$ يشكل $\sigma$ – جبراً . بغية هذا الأمر ، يكفي أن نبرهن أنه إذا كانت $A_1, A_2, \ldots \in \widetilde{\Re}$ ، فإنّ $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \widetilde{\Re}$

استناداً إلى التوطئة $(2.1)$، يمكننا أن نفرض أن $A_j \cap A_k = \varnothing$ $(j \neq k)$

واعتماداً على الملاحظة $(5.1)$ وللبرهان على قيوسة المجموعة $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ يكفي أن نبرهن على أن:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)) + \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^{\wedge}) \quad , \ \forall\, E \subseteq X \tag{5.7}$$

بما أن $\widetilde{\Re}$ جبر فإنّ $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \widetilde{\Re}$ (من أجل أي عدد $n \in N$ ) ولهذا فإنّ:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{n} A_j)) + \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{n} A_j)) \quad , \ \forall E \subseteq X$$

باستخدام العلاقة (5.6) واطراد القياس الخارجي (المبرهنة (4.3)) نحصل على:

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^{\wedge}) \quad , \ \forall E \subseteq X \qquad (5.8)$$

بالانتقال إلى النهاية في طرفي المتراجحة (5.8)، نجد:

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*\left(E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^{\wedge}\right) \quad , \ \forall E \subseteq X \qquad (5.9)$$

استناداً إلى الخاصة نصف الجمعية العدودة للقياس الخارجي نجد:

$$\mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)) = \mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap A_j)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j)$$

من العلاقة (5.9) ينتج أنّ:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)) + \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^{\wedge})$$

ولذلك فإنّ $(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \in \widetilde{\Re}$ وبالتالي فإنّ $\widetilde{\Re}$ هو $\sigma$ – جبر .

**V** – لنبين الآن أنّ المقصود $\widetilde{\mu}$ للقياس الخارجي $\mu^*$ على $\widetilde{\Re}$ هو قياس علـــى $\widetilde{\Re}$ . من أجل ذلك، يكفي أن نبين أنّ القياس الخارجي $\mu^*$ جمعي عدود على $\widetilde{\Re}$ .

لتكن $A_1, A_2, \ldots \in \widetilde{\Re}$ و $A_j \cap A_k = \varnothing$ $(j \neq k)$، بوضع $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ فـــي العلاقة (5.9)، نجد:

$$\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

استناداً إلى الخاصة نصف الجمعية العدودة للقياس الخارجي تتحقق المتراجحـــة المعاكسة، وبالتالي فإنّ:

$$\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

**VI** - يتبقى علينا البرهان على أنّ $\widetilde{\mathfrak{R}} \supseteq \mathfrak{R}$. أي علينا أن نبرهن أنّ أيـة مجموعـة $A \ni \mathfrak{R}$ هي مجموعة قيوسة وفق $\mu^*$ . بهذا يكفي أن نبرهن على أنّه من أجـل أية مجموعة $A \ni \mathfrak{R}$ تتحقق المتراجحة :

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \hat{A}) \quad , \quad \forall E \subseteq X \qquad (5.10)$$

من العلاقة (4.1) المعرفة للقياس الخارجي ووفقاً لتعريـف الحـد الأدنـى الأعظمي ، فإنّه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ توجد المجموعات $E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{R}$ بحيث إنّ $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ وإضافةً إلى أنّ :

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \qquad (5.11)$$

إنّ أية مجموعة $E_j$ يمكن أن تُمثل على الشكل:

$$E_j = (E_j \cap A) \cup (E_j \cap \hat{A})$$

إنّ كل حد في الطرف الأيمن في هذه المساواة ينتمي إلى $\mathfrak{R}$ وتقاطعهمـا خـالٍ لذلك فإنّ:

$$\mu(E_j) = \mu(E_j \cap A) + \mu(E_j \cap \hat{A})$$

وبالتالي فإنّ المتراجحة (5.11) تأخذ الشكل:

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap \hat{A}) \qquad (5.12)$$

بالإضافة إلى ذلك لدينا

$$E \cap A \subseteq (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap A)$$

$$E \cap \hat{A} \subseteq (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \cap \hat{A} = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap \hat{A})$$

استناداً إلى تعريف القياس الخارجي، يكون:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A) \geq \mu^*(E \cap A) \quad ; \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap \hat{A}) \geq \mu^*(E \cap \hat{A})$$

من العلاقة (5.12) نجد:

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \hat{A}) \quad ; \quad \forall E \subseteq X$$

من ذلك ونتيجة كون $\varepsilon$ كيفياً تنتج العلاقة (5.10).

**مبرهنة (5.2) (حول وجود تمديد للقياس)** "البرهان غير مطلوب"

ليكن $\mathfrak{R}$ جبراً ما من المجموعات الجزئية من $X$، وليكن $\mu$ قياساً على $\mathfrak{R}$. عندئذٍ يوجد σ – جبر مثل $\mathfrak{R}_1$ وبحيث أن $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}_1$ وقياساً $\mu_1$ على $\mathfrak{R}_1$ . بحيث إن :

$$\mu_1 \big|_{\mathfrak{R}} = \mu$$

إنّ البرهان ينتج مباشرة من المبرهنة (5.1) . في الواقع لنبنِ بدلالة القياس $\mu$ قياساً خارجياً $\mu^*$ ومن ثم بمثابة $\mathfrak{R}_1$ لنأخذ σ – الجبر $\widetilde{\mathfrak{R}}$ أسرة جميع المجموعات $\mu^*$ القيوسة وبمثابة $\mu_1$ نأخذ القياس $\widetilde{\mu}$ . من الواضح ، أن هذا القياس هو تماماً التمديد المطلوب على σ – الجبر .

**ملاحظة (5.2)**

ليكن $\mu$ قياساً على جبر $\mathfrak{R}$ من المجموعات الجزئية من $X$ . لنرمز بـ $\mathfrak{R}_\sigma$لـ σ – الجبر المولّد بالجبر $\mathfrak{R}$ ، أي أنّ $\mathfrak{R}_\sigma$ ، هو الـ σ – الجبر الأصغري الذي يحتوي على $\mathfrak{R}$ . لنبنِ التمديد $\mu_\sigma$ للقياس $\mu$ على $\mathfrak{R}_\sigma$ . يسمى مثل هذا التمديد بالتمديد الأصغري للقياس بما أنّ $\mathfrak{R} \subseteq \widetilde{\mathfrak{R}}$ فإنّ $\widetilde{\mathfrak{R}}_\sigma \subseteq \widetilde{\mathfrak{R}}$ ولهذا يمكننا أن نضع $\mu_\sigma = \widetilde{\mu}\big|_{\mathfrak{R}_\sigma}$ . من الواضح أن $\mu_\sigma$ هو قياس وفقاً لذلك فإنّ $\mu_\sigma\big|_{\mathfrak{R}} = \widetilde{\mu}\big|_{\mathfrak{R}} = \mu$ أي أن $\mu_\sigma$ تمديد أصغري للقياس $\mu$. هكذا نرى أن التمديد الأصغري للقياس موجود بشكل دائم . أما وحدانية هذا التمديد فسنتطرّق لها لاحقاً.

## § 6 . خواص المجموعات القيوسة *Properties of Measurable Sets*

**تعريف (6.1)**

يسمى القياس $\mu$ المعرّف على الجبر $\mathfrak{R}$ كاملاً (تاماً) (*complete*) ، إذا كان من $A \in \mathfrak{R}$ و $A \supset B$ ، $\mu(A)=0$ نتج أنّ $B \in \mathfrak{R}$

**مبرهنة (6.1)**

ليكن $\mu$ قياساً على جبر $\mathfrak{R}$ من المجموعات الجزئية من $X$ وليكن $\mu^*$ القياس الخارجي الموافق إذا كان $\mu^*(A)=0$ من أجل مجموعة ما $A \subseteq X$ فإنّ المجموعة $A$ قيوسة وفق $\mu^*$ و $\tilde{\mu}(A)=0$ .

**البرهان**

للبرهان على قيوسة المجموعة $A$ يكفي أن نبرهن أنّ:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A)+\mu^*(E \cap \hat{A}) \quad , \quad \forall E \subseteq X$$

بما أنّ $E \cap A \subseteq A$ فإنّه استناداً لاطراد وايجابية القياس الخارجي يكون:

$$0 \leq \mu^*(E \cap A) \leq \mu^*(A)=0 \Rightarrow \mu^*(E \cap A)=0$$

إضافة إلى ذلك لدينا $E \cap \hat{A} \subseteq E$ تبعاً لذلك بنتيجة اطراد القياس الخارجي نجد:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap \hat{A})=\mu^*(E \cap A)+\mu^*(E \cap \hat{A})$$

أي أنّ المجموعة $A$ قيوسة وفق $\mu^*$ . أي أنّ $A \in \tilde{\mathfrak{R}}$ بما أنّ $\tilde{\mu}, \mu^*$ يتطابقان على $\tilde{\mathfrak{R}}$ ، فإنّ:

$$\tilde{\mu}(A)=\mu^*(A)=0$$

**نتيجة (6.1)**

القياس $\tilde{\mu}$ الناتج من مقصور القياس الخارجي $\mu^*$ على $\sigma$ – الجبر $\tilde{\mathfrak{R}}$ من المجموعات القيوسة هو قياس كامل .

### البرهان

ليكن $A \ni \widetilde{\mathfrak{R}}$ و $A \supset B$ , $\widetilde{\mu}(A) = 0$ عندئذٍ يكـون $\mu^*(A) = 0$ واسـتناداً لاطراد القياس الخارجي نجد $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$ ولهذا فـإنّ $\mu^*(B) = 0$ وعندئـذٍ استناداً إلى المبرهنة (6.1) يكون $B \in \widetilde{\mathfrak{R}}$ , $\mu^*(B) = 0$ أيِ أنّ $\mu^*$ قياس تام .

### مبرهنة (6.2) (الشروط اللازمة للقيوسة)

ليكن $\mu$ قياساً على الجبر $\mathfrak{R}$ من المجموعات الجزئية من $X$، وليكن $\widetilde{\mu}$ ممدد القياس $\mu$ على σ − الجبر $\widetilde{\mathfrak{R}}$ من المجموعات القيوسة. عندئذٍ، من أجل أية مجموعة قيوسة $A$ ومن أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة مثل $A_\varepsilon \ni \mathfrak{R}$ . بحيث إنّ:

$$\widetilde{\mu}(A \,\Delta\, A_\varepsilon) < \varepsilon \tag{6.1}$$

### البرهان

وفقاً لتعريف القياس الخارجي ، ومن أجل أي عدد $\varepsilon > 0$، يمكن إيجاد تغطيــة $\{E_j\}$ للمجموعة $A$ بالمجموعات $E_j \ni \mathfrak{R}$ ، بحيث إنّ:

$$\mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \tag{6.2}$$

إلا أنّ $\widetilde{\mu}(A) = \mu^*(A)$ وذلك لأنّ $A \ni \widetilde{\mathfrak{R}}$ و $\widetilde{\mu}(E_j) = \mu(E_j)$ وذلك لأنّ $E_j \in \mathfrak{R}$ . ولذلك فإنّ المتراجحة (6.2) تكتب على الشكل:

$$\widetilde{\mu}(A) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(E_j)$$

ومنه استناداً إلى الخاصة نصف الجمعية العدودة للقياس، نجد أنّ :

$$\widetilde{\mu}(A) + \frac{\varepsilon}{2} > \widetilde{\mu}\,(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \tag{6.3}$$

من الواضح أنّ:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = E_1 \cup (E_1 \cup E_2) \cup (E_1 \cup E_2 \cup E_3) \cup \ldots$$

إن المجموعات في الطرف الأيمن تشكل متتالية متزايدة. عندئـذٍ اسـتناداً إلـى خاصة استمرار القياس (استمرار الاجتماع) يكون:

$$\widetilde{\mu}\,(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}\,(\bigcup_{j=1}^{n} E_j)$$

لنختر $n$ كبيرة بقدرٍ كافٍ بحيث تتحقق المتراجحة

$$\widetilde{\mu}\,(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) - \widetilde{\mu}\,(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.4}$$

لنضع :

$$A_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{n} E_j \in \Re$$

ولنبين أن المجموعة $A_\varepsilon$ هي المجموعة المنشودة أي أنه مـن أجلهـا تتحقـق المتراجحة (6.1) أو المتراجحة

$$\widetilde{\mu}\left[(A \setminus A_\varepsilon) \cup (A_\varepsilon \setminus A)\right] < \varepsilon$$

استناداً إلى جمعية القياس يكفي أن نبرهن أن:

$$\widetilde{\mu}\,(A \setminus A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.5}$$

$$\widetilde{\mu}\,(A_\varepsilon \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.6}$$

بما أن $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ فإن $A \setminus A_\varepsilon \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \setminus A_\varepsilon$ ومنه وبالأخذ بعين الاعتبـار اطراد القياس، نجد أن:

$$\widetilde{\mu}\,(A \setminus A_\varepsilon) \le \widetilde{\mu}\left[(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \setminus A_\varepsilon\right] = \widetilde{\mu}\,(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) - \widetilde{\mu}\,(A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

بذلك تكون المتراجحة (6.5) قـد بُرهنـت. وبالتـالي وبمـا أن $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ و $A_\varepsilon \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ فإنه بالأخذ بعين الاعتبار اطراد القياس نجد أن:

$$\widetilde{\mu}\,(A_\varepsilon \setminus A) \le \widetilde{\mu}\left[(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \setminus A\right] = \widetilde{\mu}\,(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) - \widetilde{\mu}(A)$$

ومنه استناداً إلى العلاقة (6.3) نجد:

$$\widetilde{\mu}\left(A_{\varepsilon} \setminus A\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

أي أن المتراجحة (6.6) قد حققت.

## § 7. صفوف المجموعات المطردة ووحدانية تمديد القياس

***Monotone Classes of Sets . Uniqueness of Extensions o fMeasures***

في دراسة مسألة وحدانية تمديد القياس ( وكذلك في حالات أخرى ) يكون من المفيد استخدام مفهوم صف المجموعات المطرد.

**تعريف (7.1)**

نقول عن جملة $\mathfrak{M}$ من المجموعات الجزئية من $X$ إنها صف مطرد، إذا احتوت إضافة إلى أية متتالية مطردة من المجموعات $A_1, A_2, \ldots$ على نهاية تلك المتتالية $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

**أمثلة:**

1 - الجملة $\mathfrak{M}(X) = 2^X$ مجموعة أجزاء $X$ تشكل صفاً مطرداً.

2 - كل $\sigma$ - حلقة $\mathfrak{M}$ تشكل صفاً مطرداً . وذلك لأنّها تحتوي على الاجتماع العدود والتقاطع العدود لأية متتالية من المجموعات من $\mathfrak{M}$ (ليس فقط المطردة).

**توطئة (7.1)**

إذا كانت حلقة المجموعات $\mathfrak{M}$ صفاً مطرداً فإنّ $\mathfrak{M}$ تكون $\sigma$ - حلقة.

**البرهان**

لتكن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ متتالية ما. ولنبرهن أنّ $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$ لنضع $B_n = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_n$ . بما أنّ $\mathfrak{M}$ حلقة فإنّ $B_n \in \mathfrak{M}$ من أجل أي $n$. إنّ المتتالية

$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ مطـــردة (متزايـــدة)، ومـــن حقيقـــة أنّ $\mathfrak{M}$ صـــف مطـــرد نجـــد أنّ $\mathfrak{M} \ni \lim\limits_{n\to\infty} B_n$ يتبقى أن نلاحظ أنّ:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \lim_{n\to\infty} B_n \in \mathfrak{M}$$

**مبرهنة (7.1)**

لتكن $\mathfrak{R}$ – حلقة من المجموعات الجزئية مـــن $X$ . ولنرمـــز بـــــ $\mathfrak{R}_\sigma$ لـــــ $\sigma$ – حلقة المولّدة بـــ $\mathfrak{R}$ وبـــ $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ للصف المطرد الأصغري الذي يحوي $\mathfrak{R}$ عندئـــذٍ يكون $\mathfrak{R}_\sigma = \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ .

**البرهان** غير مطلوب امتحان النظري

بما أنّ $\mathfrak{R}_\sigma$ يحتوي على جميع الاجتماعات المعدودة الممكنة و $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ يحتوي فقط على اجتماعات المتتاليات المطردة فإنّ $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{R}_\sigma$ ، إذا برهنا أنّ $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ هي حلقة فإنّـــه استناداً للتوطئة (7.1) ينتج أنّ $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ هي $\sigma$ – حلقة. بما أنّ $\mathfrak{R}_\sigma$ هـــي $\sigma$ – حلقـــة أصغرية محتوية على $\mathfrak{R}$ ، فإنّ $\mathfrak{R}_\sigma \subseteq \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ ومنه فإنّ $\mathfrak{R}_\sigma = \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ . وهكذا فإنّه يكفـــي أن نبرهن أنّ $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ حلقة. سنورد برهان هذا على مراحل عدة:

1 – لنثبت مجموعة $X \supseteq B$ ولنستعرض صف المجموعات

$$\hat{\mathfrak{R}}_B = \{A \subseteq X \mid A \cup B \ , \ A \setminus B \ , \ B \setminus A \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}\}$$

من تناظر هذا التعريف بالنسبة لـــ $B, A$ ينتج أنّـــه إذا كـــان $A \ni \hat{\mathfrak{R}}_B$ فـــإنّ $B \ni \hat{\mathfrak{R}}_A$ .

2– لنبين أنّ $\hat{\mathfrak{R}}_B$ صف مطرد . لتكن $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ متتالية متزايدة من $\hat{\mathfrak{R}}_B$ . ولنبـــرهن أنّ $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \hat{\mathfrak{R}}_B$ وفقاً لتعريف النهاية، لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

لذلك:

$$A \cup B = (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \cup B = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(A_j \cup B\right) = \lim_{n\to\infty} \left(A_n \cup B\right) \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$$

وذلك لأنّ $\left\{A_j \cup B\right\}_{j=1}^{\infty}$ متتالية متزايدة من المجموعات من الصف المطـــرد $\Re_{\mathfrak{M}}$. بالمثل نجد:

$$A \setminus B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus B = \bigcup_{j=1}^{\infty}\left(A_j \setminus B\right) = \lim_{n\to\infty}\left(A_n \setminus B\right) \in \Re_{\mathfrak{M}}$$

أكثر من ذلك

$$B \setminus A = B \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty}\left(B \setminus A_j\right) = \lim_{n\to\infty}\left(B \setminus A_n\right) \in \Re_{\mathfrak{M}}$$

وذلك لأنّ $\left\{B \setminus A_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ متتالية متناقصة من المجموعات من الصف المطـــرد $\Re_{\mathfrak{M}}$ . وبالتالي فإنّ $A \in \tilde{\Re}_B$.

بالمثل يبرهن على أنّه إذا كانت $\left\{A_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ متتاليـــة متناقـــصة مـــن $\tilde{\Re}_B$ فـــإنّ $\lim_{n\to\infty} A_n \in \tilde{\Re}_B$. وهكذا فإنّ $\tilde{\Re}_B$ صف مطرد.

3 - لتكن $B \in \Re$. ولنبرهن على أنّ $\Re_{\mathfrak{M}} \subseteq \tilde{\Re}_B$. من أجـــل ذلـــك نبـــرهن أولاً أنّ $\Re \subseteq \tilde{\Re}_B$. لتكن $A \in \Re$ . بما أنّ $\Re$ حلقـــة فـــإنّ $A \cup B$ , $A \setminus B$ , $B \setminus A$ تنتمي إلى $\Re$. وأكثر من ذلك فإنّ $A \cup B$ , $A \setminus B$ , $B \setminus A$ تنتمي إلى $\Re_{\mathfrak{M}}$. أي أنّ $A \in \tilde{\Re}_B$ بذلك نجد أنّ $\Re \subseteq \tilde{\Re}_B$. أي أنّ $\tilde{\Re}_B$ صف مطرد يحتوي على $\Re$ وبما أنّ $\Re_{\mathfrak{M}}$ صف مطرد أصغري يحتوي على $\Re$ ، فإنّ $\Re_{\mathfrak{M}} \subseteq \tilde{\Re}_B$.

4 - لنبين أنّه إذا كان $B \in \Re_{\mathfrak{M}}$ فإنّ $\Re_{\mathfrak{M}} \subseteq \tilde{\Re}_B$.

للبرهان على ذلك نأخذ أية مجموعة $A \in \Re$ عندئذٍ وفقاً لما قد بُرهن فـــي (3) نجد، $\Re_{\mathfrak{M}} \subseteq \tilde{\Re}_A$. بما أنّ $B \in \Re_{\mathfrak{M}}$ فإنّ $B \in \tilde{\Re}_A$ واستناداً لما برهناه في (1) نجد أنّ $A \in \tilde{\Re}_B$. بهذه الصورة نجد أنّ $\Re \subseteq \tilde{\Re}_B$ وبالتـــالي فـــإنّ $\Re_{\mathfrak{M}} \subseteq \tilde{\Re}_B$ (انظـــر نهاية المرحلة 3)

5 - لنبرهن الآن على أنّ $\Re_{\mathfrak{M}}$ حلقة وهـــو مـــا ينهـــي إثبـــات المبرهنـــة. لـــتكن $A, B \in \Re_{\mathfrak{M}}$ ولنبرهن أنّ $A \cup B$ و $A \setminus B$ ينتميان إلى $\Re_{\mathfrak{M}}$.

بما أنّ $B \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ فإنّه وفقاً لما برهناه في (4) يكون $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}} \subseteq \widehat{\mathfrak{R}}_B$ وفي حالة خاصة $A \in \widehat{\mathfrak{R}}_B$. إلا أنّه من تعريف $\widehat{\mathfrak{R}}_B$ ينتج أنّ $A \cup B\ ,\ A \setminus B \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ أي أنّ $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ حلقة.

**مبرهنة (7.2) (حول وحدانية التمديد الأصغري للقياس)**

ليكن $\mathfrak{R}$ جبر مجموعات جزئية من $X$ , $\mathfrak{R}_\sigma$ σ - جبراً مولّداً بالجبر $\mathfrak{R}$ وليكن $\mu$ و $\upsilon$ قياسين معرفين على $\mathfrak{R}_\sigma$ ، إذا تطابق هذان القياسان على $\mathfrak{R}$ ، أي أنّ:

$$\mu\big|_{\mathfrak{R}} = \upsilon\big|_{\mathfrak{R}}$$

فإنّ: $\mu = \upsilon$.

**البرهان**

يلزم أن نبرهن على أنّ $\mu(A) = \upsilon(A)$ من أجل أية مجموعة $A \in \mathfrak{R}_\sigma$ . إذا كان $A \in \mathfrak{R}$ فإن ذلك ينتج من شروط المبرهنة . لنبين الآن أن:

$$\mathfrak{U} = \{A \in \mathfrak{R}_\sigma \mid \mu(A) = \upsilon(A)\}$$

هو صف مطرد . في الواقع إذا كانت $A$ هي نهاية لمتتالية مطردة من المجموعات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{U}$ ، فإنه باستخدام خاصة استمرار القياس نجد:

$$\mu(A) = \mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \upsilon(A_n) = \upsilon\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \upsilon(A)$$

أي أن $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{R}_\sigma$ وبالتالي باستخدام المبرهنة (7.1)نجد أن $\mathfrak{U} = \mathfrak{R}_\sigma$ .

## § 8 . القياس ذو القيم اللانهائية *Measure Taking Infinite Value*

في تعريف قياس مجموعة ما افترضنا بشكل دائم $\mu(A) < \infty$ خلافاً لذلك قد نضطر لاستعراض قياس يمكن أن يأخذ قيماً لانهائية.

**تعريف (8.1)**

ليكن $\mathfrak{R}$ جبر مجموعات جزئية من $X$ يسمى التابع $\mu$ المعرف على $\mathfrak{R}$ قياساً، إذا كان:

1) $\mu(\varnothing)=0$ , $0\le\mu(A)\le+\infty$ : $\forall A\in\mathfrak{R}$

2) من أجل أية $A_1,A_2,\ldots\in\mathfrak{R}$ وبحيث إن $A_j\cap A_k=\varnothing$ $(j\neq k)$

و $\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\in\mathfrak{R}$ تتحقق المساواة:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)$$

بسهولة يمكن التأكد أنه من أجل قياس من هذا النوع تبقى المبرهنات الواردة في خواص القياس والقياس الخارجي محققة باستثناء المبرهنة (3.2) إذ ينبغي إضافة شرط هو أن تكون واحدة من المجموعات $A_j$ ذات قياس منته.

أما من أجل تحقق الخواص الأخرى فينبغي تقليص صف القياس المستعرض وتمديد الاقتصار على القياس الذي يسمى بـ σ – منته.

**تعريف(8.2)**

نسمي القياس $\mu$ والذي يأخذ قيماً لانهائية بـ σ – منته إذا وجدت متتالية من المجموعات $A_1,A_2,\ldots\in\mathfrak{R}$ بحيث إن $A_1\subseteq A_2\subseteq A_2\subseteq\ldots$ و:

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \quad ; \quad \mu(A_n)<\infty \qquad (\forall\, n)$$

**أمثلة :**

1- ليكن $X=\mathbb{R}$. لنعرف قياساً $\mu$ على $2^{\mathbb{R}}$ σ – جبر المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$. بفرض أن $\mu(\varnothing)=0$ و $\mu(A)=+\infty$ من أجل $A\neq\varnothing$. نجد أنّه، من الواضح أن هذا القياس ليس σ – منتهياً.

2- ليكن $X=\mathbb{N}$ لنعرف قياساً $\mu$ على $2^{\mathbb{N}}$. بفرض أن $\mu(A)=n$ إذا كانت المجموعة $A$ مؤلفة من $n$ عنصراً وأن $\mu(A)=+\infty$ إذا كانت المجموعة $A$ غير منتهية. بسهولة يمكن التأكد من أن $\mu$ قياس σ – منته. بمثابة المجموعات $A_n$ يمكننا أن نأخذ على سبيل المثال $\{1,2,\ldots,n\}$.

وسنستعرض مثالاً هاماً على القياس σ – منتهٍ عندما نأتي إلى قياس ليبيغ على المستقيم الحقيقي.

## § 9. قياس ليبيغ للمجموعات الخطية المحدودة

***Lebesgue Measure of Bounded Linear Sets***

يعتبر قياس ليبيغ على المحور الحقيقي واحداً من أهم الأمثلة . أدخل ليبيغ هذا القياس لتعميم مفهوم التكامل لتوابع (متعددة الانقطاعات) ليكن $X=[a,b)$ مجالاً نصف مفتوح مثبتاً من المحور الحقيقي وليكن جبر المجموعات $\mathfrak{R}$ هو الغطاء الحلقي لمجموعة جميع المجالات نصف المفتوحة $[a,b)\supseteq[\alpha,\beta)$. بذلك يكون لكل عنصر من عناصر الجبر $\mathfrak{R}$ الشكل:

$$A=\bigcup_{j=1}^{k}\left[\alpha_j,\beta_j\right] \qquad (9.1)$$

حيث إنّ المجالات نصف المفتوحة في الطرف الأيمن غير متقاطعة مثنى مثنى (لأنّ اجتماع مجالين متقاطعين من المجالات نصف المفتوحة هو مجدداً مجال نصف مفتوح) .

إنّ أطوال المجالات $[\alpha,\beta],[\alpha,\beta],(\alpha,\beta)$ يساوي $\beta-\alpha$ .

إنّ طول المجموعة (9.1) يُعرف كمجموع أطوال المجالات نصف المفتوحة المشكلة لها، بعبارة أخرى:

$$\mathscr{L}(A)=\sum_{j=1}^{k}\left(\beta_j-\alpha_j\right)$$

**مبرهنة (9.1)**

لنعرف على الجبر $\mathfrak{R}$ التابع $\mu$ بأن نضع

$$\mu(\varnothing)=0,\ (A\in\mathfrak{R},A\neq\varnothing) \qquad , \qquad \mu(A)=\mathscr{L}(A)$$

إنّ التابع $\mu$ قياس على الجبر $\mathfrak{R}$ .

**البرهان**

من التعريف ينتج مباشرة أنّ $\mu(\varnothing)=0\ ,\ 0\le\mu(A)$ . بذلك يتبقى علينا أن نثبت أنّ $\mu$ يتمتع بالخاصة الجمعية العدودة.

لتكن $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{R}$ , $A_j \cap A_k = \varnothing$ $(j \neq k)$ إضافة إلى أنّ $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{R}$ . ولنبرهن أنّ:

$$\mathscr{L}(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathscr{L}(A_j) \tag{9.2}$$

بما أنّ $A$، كعنصر من $\mathfrak{R}$، هو اجتماع منته لعدد من المجالات نصف المفتوحة و $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subseteq A$ من أجل أي عدد $n$ . فإنّ:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathscr{L}(A_j) \leq \mathscr{L}(A)$$

بالانتقال إلى النهاية عندما $n \to \infty$ ، نجد:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathscr{L}(A_j) \leq \mathscr{L}(A) \tag{9.3}$$

لنبرهن على المتراجحة في الاتجاه المعاكس. أولاً، ليكن $\varepsilon > 0$ معطى ، بما أنّ المجموعة $A$ هي اجتماع لمجالات نصف مفتوحة من الشكل $(9.1)$ فإنّه بإزاحة النهايات اليمنى $\beta_j$ لتلك المجالات إلى اليسار. بحيث إنّه من أجل الاجتماع $A^{\varepsilon}$ للمجالات المغلقة الناجمة عن ذلك يتحقق الشرط:

$$\mathscr{L}(A) < \mathscr{L}(A^{\varepsilon}) + \varepsilon \tag{9.4}$$

من أجل كل من المجموعات $A_j$ لنزيح يساراً النهايات اليسرى للمجالات نصف المفتوحة الموافقة ولنرمز بـ $A_j^{\varepsilon}$ للمجالات المفتوحة الناتجة عن ذلك. في هذه الحالة، تؤخذ الإزاحات صغيرة بشكلٍ كافٍ بحيث يتحقق الشرط:

$$\mathscr{L}(A_j^{\varepsilon}) < \mathscr{L}(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \tag{9.5}$$

بما أنّ $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ فإنّه بتضييق المجموعة $A$ وتوسيع كل من $A_j$، نجد:

المجموعة المتراصة $A^{\varepsilon}$ (اجتماع عدد منته من المجـالات المغلقـة) تغطـى بالمجموعات المفتوحة $A_j^{\varepsilon}$، وبالتالي فإنّه استناداً إلى توطئة هاين– بوريل، يمكن فصل تغطية جزئية منتهية من تلك التغطية،أي أنّه من أجل عدد ما $n$، يكون:

$$A^{\varepsilon} \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j^{\varepsilon}$$

بما أنّ الاجتماعات في الطرف الأيسر والطرف الأيمن هي اجتماعات منتهيـة لمجالات مغلقة ومفتوحة فإنّ:

$$\mathscr{L}\left(A^{\varepsilon}\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mathscr{L}\left(A_j^{\varepsilon}\right)$$

من هنا ، بالأخذ بعين الاعتبار العلاقتين (9.4)، (9.5)نجد أنّ:

$$\mathscr{L}(A) < \mathscr{L}\left(A^{\varepsilon}\right) + \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{n} \mathscr{L}\left(A_j^{\varepsilon}\right) + \varepsilon < \sum_{j=1}^{n} \mathscr{L}\left(A_j\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^j} + \varepsilon < \sum_{j=1}^{n} \mathscr{L}\left(A_j\right) + 2\varepsilon$$

ومنه فإنّ:

$$\mathscr{L}(A) < \sum_{j=1}^{\infty} \mathscr{L}\left(A_j\right) + 2\varepsilon$$

بما أنّ $\varepsilon > 0$ كيفي فإنّه بالانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \to 0$، نجد:

$$\mathscr{L}(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathscr{L}\left(A_j\right)$$

**تعريف (9.1)** مهم

ليكن $\mu^*$ قياساً خارجياً مبيناً بالقياس $\mu$ المعـرف بالمبرهنـة (9.1)، تـسمى المجموعات $\mu^*$– قيوسة بمجموعات قيوسة وفق ليبيغ وأما التمديـد $\mathfrak{M}$ للقيـاس $\mu$ على $\sigma$– الجبر $\widetilde{\mathfrak{R}} = \widetilde{\mathfrak{R}}\left([a,b)\right)$ للمجموعات القيوسة وفق ليبيـغ فإنّـه يُـسمى بقياس ليبيغ.

لنستعرض الآن بعض خواص قياس ليبيغ للمجموعات الخطية المحدودة.

### مبرهنة (9.2)

المجموعة المؤلفة من نقطة واحدة قيوسة وقياسها يساوي الصفر.

### البرهان

لتكن $A=\{x\}$ مجموعة مؤلفة من نقطة واحدة. عندئذٍ استناداً إلى المبرهنة (6.1) يكفي أن نبرهن أنّ $m^*(A)=0$ ، حيث $m^*$ هو القياس الخارجي المبني بقياس ليبيغ. استناداً إلى تعريف القياس الخارجي ، نجد:

$$0 \le m^*(\{x\}) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) \quad ; \quad (E_j \in \Re \ , \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \supset \{x\})$$

بمثابة تغطية للنقطة يمكننا بشكل دائم اختيار أي مجال مفتوح $[\alpha,\beta)$ يحتوي على تلك النقطة. لذلك فإنّ:

$$0 \le m^*(\{x\}) \le \inf_{x\in[\alpha,\beta)} m([\alpha,\beta)) = \inf_{x\in[\alpha,\beta)} (\beta-\alpha) = 0$$

### مبرهنة (9.3)

كل مجموعة قابلة للعد على الأكثر ومحدودة من نقاط المحور الحقيقي قيوسة وقياسها يساوي الصفر.

### البرهان

لتكن $A$ مجموعة على الأكثر قابلة للعد وأنّ $A=\{x_1,x_2,\ldots\}$ عندئذٍ $A=\bigcup_j\{x_j\}$ . إنّ قيوسية المجموعة $A$ تنتج من أنّ حقيقة أن $\widetilde{\Re}$ جملة المجموعات القيوسة تشكل $\sigma-$ جبراً. استناداً إلى الخاصة الجمعية العدودة للقياس، يكون لدينا:

$$m(A) = \sum_j m(\{x_j\}) = 0$$

**مثال:**

مجموعة الأعداد العادية من المجال $[0,1]$ قيوسة وقياسها الصفر.

### مبرهنة (9.4)

أي مجال (مفتوح، مغلق، نصف مفتوح) قيوس وقياسه يساوي طوله:

$$m\left((\alpha,\beta)\right)=m\left([\alpha,\beta)\right)=m\left((\alpha,\beta]\right)=m\left([\alpha,\beta]\right)=\beta-\alpha$$

**البرهان**

استناداً إلى تعريف القياس، نجد:

$$m\left([\alpha,\beta)\right)=\beta-\alpha$$

وبالتالي بما أن:

$$[\alpha,\beta]=[\alpha,\beta)\cup\beta$$

فإن:

$$m\left([\alpha,\beta]\right)=m\left([\alpha,\beta)\right)+m\left(\{\beta\}\right)=\beta-\alpha+0=\beta-\alpha$$

بالمثل تماماً نبرهن الحالات الأخرى (تترك للطالب).

**مبرهنة (9.5)**

أية مجموعة محدودة مفتوحة أو مغلقة في $\mathbb{R}$ هي مجموعة قيوسة وفق ليبيغ.

**البرهان**

من المعلوم أن كل مجموعة محدودة ومفتوحة $G\subset\mathbb{R}$ هي اجتماع عدود على الأكثر لمجالات مفتوحة، أي أن:

$$G=\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(\alpha_j,\beta_j\right) \tag{9.6}$$

حيث $(\alpha_j,\beta_j)$ مجالات منفصلة مثنى مثنى

بما أن $\left(\alpha_j,\beta_j\right)\in\widetilde{\mathfrak{R}}$ $(\forall j)$ فإن $G\in\widetilde{\mathfrak{R}}$ وبالتالي فإن $G$ قيوسة.

لتكن $F$ مجموعة محدودة ومغلقة. ولنأخذ أي مجال $F\subset(\alpha,\beta)$ عندئذ $G=(\alpha,\beta)\setminus F$ مجموعة مفتوحة ولذلك فإن $F=(\alpha,\beta)\setminus G$ تكون مجموعة قيوسة لكونها فرق مجموعتين قيوستين.

**ملاحظة (9.1)**

كما هو معلوم، بشكل دائم يمكن اختيار المجالات في التمثيل (9.6) بحيث تكون غير متقاطعة مثنى مثنى، ونتيجة لكون قياس ليبيغ جمعياً عدوداً فإن:

$$m(G)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\beta_j-\alpha_j\right) \tag{9.7}$$

وفي حالة المجموعة المغلقة $F=(\alpha,\beta)\setminus G$ نجد:

$$m(F)=(\beta-\alpha)-m(G)$$

حيث إن $m(G)$ يمكن حسابه بالعلاقة $(9.7)$.

**مبرهنة (9.6)**

أية مجموعة بوريلية محدودة من المحور الحقيقي هي مجموعة قيوسة وفق ليبيغ.

**البرهان** ~~لم يعطى~~ "غير مطلوب البرهان"

لتكن $\mathfrak{B}([a,b)) \ni B$ ولنبين أن المجموعة $B$ هي مجموعة قيوسة وفق ليبيغ بما أن جميع المجموعات المفتوحة من المجال نصف المفتوح $[a,b)$ تنتمي إلى σ – الجبر $\widetilde{\mathfrak{R}}([a,b))$ من المجموعات القيوسة. عندئذٍ يكون σ – الجبر $\mathfrak{B}([a,b))$ المولّد بجملة جميع هذه المجموعات المفتوحة عنصراً أيضاً من $\widetilde{\mathfrak{R}}([a,b))$. أي أن كل مجموعة بوريلية محدودة على المستقيم هي مجموعة قيوسة وفق ليبيغ.

**مبرهنة (9.7)**

إذا كانت $E$ مجموعة محدودة وقيوسة من المحور الحقيقي فإنه من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ توجد مجموعة مفتوحة ومحدودة مثل $\mathbb{R}\supset G$ وبحيث إن $G\supset E$ ويكون

$$m(G\setminus E)<\varepsilon$$

**البرهان**

بما أن $E$ قيوسة فإن $m(E)=m^*(E)$ حيث $m^*$ هو القياس الخارجي الذي بدلالته قد بني قياس ليبيغ، بالعودة إلى تعريف القياس الخارجي وكذلك تعريف

القياس $\mu$ في المبرهنة (9.1) نجد أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة مثل $A$ من الشكل:

$$A = \bigcup_k [\alpha_k , \beta_k)$$

(الاجتماع ليس بأكثر من عدود لمجالات نصف مفتوحة) من أجلها تتحقق:

$$E \subset A \quad , \quad m(A) < m(E) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{9.8}$$

إضافة إلى ذلك من أجل كل مجال من المجالات نصف المفتوحة $[\alpha_k , \beta_k)$ لنستعرض المجال المفتوح الذي يحويه $(\alpha'_k , \beta_k)$ حيث $\alpha'_k = \alpha_k - \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ ولنضع

$$G = \bigcup_k (\alpha'_k , \beta_k)$$

من الواضح أن $G$ مجموعة مفتوحة. ولنبرهن على أنها هي المجموعة المنشودة.

في الواقع، من الواضح أن $A \subset G$ . بالإضافة إلى أن:

$$G \setminus A = \bigcup_k (\alpha'_k , \beta_k) \setminus [\alpha_k , \beta_k)$$

بما أن القياس نصف جمعي فإن:

$$m(G) - m(A) \le \sum_k \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

من هذا ومن العلاقة (9.8) نجد:

$$m(G) \le m(A) + \frac{\varepsilon}{2} < m(E) + \varepsilon$$

وبالتالي فإن:

$$G \supset E \quad , \quad m(G \setminus E) < \varepsilon$$

## § 10. قياس ليبيغ على المستقيم *Lebesgue Measure on Real Line*

في الفقرة السابقة، بنينا نظرية قياس لبيغ من أجل المجموعات المحدودة على المحور الحقيقي. خلاف ذلك، إن جملة جميع المجموعات المحدودة والقيوسة من

المحور الحقيقي ليست بـ $\sigma$ - جبراً وليست بـ $\sigma$ - حلقة (الاجتماع المعدود لمجموعات محدودة يمكن أن يكون غير محدود). في هذه الفقرة، سنبني نظرية القياس وفق ليبيغ من أجل مجموعات كيفية (حتى وإن لم تكن محدودة) على المحور، هذا القياس الذي يمكن أن يأخذ قيماً لانهائية و$\sigma$ - منتهياً تبعاً لذلك تكون أسرة جميع المجموعات القيوسة هي $\sigma$ - جبر.

**تعريف (10.1)**

نقول إن المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ قيوسة وفق ليبيغ إذا كانت المجموعة المحدودة $A \cap [-n, n)$ قيوسة وفق ليبيغ من أجل أي عدد $n \in \mathbb{N}$.

لنرمز بـ $\widetilde{\mathfrak{R}}$ لجملة جميع المجموعات القيوسة من $\mathbb{R}$. في حالة خاصة، ينتج من المبرهنة (9.6)، أن أية مجموعة بوريلية $B \subseteq \mathbb{R}$ قيوسة وفق ليبيغ.

**مبرهنة(10.1)**

الجملة $\widetilde{\mathfrak{R}}$ مجموعة جميع المجموعات الجزئية القيوسة وفق ليبيغ من $\mathbb{R}$ هي $\sigma$ - جبر.

**البرهان**

I - إن $\mathbb{R} \in \widetilde{\mathfrak{R}}$ وذلك لأنه من أجل أي عدد $n \in \mathbb{N}$ تكون المجموعة $\mathbb{R} \cap [-n, n)$ والتي تساوي $[-n, n)$ محدودة وقيوسة $(\forall n \in \mathbb{N})$.

II - لتكن $A, B \in \widetilde{\mathfrak{R}}$، عندئذٍ من أجل أي عدد $n \in \mathbb{N}$ تكون المجموعة:

$$(A \setminus B) \cap [-n, n) = (A \cap [-n, n)) \setminus (B \cap [-n, n))$$

مجموعة محدودة وقيوسة كفرق مجموعتين محدودتين وقيوستين، وبالتالي فإن $A \setminus B \in \widetilde{\mathfrak{R}}$.

III - لتكن $A_1, A_2, \ldots \in \widetilde{\mathfrak{R}}$، عندئذٍ المجموعة:

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap [-n, n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(A_j \cap [-n, n)\right)$$

هي مجموعة محدودة وقيوسة كاجتماع مجموعات من σ – جبر المجموعات الجزئية القيوسة من المجال نصف المفتوح $[-n,n)$. لهذا فإن $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{R}$ أي أن $\mathfrak{R}$ هو σ – جبر.

لتكن $A$ مجموعة قيوسة ما من المحور الحقيقي. ولنستعرض المتتالية العددية

$$m_n(A) = m\left(A \cap [-n,n)\right)$$

بما أن:

$$m\left(A \cap [-n,n)\right) \leq m\left(A \cap [-(n+1),n+1)\right)$$

فإن هذه المتتالية غير متناقصة، ولذلك فإن نهايتها موجودة (منتهية أو غير منتهية).

**تعريف (10.2)**

لتكن $A \in \mathfrak{R}$ . إن قياس ليبيغ للمجموعة $A$ هو بالتعريف النهاية المنتهية أو غير المنتهية:

$$\lambda(A) = \lim_{n \to \infty} m\left(A \cap [-n,n)\right)$$

لنرمز للقياس المبني مجدداً بـ $m$، وذلك لأنه في الحالة التي تكون فيها $A$ مجموعة محدودة ،فإنه يتطابق مع القياس المدروس في الفقرة السابقة.

لنبين أن هذا التعريف جيد، أي أن تابع المجموعة $m(A)$ هو قياس فعلاً (انظر التعريف (8.1)).

**مبرهنة (10.2)**

التابع $m$ المعرف في التعريف (10.2) هو قياس σ – منته على σ – الجبر $\mathfrak{R}$ من المجموعات القيوسات.

**البرهان**

لنبرهن أولاً أن $m$ قياس.

**1**– إن كون $m(A) \geq 0$ و $m(\varnothing) = 0$ ينتج من التعريف.

**II** – لنبرهن أن $m$ تابع جمعي عدود . لتكن $A_1, A_2, \ldots \in \widetilde{\mathfrak{R}}$ حيث $A_j \cap A_k = \varnothing$ $(j \neq k)$. عندئذ، حسب التعريف:

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \to \infty} m\left[\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap [-n, n)\right] = \lim_{n \to \infty} m\left[\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(A_j \cap [-n, n)\right)\right]$$

ومنه استناداً إلى الخاصة الجمعية العدودة لقياس ليبيغ من أجل المجموعات المحدودة الممتدة على المجال نصف المفتوح المثبت $[-n, n)$. نجد:

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty}\left(A_j \cap [-n, n)\right)$$

وبالانتقال إلى النهاية حداً بحد (هذا الأمر ممكن، لأنّ حدود السلسلة غير سالبة) . نجد:

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{n \to \infty} m\left(A_j \cap [-n, n)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m\left(A_j\right)$$

أي أنّ الخاصة الجمعية قد برهنت بالتالي فإنّ $m$ قياس.

**III** – بما أنّ $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n)$ ولجميع الحدود في هذا التمثيل قياس منته فإنّ $m$ هو قياس $\sigma$ – منته.

**ملاحظة (10.1)**

من الطبيعي أن نسأل فيما إذا كان التعريف (10.1) مستقلاً عن اختيار متتالية المجالات نصف المفتوحة $[-n, n)$. إن الإجابة على هذا السؤال تعطى بالمبرهنة الآتية.

**مبرهنة (10.3)**

إنّ قيوسة المجموعة وقيمة قياس ليبيغ لا تتعلقان باختيار المجالات نصف المفتوحة المتزايدة . بكلام آخر . في التعريفين (10.1) و (10.2) بدلاً من المجالات $[-n, n)$ يمكن أخذ أية جملة من المجالات نصف المفتوحة $[\alpha_n, \beta_n)$ بحيث إنّ:

$$[\alpha_1,\beta_1) \subset [\alpha_2,\beta_2) \subset \ldots$$

و $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha_n,\beta_n)$ . أي أنّ جملة المجموعات القيوسة وقياساتها لا يتغيران.

**البرهان**

لتكن $\{[\alpha'_n,\beta'_n)\}$ , $\{[\alpha''_n,\beta''_n)\}$ جملتين من المجالات نصف المفتوحة متمتعتين بالخواص المذكورة في المبرهنة. لنبرهن أولاً أنّ جملة المجموعات القيوسة لا تتعلق باختيار المجالات نصف المفتوحة. لتكن $\forall n \in \mathbb{N}$ المجموعة $A \bigcap [\alpha'_n,\beta'_n)$ قيوسة ولنبين أن جميع المجموعات $A \bigcap [\alpha''_n,\beta''_n)$ قيوسة. بأخذ $m$ كبيراً بقدرٍ كافٍ يكون لدينا $[\alpha''_n,\beta''_n) \subset [\alpha'_m,\beta'_m)$ . عندئذٍ المجموعة

$$A \bigcap [\alpha''_n,\beta''_n) = \left(A \bigcap [\alpha'_m,\beta'_m)\right) \bigcap [\alpha''_n,\beta''_n)$$

هي مجموعة قيوسة لكونها تقاطع مجموعتين قيوستين. بذلك نجد أن اختيار جملة المجالات نصف المفتوحة لا يؤثر في جملة المجموعات القيوسة.

لنبين الآن أنّ هذا الاختيار لا يؤثر في قيمة القياس. لتكن $A$ أية مجموعة قيوسة. لنضع:

$$\begin{aligned} m'(A) &= \lim_{n\to\infty} m\left(A \bigcap [\alpha'_n,\beta'_n)\right) \\ m''(A) &= \lim_{n\to\infty} m\left(A \bigcap [\alpha''_n,\beta''_n)\right) \end{aligned} \qquad (10.1)$$

(من الواضح أنّ هاتين النهايتين موجودتان). يلزم تبيان أنّ

$$m'(A) = m''(A) \qquad , \ \forall A \in \mathfrak{R}$$

لنضع

$$\alpha'''_n = \min\{\alpha'_n,\alpha''_n\} \ , \ \beta'''_n = \max\{\beta'_n,\beta''_n\}$$

عندئذٍ من الواضح أنّ:

$$[\alpha'_n,\beta'_n] \subseteq [\alpha'''_n,\beta'''_n) \ , [\alpha''_n,\beta''_n) \subseteq [\alpha'''_n,\beta'''_n) \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

إذا وضعنا بشكل مماثل لـ (10.1)

$$m'''(A) = \lim_{n\to\infty} m\left(A \bigcap [\alpha'''_n,\beta'''_n)\right)$$

فإنّه لإثبات المبرهنة ونظراً لتماثل وضعي $m', m'''$ ، يكفي أن نبرهن أنّ:

$$m'(A) = m'''(A) \quad , \forall A \in \widetilde{\mathfrak{R}}$$

بما أنّ

$$A \bigcap [\alpha'_n, \beta'_n) \subseteq A \bigcap [\alpha'''_n, \beta'''_n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإنّه استناداً لاطراد القياس يكون:

$$m\left(A \bigcap [\alpha'_n, \beta'_n)\right) \leq m\left(A \bigcap [\alpha'''_n, \beta'''_n)\right) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

بالانتقال إلى النهاية عندما $n \to \infty$ ، نجد أنّ:

$$m'(A) \leq m'''(A) \quad , \forall A \in \widetilde{\mathfrak{R}} \qquad (10.2)$$

لنبرهن على المتراجحة المعاكسة. بما أنّ $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha'_n, \beta'_n) = \mathbb{R}$ فإنّه من أجل أي عدد $n \in \mathbb{N}$ يوجد مثل $k_n \in N$. بحيث إنّ:

$$[\alpha'''_n, \beta'''_n) \subseteq [\alpha'_{k_n}, \beta'_{k_n})$$

ولذلك فإنّ:

$$A \bigcap [\alpha'''_n, \beta'''_n) \subseteq A \bigcap [\alpha'_{k_n}, \beta'_{k_n})$$

فإنّه بفضل اطراد القياس نجد أنّ:

$$m\left(A \bigcap [\alpha'''_n, \beta'''_n)\right) \leq m\left(A \bigcap [\alpha'_{k_n}, \beta'_{k_n})\right)$$

بما أنّ المتتالية في الطرف الأيمن متقاربة إلى $m'(A)$ فإنّه بالانتقال إلى النهاية عندما $n \to \infty$ نجد:

$$m'''(A) \leq m'(A) \quad , \forall A \in \widetilde{\mathfrak{R}} \qquad (10.3)$$

من (10.3) و (10.2) ينتج أنّ $m'(A) = m'''(A)$ وبالمثل نجد أنّ:

$$m''(A) = m'''(A)$$

وبالتالي:

$$m'(A) = m''(A)$$

**المبرهنة (10.4)**

إذا كانت $E \subset \mathbb{R}$ مجموعة قيوسة فإنّه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة مفتوحة مثل $G \subset \mathbb{R}$ وبحيث إنّ $E \subset G$ و $m(G \setminus E) < \varepsilon$.

**البرهان**

إذا كانت $E$ مجموعة محدودة فإنّ المجموعة المنشودة $G$ قد بنيت في المبرهنة (9.7). في الحالة العامة . لنضع:

$$E_n = E \cap [-n, n)$$

من أجل كل مجموعة $E_n$ لنبنِ المجموعة المفتوحة $G_n \supset E_n$ وبحيث إنّ:

$$m(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

إذا وضعنا الآن: $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$

عندئذٍ $G$ مجموعة مفتوحة و $G \supset E$ و $G \setminus E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)$

ولهذا فإنّ

$$m(G \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

**مبرهنة (10.5)**

إذا كانت $E \subseteq \mathbb{R}$ مجموعة قيوسة، فإنّه من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة مغلقة $F \supset F$ بحيث أنّ:

$$m(E \setminus F) < \varepsilon$$

**البرهان**

بما أنّ $E$ قيوسة فـإنّ متممتها $\hat{E}$ تكـون كـذلك . عندئـذٍ اسـتناداً إلـى المبرهنة (10.4)، من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$، توجد مجموعة مفتوحة $G \subset \mathbb{R}$ بحيـث إنّ $G \supset \hat{E}$ ويكون:

$$m(G \setminus \hat{E}) < \varepsilon$$

لنضع $F=\hat{G}$ عندئذ تكون $F$ مجموعة مغلقة ويكون $F \subset E$ , $E \setminus F = G \setminus \hat{E}$ ومنه:

$$m(E \setminus F) < \varepsilon$$

## مجموعة كانتور $\Pi$

لنأخذ المجال $\Delta=[0,1]$ ولنقسم هذا المجال إلى ثلاثة أقسام متساوية الطول، ولنأخذ عليه المجالين $\Delta_1=\left[\frac{2}{3},1\right]$ , $\Delta_0=\left[0,\frac{1}{3}\right]$ ويسميان بالمجالين المغلقين من المرتبة الأولى ويسمى المجال المفتوح $\delta=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ بالمجال المفتوح من المرتبة صفر.

لنتعامل مع المجالين المغلقين $\Delta_0 , \Delta_1$ بالطريقة نفسها لنقسم $\Delta_0$ إلى ثلاثة مجالات اثنان منها مغلقان $\Delta_{00}=\left[0,\frac{1}{9}\right]$ ، $\Delta_{01}=\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$ ومجال مفتوح $\delta_{00}$.

ولنقسم $\Delta_1$ إلى ثلاثة مجالات اثنان منهما مغلقان $\Delta_{10}=\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$ ، $\Delta_{11}=\left[\frac{8}{9},1\right]$ ومجال مفتوح $\delta_{11}$.

نسمي المجالات $\Delta_{11}$ , $\Delta_{10}$ , $\Delta_{01}$ , $\Delta_{00}$ بمجالات مغلقة من المرتبة الثانية. أما $\delta_0 , \delta_1$ فنسميها بمجالات مفتوحة من المرتبة الأولى.

لنستمر بهذه العملية دون توقف ، بعد $n$ خطوة نحصل على $2^n$ من المجالات المغلقة $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ حيث إنّ الأدلة تأخذ كل منها إحدى القيمتين $0,1$.

بقسمة المجال المغلق $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ بالطريقة نفسها إلى مجالين مغلقين $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n 1}$ , $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n 0}$ وبينهما يقع المجال المفتوح $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ يكون المجالان المغلقان من المرتبة $n+1$ بينما المجال المفتوح من المرتبة $n$.

إنّ المجالات المغلقة من المرتبة $n$ يقع كل زوج منها على مسافة من بعضها لاتقل عن $\frac{1}{3^n}$.

لنرمز بـ

$$\Pi_1 = \left[0,\tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3},1\right]$$
$$\Pi_2 = \left[0,\tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3},\tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9},1\right]$$

..............................................

اجتماع جميع المجالات المغلقة من المرتبة $\Pi_n = n$

من هنا نستنتج أنّ $\Pi_n$ مجموعة مغلقة (لأنّه اجتماع مجالات مغلقة)، إنّ متممة $\Pi_n$ هي جميع المجالات المفتوحة $\delta_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ والمجالات $(-\infty,0)\,,\,(1,+\infty)$.

لنشكل تقاطع المجموعات $\Pi_n$ ولنرمز له بـــ $\Pi$، أي:

$$\Pi = \bigcap_n \Pi_n$$

إنّ $\Pi$ مجموعة مغلقة ومتممتها هي اجتمـــاع جميـــع المجـــالات المفتوحـــة والمجالين $(-\infty,0)\,,\,(1,+\infty)$.

من هنا نستنتج أنّ جميع أطراف المجالات $\delta_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ تنتمي إلى $\Pi$ وكذلك $0,1$ . تسمى هذه المجـــالات وكـــذلك $(-\infty,0)\,,\,(1,\infty)$ بالمجـــالات المجـــاورة للمجموعة $\Pi$.

**خواص المجموعة $\Pi$**

1) إنّ طول كل مجال مغلق من المرتبة $n$ يساوي $\frac{1}{3^n}$.

2) إنّ المسافة بين أي مجالين مغلقين من المرتبة $n$ أكبر أو يـــساوي $\frac{1}{3^n}$ ولـــذلك فإنّ أية نقطة $x \in \Pi$ تكون منتمية إلى مجال مغلق واحد من المرتبـــة الأولـــى ومجال مغلق واحد من المرتبة الثانية وهكذا .... إلى مجال مغلـــق واحـــد مـــن المرتبة $n$.

3) المجموعة $\Pi$ ليست كثيفة في $\mathbb{R}$. (يترك برهانها للطالب).

4) من تعريف $\Pi_n$ نجد أنّ:

$$\Pi_1 \supset \Pi_2 \supset \cdots \supset \Pi_n \supset \cdots$$

كما أنّ:

$$\mu(\Pi_n)=\frac{1}{3^n}.2^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

استناداً إلى استمرار التقاطع نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\Pi_n)=\mu(\Pi)$$

ومنه نجد:

$$\mu(\Pi)=0$$

أي أنّ $\Pi$ قيوسة وفق ليبيغ وقياسها يساوي الصفر.

لنشكل الآن $\mathfrak{M}(\Pi)$ أسرة جميع المجموعات الجزئية من $\Pi$ إنّ هذه المجموعة محتواة في $\widetilde{\mathfrak{R}}$ أي $\mathfrak{M}(\Pi)\subset\widetilde{\mathfrak{R}}$ أسرة جميع المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ وهي $\sigma-$ جبر أي أنّ $\Pi$ مجموعة بوريلية وبالتالي فهي ليبيغية وقياسها الصفر، وبالتالي تكون أية مجموعة جزئية منها مهملة أي أنّها مجموعة قيوسة وفق ليبيغ وبما أنّ للمجموعة $\Pi$ قدرة المستمر، وبما أنّ قدرة $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ أصغر من قدرة $\mathfrak{M}(\Pi)$. الأمر الذي يعني وجود مجموعة جزئية من $\Pi$ إلا أنّها غير قابلة للقياس وفق بوريل.

## § 11. قياس ليبيغ في الفضاء الإقليدي ذي الـ $n$ بعد

***Lebesgue Measure in the n- dimensional Euclidean Space***

إنّ قياس ليبيغ في $\mathbb{R}^n$ يبنى وفق نفس المخطط في بناء قياس ليبيغ في $\mathbb{R}$ ولهذا فإننا سنشير إليه فقط.

لتكن $a,b \in \mathbb{R}^n$ بحيث إنّ $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\,,\,b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ إضافةً إلى أنّ

$$a_1<b_1\,,\,a_2<b_2\,,\dots,\,a_n<b_n$$

نسمي المجموعة

$$[a,b)=\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_1\le x_1<b_1,\dots,a_n\le x_n<b_n\}$$

مجالاً نصف مفتوح ذا $n$ بعداً أو متوازي مستطيلات نصف مفتوح (من أجل $n=2$ مستطيل).

ويسمى العدد

$$V\left(\left[a,b\right)\right)=\left(b_1-a_1\right)\left(b_2-a_2\right)\ldots\left(b_n-a_n\right)$$

بحجم المجال نصف المفتوح $\left[a,b\right)$.

بسهولة يمكن التأكد من أنّ تقاطع مجالين نصف مفتوحين هو مجال نصف مفتوح ، كما أنّ فرق مجالين نصف مفتوحين هو إما مجال نصف مفتوح أو اجتماع عدد منتهٍ من المجالات نصف المفتوحة.

لنثبت مجالاً نصف مفتوح ما $\left[a,b\right)$ ولنستعرض مجموعة المجالات نصف المفتوحة.

$$M=\left\{\left[\alpha,\beta\right)\mid\left[\alpha,\beta\right)\subseteq\left[a,b\right)\right\}$$

وإذا رمزنا بـ $\mathfrak{R}$ للجبر المولّد بـ $M$ فإنّ كل مجموعة $A\in\mathfrak{R}$ تكتب على الشكل :

$$A=\bigcup_{k=1}^{\ell}\left[\alpha_k,\beta_k\right)\quad;\quad\left[\alpha_k,\beta_k\right)\subseteq\left[a,b\right)\tag{11.1}$$

حيث إنّ المجالات نصف المفتوحة في الطرف الأيمن غير متقاطعة مثنى مثنى.

نسمي مجموع الحجوم المشكلة للمجالات نصف المفتوحة للمجموعة $A$ بحجم المجموعة $A$ ونرمز لذلك بـ $V\left(A\right)$.

**مبرهنة (11.1)**

لنعرف على الجبر $\mathfrak{R}$ تابعاً $\mu$ . بأن نضع:

$$\mu(A)=V\left(A\right)\quad;\quad\left(A\in\mathfrak{R}\,,A\neq\varnothing\right)\ ,\ \mu(\varnothing)=0$$

إنّ التابع $\mu$ هو قياس على $\mathfrak{R}$.

إنّ البرهان لا يختلف عن برهان المبرهنة (9.1).

**تعريف (11. 1)**

ليكن $\mu^*$ القياس الخارجي المبني بالقياس المعرف في المبرهنة (11.1) نقول عن المجموعة الجزئية $\mu^*$- قيوسة من المجال نصف المفتوح $[a,b)$ إنّها قيوسة وفق ليبيغ ونسمي التمديد $m$ للقياس $\mu$ على σ - الجبر $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}([a,b))$ للمجموعات القيوسة وفق ليبيغ بقياس ليبيغ.

كما في $\mathbb{R}$، إنّ قياس المجموعات المحدودة في $\mathbb{R}^n$ لا يتعلق باختيار المجال نصف المفتوح $[a,b)$. تنقل المبرهنات (9.7)، (9.2) إلى الفضاء $\mathbb{R}^n$.

تسمى المتنوعة الخطية المحدودة $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ; $\dim \Gamma < n$ نظامية ، إذا وجد من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ جملة منتهية $A$ من المجالات نصف المفتوحة والتي تغطي $\Gamma$ وبحيث إنّ $\mu(A) < \varepsilon$. على سبيل المثال، إنّ نظامية متنوعة ذات $(n-1)$ بعد يكفي أن تُعطى بمعادلة من الشكل:

$$x_k = f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

حيث $f$ تابع مستمر معرف على مجموعة متراصة.

**مبرهنة (11. 2)**

إذا كانت $\Gamma$ متنوعة نظامية محدودة في $\mathbb{R}^n$ وقياسها أصغر من $n$ ، فإنّ $\Gamma$ قيوسة وفق ليبيغ و $m(\Gamma) = 0$.

**البرهان**

ينتج من أنّ $\mu^*(\Gamma) = 0$ وذلك لنظامية $\Gamma$.

إنّ قياس المجموعات غير المحدودة في $\mathbb{R}^n$ يعرف بالطريقة نفسها التي عُرف فيها في $\mathbb{R}$ .( في الفقرة (10) ) ، إلا أنّ $[-n,n)$ هو مكعب نصف مفتوح . تنقل المبرهنات (10.1) ، (10.5) مباشرة في حالة قياس ليبيغ في $\mathbb{R}^n$.

## § 12. الشحنات وخواصها *Charges and their Properties*

سنستعرض، في هذه الفقرة ، مفهوم الشحنة، والذي يعتبر تعميماً طبيعياً وبسيطاً لمفهوم القياس، وسنقوم بدراسة خواص الشحنات.

أخذت كلمة " الشحنة " من الفيزياء. إنّ الفرق الأولي بين الشحنات الفيزيائية والكتل الفيزيائية هو أن الكتل دائماً غير سالبة، بينما الشحنات قد تكون موجبة وقد تكون سالبة. الأمر ذاته بالنسبة للمفهومين الرياضيين للشحنة والقياس.

**تعريف (12 . 1)**

ليكن $\mathfrak{R}$ $\sigma$ – جبراً من المجموعات الجزئية من الفضاء $X$ وليكن $w$ تابعاً ذا قيم حقيقية معرفاً على $X$:

$$\mathfrak{R} \ni A \to w(A) \in \mathbb{R}$$

يسمى التابع $w$ شحنة إذا حقق الشروط الآتية:

1- $w(\varnothing)=0$ .

2- التابع $w$ جمعي عدود، أي أنه، إذا كانت $A, A_2, \ldots \in \mathfrak{R}$ و $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$ ، فإنّ:

$$W\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} W(A_j)$$

نلاحظ أنّ الشحنات المستعرضة هنا لا تأخذ قيماً لا نهائية.

ينتج من التعريف أنّ الشحنات تحقق الخاصة الجمعية المنتهية ومغلقة بالنسبة لعملية الفرق. كما يمكن البرهان بسهولة على تحقق مبرهنات الاستمرار والتقاطع والاجتماع تماماً كما في المبرهنات (3.1) و (3.2).

**مثال**

ليكن $\mu$ و $\upsilon$ قياسين منتهيين معرفين على $\sigma$ – الجبر $\mathfrak{R}$ من المجموعات الجزئية من $X$. لنفرض أنّ:

$$w(A) = \mu(A) - \upsilon(A) \quad ; \quad \forall A \in \mathfrak{R}$$

إن $w$ شحنة . في الواقع، لنتأكد من صحة الشرطين (1) و (2). لدينا:

1) $w(\varnothing) = \mu(\varnothing) - \upsilon(\varnothing) = 0$

(2 $$w\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)=\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)-\upsilon\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu\left(A_j\right)-\sum_{j=1}^{\infty}\upsilon\left(A_j\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\mu\left(A_j\right)-\upsilon\left(A_j\right)\right)=\sum_{j=1}^{\infty} w\left(A_j\right)$$

سنشرح فيما يأتي أنّ هذا المثال ذو طبيعة عامة، أي أنّ، أي شحنة يمكن أن تمثل على شكل فرق قياسين. من أجل هذا، لنبرهن أولاً بعض المبرهنات الأولية.

**مبرهنة (1 . 12)**

كل شحنة تكون محدودة . أي أنّه، يوجد $c>0$ بحيث إنّ:

$$\left|w\left(E\right)\right|\le c \quad ; \quad \forall \quad E\in\Re$$

**البرهان**

لنبرهن أنّ الشحنة $\left\{w\left(E\right) \mid E\in\Re\right\}$ محدودة من الأعلى ( يبرهن بأسلوب مماثل أنّها محدودة من الأدنى). بغية ذلك لنفرض العكس. ليكن $\sup_{E\in\Re} w\left(E\right)=+\infty$. تسمى المجموعة $A$ غيرمحدودة بالنسبة للشحنة $w$ إذا كان:

$$\sup_{E\subset A, E\in\Re} w\left(E\right)=+\infty$$

هذا الفرض يعني أنّ الفضاء الصحيح $X$ غير محدود في $w$.

إنّ الحالتين الآتيتين محققتان:

1) كل مجموعة غير محدودة من $\Re$ تحتوي على مجموعة جزئية غير محدودة ذات شحنة كبيرة.

2) توجد مجموعة غير محدودة $A\in\Re$ وعدد $N>0$ بحيث إنه من أجل أي مجموعة غير محدودة $B \subseteq A$، يتحقق الشرط:

$$w\left(B\right)\le N$$

لنستعرض كل حالة على حدة.

في الحالة الأولى، لتكن $A$ مجموعة ما غير محدودة (على سبيل المثال $A=X$) عندئذٍ توجد مجموعة $A_1 \subseteq A$ بحيث إن $w\left(A_1\right)\ge 1$ . كما ورد أعلاه،

لنبنِ المجموعة $A_1 \supseteq A_2$ بحيث إنّ $w(A_2) \geq 2$ وهكـذا . نحـصل علـى متتاليـة متناقصة من المجموعات $\{An\}_{n=1}^{\infty}$. بحيث إنّ . $w(A_n) \geq n$.

عندئذٍ وفقاً لمبرهنة استمرار التقاطع نجد.

$$w\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} w(A_n) = +\infty$$

أي أنّنا قمنا ببناء شحنة لا نهائية وهذا أمر غير ممكن.

في الحالة الثانية، لنستعرض المجموعة غير المحدودة $A$ المذكورة في الـشرط (2). بمـا أنّ $A$ غيـر محـدودة، فإنّـه توجـد مجموعـة $A_1 \subset A$ بحيـث إنّ $w(A_1) > N$ . إنّ هذه المتراجحة تبين أنّ المجموعة $A_1$ لا يمكن أن تكـون غيـر محدودة . لذلك ، فـإنّ $A \setminus A_1$ غيـر محـدودة. بـشكل مماثـل، توجـد مجموعـة $A \setminus A_1 \supset B_1$ بحيث إنّ $w(B_1) \geq 1$.

بما أنّ $A_1 \cap B_1 = \varnothing$ ، فإنّ $w(A_1 \cup B_1) = w(A_1) + w(B_1) > N + 1$، فإنّ $A_1 \cup B_1$ ليست غير محدودة . بذلك تكـون المجموعـة $A \setminus (A_1 \cup B_1)$ غيـر محدودة.

باستخدام الطريقة ذاتها، نبني $A_1 \setminus (A_1 \cup B_1) \supset B_2$، بحيـث إنّ $w(B_2) \geq 1$ و $w(A_1 \cup B_1 \cup B_2) = w(A_1) + w(B_1) + w(B_2) > N + 2$

أي أنّ $A_1 \cup B_1 \cup B_2$ ليست غيـر محـدودة . الأمـر الـذي يـؤدي إلـى أن $A \setminus (A_1 \cup B_1 \cup B_2)$ غير محدودة. إذا تابعنا في هذه الطريقـة ، نحـصل علـى متتالية من المجموعات المنفصلة مثنى مثنى $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots \in \mathfrak{R}$ بحيـث إنّ $w(B_j) \geq 1$. عندئذٍ يكون:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{R} \quad , w\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} w(B_n) = +\infty$$

وهذا غير ممكن. أي أنّ الفرض أن الشحنة غير محدودة غير صحيح.

## تعريف (12 . 2)

تسمى المجموعة $E$ موجبة ( سالبة أو صفرية ) بالنسبة للشحنة $w$ إذا كان $\mathfrak{R} \ni E$ و $w(F) \geq 0$ ( $w(F) \leq 0$ أو $w(F)=0$ على الترتيب ) من أجل أي $F \subseteq E$ و $\mathfrak{R} \ni F$.

من الواضح، أنّ المجموعة الخالية موجبة ، سالبة ، وصفرية في الوقت ذاته.

## توطئة (12 . 1)

صف المجموعات الموجبة بشكل σ – حلقة (التأكيد ذاته صحيح بالنسبة للمجموعات السالبة والصفرية).

لنثبت المبرهنة من أجل المجموعات الموجبة فقط ويتم بشكل مماثل بالنسبة للمجموعات السالبة والصفرية .

1) لتكن $E_1$ و $E_2$ مجموعتين موجبتين . ولنبرهن أنّ $E_1 \setminus E_2$ هي مجموعة موجبة. لتكن $\mathfrak{R} \ni F$ و $E_1 \setminus E_2 \supseteq F$ عندئذٍ $F \subset E_1$ ووفقاً لتعريف المجموعة الموجبة يكون $w(F) \geq 0$ وبالتالي $E_1 \setminus E_2$ موجبة.

2) لتكن $E_1$ و $E_2$... مجموعات موجبة . ولنبرهن أنّ $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ موجبة أيضاً . استناداً للتوطئة (2.1). لنبنِ جملة من المجموعات المنفصلة مثنى مثنى $B_1, B_2, \ldots$ بحيث أن:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad , \ B_i \subseteq E_i \quad , \ B_i \in \mathfrak{R}$$

ليكن $\mathfrak{R} \in F$ و $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \supseteq F$. عندئذٍ:

$$F = F \bigcap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = F \bigcap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \big(F \bigcap B_i\big)$$

استناداً للخاصة الجمعية العدودة للشحنة نجد:

$$w(F) = \sum_{i=1}^{\infty} w\left(F \bigcap B_i\right) \qquad (12.2)$$

إلا أنّ $F \cap B_i \in \mathfrak{R}$ و $F \cap B_i \subseteq F_i$، لذلك، استناداً للتعريف (12.2) جميع حدود الطرف الأيمن من العلاقة (12.1) غير سالب. الأمــر الــذي يــؤدي إلــى أنّ $w(F) \geq 0$. أي أنّ $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ مجموعة موجبة.

إذا كانت الشحنة الكهربائية متوزعة على سطح ما، فإنّ هذا السطح يقسم بشكل طبيعي إلى قسمين يحملان شحنات موجبة وسالبة، على الترتيب.

تعطي المبرهنة الآتية التفسير الرياضي لهذه الحقيقة.

**مبرهنة (12 . 2) (النشر بمفهوم هان)**

أية شحنة $w$، يمكن أن تمثل علــى شــكل اجتمــاع مجمــوعتين منفــصلتين $X_+ , X_-$.

$$X = X_+ \cup X_-$$

من أجل تلك الشحنة ، تكون المجموعة $X_+$ موجبة بينما تكون المجموعــة $X_-$ سالبة. وهذا النشر وحيد بالنسبة لمجموعة صفرية للشحنة المعطاة.

**البرهان** (انظر[ 2 ])

لنستعرض الشحنة $w$ المعرفة على $\sigma$ – الجبر $\mathfrak{R}$ من المجموعات الجزئيــة من $X$ وليكن:

$$X = X_+ \cup X_- \qquad (12.2)$$

نشراً للفضاء $X$ بمفهوم هان . من أجل أية مجموعة $E \in \mathfrak{R}$ لنضع

$$w_+(E) = w(E \cap X_+) \quad , \quad w_-(E) = -w(E \cap X_-)$$

استناداً إلى المبرهنة (12.2) التابعان $w_+ , w_-$ يتعينان بشكل وحيــد علــى $\sigma$ – الجبر $\mathfrak{R}$ (لا يتعلقان بالنشر (12.2)).

**تعريف (12 . 3)**

يسمى تابعا المجموعة $w_+ , w_-$ تغيراً ســالباً وموجبــاً للــشحنة $w$ ، علــى الترتيب . ويسمى تابع المجموعة $|w|$ المعرف بالمساواة

$$|w|(E)=w_{+}(E)+w_{-}(E) \quad ; \; E \in \mathfrak{R}$$

بالتغير الكلي للشحنة $w$.

إنّ هذا التعريف يؤدي مباشرة إلى أنّ التغير الكلي، الموجب، والسالب لـشحنة ما هي قياسات منتهية. في هذه الحالة، يمكن إثبات صحة المبرهنة الآتية.

**مبرهنة (12 . 3) (النشر بمفهوم جوردان)**

كل شحنة يمكن أن تمثل كفرق قياسين منتهيين، أي أنّ:

$$w(E)=w_{+}(E)-w_{-}(E) \tag{12.3}$$

**البرهان**

باستخدام نشر هان (12.2) نجد أنّ:

$$E=(E \cap X_{+}) \cup (E \cap X_{-})$$

من أجل أية $E \in \mathfrak{R}$ ، بما أنّ مجموعتي الطرف الأيمن لا تملكان نقاطاً مشتركة. فإنه استناداً للخاصة الجمعية للشحنة نجد:

$$\begin{aligned} w(E) &= w(E \cap X_{+})+w(E \cap X_{-}) \\ &= w_{+}(E)-w_{-}(E) \end{aligned}$$

يسمى نشر الشحنة كفرق تغيرها السالب عن الموجب بنشر الشحنة بمفهوم جوردان.

**ملاحظة (12 . 2)**

إنّ تمثيل الشحنة كفرق قياسين ليس وحيداً . في الحقيقة ، ليكن $w=w_{+}-w_{-}$ النشر بمفهوم جوردان وليكن $\rho$ قياساً منتهياً. عندئذٍ يكون:

$$w=(w_{+}+\rho)-(w_{-}+\rho)$$

تمثيلاً آخر للشحنة كفرق قياسين منتهيين.

نلاحظ أنّ النشر بمفهوم جوردان أصغري بالمعنى الآتي:

إذا كان $w = w_+ - w_-$ نشرَ جوردان وكان $w = \mu - \upsilon$ تمثيلا اخر لـــ $w$ كفرق قياسين منتهيين، عندئذٍ:

$$w_+(E) \le \mu(E) , w_-(E) \le \upsilon(E) \quad , \quad \forall E \in \mathfrak{R}$$

في الواقع:

$$w_+(E) = w\,(E \cap X_+) = \mu(E \cap X_+) - \upsilon(E \cap X_+) \le$$
$$\le \mu(E \cap X_+) \le \mu(E)$$

بشكل مشابه نجد:

$$w_-(E) = -w\,(E \cap X_-) = -\left(\mu(E \cap X_-) - \upsilon(E \cap X_-)\right)$$
$$= \upsilon(E \cap X_-) - \mu(E \cap X_-) \le$$
$$\le \upsilon(E \cap X_-) \le \upsilon(E)$$

**ملاحظة (12 . 3)**

جميع النتائج المستعرضة في هذه الفقرة يمكن أن تعمم إلى الحالة التـــي تأخـــذ فيها الشحنات قيماً لا نهائية $-\infty$ , $+\infty$.

**ملاحظة (12 . 4)**

في بعض الحالات، من الضروري أن نستعرض الشحنات ذات القيم العقدية.

لتكن لـــدينا الـــشحنتان $w_2 , w_1$ المعرفتـــان علـــى $\sigma$ - الجبـــر $\mathfrak{R}$ مـــن المجموعات الجزئية من $X$ . عندئذٍ يسمى تابع المجموعة $w = w_1 + i\,w_2$ شـــحنة ذات قيم عقدية . في هذه الحالة، لدينا

$$\mathfrak{R} \ni A \;\to\; w\,(A) \in \mathbb{C}$$

كل من الشحنات ذات القيم الحقيقية وذات القيم العقدية جمعية عدودة ومحدودة.

# مسائل وتمارين الفصل الأول

1- ليكن $\mathfrak{R}$ جملة من المجموعات المحققة للشروط الآتية :

$$a)\quad A\,\Delta\, B \;,\; A \cap B \;\in \mathfrak{R}$$

$$b)\quad A \cup B \;,\; A\,\Delta\, B \;\in \mathfrak{R}$$

$$c)\quad A\,\Delta\, B \;,\; A \setminus B \;\in \mathfrak{R}$$

وذلك من أجل أي $A$ , $B$ ∋ $\mathfrak{R}$. برهن أنّ $\mathfrak{R}$ حلقة.

2- برهن أنّ جملة المجموعات $\mathfrak{R}$ المتمتعة بإحدى الخاصتين:

$$a)\quad \forall A , B \in \mathfrak{R} \qquad A \cup B \;,\; A \cap B \in \mathfrak{R}$$

أو

$$b)\quad \forall A , B \in \mathfrak{R} \qquad A \cap B \;,\; A \setminus B \in \mathfrak{R}$$

ليست حلقة.

3- برهن أنّه إذا $f : X \longrightarrow Y$ وكان $K$ $\sigma$- حلقة من المجموعات الجزئية من $Y$ فإنّ:

$$f^{-1}(K) = \left\{ f^{-1}(A) \;\middle|\; A \in K \right\}$$

$\sigma$- حلقة من المجموعات الجزئية من $X$.

4- برهن أنّه : إذا كانت $X = \mathbb{R}$ وكانت $A$ مجموعة جزئية منتهية مـن $\mathbb{R}$ أو متممتها $\hat{A}$ في $\mathbb{R}$ منتهية، فإنّ جملة المجموعات

$$\mathfrak{R} = \left\{ A \in \mathbb{R} \;\middle|\; A \text{ منتهية أو } \hat{A} \text{ منتهية} \right\}$$

جبر على $\mathbb{R}$ ، إلا أنّه ليس $\sigma$- جبراً.

5- برهن أنّ جملة المجموعات

$$\mathfrak{A} = \left\{ B \subset X \;\middle|\; B \text{ أو } \hat{B} \text{ على الأكثر قابلة للعد} \right\}$$

$\sigma$- جبر على $X$.

6- أعطِ مثالاً تبين فيه أنّ اجتماع حلقتين، بشكل عام، ليس حلقة.

7- برهن أنّه : إذا كانت $\{\Re_i\}_{i\in I}$ ; (I مجموعة الأدلة) جبوراً تامة على $X$.

فإنّ: $\Re = \bigcap_{i\in I} \Re_i$ جبر تام على $X$.

8- ليكن $\mu$ قياساً على الجبر $\Re$ من المجموعات الجزئية من $X$. برهن أنّه، من أجل جميع $C$ , $B$ , $A$ ∋ $\Re$ تتحقق جميع المساويات الآتية:

$$a)\quad \mu(A\cup B) \le \mu(A)+\mu(B)$$

$$b)\quad \mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B) - \mu(A\cap B)$$

$$c)\quad \mu(A\,\Delta B) = \mu(A)+\mu(B) - 2\mu(A\cap B)$$

$$d)\quad |\mu(A)-\mu(B)| \le \mu(A\,\Delta B)$$

$$e)\quad \mu(A\,\Delta B) \le \mu(A\,\Delta C)+\mu(B\,\Delta C)$$

$$f)\quad |\mu(A\cup B)\times\mu(A\cap B)-\mu(A)\,\mu(B)| \le \frac{1}{4}\mu^2(A\cup B)$$

9- بيّن فيما إذا كان تابع المجموعة $\mu$ قياساً أم لا.

$$a)\quad \begin{array}{ll} \mu(A)=0 & ;\quad A=\varnothing \\ \mu(A)=1 & ;\quad A\neq\varnothing \end{array}$$

10- برهن أنّ المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ مجموعة بوريلية، واحسب قياسها:

$$a)\quad A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{3^n}\,,\,n+\frac{1}{2^n}\right]$$

$$b)\quad A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n^n\,,n^n+\frac{1}{\ln(n+1)}\right]\setminus\mathbb{Q}$$

11- ليكن $\mu^*$ قياساً خارجياً على $X$. برهن أنّ:

$$\mu^*(A\cup B)+\mu^*(A\cap B) \le \mu^*(A)+\mu^*(B)$$

# الفصل الثاني

# التوابع القيوسة

## *Measurable Functions*

إنّ مفهوم التابع القيوس قد عُرِف من قبل ليبيغ عندما تطرق إلى نظرية التكامل. برهن لوزين مؤخراً مايسمى بالخاصة $C$ – للتوابع القيوسة، والتي تتلخص في أن كل تابع قيوس هو " تقريباً مستمر". وسندرس في هذا الفصل خواص التوابع القيوسة وكذلك الأشكال المختلفة لتقارب متتاليات التوابع القيوسة والصلة بينها.

### § 1. الفضاءات القيوسة.الفضاءات ذات القياس.التوابع القيوسة

***Measurable Spaces . Measure Spaces . Measurable functions***

سنستعرض في هذه الفقرة سلسلة من المفاهيم التي سنستخدمها لاحقاً حيث نقول عن المجموعة $X$ والتي عرف عليها $\sigma$ – جبر $\mathfrak{R}$ . إنّها فضاء قيوس ونرمز لذلك بـ $\langle X, \mathfrak{R}\rangle$ .

وفي المواضع التي لا يوجد فيها التباس ، سنرمز للفضاء القيوس بالرمز $X$ نفسه المستخدم للمجموعة . وتسمى المجموعات الجزئية من $X$ والمنتمية إلى $\sigma$ – الجبر $\mathfrak{R}$ بمجموعات قيوسة أو $\mathfrak{R}$– قيوسة . ونؤكد هنا على أنّ هذا المفهوم للقيوسية لا يرتبط بأي شكل مع مفهوم القيوسية بالنسبة للقياس الخارجي . فإذا كانت المجموعة $\mathfrak{R}$– قيوسة فإنّ هذا لا يعني أنّ هذه المجموعة قيوسة بالنسبة لقياس خارجي ما معرف على $X$.

**مثال**

ليكن $X = \mathbb{R}$ المحور الحقيقي وليكن $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ $\sigma$ – جبر جميع المجموعات البوريلية من $\mathbb{R}$. في الفضاء القيوس $\langle X , \mathfrak{B}\rangle$ تكون المجموعات القيوسة هي جميع المجموعات الجزئية البوريلية من $\mathbb{R}$. مثل هذه المجموعات تُسمى

عادة مجموعات قيوسة بوريلية. بشكل مشابه تماماً يمكن بناء تعميم في $\mathbb{R}^n$ وفي أي فضاء توبولوجي .

يُسمى الفضاء القيوس $\langle X, \mathfrak{R} \rangle$ فضاءً ذا قياس إذا كان معرفاً على $\sigma$ – الجبر $\mathfrak{R}$ قياس $\mu$ ونرمز للفضاء ذي القياس بالثلاثية $\langle X, \mathfrak{R}, \mu \rangle$. وأحياناً، سنرمز للفضاء ذي القياس بالرمز $X$ ذاته.

ليكن، على سبيل المثال، $\langle \mathbb{R}, \mathfrak{B} \rangle$ فضاءً قيوساً ، وليكن $m$ قياس ليبيغ على المحور الحقيقي، عندئذٍ يكون $\langle \mathbb{R}, \mathfrak{B}, m \rangle$ فضاءً ذا قياس $\sigma$ – منتهٍ هو $m$. من الواضح أن الفضاء $\langle \mathbb{R}, \mathscr{L}, m \rangle$ حيث $\mathscr{L}$ $\sigma$ – الجبر المشكل من جميع المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ القيوسة وفق ليبيغ هو فضاء ذو قياس.

سندرس لاحقاً التوابع المعرفة على فضاءات قيوسة.

لنعطِ الآن المفهوم الرئيسي لهذه التوابع وهو مفهوم التابع القيوس.

**تعريف (1.1)**

ليكن $\langle X, \mathfrak{R} \rangle$ و $\langle X_1, \mathfrak{R}_1 \rangle$ فضائين قيوسين، وليكن التابع $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}_1$ . يسمى التابع $f$ قيوساً إذا كانت الصورة العكسية لأية مجموعة $\mathfrak{R}_1$– قيوسة هي مجموعة $\mathfrak{R}$– قيوسة أي أنه من أجل أية مجموعة $A_1 \ni \mathfrak{R}_1$ تكونُ الصورة العكسية $f^{-1}(A_1) \ni \mathfrak{R}$.

غالباً سنكون مضطرين لدراسة توابع عددية قيوسة، ولذلك سنستعرض هذا الأمر بالتفصيل.

ليكن $\langle X, \mathfrak{R} \rangle$ فضاءً قيوساً وليكن $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ المحور الحقيقي الموسع، ولنستعرض التوابع العددية $f$ , $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ أي تلك التوابع التي لا تأخذ قيماً منتهية فقط بل والتي يمكن لها أن تأخذ إحدى القيمتين $+\infty$ , $-\infty$. لنطبق التعريف السابق مع اعتبار أن المجموعات القيوسة هي المجموعات البوريلية في $\overline{\mathbb{R}}$. عندئذٍ إنّ قيوسية التابع $f$ تعني أنه من أجل أية مجموعة بوريلية $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ تكون الصورة العكسية لها قيوسة، أي أنّ $f^{-1}(B) \ni \mathfrak{R}$. إذا كان مثل هذا التابع معرفاً

على الفضاء القيوس $\langle \mathbb{R}^n, \mathfrak{B} \rangle$ فإنّه يسمى تابعاً قيوساً بوريلياً، وإذا كان معرفاً على الفضاء القيوس $\langle \mathbb{R}^n, \mathscr{L} \rangle$ فإنّه يسمى قيوساً ليبيغياً ، ويسمى التابع العددي المعرف على الفضاء القيوس $\langle T , \mathfrak{B}(T) \rangle$ حيث $T$ فضاء تبولوجي ما، و $\mathfrak{B}(T)$ هو $\sigma$ – الجبر المشكل من المجموعات البوريلية من $T$ تابعاً قيوساً بوريلياً.

إنّ المبرهنة الآتية تبين أن تعريف قيوسية التوابع الحقيقية يمكن أن يصاغ بشكل أبسط . بغية الاختصار، سنرمز للمجموعة $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < a\}$ بالرمز $\{f(x) < a\}$ أو $\{f < a\}$ ويكون للرموز

$$\{a \leq f < b\}, \{f = a\}, \{f > a\}, \{f \leq a\}$$

مفهوم مماثل.

**مبرهنة (1.1)**

يكون التابع العددي $f$ المعرف على الفضاء القيوس $\langle X, \mathfrak{R} \rangle$ قيوساً إذا وفقط إذا كانت المجموعة $\{f < a\}$ قيوسة من أجل أي عدد $a \in \mathbb{R}$.

**البرهان**

لزوم الشرط: إنّ اللزوم ينتج من كون المجال $M = (-\infty, a)$ مجموعة بوريلية مهما يكن العدد $a \in \mathbb{R}$. ولذلك، فإنّه من أجل التابع القيوس $f$ تكون الصورة العكسية $f^{-1}(M) = \{f < a\}$ هي مجموعة قيوسة.

كفاية الشرط: لنلاحظ أنه من أجل أي تابع $f : X \longrightarrow X_1$ ومن أجل أية مجموعات جزئية $A, B, A_i \in \mathfrak{R}_1$ تتحقق العلاقات:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) \tag{1.1}$$

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) \tag{1.2}$$

في حالة خاصة

$$f^{-1}(\hat{A}) = \widehat{f^{-1}(A)} \tag{1.3}$$

من هذه العلاقات، وبشكل خاص ، ينتج أنه من أجل أي تابع معرف على الفضاء القيوس، تشكل المجموعات التي صورها العكسية مجموعات قيوسية $\sigma$ – جبر .

لنفرض أن شرط المبرهنة محقق . أي أنّ $(\forall a \in \mathbb{R})\ ;\ \{f(x) < a\} \in \mathfrak{R}$ ولنبرهن أنّ $f$ تابع قيوس. من أجل أي عددين $a_1 < a_2\ ;\ a_1 , a_2 \in \mathbb{R}$ يكون لدينا استناداً إلى العلاقة $(1.2)$ .

$$\begin{aligned}\{a_1 \le f < a_2\} &= f^{-1}\left(\left[a_1 , a_2\right)\right) = f^{-1}\left(\left(-\infty , a_2\right) \backslash \left(-\infty , a_1\right)\right) \\ &= f^{-1}\left(\left(-\infty , a_2\right)\right) \backslash f^{-1}\left(\left(-\infty , a_1\right)\right) = \{f < a_2\} \backslash \{f \backslash a_1\}\end{aligned}$$

أي أنّ $\mathfrak{R} \ni \{a_1 \le f < a_2\}$ .

بهذه الصورة تكون جملة المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ والتي صورها العكسية قيوسة هي $\sigma$ – جبر يحتوي على جميع المجالات نصف المفتوحة من الشكل $[a_1 , a_2)$ وبالتالي فهو يحتوي على جميع المجموعات البوريلية.

**مبرهنة (1.2)**

إنّ المبرهنة $(1.1)$ تبقى محققة إذا استبدلنا المجموعة $\{f < a\}$ بأي من المجموعات $\{f > a\} , \{f \le a\} , \{f \ge a\}$.

**البرهان**

لزوم الشرط : ليكن $f$ تابعاً قيوساً، عندئذ تنتج قيوسية أي من المجموعات المذكورة من كونها صوراً عكسياً للمجالات $(a , +\infty)$ , $(-\infty , a]$ , $[a , +\infty)$ والتي هي مجموعات بوريلية . ويمكن التأكد من هذا بشكل آخر . إنّ قيوسية المجموعة $\{f \le a\}$ من أجل أي عدد $\mathbb{R} \ni a$ تنتج من المساواة:

$$\{f \le a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{f < a + \frac{1}{n}\right\}$$

وذلك إذا استخدمنا المبرهنة $(1.1)$ . أما قيوسية المجموعتين الأُخريين فإنّها تنتج من المساويات:

$$\{f > a\} = \{f \leq a\}^{\wedge} \text{ و } \{f \geq a\} = \{f < a\}^{\wedge}$$

**كفاية الشرط** : تبرهن تماماً كما في المبرهنة $(1.1)$.

لنستعرض مثالاً هاماً لتابع عددي قيوس. هو التابع $\chi_A$ المعرف بالعلاقة :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; x \notin A \end{cases}$$

والذي يسمى بالتابع المميز للمجموعة $X \supseteq A$ والــذي مــن أجلــه تتحقــق المبرهنة الآتية.

**مبرهنة (1.3)**

التابع المميز لمجموعة جزئية $A$ من الفضاء القيوس $\langle X, \mathfrak{R} \rangle$ هو تابع قيوس إذا كانت $A$ مجموعة قيوسة (أي أنّ $A \in \mathfrak{R}$).

**البرهان**

ينتج مباشرة من حقيقة أنه، من أجل أي $a \in \mathbb{R}$

$$\chi_A^{-1}(M) = \{\chi_A < a\} = \begin{cases} \varnothing & ; \ a \leq 0 \\ \hat{A} & ; \ 0 \leq a < 1 \\ A & ; \ 0 < a \leq 1 \\ X & ; \ 1 < a \end{cases}$$

يمكن البرهان على أنه إذا كان $\langle X, \mathfrak{R} \rangle$ فضاءً قيوساً فإن التابع المميز يحقــق الخواص الآتية (يترك للطالب البرهان عليها)

1- $\chi_{\varnothing}(x) = 0 \quad , \quad \chi_X(x) = 1$

2- $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$

3- $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$

وإذا كان $A \cap B = \varnothing$ فإن:

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$$

4 – $$\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_{A\cap B}(x)$$

5 – $$\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\,\chi_{A\cap B}(x)$$

6 – إذا كان $A \subseteq B$ فـإن $\chi_A(x) \le \chi_B(x)$ . وذلـك أيــاً كانـت $A, B \ni \mathfrak{R}$ و $x \ni X$.

**مبرهنة (1.4)**

ليكن $T$ فضاءً تبولوجياً وليكن $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعاً مستمراً فـي $T$ عندئـذٍ يكون $f$ قيوساً بوريلياً.

**البرهان**

إنّ البرهان ينتج من حقيقة أنّه من أجل التابع المستمر تكون الصورة العكسية لأية مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة ولذلك فإنّه مـن أجـل أي عـدد $a \ni \mathbb{R}$ تكون المجموعة $\{f < a\}$ مفتوحة أي أنّها مجموعة جزئية بوريلية من $T$.

## § 2 . خواص التوابع القيوسة *Properties of Measurable Functions*

ليكن $\langle X, \mathfrak{R}\rangle$ فضاءً قيوساً . ولنرمز بـ $\mathscr{M}(X)$ لمجموعة التوابع العددية القيوسة : $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . سندرس في هذه الفقرة خواص المجموعـة $\mathscr{M}(X)$ . وبشكل خاص، سنبرهن على أن هذه المجموعة مغلقـة بالنـسبة للعمليـات الحـسابية والقيمة المطلقة والانتقال النقطي إلى النهاية.

**مبرهنة (2.1)**

ليكن $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ تابعاً قيوساً . عنـد ئـذٍ مـن أجـل أي تـابع قيـوس بوريلي $g : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ يكون التابع $h = g\left(f(x)\right) = g\, o\, f$ قيوساً على $X$.

**البرهان**

وفقاً للمبرهنة (1.1) يكفي أن نبين على أنه من أجل أي عـدد $a \ni \mathbb{R}$ تكـون المجموعة $\{h(x) < a\}$ قيوسة . أي أنها تنتمي إلى $\mathfrak{R}$. لدينا:

$$\{h(x) < a\} = h^{-1}\left((-\infty, a)\right) = f^{-1}\left(g^{-1}(-\infty, a)\right)$$

بما أن $g$ قيوس بوريلي فإن $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \ni E = g^{-1}\left((-\infty,a)\right)$ ومنه استنادا إلى قيوسية $f$ نجد أن:

$$\{h(x) < a\} = f^{-1}(E) \in \mathfrak{R}$$

أي أن $h$ قيوس.

**ملاحظة (2.1)**

من الواضح أنّ المبرهنة المثبتة أعلاه يمكن تطبيقها، في حالة خاصة ،إذا كان $g$ مستمراً وذلك لأن كل تابع مستمر هو تابع قيوس بوريلي (انظر المبرهنة $(1.4)$). لنلاحظ أنه إذا كان $g$ قيوساً ليبيغياً . عندئذٍ حتى في الحالة التي يكون فيها $f$ مستمراً، فإن التركيب $g\left(f(x)\right)$ يمكن أن لا يكون قيوساً.

**مبرهنة (2.2)**

إذا كان $f(x) = c = const$ على $X$ فإن $f$ تابع قيوس.

**البرهان**

I – إذا كانت $c < a$ فإن:

$$\{x \in X \mid f(x) < a\} = X$$

II – إذا كانت $c \geq a$ فإن:

$$\{x \in X \mid f(x) < a\} = \varnothing$$

أي أن:

$$\{f < a\} = \begin{cases} X & ; \quad a > c \\ \varnothing & ; \quad a \leq c \end{cases}$$

بما أن $X$ و $\varnothing$ قيوسيتان فإن $f$ قيوس.

**مبرهنة (2.3)**

إذا كانت $\mathscr{M}(X) \ni g,f$ و $c = const$ فإن التوابع الآتية:

$1)\, cf \quad ; \quad 2)\, |f| \quad ; \quad 3)\, f^2 \quad ; \quad 4)\, f+g \quad ; \quad 5)\, f.g \quad ;$

$6)\ \dfrac{f}{g}$ ($X$ على $g(x)\neq 0$) $\quad ; \quad 7)\max\{f,g\}\ ,\ \min\{f,g\}$

توابع قيوسة على $X$.

**البرهان**

**1)** إنّ قيوسية التابع $cf$ من أجل $c=0$ بديهية. ومن أجل $c\neq 0$ تنتج من العلاقة:

$$\{cf<a\}=\begin{cases}\{f<\frac{a}{c}\} & ; \quad c>0\\ \{f>\frac{a}{c}\} & ; \quad c<0\end{cases}$$

**2)** إنّ قيوسية التابع $|f|$ تنتج من العلاقة:

$$\{|f|<a\}=\begin{cases}\varnothing & ; \quad a\leq 0\\ \{f<a\}\cap\{f>-a\} & ; \quad a>0\end{cases}$$

**3)** إنّ قيوسية التابع $f^2$ تنتج من العلاقة:

$$\{f^2<a\}=\{|f|<\sqrt{a}\}=\begin{cases}\varnothing & ; \quad a\leq 0\\ \{|f|<\sqrt{a}\} & ; \quad a>0\end{cases}$$

إنّ المجموعة الأخيرة هي مجموعة قيوسة وذلك لقيوسية $|f|$ .

**4)** لنبرهن الآن أنّ $f+g\in\mathscr{M}(X)$ . لتكن $\mathbb{Q}=\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية جميع الأعداد العادية . ولنبرهن على أنه من أجل أي عدد $a\in\mathbb{R}$ تتحقق المساواة:

$$\{f+g<a\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\{f<r_k\}\cap\{g<a-r_k\}\right) \tag{2.1}$$

لتكن $x\in\{f+g<a\}$، أي أن $f(x)+g(x)<a$، عندئذٍ يكون $f(x)<a-g(x)$، ولذلك، يوجد عدد مثل $r_k\in\mathbb{Q}$ بحيث أن $f(x)<r_k<a-g(x)$ ومنه نجد $f(x)<r_k$ و $g(x)<a-r_k$ ولذلك فإن $x\in\left(\{f<r_k\}\cap\{g<a-r_k\}\right)$. وبالتالي فإن $x$ تنتمي إلى الطرف الأيمن من العلاقة (2.1) .

لنفرض الآن أن $x$ تنتمي إلى الطرف الأيمن من العلاقة (2.1) . عندئذٍ وعلى الأقل من أجل عدد واحد $k$ يكون $x \in \left(\{f < r_k\} \cap \{g < a - r_k\}\right)$ أي أن $f(x) < r_k$ و $g(x) < a - r_k$ ومنه نجد أن $f(x) < r_k < a - g(x)$ وبالتالي فإن $f(x) < a - g(x)$ أي أن $x \in \{f + g < a\}$ وبذلك نكون قد برهنا على المساواة (2.1) التي تبرهن على قيوسية التابع $f + g$ .

5) إن قيوسية $f.g$ تنتج من العلاقة:

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

ومن الخواص المبرهنة أعلاه.

6) بما أن $\frac{f}{g} = f.\frac{1}{g}$ . فإنه لبرهان أن $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(X)$ يكفي أن نبرهن على أن $\frac{1}{g} \in \mathcal{M}(X)$ . إن قيوسية $\frac{1}{g}$ تنتج مباشرة من كون أن:

$$\left\{\frac{1}{g} < a\right\} = \begin{cases} \{g < a\} & ; \quad a = 0 \\ \{g > \frac{1}{a}\} \cup \{g < 0\} & ; \quad a > 0 \\ \{g < 0\} \cap \{g > \frac{1}{a}\} & ; \quad a < 0 \end{cases}$$

7) للبرهان يكفي أن نلاحظ أن:

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\left(f + g + |f - g|\right)$$

$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}\left(f + g - |f - g|\right)$$

**مبرهنة (2.4)**

لتكن متتالية التوابع القيوسة $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة في كل نقطة $x \ni X$ إلى التابع $f$ عندئذٍ يكون التابع $f$ قيوساً.

**البرهان**

لنفرض أن:

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \in X$$

ولنبرهن على أنه من أجل أي عدد $a \in \mathbb{R}$ يكون:

$$\{f < a\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{f_k < a - \tfrac{1}{n}\} \qquad (2.2)$$

في الواقع لتكن $x \in \{f < a\}$ أي أن $f(x) < a$ . عندئذٍ من أجل عـدد مـا $m \in \mathbb{N}$ يكـون $f(x) < a - \dfrac{1}{m}$، وبمـا أن $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$ فإنـه يوجـد عدد $n \in \mathbb{N}$ بحيث إنه من أجل جميع $n \le k$ يكـون $f(x) < a - \dfrac{1}{m}$ وهـذا يعنـي أن $x$ تنتمي إلى الطرف الأيمن من العلاقة (2.2) .

بالعكس، لتكن $x$ من الطرف الأيمن للعلاقة (2.2) . إن هذا يعنـي أنـه يوجـد عددان مثل $n, m \in \mathbb{N}$ وبحيث إنه من أجل $n \le k$ يكون $f_k(x) < a - \dfrac{1}{m}$ بالانتقال في هذه المتراجحة إلى النهاية عنـدما $k \longrightarrow \infty$ نجـد أن $f(x) < a - \dfrac{1}{m}$ ولهـذا فإن $f(x) < a$، أي أن $x$ تنتمي إلى الطرف الأيسر من العلاقة (2.2) .

بما أن $\{f_k < a - \frac{1}{m}\} \in \mathfrak{R}$ لقيوسية $f_k$ ومن حقيقة أن $\mathfrak{R}$ هو $\sigma$ – جبر، فإنـه من العلاقة (2.2) نجد أن $\{f < a\} \in \mathfrak{R}$.

**ملاحظة (2.2)**

ليكن $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$، ولنفرض أن:

$$f_+ = \max\{f, 0\} \qquad , \qquad f_- = -\min\{f, 0\}$$

عندئذٍ يمكن البرهان على أن التابع $f$ يكون قيوساً إذا وفقط إذا كـان $f_+ , f_-$ كذلك. نسمي $f_+ , f_-$ بالقسم السالب، الموجب للتابع $f$ على الترتيب.

## § 3 . تكافؤ التوابع *Equivalence of Functions*

سندرس بدءاً من هذه الفقـرة التوابـع العدديـة المعرفـة علـى فـضاء ذي قياس $\langle X, \mathfrak{R}, \mu \rangle$. وسنعتبر أن القياس $\mu$ منتهٍ مالم نشر إلى خلاف ذلك.

**تعريف (3.1)**

نقول عن خاصة ما إنها تتحقق بالنسبة لـــ $\mu$ تقريباً في كل مكان (أو $\bmod \mu$ أو $a.e\ on\ X$ ) إذا تحققت هــذه الخاصــة علــى المجموعــة $X \setminus N$ حيــث $\mu(N)=0$.

سنعتبر أن جميع التوابع الحقيقية $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ التي سنواجهها لاحقاً منتهية بالنسبة لـــ $\mu$ ( أو $\sigma$ – منتهية ) تقريباً في كل مكان إن ذلك يعنــي وفقــاً للتعريــف (3.1) أن:

$$\mu\left(\left\{f(x)=\pm\infty\right\}\right)=0$$

**تعريف (3.2)**

نقول عن التابعين $f$, $g$ إنهما متكافئان إذا تطابقا بالنسبة لـــ $\mu$ تقريباً في كــل مكان، أي أن، $\mu\left(\left\{f \neq g\right\}\right)=0$ ونرمز لتكافؤ التابعين على الشكل $f \sim g$ أو $f=g \pmod{\mu}$ ( أو $f=g \quad a.e.\mu\ on\ X$ ).

**مبرهنة (3.1)**

إذا كان $\mu$ قياساً تاماً فإن التابع المكافئ لتابع قيوس هو تابع قيوس.

**البرهان**

إذا كان التابع $g$ قيوساً وكان $f=g \pmod{\mu}$ فــإن المجموعــة $\{g<a\}$ قيوسة من أجل أي عدد $a \in \mathbb{R}$ وعندئذٍ تكون المجموعــة $\{f<a\}$ قيوســة أيــضاً وذلك لأن المجموعتين $\{f<a\}$ و $\{g<a\}$ تختلفان عــن مجموعــة جزئيــة مــن مجموعة قياسها الصفر $\{f \neq g\}$ وهي قيوسة وذلك لأن القياس تام.

**مبرهنة (3.2)**

إنّ علاقــة التكــافؤ هــي علاقــة انعكاســية وتناظريــة ومتعديــة علــى المجموعة $\mathscr{M}(X)$ مجموعة جميع التوابع القيوسة.

(انظر البرهان [2])

**أمثلة:**

1 – لتكن $X = \mathbb{R}$ ، ولتكن $\mathfrak{R}$ جملة جميع المجموعات القيوسة وفق ليبيغ من $\mathbb{R}$ ($\sigma$ – جبر) وليكن $\mu$ قياس ليبيغ ولتكن $P$ خاصة ما محققة من أجل النقاط $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ وبالتالي فإنّ هذه الخاصة تكون غير محققة في نقاط المجموعة $\mathbb{Q}$ .

وبما أنّ:

$$\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right\}\right) = \mu(\mathbb{Q}) = 0$$

فإنّ هذه الخاصة تتحقق تقريباً في كل مكان في $\mathbb{R}$ .

2 – ليكن الفضاء $\langle \mathbb{R}, \widetilde{\mathfrak{R}}, \mu \rangle$ وليكن $f$ هو التابع المميز للمجموعة $\mathbb{Q}$ . أي أنّ:

$$f = \chi_{\mathbb{Q}} \ ; \ \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & ; \ \text{عادي } x \\ 0 & ; \ \text{أصم } x \end{cases}$$

إنّ $f$ تابع قيوس ( لقيوسية $\mathbb{Q}$ ) ويكون:

$$f \sim 0 \qquad \text{أو} \qquad f = 0 \ (\operatorname{mod} \mu)$$

3 – ليكن الفضاء $\langle \mathbb{R}, \widetilde{\mathfrak{R}}, \mu \rangle$ وليكن التابع $f$ معرفاً بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)^{-1} & ; \ x \notin \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ \infty & ; \ x \in \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

عندئذٍ يكون التابع $f$ منتهياً تقريباً في كل مكان بالنسبة لـ $\mu$ على $\mathbb{R}$ ويكون:

$$f(x) \sim (\sin x)^{-1} \qquad \text{أو} \qquad f(x) = \frac{1}{\sin x} \ (\operatorname{mod} \mu)$$

وذلك لأنّ قياس المجموعة $\{n\pi\} ; n \in \mathbb{Z}$ معدوم (قابلة للعد).

## § 4 . متتاليات التوابع القيوسة *Sequences of Measurabl Functions*

سنستعرض في هذه الفقرة نماذج مختلفة من تقارب متتاليات التوابع القيوسة وسندرس الصلة بين أشكال التقارب وسنفرض أنّ جميع التوابع معرفة على الفضاء $\langle X, \mathfrak{R}, \mu \rangle$ ذي القياس المنتهي.

لنذكر أولاً بمفهوم التقارب المنتظم ومفهوم التقارب النقطي المعروفين في التحليل الرياضي.

إنّ التقارب المنتظم $f_n \rightrightarrows f$ فيعني أنّه:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N(\varepsilon))\ (\forall n > N)\ (\forall x \in X) : \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

أما التقارب النقطي $f_n \longrightarrow f$ ( التقارب في كل نقطة ) فيعني أنّ:

$$(\forall x \in X)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N(\varepsilon, x))\ (\forall n > N) : \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

من الواضح أنّ التقارب المنتظم لمتتالية التوابع يؤدي إلى التقارب النقطي . أما العكس فغير صحيح.

سبق أن برهنا ( المبرهنة (2.4) ) أن نهاية متتالية من التوابع القيوسة المتقاربة نقطياً ( بالتالي المتقاربة بانتظام ) هو تابع قيوس.

في نظرية التوابع القيوسة، يواجهنا مفهوم تقارب المتتاليات التابعية $\mu$ - تقريباً في كل مكان أو $(\text{mod } \mu)$.

التقارب $(\text{mod } \mu)$ $f_n \longrightarrow f$ يعني أنه توجد مجموعة $E \subset X$ بحيث إنّ $\mu(E) = 0$ و $(\forall n \in X \setminus E) : f_n(n) \longrightarrow f(x)$

**مثال**

لنستعرض على المجال $X = [0,1]$ متتالية التوابع

$$f_n(x) = x^n \ ; \ (n = 1, 2, \ldots)$$

من الواضح أنّ:

$$\lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

بذلك يمكننا أن نكتب $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0 \ (\text{mod } m)$ حيث $m$ قياس ليبيغ.

لنعرف الآن شكلاً جديداً لتقارب المتتاليات التابعية والذي يلعب دوراً هاماً في دراسة التوابع القيوسة ونظرية التكامل.

**تعريف (4.1)**

نقول عن متتالية التوابع المنتهية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ إنّها متقاربة بالقياس $\mu$ إلى التابع القيوس $f$ إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{\,|\,f_n - f\,|\geq \sigma\right\}\right)=0$$

من أجل أي عدد $0<\sigma$ . نرمز للتقارب بالقياس على الشكل $f_n \xrightarrow{\mu} f$. لنبرهن أولاً على وحدانية النهاية بالقياس. بغية هذا الأمر، لنبرهن التوطئة الآتية.

**توطئة (4.1)**

ليكن $h$ تابعاً قيوساً وليكن $0<\mu\left(\{h>0\}\right)$. عندئذٍ يوجد عدد مثل $0<\varepsilon$ بحيث إنّ $\mu\left(\{h\geq\varepsilon\}\right)>0$.

**البرهان**

من الواضح أنّ

$$\{h>0\}=\bigcup_{h=1}^{\infty}\left\{h\geq \tfrac{1}{n}\right\}$$

من هذا واستناداً إلى الخاصة نصف الجمعية العدودة للقياس نجد:

$$0<\mu\left(\{h>0\}\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{h\geq\tfrac{1}{n}\right\}\right)$$

ولذلك فإنّ واحداً على الأقل من حدود الطرف الأيمن يكون موجباً.

**مبرهنة (4.1)**

إذا كان $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $f_n \xrightarrow{\mu} g$ فإنّ $f=g \pmod{\mu}$.

**البرهان**

لنفرض العكس . ليكن $0<\mu\left(\{f\neq g\}\right)$ أي أنّ $0<\mu\left(\{|f-g|>0\}\right)$ عندئذٍ استناداً للتوطئة (4.1)، يوجد عدد مثل $\varepsilon>0$. بحيث إنّ: $0<\mu\left(\{|f-g|\geq\varepsilon\}\right)$. أكثر من ذلك، من أجل أي $n$، لدينا

$$\{|f-g|\geq\varepsilon\}\subseteq\{|f-f_n|\geq\tfrac{\varepsilon}{2}\}\cup\{|f_n-g|\geq\tfrac{\varepsilon}{2}\} \qquad (4.1)$$

في الواقع من المتراجحة

$$|f-g|\leq|f-f_n|+|f_n-g|$$

ينتج أنه إذا كان $n$ غير منتمٍ إلى الطرف الأيمن في العلاقة (4.1) فإنّه لاينتمي إلى الطرف الأيسر.

هكذا بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (4.1) واستناداً إلى خاصة الاطراد والخاصة نصف الجمعية العدودة للقياس $\mu$ نجد:

$$\mu(\{|f-g|\geq\varepsilon\})\leq\mu(\{f-f_n|\geq\tfrac{\varepsilon}{2})+\mu(\{|f_n-g|\geq\tfrac{\varepsilon}{2})$$

في الوقت ذاته ، عندما $n\longrightarrow\infty$ فإنّ كل حد من حدي الطرف الأيمن يسعى إلى الصفر، استناداً إلى تعريف التقارب بالقياس فإنّ $\mu(\{|f-g|\geq\varepsilon\})=0$ وبذلك نأتي إلى تناقض مع فرضنا.

تبين المبرهنة الآتية مدى ملائمة التعريف المعطى للتقارب بالقياس.

**مبرهنة (4.2) (مبرهنة ليبيغ)**

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية التوابع المنتهية والقيوسة والمتقاربة تقريباً في كل مكان بالنسبة لـ $\mu$ إلى التابع القيوس $f$، عندئذٍ يكون $f_n\xrightarrow{\mu}f$ .

**البرهان**

لنرمز بـ $A$ للمجموعة التي لا تتقارب عليها المتتالية $f_n(x)$ إلى التابع $f(x)$.

استناداً إلى الفرض يكون $\mu(A)=0$ . لنضع

$$E_k(\sigma)=\{|f_k-f|\geq\sigma\}$$

$$R_n(\sigma)=\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k(\sigma)$$

$$M=\bigcap_{n=1}^{\infty}R_n(\sigma)$$

من الواضح أنّ جميع هذه المجموعات قيوسة. كما أنّ:

$$R_1(\sigma) \supseteq R_2(\sigma) \supseteq \ldots$$

استناداً إلى مبرهنة استمرار القياس يكون:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(R_n(\sigma)\right) = \mu(M) \qquad (4.2)$$

لنبين أنّ $M \subseteq A$ . في الواقع ، لتكن $x \ni A$ . هذا يعني أنّ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ . ولذلك، فإنّه من أجل $\sigma > 0$ يوجد عدد مثل $n$ بحيث إنّه من جميع قيم $k \geq n$ يكون

$$|f_k(x) - f(x)| < \sigma$$

أي أنّ $x \notin E_k(\sigma)$ من هذا ينتج أنّ $x \notin R_n(\sigma)$ وبالتالي $x \notin M$

وهكذا فإنّ $M \subseteq A$ وبما أنّ $\mu(A) = 0$ فإنّ $\mu(M) = 0$ وبالتالي، ينتج من العلاقة $(4.2)$ أنّ:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(R_n(\sigma)\right) = 0$$

لإتمام البرهان يتبقى علينا ملاحظة أنّ $E_n(\sigma) \subseteq R_n(\sigma)$ .

**ملاحظة (4.1)**

إنّ عكس مبرهنة ليبيغ غير صحيح. في الواقع، يمكن بسهولة بناء متتالية تابعية تتقارب بالقياس إلا أنّها لا تتقارب تقريباً في كل مكان.

لنعرض الآن مثالاً عن متتالية من هذا النمط.

لنعرف على المجال نصف المفتوح $X = [0,1)$ ذي القياس الليبيغي $m$ من أجل كل عدد طبيعي $k$ جملة من التوابع $f_{k1}, f_{k2}, \ldots, f_{kk}$ معرفة على النحو الآتي:

$$f_{ki}(x) = \begin{cases} 1 & ; \; x \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right) \\ 0 & ; \; x \notin \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right) \end{cases}$$

لنرقم هذه التوابع على التتالي بمتتالية واحدة $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$، بأن نضع،

$$\varphi_1 = f_{11}, \quad \varphi_2 = f_{21}, \quad \varphi_3 = f_{22}, \quad \varphi_4 = f_{31}, \quad \varphi_5 = f_{32}, \ldots$$

بسهولة يمكن التأكد من أنّ $\varphi_n \xrightarrow{\mu} 0$. في الواقع ، من أجل $\sigma > 1$ تكون جميع المجموعات $\{\, |\varphi_n| \geq \sigma \,\}$ خالية، أما إذا كان $\sigma \leq 1$ و $\varphi_n = f_{k\,i}$ فإنّ:

$$\{\, |\varphi_n| \geq \sigma \,\} = \left[\tfrac{i-1}{n} \,,\, \tfrac{i}{n}\right)$$

و

$$m\left(\{\, |\varphi_n| \geq \sigma \,\}\right) = \tfrac{1}{n}$$

ينتهي إلى الصفر عندما $n \longrightarrow \infty$.

لنبرهن الآن على أنّ المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ليست متقاربة $m-$ تقريباً في كل مكان إلى الصفر . أكثر من ذلك، سنبين أنّ العلاقة $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$ لا تتحقق في أية نقطة من نقاط المجال $[0,1)$.

في الواقع، لتكن $x_0 \in [0,1)$، عندئذٍ من أجل أي $k \in \mathbb{N}$ يوجد عدد مثل $k \geq i$ بحيث إنّ:

$$x_0 \in \left[\tfrac{i-1}{k} \,,\, \tfrac{i}{k}\right)$$

وبالتالي فإنّ $f_{k\,i}(x_0) = 1$. أي أنّه في المتتالية العددية $\{\varphi_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ يوجد حدود أدلتها كبيرة بقدرٍ كافٍ تساوي $(1)$ وبالتالي فإن هذه المتتالية لا تتقارب إلى الصفر.

**مبرهنة (4.3) (مبرهنة ريس)**

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية التوابع المنتهية والقيوسة المتقاربة بالقياس إلى التابع $f$ . عندئذٍ يمكن فصل متتالية جزئية منها مثل $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ من أجلها يكون:

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f \pmod{\mu}$$

**البرهان**

لتكن $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > 0$ متتالية عددية كيفية بحيث إنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$ ولتكن $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من الأعداد الموجبة التي من أجلها تتقارب السلسلة

$$\eta_1+\eta_2+\cdots \qquad (4.3)$$

لنشكل متتالية الأدلة $n_1<n_2<\cdots$ بما أنّ $f_n \xrightarrow{\mu} f$ فإنّ:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{ |f_n-f| \ge \sigma_1\right\}\right)=0$$

ولهذا فإنّه يوجد عدد مثل $n_1$ بحيث إنّ:

$$\mu\left(\left\{ |f_{n_1}-f| \ge \sigma_1\right\}\right)<\eta_1$$

بالمثل يوجد عدد مثل $n_2$ بحيث إنّ:

$$\mu\left(\left\{ |f_{n_2}-f| \ge \sigma_2\right\}\right)<\eta_2$$

بالاستمرار بهذه العملية فإنه من أجل أي $k$ نجد $n_k > n_{k-1}$ من أجله يكون:

$$\mu\left(\left\{ |f_{n_k}-f| \ge \sigma_k\right\}\right)<\eta_k$$

لنبين أن متتالية الأدلة المنشأة هي المتتالية المطلوبة ،أي أن $f_{n_k} \longrightarrow f \pmod{\mu}$ لنضع:

$$R_i=\bigcup_{k=i}^{\infty}\left\{ |f_{n_k}-f| \ge \sigma_k\right\} \quad , \quad Q=\bigcap_{i=1}^{\infty} R_i \qquad (4.4)$$

من الواضح أنّ :

$$R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \dots$$

ولهذا استناداً إلى مبرهنة الاستمرار $\mu(R_i) \longrightarrow \mu(Q)$ . بالإضافة لذلك فإنّ:

$$\mu(R_i) \le \sum_{k=i}^{\infty} \mu\left(\left\{ |f_{n_k}-f| \ge \sigma_k\right\}\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k$$

تبعاً لتقارب السلسلة (4.3) فإن $\mu(R_i) \longrightarrow 0$ من أجل $i \longrightarrow \infty$

ولهذا فإنّ $\mu(Q)=0$ . لنبرهن على أنّ:

$$(\forall x \in X \setminus Q) : \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=f(x)$$

لتكن $x_0 \in X \setminus Q$ عندئذٍ يكون $x_0 \notin R_{i_0}$ من أجل $i_0$، وينتج عندئذٍ من العلاقة (4.4) أنّ:

$$(\forall k \geq i_0) \ : \ x_0 \notin \left\{ |f_{n_k} - f| \geq \sigma_k \right\}$$

أي أنّ:

$$(\forall k \geq i_0) \ : \ |f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \sigma_k$$

بما أنّ $\sigma_k \longrightarrow 0$ فإنّ العلاقة الأخيرة نعني أنّ $\lim\limits_{k \to 0} f_{n_k}(x_0) = f(x_0)$.

**ملاحظة (4.2)**

من الممكن تقوية مبرهنة ريس. إنّ المبرهنة تبقى صحيحة في الحالة التي يكون فيها القياس $\mu$ ليس منتهياً بل $\sigma-$ هو المنتهي.

في الواقع، إنّ $\sigma-$ الانتهاء من القياس $\mu$ يعني وجود متتالية من المجموعات ذات القياس المنتهي $\ldots \subset A_n \subset \ldots \subset A_1 \subset A_2$ بحيث إن $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ وإن $\mu(X) = +\infty$.

بما أن $f_n \xrightarrow{\mu} f$ على $X$ فإن $f_n \xrightarrow{\mu} f$ على $A_1$. لهذا فإنه استناداً إلى مبرهنة ريس توجد متتالية جزئية $\left\{ f_{k_1} \right\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث إن $\lim\limits_{k \to \infty} f_{k_1} = f \pmod{\mu}$ على $A_1$.

من الواضح أن المتتالية $\left\{ f_{k_1} \right\}_{k=1}^{\infty}$ تتقارب بالقياس على $A_2$ لذا فإنه يمكن فصل متتالية جزئية منها $\left\{ f_{k_2} \right\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث إن $\lim\limits_{k \to \infty} f_{k_2} = f \pmod{\mu}$ على $A_2$.

بالاستمرار على هذا النحو نحصل على سلسلة من المتتاليات

$$\left\{ f_n \right\}_{n=1}^{\infty} \supseteq \left\{ f_{k_1} \right\}_{k=1}^{\infty} \supseteq \left\{ f_{k_2} \right\}_{k=1}^{\infty} \supseteq \ldots \supseteq \left\{ f_{k_i} \right\}_{k=1}^{\infty} \supseteq \ldots$$

حيث إن $\lim\limits_{k \to \infty} f_{k_j} = f \pmod{\mu}$ على $A_j$.

لنستعرض الآن المتتالية القطرية $\left\{ f_{kk} \right\}_{k=1}^{\infty}$ والتي هي متتالية جزئية من المتتالية المعطاة $\left\{ f_n \right\}_{n=1}^{\infty}$. من الواضح أن $f_{kk} \longrightarrow f \pmod{\mu}$ على كل

مجموعة من المجموعات $A_j$ ولهذا فإن $\lim_{k\to\infty} f_{kk} = f \pmod{\mu}$ على $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

**ملاحظة (4.3)**

خلافاً عن مبرهنة ريس فإن مبرهنة ليبيغ لا تتحقق في الحالة التي يكون فيها القياس σ − منتهياً.

لنستعرض الأمثلة الآتية:

**أمثلة:**

1 - لتكن $X = \mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية ولتكن $\mathfrak{R}$ جملة جميع المجموعات الجزئية من $X$، وليكن $\mu(\{k\}) = 1$ من أجل جميع $k \in \mathbb{N}$ . من الواضح أن هذا القياس σ − منتهٍ . لنوضح معنى التقارب بالقياس في هذا الفضاء.

بما أن $\mu$ يأخذ فقط قيماً صحيحة غير سالبة، فإن الشرط:

$$(\forall \sigma > 0) \quad : \quad \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{|f_n - f| \geq \sigma\}\right) = 0$$

يعني أنّ:

$$(\forall \sigma > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(\forall k \in X) \ : \ \left|f_n(k) - f(k)\right| < \sigma$$

أي أن التقارب بالقياس في الفضاء المدروس هو تقارب منتظم.

لنستعرض المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $f_n$ التابع المميز للمجموعة $\{1, 2, ..., n\}$ أي أن:

$f_n(k) = 1$ من أجل $k \leq n$ و $f_n(k) = 0$ من أجل $k > n$ . من الواضح أن $f_n \longrightarrow f \equiv 1$ في كل نقطة إلا أن هذا التقارب ليس منتظماً. ولذلك فإن $f_n$ لا تتقارب إلى $f$ بالقياس.

2 - لنستعرض فضاء القياس $\langle \mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), m \rangle$ حيث $m$ قياس ليبيغ . كما هو معلوم، هذا القياس، تام و σ − منتهٍ . لتكن متتالية التوابع $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $f_n$ التابع المميز للمجال $[n, n+1]$ . من الواضح أن $f_n \longrightarrow 0$ من أجل جميع

$x \in \mathbb{R}$ أي أن المتتالية تتقارب إلى الصفر في كل نقطة $x$ بالتالي في كل مكان.

في الوقت نفسه من أجل كل عدد $\sigma \in (0,1)$ لدينا:

$$m\left(\left\{\left|f_n - 0\right| \geq \sigma\right\}\right) = m\left(\left\{f_n \neq 0\right\}\right) = m\left(\left[n, n+1\right]\right) = 1$$

وبالتالي فإن $f_n$ لا تتقارب بالقياس إلى الصفر.

إن مبرهنتي ليبيغ وريس تحددان الصلة بين التقارب تقريباً في كل مكان والتقارب بالقياس. أما المبرهنة الآتية فهي تحدد الصلة الوثيقة بين التقارب تقريباً في كل مكان والتقارب المنتظم.

**مبرهنة (4.4) (مبرهنة يغوروف)**

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من التوابع القيوسة المتقاربة تقريباً في كل مكان بالنسبة للقياس $\mu$ إلى التابع $f$، عندئذٍ من أجل أي عدد $\delta > 0$ توجد مجموعة قيوسة مثل $R_\delta$ بحيث إن:

**1)** $\mu(X \setminus R_\delta) < \delta$

**2)** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى $f$ بانتظام على $R_\delta$

**البرهان**

من أجل كل عدد $\sigma > 0$ نضع:

$$R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\left|f_k - f\right| \leq \sigma\right\}$$

في إثبات مبرهنة ليبيغ كنا قد بينا أن

$$\lim_{n\to 0}\mu\left(R_n(\sigma)\right) = 0 \qquad (4.5)$$

لنأخذ الآن أية متتالية $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > 0$ بحيث إن $\lim_{n\to 0}\sigma_n = 0$ ولنأخذ السلسلة المتقاربة ذات الحدود الموجبة

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n + \ldots \qquad (4.6)$$

استناداً للعلاقة (4.5)، من أجل أي عدد $i \in \mathbb{N}$ يوجد $n_i \in \mathbb{N}$ بحيث إن:

$$\mu\left(R_{n_i}(\sigma_i)\right) < \eta_i \quad .$$

وتبعاً لتقارب السلسلة (4.6) يوجد عدد مثل $m$ بحيث يكون:

$$\sum_{i=m}^{\infty} \eta_i < \delta \tag{4.7}$$

لنضع :
$$\mathfrak{D} = \bigcup_{i=m}^{\infty} R_{n_i}(\sigma_i)$$

و فقاً للعلاقة (4.7) ينتج أن $\mu(\mathfrak{D}) < \delta$ . إذا وضعنا $R_\delta = X \setminus \mathfrak{D}$ فإنه من الواضح أنّ:
$$\mu(X \setminus R_\delta) = \mu(\mathfrak{D}) < \delta$$

بقي علينا أن نبرهن على أن $f_n \rightrightarrows f$ علـى $R_\delta$ . مـن أجـل أي عنـصر $x \in R_\delta$ يكون $x \notin \mathfrak{D}$، أي أن:

$$x \notin R_{n_i}(\sigma_i) \quad , \quad (\forall i \geq m)$$

لنختر الآن $m \leq i_0$ بحيث يكون $\sigma_{i_0} < \varepsilon$، عندئذٍ $x \notin R_{n_{i_0}}(\sigma_{i_0})$ وبالتـالي فإن:

$$x \notin \left\{ |f_k - f| \geq \sigma_{i_0} \right\} \qquad \left(\forall\, k \geq n_{i_0}\right)$$

وهذا يعني أن:

$$\left(\forall\ k\ \geq n_{i_0}\right)\left(\forall x \in R_\delta\right) \ : \ \left|f_k(x) - f(x)\right| < \sigma_{i_0} < \varepsilon$$

وهو ما يبرهن على التقارب المنتظم للمتتالية $\{f_k\}$ إلى $f$ على $R_\delta$.

**ملاحظة (4.4)**

كما في مبرهنة ليبيغ لا تتحقق مبرهنة يغوروف في حالة القياس الذي يأخذ قيماً لانهائية حتى لو كان ذلك القياس σ – منتهياً . في الواقع، إنّ المتتالية المـذكورة فـي المثال (1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب في كل نقطة وبالتالي تقريباً في كل مكان، في الوقت نفسه لا تتقارب بانتظام على $X$.

وإذا أخذنا $\delta < 1$ فإنه مـن الـشرط $\mu(X \setminus R_\delta) < \delta$ ينـتج أن $R_\delta = X$ . ولذلك فإن المتتالية لايمكن لها أن تتقارب بانتظام على $R_\delta$.

## § 5. التوابع البسيطة . تقريب التوابع القيوسة بتوابع بسيطة . مبرهنة لوزين

***Simple Functions . Approximation of Measurable Functions by Simple Functions . The Luzin's Theorem***

من المفيد في بناء نظرية التكامل وأيضاً في دراسة بعض خواص التوابع القيوسة دراسة ما يسمى بالتوابع البسيطة.

**تعريف (5.1)**

المنطلق مجموعة من $X$

يسمى التابع العددي $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف على الفضاء القيوس $\langle X, \mathfrak{R} \rangle$ بسيطاً. إذا كان عدد القيم المختلفة التي يأخذها التابع منتهياً (وكانت كل قيمة منها منتهية).

كل قيمة محدودة

كمثال على تابع بسيط، نأخذ التابع المميز $\chi_E(x)$ للمجموعة $X \supset E$ وهذا التابع يأخذ قيمتين $0,1$.

بسهولة نرى أن كل تابع بسيط هو تركيب خطي لتوابع مميزة لمجموعات غير متقاطعة مثنى مثنى.

في الواقع، لتكن $c_1, c_2, \dots, c_n$ جميع القيم المختلفة للتابع البسيط $f$، لنضع:

$$E_j = \{ x \in X \mid f(x) = c_j \}$$

عندئذ

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j \quad , \quad E_j \cap E_k = \varnothing \qquad (j \neq k) \tag{5.1}$$

وفقاً لذلك يكون:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \chi_{E_j}(x) \tag{5.2}$$

حيث $\chi_{E_j}$ هو التابع المميز للمجموعة $E_j$.

من الواضح أنه إذا كانت العلاقة (5.1) محققة فإن التابع (5.2) هو تابع بسيط يأخذ القيم $c_1, c_2, \dots, c_n$ (حتى في الحالة التي لا تكون فيها جميع $c_i$ مختلفة).

**مبرهنة (5.1)**

التابع البسيط $f=\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$ المبني بالتجزئة (5.1) قيوس إذا وفقط إذا كانت المجموعات $E_j$ جميعها قيوسة.

**البرهان**

**لزوم الشرط:** إذا كان التابع $f$ قيوساً فإن كل مجموعة من المجموعات

$$E_j=\{x\in X \quad | \quad f(x)=c_j\}=f^{-1}(\{c_j\})$$

قيوسة كصورة عكسية لمجموعة بوريلية هي المجموعة المؤلفة من نقطة واحدة $\{c_j\}\subset\mathbb{R}$ .

**كفاية الشرط** : إذا كانت جميع المجموعات قيوسة فإنه استناداً إلى المبرهنة (3.1) يكون كل تابع $\chi_{E_j}$ قيوساً وبالتالي فإن $f$ قيوس كتركيب خطي لتوابع قيوسة.

مطلوب

**نتيجة (5.1)**

التراكيب الخطية وجداء التوابع البسيطة القيوسة هي توابع بسيطة قيوسة .إن المبرهنة الآتية تبين سبب دراستنا للتوابع البسيطة.

لماذا

**مبرهنة (5.2)**

من أجل كل تابع قيوس $f:X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ معرف على الفضاء القيوس $\langle X,\mathfrak{R}\rangle$ توجد متتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ من التوابع البسيطة القيوسة المتقاربة إلى التابع $f$ في كل نقطة من $X$.

إذا كان التابع $f$ محدوداً على $X$ فإنّ المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ يمكن اختيارها، بحيث تكون متقاربة بانتظام إلى $f$ على $X$. وإذا كان $0\le f(x)$ فإنه يمكن اختيار التوابع $0\le f_n$ بحيث تكون المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ غير متناقصة.

## البرهان

I – لنثبت أولاً المبرهنة من أجل التوابع غير السالبة. لنأخذ المجال $[0,n)$ ولنقسمه إلى مجالات جزئية متساوية الطول وطول كل منها $\frac{1}{2^n}$ فيكون عدد تلك المجالات $n.2^n$ $(n=1,2,...)$ ولنشكل المجموعات $F_n$ , $E_{n,k}$ بأن نضع:

$$E_{n,k}=\left\{\tfrac{k-1}{2^n}\le f<\tfrac{k}{2^n}\right\}=\left\{x\in X \quad | \quad \tfrac{k-1}{2^n}\le f(x)<\tfrac{k}{2^n}\right\}$$

$$F_n=\{f\ge n\}=\{x\in X \quad | \quad f(x)\ge n\}$$

بما أن $f$ تابع قيوس فإنّ كلاً من $F_n$ , $E_{n,k}$ $(1\le k\le n.2^n)$ مجموعات قيوسة ومنفصلة مثنى مثنى واجتماعها يساوي $X$ أي $X=\bigcup_{k=1}^{n2^n}E_{n,k}\cup F_n$ من أجل أي عدد $n\in\mathbb{N}$، لنضع:

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{k-1}{2^n} & ; \quad \frac{k-1}{2^n}\le f(x)<\frac{k}{2^n} \quad ; \quad k=1,2,...,n2^n\\ n & ; \quad f(x)\ge n\end{cases}$$

من الواضح أن المتتالية $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ غير متناقصة وأن $f_n$ تابع بسيط غير سالب لكونه يأخذ قيماً لا يزيد تعدادها عن $n.2^n+1$ أما قيوسية $f_n$ فتنتج من قيوسية $f$ . أضف إلى أن:

$$f_n=\sum_{k=1}^{n.2^n}\frac{k-1}{2^n}\chi_{E_{n,k}}+n\,\chi_{F_n}$$

ولنبرهن على أنّ :

$$(\forall x\in X) \qquad \lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x) \tag{5.4}$$

إذا كان $f(x)<+\infty$ فإنه من أجل قيم $n$ كبيرة بقدرٍ كافٍ يكون $f(x)<n$ ولذلك فإنه من $(5.3)$ ينتج أن:

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{1}{2^n}$$

بــذلك نجــد أن $f_n(x) \longrightarrow f(x)$. أمــا إذا كــان $f(x) = +\infty$ فــإن $f_n(x) = n$ وبالتالي فإن $f_n(x) \longrightarrow +\infty$ وبذلك فإن المساواة (5.4) تتحقق من أجل التابع غير السالب.

**II** – لنفرض إضافة لما ذكرنا، أن $f$ محدود، أي أن $0 \le f(x) \le M$ من أجــل أي $x \ni X$. عندئذ من أجل $M < n$ يكون لدينا وفقاً لــ (5.3).

$$(\forall x \in X) \quad : \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}$$

وهذا يعني أن $f_n \rightrightarrows f$. بذلك قد أثبتنا المبرهنة في حالة التابع غير السالب.

**III** – ليكن الآن $f$ تابعاً قيوساً من إشارة كيفية ولنستعرض القسم الموجــب والقــسم السالب لهذا التابع:

$$f_+(x) = \max\ \{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$$

$$f_-(x) = -\min\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

بما أن التابعين $f_+, f_-$ قيوسان وغير سالبين فإنه مــن أجلهمــا قــد أثبتــت المبرهنة ويتبقى علينا استخدام العلاقة:

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$

إذا كان $X \subseteq \mathbb{R}^n$، فإنه، كما سبق أن بينا فــي المبرهنــة (1.4)، كــل تــابع مستمر $f$ حيث $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ هو تابع قيوس بوريلي (وكذلك قيوس ليبيغي). ولهذا فإنه من الطبيعي أن نطرح السؤال الآتي.

إلى أي حد يكون صف التوابع القيوسة أوسع من صف التوابع المستمرة؟

إنّ المبرهنة الآتية المثبتة من قبل لوزين تبين أن هذين الصفين بمفهــوم محــدد قريبان جداً وقد أطلق لوزين على خواص التوابع القيوسة المذكورة في هذه المبرهنــة اسم الخاصة $C$.

حذف

**مبرهنة (5.3) ( مبرهنة لوزين )**

لتكن $X \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعة قيوسة، وفق قياس ليبيغ المنتهي وليكن التابع $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ قيوساً وفق ليبيغ ومحدوداً تقريباً في كل مكان عندئذٍ من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة مغلقة مثل $F_\varepsilon \subset X$ بحيث إن مقصور التابع $f$ على $F_\varepsilon$ هو $f\big|_{F_\varepsilon}$ تابع مستمر ويكون تبعاً لذلك

$$m\left(X \setminus F_\varepsilon\right) < \varepsilon$$

(حيث $m$ قياس ليبيغ على $\mathbb{R}^n$).

**البرهان**

سنقدم البرهان على مرحلتين:

**I** – لنفرض أولاً أن $f$ تابع بسيط وقيوس أي أنّ:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$$

حيث $(j \neq k)$ ; $E_j \cap E_k = \varnothing$ , $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$ وحيث $E_1, E_2, \ldots, E_n$ مجموعات قيوسة، باستخدام المبرهنة (10.5) من الفصل الأول ( أو بطريقة مماثلة من أجل $\mathbb{R}^n$ )

وببناء مجموعة مغلقة $E_j \supset F_j$ من أجل كل مجموعة بحيث إنّ:

$$m\left(E_j \setminus F_j\right) < \frac{\varepsilon}{n}$$

لنضع $F_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{n} F_j$ . إن $F_\varepsilon$ مجموعة مغلقة، وأن $F_\varepsilon \subset X$ كما أن $X \setminus F_\varepsilon \subseteq \bigcup_{j=1}^{n}\left(E_j \setminus F_j\right)$ ولذلك فإن:

$$m\left(X \setminus F_\varepsilon\right) \le \sum_{j=1}^{n} m\left(E_j \setminus F_j\right) < \varepsilon$$

بالإضافة لذلك فإنه من الواضح أن المقصور $f\big|_{F_\varepsilon}$ هو تابع مستمر وهكذا فإنه من أجل التوابع البسيطة قد أثبتت المبرهنة.

**II** – لنفرض الآن أن $f$ تابع قيوس ما معرف على $X$. عندئذٍ وفقاً للمبرهنة (5.2) توجد متتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ من التوابع البسيطة والمتقاربة لـ $f$ على $X$. استناداً إلى مبرهنة يغوروف توجد مجموعة قيوسة مثل $X \supset F_0$ وبحيث إنّ:

$$m\left( X \setminus F_0 \right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad f_n \to f \ \text{على} \ F_0$$

وفقاً لذلك واعتماداً على المبرهنة (10.5) من الفصل الأول يمكننا اعتبار أنّ $F_0$ مجموعة مغلقة، استناداً لما برهن في الفصل الأول يمكننا إيجاد مجموعة مغلقة $X \supset F_n$ من أجل كل تابع $f_n$ وبحيث إنّ:

$$m\left( X \setminus F_n \right) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \qquad \left( n = 1 , 2 ,\dots \right)$$

ويكون $f_n\big|_{F_n}$ تابعاً مستمراً.

لنضع:

$$F_\varepsilon = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$$

بما أنّ كلاً من التوابع $f_n\big|_{F_n}$ مستمر و $f_n \rightrightarrows f$ على $F_\varepsilon$ فإنّ تابع النهاية $f\big|_{F_\varepsilon}$ مستمر. بالإضافة إلى ذلك فإنّ:

$$X \setminus F_\varepsilon = \hat{F}_\varepsilon = \left( \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n \right)^{\wedge} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( X \setminus F_n \right)$$

ولهذا فإنّ:

$$m\left( X \setminus F_\varepsilon \right) \le \sum_{n=0}^{\infty} m\left( X \setminus F_n \right) < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$$

# مسائل وتمارين الفصل الثاني

1 - برهن أنّه إذا كان $f$ تابعاً قيوساً ذا قيم حقيقية فإنّ المجموعة $\{f=a\}$ قيوسة من أجل أي $a \in \mathbb{R}$. هل العكس صحيح؟

2 - ليكن $\langle X, \mathfrak{R}, \mu\rangle$ فضاء ذا قياس، برهن أنّ التابع $f(x)$ حيث $x \in A \subset X$ قيوس على المجموعة $A$، إذاً وفقط، إذا كانت المجموعة $\{x \in A \mid f(x) < r\}$ قيوسة من أجل أي عدد عادي $r$.

3 - ليكن $\langle X, \mathfrak{R}, \mu\rangle$ فضاء ذا قياس. ولتكن $\{f_n(x)\}_1^\infty$ متتالية من التوابع القيوسة المعرفة على المجموعة القيوسة $A$. برهن أنّ:

$$a)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\ f_n(x)$$

$$b)\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\ f_n(x)$$

قيوسة على $A$.

4 - برهن أنّ التابع $y=f(x)$ حيث $x \in \mathbb{R}$ هو تابع قابل للقياس على $\mathbb{R}$:

$$a)\quad f(x) = \sin[x]$$

$$b)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{x}{x^4+n^4}$$

$$c)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n e^x)}{n\sqrt[3]{n}}$$

$$c)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,[x]}{1+n^5\,[x]^2}$$

5 - برهن أنّه عندما $n \longrightarrow \infty$ تسعى المتتالية $\{f_n(x)\}$ إلى $f(x)$ تقريباً في كل مكان على $\mathbb{R}$ بالنسبة للقياس $\mu$:

$$a)\quad f_n(x) = x + \sin^n \pi x + \cos^n \pi x \longrightarrow f(x) = x$$

$$b)\quad f_n(x) = n^2\,\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \longrightarrow f(x) = 0$$

$$c)\ f_n(x) = x\,\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \longrightarrow f(x) = 0$$

$$d)\ f_n(x) = x^n\,\chi_{[-1,1]}(x) \longrightarrow f(x) = 0$$

6 - أوجد متتالية التوابع البسيطة والقيوسة والمتقاربة بانتظام إلى التابع $f$ معرفاً بالعلاقة:

$$a)\quad f(x) = x^3 \qquad ;\ x \in \mathbb{R}$$

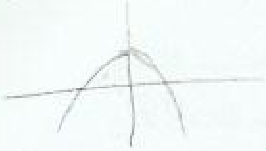
$$b)\quad f(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x \le 0 \\ arctg\,x & ;\ x > 0 \end{cases}$$

7 - ابحث في التقارب بالنسبة لقياس ليبيغ إلى التابع $f$ على المجموعة القيوسة $A$ للمتتاليتين التابعيتين:

$$a)\quad f_n(x) = \left(x^n\right)_{n=1}^{\infty} \quad ;\ 0 \le x \le 1\ ;\ A = [0,1)$$

$$b)\quad f_n(x) = \left(\cos^n x\right)_{n=1}^{\infty} \quad ;\ x \in \mathbb{R}\ ,\ A \in \mathbb{R}$$

$\int \operatorname{sig} x \, (-x^2+1)$ تمرين مهم



# الفصل الثالث

# نظرية التكامل

## *Theory of Integration*

إنّ مفهوم تكامل ريمان معلوم بشكل جيد في التحليل الرياضي. وإنّ عجزه الرئيسي ينحصر في أنّ للتوابع القابلة للمكاملة حسب ريمان عدداً " قليلاً " من نقاط الانقطاع (إنّ المعنى الدقيق لهذه الحالة سنوضحه في المبرهنة (3.2). يسهل إعطاء مثال ، لتابع محدود وقيوس وغير قابل للمكاملة بمفهوم ريمان (على سبيل المثال، تابع دير خليه أي التابع المميز للمجموعة $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد العادية، وهو غير قابل للمكاملة على أي مجال مغلق).

إنّ فكرة بناء تكامل ليبيغ تتلخص في أنّ اختلافها عن تكامل ريمان تقوم على تقسيم ساحة التكامل إلى أجزاء. بحيث إنّ في كل جزء منها تجمعاً لتلك القيم القريبة من بعضها بالنسبة إلى قيم التابع. إنّ هذا الأمر يمكننا من تعميم عملية المكاملة ليس فقط على توابع قيوسة لها عدد كبير من نقاط الانقطاع وإنما على توابع قيوسة معرفة على فضاء مجرد ذي قياس.

في هذا الفصل سنبني تكامل ليبيغ وندرس خواصه وسنوضح أيضاً الصلة بين تكامل ليبيغ وتكامل ريمان.

### §1. مكاملة التوابع البسيطة *Integration of Simple Functions*

ليكن $\langle X, \mathfrak{R}, \mu \rangle$ فضاء ذا قياس منته، وليكن $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعاً بسيطاً مجموعة قيمه $\{c_1, \ldots, c_n\}$ ، أي أنّ:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x) \tag{1.1}$$

حيث:

$$E_j = f^{-1}\left(\{c_j\}\right) \ , \ \bigcup_{j=1}^{n} E_j = X \ , \ E_j \cap E_k = \varnothing \qquad (j \neq k) \tag{1.2}$$

كما أنّ جميع المجموعات $E_j$ مجموعات قيوسة.

**تعريف (1.1)**

إنّ تكامل ليبيغ للتابع $f(x)$ على الفضاء $X$ والذي نرمز له بـ $\int_X f(x)\,d\mu(x)$ أو $\int_X f\,d\mu$ من أجل التابع البسيط (1.1) يعرف بالعلاقة:

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j\,\mu(E_j) \tag{1.3}$$

لنبين الآن أنّ هذا التعريف جيد، أي أنّ، قيمة التكامل لا تتعلق بالشكل الذي يكتب فيه التابع البسيط (1.1).

من الواضح، أنّ بين التمثيلات للتابع المعطى $f$ في الشكل (1.1)، يوجد تمثيل من أجله تكون الأعداد $c_j$ مختلفة. وبغية التحديد سنفرض أنّ جميع الأعداد $c_j$ مختلفة في العلاقة (1.1). ولنفرض وجود تمثيل آخر للتابع نفسه.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k\,\chi_{F_k}(x) \quad ; \quad \bigcup_{k=1}^{m} F_k = X \ , \ F_k \cap F_i = \varnothing \qquad (k \neq i)$$

من الواضح أنّ كل مجموعة من المجموعات $E_j$ هي اجتماع لتلك المجموعات $F_k$ من أجلها $b_k = c_j$. لذلك، باستخدام الخاصة الجمعية للقياس نجد:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\,\mu(E_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j\,\mu\left(\bigcup_{k:b_k=c_j} F_k\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k:b_k=c_j} \mu(F_k) = \sum_{k=1}^{m} b_k\,\mu(F_k)$$

وهو ما يبرهن دقة التعريف (1.1). على سبيل المثال، لتكن $X \supset E$ مجموعة قيوسة وليكن $\chi_E$ التابع المميز لها، عندئذٍ:

$$\int_X \chi_E(x)\,d\mu(x) = \mu(E)$$

لتكن $E \subset X$ مجموعة ما. إذا كان $f$ تابعاً قيوساً بسيطاً عندئذٍ التابع $\chi_E f$ يكون أيضاً تابعاً بسيطاً. إنّ هذه الملاحظة تعطينا إمكانية تعريف التكامل لتابع بسيط قيوس على أية مجموعة قيوسة:

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \int_E f\,d\mu \overset{def}{=} \int_X \chi_E f\,d\mu \tag{1.4}$$

لنستعرض الحالة الخاصة الهامة . ليكن $X = [a,b]$، وليكن $\mathfrak{R}$ صف جميع المجموعات الجزئية من $[a,b]$ والقيوسة وفق ليبيغ ، وليكن $\mu = m$ قياس ليبيغ. عندئذٍ نرمز للتكامل على طول المجال $[a,b]$ بـ $\int_{[a,b]} f(x)\,dx$ أو $\int_a^b f(x)\,dx$ كما نرمز للتكامل على مجموعة قيوسة وفق ليبيغ $E \subset [a,b]$ بالرمز $\int_E f(x)\,dx$.

لنستعرض الآن بعض خواص تكامل التوابع البسيطة والقيوسة.

**مبرهنة (1.1) (خطية التكامل)** مهم

إذا كان $f\,,g$ تابعين قيوسين بسيطين وكان $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$، فإنّ:

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu + \beta \int_X g\,d\mu$$

**البرهان** هام

ليكن:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{F_j}(x) \quad ; \bigcup_{j=1}^{n} F_j = X \quad ; F_i \cap F_j = \varnothing \ (i \neq j)$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{G_k}(x) \quad ; \bigcup_{k=1}^{m} G_k = X \quad ; G_k \cap G_\ell = \varnothing \ (k \neq \ell)$$

من الواضح أنّ التابع $\alpha f + \beta g$ يأخذ القيمة $\alpha b_j + \beta c_k$ على المجموعة $E_{jk} = F_j \cap G_k$ أي أنّ:

$$\alpha f(x)+\beta g(x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\alpha b_j+\beta c_k\right)\chi_{E_{jk}}(x)$$

إضافةً إلى أنّ $\bigcup_{j,k} E_{jk}=X$ وأنّ المجموعات $E_{jk}$ متنافية مثنى مثنى . لذلك باستخدام التعريف (1.3) وباستخدام الخاصة الجمعية للقياس نجد:

$$\begin{aligned}\int_X(\alpha f+\beta g)\,d\mu &=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\alpha b_j+\beta c_k\right)\mu\left(F_j\cap G_k\right)\\ &=\alpha\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=1}^{m}\mu\left(F_j\cap G_k\right)+\beta\sum_{k=1}^{m}c_k\sum_{j=1}^{n}\mu\left(F_j\cap G_k\right)\\ &=\alpha\sum_{j=1}^{n}b_j\,\mu\left(F_j\right)+\beta\sum_{k=1}^{m}c_k\,\mu\left(G_k\right)\\ &=\alpha\int_X f\,d\mu+\beta\int_X g\,d\mu\end{aligned}$$

**مبرهنة (1.2) (إيجابية التكامل)**

إذا كان $f$ تابعاً بسيطاً وقيوساً وكان $f\geq 0 \pmod{\mu}$ فإنّ $\int_X f\,d\mu\geq 0$ .

**البرهان**

ليكن $f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j\,\chi_{E_j}(x)$ عندئذٍ إيجابية التابع $f$ تقريباً في كل مكان تعني أنّه إذا كان $c_j>0$ من أجل $j$ ما فإنّ $\mu\left(E_j\right)=0$ ولذلك فإنّ:

$$\int_X f\,d\mu=\sum_{j=1}^{n}c_j\,\mu\left(E_j\right)\geq 0$$

**مبرهنة (1.3) (اطراد التكامل)**

إذا كان $f$, $g$ تابعين بسيطين قيوسين وكان $f\geq g \pmod{\mu}$ ، فإنّ :

$$\int_X f\,d\mu\geq\int_X g\,d\mu$$

**البرهان**

ينتج مباشرة من المبرهنة $(1.2)$ بتطبيقها على التابع $f - g$.

**نتيجة (1.1)**

إذا كان $f$ تابعاً بسيطاً قيوساً وكان $a \le f(x) \le b \pmod{\mu}$ على المجموعة القيوسة $A \subseteq X$ ، فإنّ:

$$a \ \mu(A) \le \int_A f \, d\mu \le b \ \mu(A)$$

**مبرهنة (1.4) (حول تكامل تابع مكافئ للصفر)**

إذا كان $f$ تابعاً بسيطاً وكان $f = 0 \pmod{\mu}$، فإنّ:

$$\int_X f \ d\mu = 0$$

**البرهان**

ينتج مباشرة من العلاقة $(1.3)$. في الحقيقة، إذا كانت $c_j \neq 0$ من أجل بعض $j$ فإنّ $\mu(E_j)=0$ من أجل تلك القيم لـ $j$.

**نتيجة (1.2)**

إذا كان $f, g$ تابعين بسيطين قيوسين وكان $f = g \pmod{\mu}$ فإنّ:

$$\int_X f \ d\mu = \int_X g \ d\mu$$

**مبرهنة (1.5) (حول تقدير القيمة المطلقة للتكامل)**

إذا كان $f$ تابعاً بسيطاً قيوساً، فإنّ:

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \le \int_X |f| \, d\mu$$

**البرهان**

ليكن $f$ تابعاً بسيطاً قيوساً، عندئذٍ من الواضح أنّ $|f|$ تابع بسيط قيوس. وفقاً لذلك نجد:

$$(\forall x \in X) \quad : \quad -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

استناداً إلى المبرهنة $(1.3)$ نجد:

$$-\int_X |f| \, d\mu \le \int_X f \, d\mu \le \int_X |f| \, d\mu$$

أي أنّ:

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \le \int_X |f| \, d\mu$$

ليكن $f$ تابعاً بسيطاً قيوساً مثبتاً . ولنعرف على $\sigma$ – الجبر $\mathfrak{R}$ من المجموعات القيوسة تابعاً عددياً $\upsilon$ $(\upsilon : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{R})$ بالعلاقة :

$$\upsilon(A) = \int_A f \, d\mu \quad ; \quad A \in \mathfrak{R} \tag{1.5}$$

من الواضح أنّ $\upsilon(\varnothing) = 0$. إنّ المبرهنة الآتية تحدد خاصة هامة لهذا التابع.

**مبرهنة (1.6) (حول الخاصة الجمعية العدودة للتكامل)**

إنّ تابع المجموعة $\upsilon(A)$ المعرف بالعلاقة $(1.5)$ جمعي عدود.أي أنّه، إذا كان: $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad , \quad A_i \in \mathfrak{R} \quad , \quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad (i \ne j)$

فإنّ:

$$\upsilon(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \upsilon(A_i)$$

إضافة إلى أنّ السلسلة في الطرف الأيمن تتقارب إطلاقاً.

**البرهان**

ليكن

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}(x) \;\; ; \;\; \bigcup_{k=1}^{n} E_k = X \quad , \quad E_k \cap E_j \ne \varnothing \quad (k \ne j) \tag{1.6}$$

عندئذٍ باستخدام العلاقتين $(1.3)$ و $(1.4)$ والخاصة الجمعية العدودة للقياس نجد:

$$\upsilon(A)=\int_A f\,d\mu=\int_X f\,\chi_A\,d\mu=\sum_{k=1}^{n} c_k\,\mu(E_k\cap A)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} c_k\,\mu\left(E_k\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} c_k\,\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_k\cap A_i)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} c_k\,\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_k\cap A_i)$$

في الطرف الأيمن لدينا تركيب خطي لسلاسل متقاربة ذات حدود موجبة. لذلك يمكن مبادلة موضعي المجموعين وأنّ السلسلة الناتجة تكون متقاربة إطلاقاً.

$$\upsilon(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k\,\mu(E_k\cap A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i} f\,d\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\upsilon(A_i)$$

**نتيجة (1.3)**

تابع المجموعة المعرف بالعلاقة (1.6) هو شحنة (انظر التعريف (12.1) من الفصل الأول).

**تعريف (1.2)**

يسمى تابع المجموعة $\lambda:\mathfrak{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ مستمراً إطلاقاً بالنسبة للقياس $\mu$. إذا وجد من أجل أي عدد موجب $\varepsilon>0$ عدد موجب $\delta>0$ بحيث إنّه من أجل أية مجموعة $E\in\mathfrak{R}$ ومحققة للشرط $\mu(E)<\delta$ تتحقق المتراجحة:

$$|\lambda(E)|<\varepsilon$$

**مبرهنة (1.7) (حول الاستمرار المطلق للتكامل)**

تابع المجموعة $\upsilon$ المعرف بالعلاقة (1.5) هو تابع مستمر إطلاقاً بالنسبة للقياس $\mu$.

**البرهان**

ليكن $f$ تابعاً بسيطاً قيوساً ولنفرض أنّ:

$$c = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

عندئذٍ من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ نضع $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ ، عندئذٍ ومن أجل $\mu(E) < \delta$ يكون لدينا :

$$|\upsilon(E)| = \left| \int_E f \, d\mu \right| \le \int_E |f| \, d\mu \le c \; \mu(E) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

## § 2 . مكاملة التوابع القيوسة والمحدودة

***Integration of Measurable Bounded Functions***

سنستعرض في هذه الفقرة مفهوم تكامل ليبيغ على مجموعة جميع التوابع القيوسة والمحدودة وكذلك الخواص الأساسية لهذا التكامل.

لنفرض، كما في الفقرة الأولى، أن $\langle X, \mathfrak{R}, \mu \rangle$ فضاء ذو قياس منتهٍ، وأن $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع قيوس ومحدد على $X$.

لنعرف من أجل هذا التابع مفهوم تكامل ليبيغ وفقاً لمبرهنة سابقة توجد متتالية من التوابع القيوسة والبسيطة $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ والمتقاربة بانتظام إلى التابع $f$ على $X$. ولنستعرض متتالية التكاملات المقابلة

$$I_n = \int_X f_n \, d\mu$$

ولنبرهن على أنّ هذه المتتالية العددية متتالية أساسية . في الحقيقة ، من التقارب المنتظم $f_n \rightrightarrows f$ ، ينتج أنّ:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall m, n > N)(\forall x \in X) : |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(X)}$$

وعندئذٍ من أجل $N < n, m$ ، يكون لدينا:

$$|I_m - I_n| = \left| \int_X f_m \, d\mu - \int_X f_n \, d\mu \right| = \left| \int_X (f_m - f_n) \, d\mu \right| \le$$

$$\le \int_X |f_m - f_n| \, d\mu \le \frac{\varepsilon}{\mu(X)} \; \mu(X) = \varepsilon$$

أي أنّ المتتالية $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية. وفقاً لذلك تكون نهايتها

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

موجودة . لنبين أنّ هذه النهاية لا تتعلق باختيار المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$، لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتاليتين من التوابع البسيطة والقيوسة والمتقاربتين بانتظام إلى التابع $f$ على $X$. عندئذٍ من أجل أي عدد $0<\varepsilon$ يوجد عدد مثل $N$ بحيث إنّه من أجل $N<n$ يكون:

$$(\forall x \in X) : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(x)} \ , \ |g_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(x)}$$

لذلك فإنّه من أجل $N<n$ يكون:

$$|f_n(x) - g_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(x)}$$

بذلك نجد أنّ:

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X g_n \, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - g_n| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{\mu(x)} \mu(X) = \varepsilon$$

وبالتالي فإنّ:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu$$

أي أنّ نهاية التكاملات لا تتعلق باختيار متتالية التوابع البسيطة والقيوسة المتقاربة بانتظام إلى $f$.

إنّ ما ورد أعلاه يبين دقة التعريف الآتي:

**تعريف (2.1)**

ليكن $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعاً قيوساً محدداً على $X$ . و $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من التوابع البسيطة والقيوسة المتقاربة بانتظام إلى $f$ على $X$. إنّ تكامل ليبيغ للتابع $f$ يعرف بالعلاقة:

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\, d\mu \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \qquad (2.1)$$

لتكن $f$ تابعاً قيوساً ومحدداً، ولتكن $A$ مجموعة قيوسة ، أي أنّ $A \in \Re$. عندئذٍ يكون التابع المميز $\chi_A$ للمجموعة $A$ تابعاً قيوساً ومحدوداً وبالتالي فإنّ الجداء $f\chi_A$ يكون كذلك. لذلك فإنّه من الطبيعي أن نعطي التعريف الآتي.

**تعريف (2.2)**

إذا كان f تابعاً قيوساً ومحدداً وكانت $A$ مجموعة قيوسة فإنّ تكامل ليبيغ للتابع $f$ على المجموعة $A$ يعرف بالعلاقة:

$$\int_A f\, d\mu \overset{def}{=} \int_X f\, \chi_n\, d\mu \qquad (2.2)$$

من هذين التعريفين يتضح أن كل تابع قيوس ومحدود قابل للمكاملة وفق ليبيغ.

لنستعرض الخواص الأساسية لتكاملات ليبيغ للتوابع القيوسة والمحدودة. فنلاحظ أن هذه الخواص مماثلة تماماً للخواص المقابلة في تكاملات التوابع البسيطة والقيوسة. وبراهينها تنتج بسهولة من المبرهنات المستعرضة في تكامل التوابع البسيطة.

**مبرهنة (2.1) (خطية التكامل)**

إذا كان $f$ و $g$ تابعين قيوسين ومحدودين وكان $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$ فإن:

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu$$

**البرهان**

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتاليتين من التوابع البسيطة والقيوسة و $f_n \rightrightarrows f$ و $g_n \rightrightarrows g$ . عندئذٍ $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$. استناداً للتعريف (2.1) والمبرهنة (1.1) نجد:

$$\int_X (\alpha f+\beta g)\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X(\alpha f_n+\beta g_n)\,d\mu$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\alpha\int_X f_n\,d\mu+\beta\int_X g_n\,d\mu\right)$$

$$=\alpha\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu+\beta\lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,d\mu$$

$$=\alpha\int_X f\,d\mu+\beta\int_X g\,d\mu$$

**مبرهنة (2.2) (حول إيجابية التكامل)**

إذا كان $f$ تابعاً قيوساً ومحدوداً وكان $f \geq 0 \pmod{\mu}$ فإن $\int_X f\,d\mu \geq 0$.

**البرهان**

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من التوابع البسيطة والقيوسة والمتقاربة بانتظام إلى التابع $f$ على $X$. لنختر التوابع $f_n$ بحيث يتحقق الشرط $f_n \geq 0 \pmod{\mu}$. عندئذٍ استناداً إلى المبرهنة (1.2). نجد $\int_X f_n\,d\mu \geq 0$ بالانتقال إلى النهاية في طرفي هذه المتراجحة عندما $n \longrightarrow \infty$ نجد المطلوب.

**مبرهنة (2.3) (حول اطراد التكامل)**

إذا كان $f$ و $g$ تابعين قيوسين ومحدودين وكان $f \geq g \pmod{\mu}$ فإن $\int_X f\,d\mu \geq \int_X g\,d\mu$.

**البرهان**

يكفي تطبيق المبرهنة (2.2) على التابع $f-g$.

**نتيجة (2.1)**

إذا كان $f$ تابعاً قيوساً ومحدوداً وكان $a \leq f(x) \leq b \pmod{\mu}$ على المجموعة $A \subseteq X$ فإن:

$$a\ \mu(A) \le \int_A f\ d\mu \le b\ \mu(A)$$

**مبرهنة (2.4) (حول تكامل تابع يكافئ الصفر)**

إذا كان $f$ تابعاً قيوساً ومحدوداً وكان $f = 0 \pmod{\mu}$ فإن $\int_X f\, d\mu = 0$.

**البرهان**

يكفي أن نطبق النتيجة (2.1) من أجل $a = b = 0$.

**نتيجة (2.2)**

إذا كان $f$ و $g$ تابعين قيوسين ومحدودين وكان $f = g \pmod{\mu}$ فإن:

$$\int_X f\ d\mu = \int_X g\ d\mu$$

**مبرهنة (2.5) (حول تقدير القيمة المطلقة للتكامل)**

إذا كان $f$ تابعاً قيوساً ومحدوداً، فإن:

$$\left| \int_X f\ d\mu \right| \le \int_X |f|\ d\mu$$

**البرهان**

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من التوابع القيوسة البسيطة و $f_n \rightrightarrows f$ عندئذ، من الواضح أن $|f_n|$ بسيطة وقيوسة و $|f_n| \rightrightarrows |f|$ استناداً إلى المبرهنة (1.5). لدينا:

$$\left| \int_X f_n\ d\mu \right| \le \int_X |f_n|\ d\mu$$

بالانتقال إلى النهاية من أجل $n \longrightarrow \infty$ نحصل على المطلوب.

ليكن $f$ تابعاً مثبتاً قيوساً ومحدوداً، لنعرف على $\sigma$ – الجبر $\mathfrak{R}$ $\sigma$ – جبر جميع المجموعات القيوسة، التابع العددي:

$$\upsilon(A)=\int_A f\ d\mu \qquad (A\in\mathfrak{R}) \tag{2.3}$$

من التعريفين $(2.1)$ و $(2.2)$ نجد أن $\upsilon(\varnothing)=0$.

**مبرهنة (2.6) (الخاصة الجمعية العدودة للتكامل)**

إن تابع المجموعة $\upsilon(A)$ المعرف بالعلاقة $(2.3)$ تابع جمعي عدود، إذا كان:

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \quad , \quad A_i\in\mathfrak{R} \quad , \quad A_i\cap A_j=\varnothing \quad (i\neq j)$$

فإن:

$$\upsilon(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\upsilon(A_i) \tag{2.4}$$

حيث إن السلسلة في الطرف الأيمن تتقارب إطلاقاً.

**البرهان**

لنبرهن أولاً، الخاصة الجمعية المنتهية للتكامل . من أجل أي $m\in\mathbb{N}$ لدينا:

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{m}A_i} f\ d\mu=\sum_{i=1}^{m}\int_{A_i} f\ d\mu$$

أي أن :

$$\upsilon\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\upsilon(A_i) \tag{2.5}$$

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من التوابع البسيطة والقيوسة و $f_n\rightrightarrows f$ عندئذٍ استناداً إلى المبرهنة $(1.6)$ نجد:

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{m}A_i} f_n\ d\mu=\sum_{i=1}^{m}\int_{A_i} f_n\ d\mu$$

بالانتقال إلى النهاية في هذه المساواة عندما $n\longrightarrow\infty$ نحصل على $(2.5)$

وبالتالي من أجل أي $m\in\mathbb{N}$، يكون لدينا:

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)\cup\left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty}A_i\right)$$

باستخدام الخاصة الجمعية المنتهيه للتابع $\upsilon$، نحصل على:

$$\upsilon(A)=\sum_{i=1}^{m}\upsilon(A_i)+\upsilon\left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty}A_i\right) \qquad (2.6)$$

لنقدر الحد الأخير في $(2.6)$. بما أن $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)=\mu(A)<\infty$ فإنه من

أجل أي عدد $\varepsilon>0$ يوجد عدد مثل $k\in\mathbb{N}$ بحيث إن:

$$\sum_{i=m+1}^{\infty}\mu(A_i)<\frac{\varepsilon}{c} \quad ; \quad c=\sup_{x\in X}|f(x)|$$

من أجل تلك الأعداد $m$ يكون:

$$\left|\upsilon\left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty}A_i\right)\right|=\left|\int_{\bigcup_{i=m+1}^{\infty}A_i} f\,d\mu\right|\leq\int_{\bigcup_{i=m+1}^{\infty}A_i}|f|\,d\mu\leq c\,.\,\mu\left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty}A_i\right)=$$

$$=c\,.\sum_{i=m+1}^{\infty}\mu(A_i)<c\,.\,\frac{\varepsilon}{c}=\varepsilon$$

أي أن:

$$\lim_{m\to\infty}\upsilon\left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty}A_i\right)=0$$

بالانتقال إلى النهاية عندما $n\longrightarrow\infty$ في العلاقة $(2.6)$ نحصل على العلاقة $(2.4)$ المطلوبة. بسهولة يمكن البرهان على التقارب المطلق للسلسلة وبشكل مماثل للتابع $|f(x)|$.

### § 3. العلاقة بين تكاملي ريمان وليبيغ

***Relationship between the Concepts of Riemann and Lebesgue Integrals***

بغية التبسيط، سنستعرض العلاقة في الحالة الأحادية البعد . لنذكّر أولاً بتعريف تكامل ريمان

ليكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعاً ما ولتكن $\pi$ تجزئة ما للمجال $[a,b]$ .

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

ولنضع $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ و $|\pi| = \max\{\Delta x_k \mid k = 0,1,\ldots,n-1\}$

و (3.1)
$$M_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]\}$$
$$m_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]\}$$

يسمى المجموعان :

$$\underline{S}(f,\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \quad , \quad \overline{S}(f,\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \qquad (3.2)$$

على الترتيب بمجموعي داربو السفلي والعلوي، استناداً إلى مبرهنة داربو تكون النهايتان:

$$\lim_{|\pi| \to 0} \underline{S}(f,\pi) = \sup_{\pi} \underline{S}(f,\pi) = \underline{\int_a^b} f\, dx$$

$$\lim_{|\pi| \to 0} \overline{S}(f,\pi) = \inf_{\pi} \overline{S}(f,\pi) = \overline{\int_a^b} f\, dx$$

موجودتين وتسميان على الترتيب بالتكامل السفلي والتكامل العلوي للتابع $f$.
في هذه الحالة، من الواضح، أنه من أجل أية تجزئة $\pi$ يكون:

$$\underline{S}(f,\pi) \le \underline{\int_a^b} f\, dx \le \overline{\int_a^b} f\, dx \le \overline{S}(f,\pi)$$

نقول عن التابع $f$ إنه قابل للمكاملة وفق ريمان على $[a,b]$ إذا تساوى التكاملان العلوي والسفلي وتسمى القيمة المشتركة لهما بتكامل ريمان للتابع $f$ على $[a,b]$ ونرمز له بـ $(R)\int_a^b f\, dx$ للتمييز بين تكامل ريمان وتكامل ليبيغ بالنسبة لقياس ليبيغ سنرمز للثاني بالرمز $(\mathscr{L})\int_a^b f\, dx$. من المعلوم أن محدودية التابع $f$ على المجال $[a,b]$ هي شرط لازم لقابلية مكاملته وفق ريمان.

**مبرهنة (3.1)**

إذا كان التابع $f$ قابلاً للمكاملة وفق ريمان على المجال $[a,b]$ فإنه يكون قابلاً للمكاملة وفق ليبيغ ويكون:

$$(\mathscr{L})\int_a^b f\ dx = (R)\int_a^b f\ dx \tag{3.3}$$

**البرهان**

نعلم أن كل تابع قيوس ومحدود على $[a,b]$ هو تابع قابل للمكاملة وفق ليبيغ، غير أن محدودية التابع $f$ تنتج من كونه قابلاً للمكاملة وفق ريمان وذلك للبرهان على أن التابع قابل للمكاملة وفق ليبيغ يكفي أن نبرهن أنه تابع قيوس.

لتكن $\pi_m$ تجزئة للمجال $[a,b]$ إلى $n=2^n$ جزءاً متساوياً بالنقاط:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

ولنضع:

$$\begin{aligned} \underline{f_m}(x) &= \sum_{k=0}^{2^m-1} m_k\, \chi_k(x) \\ \overline{f_m}(x) &= \sum_{k=0}^{2^m-1} M_k\, \chi_k(x) \end{aligned} \tag{3.4}$$

حيث $M_k$ ، $m_k$ معرفان بالعلاقة (3.1) وأما $\chi_k(x)$ فهو التابع المميز للمجال $[x_k, x_{k+1})$. من الواضح أنه في كل نقطة $x$ يكون:

$$\underline{f_1}(x) \le \underline{f_2}(x) \le \ldots \le f(x)$$
$$\overline{f_1}(x) \ge \overline{f_2}(x) \ge \ldots \ge f(x)$$

ولذلك فإن النهايتين موجودتان:

$$\underline{f}(x) = \lim_{m\to\infty} \underline{f_m}(x)$$
$$\overline{f}(x) = \lim_{m\to\infty} \overline{f_m}(x)$$

ويكون: $\underline{f}(x) \le f(x) \le \overline{f}(x)$

وبالتالي فإن $\underline{f}$, $\overline{f}$ قيوسان . بما أن $\underline{f_m}$ , $\overline{f_m}$ توابع قيوسة وبسيطة فإنه استناداً للتعريف (2.1) يكون لدينا:

$$(\mathscr{L})\int_a^b \underline{f_m}\, dx \le (\mathscr{L})\int_a^b \underline{f}\, dx \le (\mathscr{L})\int_a^b \overline{f}\, dx \le (\mathscr{L})\int_a^b \overline{f_m}\, dx \tag{3.5}$$

بالإضافة إلى ذلك فإنه من العلاقتين (3.4) ومن التعريف (1.1) لتكامل ليبيـــغ لتابع بسيط ومع الأخذ بعين الاعتبار (3.2) ينتج أن:

$$(\mathscr{L})\int_a^b \underline{f_m}\, dx = \sum_{k=0}^{2^m-1} m_k \; m\left(\left[x_k , x_{k+1}\right)\right) = \sum_{k=0}^{2^m-1} m_k \; \Delta x_k = \underline{S}\left(f , \pi_m\right)$$

و بالمثل نجد أن: $(\mathscr{L})\int_a^b \overline{f_m}\, dx = \overline{S}\left(f , \pi_m\right)$

و لذلك فإن المتراجحة (3.5) تكتب على الشكل:

$$\underline{S}\left(f , \pi_m\right) = (\mathscr{L})\int_a^b \underline{f}\, dx \le (\mathscr{L})\int_a^b \overline{f}\, dx \le \overline{S}\left(f , \pi_m\right) \qquad (3.6)$$

بما أن التابع $f$ قابل للمكاملـــة وفـــق ريمـــان فإنـــه بالانتقـــال إلـــى النهايـــة عندما $m \longrightarrow \infty$ نجد أن مجموعي داربو $\overline{S}\left(f , \pi_m\right) , \underline{S}\left(f , \pi_m\right)$ يـــسعيان إلـــى النهاية نفسها والمساوية إلى $(R)\int_a^b f \; dx$.

بالانتقال إلى النهاية في المتراجحة (3.6) عندما $m \longrightarrow \infty$ نجد:

$$(R)\int_a^b f \; dx \le (\mathscr{L})\int_a^b \underline{f}\, dx \le (\mathscr{L})\int_a^b \overline{f}\; dx \le (R)\int_a^b f \; dx$$

و منه نجد:

$$(\mathscr{L})\int_a^b \underline{f}\; dx = (\mathscr{L})\int_a^b \overline{f}\; dx = (R)\int_a^b f \; dx \qquad (3.7)$$

من المساواة الأخيرة نجد أن:

$$(\mathscr{L})\int_a^b \left(\; \overline{f} - \underline{f} \;\right)\; dx = 0$$

بما أن $\overline{f} - \underline{f} \ge 0$ فإنه استناداً إلى المبرهنة (2.2) يكون

$\overline{f} - \underline{f} = 0 \quad (\mathrm{mod}\; m)$ ولهذا $f = \underline{f} = \overline{f} \quad (\mathrm{mod}\; m)$

ومن هذا تنتج قيوسية التابع $f$، والآن من المساواة (3.7) نجد أن:

$$(\mathscr{L})\int_a^b f\ dx=(R)\int_a^b f\ dx$$

إن المبرهنة المثبتة تعطينا حلاً جزئياً لمسألة إيجاد تكـاملات ليبيـغ . سـنذكر (بدون برهان) معيار قابلية المكاملة وفق ريمان (للبرهان انظر [7])

**مبرهنة (3.2) (ليبيغ)**

الشرط اللازم والكافي كي يكون التابع المحدود على $[a,b]$ قابلاً للمكاملة وفـق ريمان على ذلك المجال هو أن يكون قياس ليبيغ لمجموعـة نقـاط انقطاعـه مـساوياً للصفر.

ينتج من هذه المبرهنة، في حالة خاصة، تنتج المبرهنة المتعلقة بقابلية المكاملـة وفق ريمان للتوابع المطردة (ذلك لأن مجموعة نقاط تابع مطـرد لـيس بـأكثر مـن مجموعة قابلة للعد).

## § 4 . مكاملة التوابع غير السالبة وغير المحدودة

***Integration of Non- negative Unbounded Functives***

لتعميم مفهوم تكامل ليبيغ للتوابع غيـر المحـدودة ، مـن المناسـب ، أولاً ، استعراض تكامل التوابع غير السالبة ومن ثم الانتقال إلـى حالـة التوابـع المتباينـة الإشارة.

ليكن، كما سبق، $\langle X, \Re, \mu \rangle$ فضاء ذا قياس منته، وليكن $f$ تابعـاً قيوسـاً، $\mu$ - منتهياً تقريباً في كل مكان و $0\le f(x)$ على $X$. من أجل أي عـدد طبيعـي $N$. لنرمز بـ $f_N$ لمقطع التابع $f$ المعرف بالعلاقة:

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x) & ;\ f(x)<N \\ N & ;\ f(x)\ge N \end{cases}$$

إنّ قيوسة $f_N$ تنتج مباشرة من أنّ:

$$\{f_N<a\}=\begin{cases} \{f<a\} & ;\ a\le N \\ X & ;\ a>N \end{cases}$$

**توطئة (4.1)**

إنّ:

$$\lim_{N \to \infty} \mu(\{ f \geq N \}) = 0$$

**البرهان**

بسهولة نرى أنّ:

$$\{f \geq 1\} \supseteq \{f \geq 2\} \supseteq \{f \geq 3\} \supseteq \ldots$$

بذلك واستناداً إلى مبرهنة استمرار التقاطع، نجد:

$$\lim_{N \to \infty} \mu(\{ f \geq N\}) = \mu\left( \bigcap_{N=1}^{\infty} \{ f \geq N \} \right) = \mu(\{ f = +\infty\}) = 0$$

وذلك لأنّ التابع $f$ $\mu-$ منتهٍ تقريباً في كل مكان.

بما أنّ جميع المقاطع $f_N$ توابع قيوسة ومحدودة فهي قابلة للمكاملة وفق ليبيغ.

بما أنّ:

$$(\forall x \in X) \quad : \quad f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \ldots$$

فإنّه استناداً إلى مبرهنة اطراد التكامل يكون:

$$\int_X f_1 d\mu \leq \int_X f_2 d\mu \leq \int_X f_3 d\mu \leq \cdots$$

وبالتالي فإنّ النهاية

$$\lim_{N \to \infty} \int_X f_N \, d\mu \tag{4.1}$$

موجودة (منتهية أو غير منتهية).

**تعريف (4.1)**

إذا كانت النهاية (4.1) محدودة فإنّ التابع $f$ يسمى تابعاً قابلاً للمكاملة وفق ليبيغ أوجمعياً ويعرف تكامل ليبيغ له بالعلاقة:

$$\int_X f(x) \, d\mu(x) = \int_X f \, d\mu \overset{def}{=} \lim_{N \to \infty} \int_X f_N \, d\mu$$

أما إذا كانت النهاية (4.1) غير منتهية ، عندئذٍ ، بالتعريف يكون:

$$\int_X f \, d\mu = +\infty$$

من الواضح ، أنّ التكامل عدد غير سالب (أو $+\infty$). في حالة خاصة، إذا كان $f$ تابعاً قيوساً ومحدوداً فإنّ $f_N(x) = f(x)$ من أجل جميع قيم $N$ الكبيرة بقدرٍ كافٍ. لذلك فإنّ التعريف (4.1) يعطينا القيمة نفسها للتكامل في التعريف (2.1).

**توطئة (4.2)**

ليكن $f, g$ تابعين قيوسين وليكن $0 \le f(x) \le g(x) \pmod{\mu}$ على $X$ وليكن $g$ تابعاً قابلاً للمكاملة، عندئذٍ يكون $f$ تابعاً قابلاً للمكاملة ويكون:

$$\int_X f \, d\mu \le \int_X g \, d\mu \tag{4.2}$$

**البرهان**

من الفرض ينتج أنّ $f_N(x) \le g_N(x) \pmod{\mu}$ ، من أجل أي عدد $N$ باستخدام خاصة اطراد التكامل والتعريف (4.1)، نجد:

$$\int_X f_N \, d\mu \le \int_X g_N \, d\mu \le \int_X g \, d\mu < \infty \tag{4.3}$$

من هذه المتراجحة تنتج محدودية النهاية $\lim\limits_{N \to \infty} \int_X f_N \, d\mu$ ، أي أنّ $f$ قابل للمكاملة. بالانتقال إلى النهاية في المتراجحة (4.3) عندما $N \longrightarrow \infty$ نجد المتراجحة المطلوبة (4.2).

ليكن $f$ تابعاً قابلاً للمكاملة على $X$ ولتكن $A$ مجموعة جزئية قيوسة من $X$ و $\chi_A$ تابعها المميز . عندئذٍ يكون $\chi_A f$ تابعاً قيوساً كما أنّ

$$0 \le \chi_A(x) f(x) \le f(x)$$

واستناداً إلى التوطئة (4.2) يكون التابع $\chi_A f$ أيضاً قابلاً للمكاملة. إنّ هذا الترتيب يفسر التعريف الآتي.

**تعريف (4.2)**

إذا كانت المجموعة $A \subset X$ قيوسة وكان التابع $\chi_A f$ قابلاً للمكاملة على $X$ فإنّ التابع $f$ يسمى قابلاً للمكاملة ( جمعياً ) على $A$ وتكامله على $A$ يعـرف بالمساواة:

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\, d\mu \stackrel{def}{=} \int_X \chi_A f\ \, d\mu$$

من الواضح أنّه إذا كان جمعياً على $X$ فإنّه يكون كذلك على أيـة مجموعـة قيوسة $A \subset X$.

لنستعرض الآن بعض خواص التكامل للتوابع غير السالبة وغير المحدودة.

سنترك بعض هذه الخواص كتمارين.

**مبرهنة (4.1) (حول خطية التكامل)**

إذا كان $f, g$ تابعين جمعيين وكان $0 \le f(x)$ , $0 \le g(x)$ , $0 \le \alpha, \beta$

فإنّ التابع $\alpha f + \beta g$ يكون أيضاً جمعياً و:

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu$$

**البرهان**

سنثبت المبرهنة على مرحلتين:

**I** – لنبرهن أولاً، الخاصة الجمعية. بسهولة نرى أنّ:

$$(f+g)_N(x) \le f_N(x) + g_N(x)$$

من أجل أي عدد طبيعي $N$، ولذلك واستناداً لخاصة اطراد التكامل وللتعريف (4.1) نجد:

$$\int_X (f+g)_N\, d\mu \le \int_X f_N\, d\mu + \int_X g_N\, d\mu \le \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu < \infty$$

أي أنّ $f + g$ جمعي. بالانتقال إلى النهاية في المتراجحـة الأخيـرة عنـدما $N \longrightarrow \infty$ نجد:

$$\int_X (f+g)\,d\mu \le \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu \qquad (4.4)$$

من ناحية ثانية لدينا:

$$f_N(x)+g_N(x) \le f(x)+g(x)$$

بما أنّ $f+g$ جمعي ، فإنّه استناداً اطراد التكامل والمبرهنة (2.1) نجد أنّ:

$$\int_X f_N\,d\mu + \int_X g_N\,d\mu \le \int_X (f+g)\,d\mu$$

بالانتقال إلى النهاية عندما $N \longrightarrow \infty$ في هذه المتراجحة نجد:

$$\int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu \le \int_X (f+g)\,d\mu \qquad (4.5)$$

من العلاقتين (4.4) و (4.5) نجد أنّ:

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

**II** – لنبرهن تجانس التكامل. ليكن $f$ تابعاً جمعياً و $0 \le f(x)$ و $0 \le \alpha$ . لنبرهن أنّ $\alpha f$ هو أيضاً تابع جمعي وأنّ:

$$\int_X \alpha f\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu \qquad (4.6)$$

من أجل $\alpha = 0$ المساواة محققة . لتكن $1 \le \alpha$ عندئذ $(\alpha f)_N \le \alpha f_N(x)$ من أجل أي عدد $N$. واعتماداً على المبرهنة (2.3) والتعريف (4.1) نجد:

$$\int_X (\alpha f)_N\,d\mu \le \int_X \alpha f_N\,d\mu = \alpha \int_X f_N\,d\mu \le \alpha \int_X f\,d\mu$$

أي أنّ $(\alpha f)$ جمعي. بالانتقال إلى النهاية عندما $N \longrightarrow \infty$ نجد:

$$\int_X (\alpha f)\,d\mu \le \alpha \int_X f\,d\mu \qquad (4.7)$$

بالإضافة لذلك

$$\alpha f_N(x) \le \alpha f(x)$$

بما أنّ $\alpha f$ جمعي فإنّه استناداً للتوطئة (4.2) والتعريف (2.1) نجد:

$$\alpha\int_X f_N\,d\mu \le \int_X (\alpha f)_N\,d\mu$$

بالانتقال إلى النهاية عندما $N \longrightarrow \infty$ نجد:

$$\alpha\int_X f\,d\mu \;\le\; \int_X (\alpha f)\,d\mu \qquad (4.8)$$

بمقارنة (4.7) مع (4.8) نحصل على المساواة(4.6) في حالة $\alpha \ge 1$. لنفرض أنّ $0<\alpha<1$ . بما أنّ $\alpha f(x) < f(x)$ فإنّه استناداً للتوطئة (4.2) يكون $\alpha f$ جمعياً وبما أنّ $\frac{1}{\alpha} > 1$ فإنّه استناداً لما برهن أعلاه يكون:

$$\int_X f\,d\mu \;=\; \int_X \frac{1}{\alpha}(\alpha f)\,d\mu \;=\; \frac{1}{\alpha}\int_X \alpha f\,d\mu$$

وهو ما يبرهن صحة المساواة (4.6) في هذه الحالة.

ليكن $f$ تابعاً مثبتاً ما وغير سالب وجمعياً على $X$، عندئذٍ من أجل أية مجموعة قيوسة $A \subseteq X$ لنضع:

$$\upsilon(A) = \int_A f\,d\mu \qquad (4.9)$$

لنبرهن على الاستمرار المطلق والخاصة الجمعية العدودة لتابع المجموعة $\upsilon : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

**مبرهنة (4.2) (حول الاستمرار المطلق للتكامل)**

إذا كان $f$ تابعاً غير سالب وجمعياً فإنّ تابع المجموعة غير السالب $\upsilon$ والمعرف بالعلاقة (4.9) مستمر إطلاقاً بالنسبة للقياس $\mu$.

**البرهان**

من التعريف (4.1) ينتج أنّه من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ يوجد عدد مثل $N \in \mathbb{N}$ بحيث إنّ:

$$0 \le \int_X (f - f_N)\,d\mu = \int_X f\,d\mu - \int_X f_N\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

لنضع $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. عندئذٍ من أجل أي مجموعة قيوسة $E \subset X$ محققة الشرط $\mu(E) < \delta$ نجد:

$$0 \le \upsilon(E) = \int_E f \, d\mu = \int_E (f - f_N) d\mu + \int_E f_N \, d\mu \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + N \mu(E) < \frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon$$

**مبرهنة (4.3) (حول الخاصة الجمعية العدودة للتكامل)**

إنّ تابع المجموعة $\upsilon$ المعرف بالعلاقة (4.9) تابع جمعي عدود. أي إذا كان:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad ; \quad A_i \in \Re \quad ; \quad A_j \cap A_i = \varnothing \quad (j \ne i)$$

فإنّ:

$$\upsilon(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \upsilon(A_i) \tag{4.10}$$

**البرهان**

لنبرهن أولاً أنّ التابع $\upsilon$ جمعي منتهٍ. أي أنّه من أجل أي عدد $m \in \mathbb{N}$ يكون:

$$\upsilon\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \upsilon(A_i) \tag{4.11}$$

في الحقيقة، من أجل أي عددطبيعي $N$، يكون لدينا استناداً للمبرهنة (2.6) نجد

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{m} A_i} f_N \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \int_{A_i} f_N \, d\mu$$

ومنه بالانتقال إلى النهاية عندما $N \longrightarrow \infty$، نحصل على المساواة (4.11). لنبرهن الآن الخاصة الجمعية العدودة للتابع $\upsilon$ بما أنّ التابع $\upsilon$ مستمر إطلاقاً فإنّه استناداً إلى المبرهنة (4.2). من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$ بحيث إنّ $\upsilon(E) < \varepsilon \Leftarrow \mu(E) < \delta$ بما أنّ القياس $\mu$ جمعي عدود فإنّ:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu(A) < \infty$$

ولهذا فإنّه يوجد عدد مثل $m \in \mathbb{N}$ بحيث أنّ:

$$\mu\left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=m+1}^{\infty} \mu(A_i) < \delta$$

وعندئذٍ باستخدام الخاصة الجمعية المنتهية للتابع $\upsilon$ نجد:

$$\upsilon(A)=\sum_{i=1}^{m} \upsilon(A_i)+\upsilon\left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty} A_i\right) \tag{4.12}$$

إضافةً إلى أنّ $\varepsilon > \upsilon\left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty} A_i\right) > 0$. لذلك فإنّه من المساواة (4.12) نجد أنّ:

$$\upsilon(A)=\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \upsilon(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \upsilon(A_i)$$

**ملاحظة (4.1)**

تابع المجموعة $\upsilon$ قياس إلا أنّه ليس شـحنة . إذ إنّ $\upsilon(A) \geq 0$ أيـاً كانـت $A \in \mathfrak{R}$.

## § 5 . مكاملة التوابع غير المحدودة ذات الإشارة الكيفية

***Integration of Unbounded Functions with Alternating sign***

كما سبق ، ليكن $\langle X, \mathfrak{R}, \mu \rangle$ فضاء ذا قياس منتهٍ ، وليكن $f$ تابعاً معرفـاً على $X$ ذا قيم حقيقية $\mu-$ منتهياً تقريباً في كـل مكـان علـى $X$. لنـستعرض القسمين الموجب والسالب للتابع $f$:

$$f_+(x) = \max\{f(x),0\} = \frac{|f(x)|+f(x)}{2}$$

$$f_-(x) = -\min\{f(x),0\} = \frac{|f(x)|-f(x)}{2}$$

من الواضح أنّ $f_+, f_-$ تابعان غير سالبين، قيوسان $\mu$ منتهيان تقريبـاً فـي كل مكان. كما أنّ:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_+(x) - f_-(x) \\ |f(x)| &= f_+(x) + f_-(x) \end{aligned} \tag{5.1}$$

ولذلك فإنّ مفهوم قابلية المكاملة المعرف في (الفقرة الرابعة) محقق بالنسبة $f_+ , f_-$ . بالأخذ بعين الاعتبار (5.1)، يكون من الطبيعي أن نعطي التعريف الآتي.

**تعريف (5.1)**

يسمى التابع $f$ جمعياً (قابلاً للمكاملة وفق ليبيغ) على $X$ إذا كان $f_+ , f_-$ جمعيين . ويكون تكامل ليبيغ للتابع $f$ معرفاً بالمساواة.

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = \int_X f\,d\mu \overset{def}{=} \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu \tag{5.2}$$

**مبرهنة (5.1)**

الشرط اللازم والكافي كي يكون التابع القيوس $f$ جمعياً هو أن يكون التابع $|f|$ جمعياً. وفي هذه الحالة يكون:

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d\mu \tag{5.3}$$

**البرهان**

لزوم الشرط : ليكن $f$ جمعياً، أي أن التابعين $f_+ , f_-$ جمعيان. عندئذ استناداً إلى خاصة خطية التكامل (مبرهنة (4.1)) يكون التابع $|f| = f_+ + f_-$ جمعياً. وتبعاً لذلك فإن:

$$\int_X |f|\,d\mu = \int_X f_+\,d\mu + \int_X f_-\,d\mu \tag{5.4}$$

كفاية الشرط : ليكن التابع $|f|$ جمعياً . بما أن :

$$f_+(x) \le |f(x)| \quad \text{و} \quad f_-(x) \le |f(x)|$$

فإنه استناداً للتوطئة (4.2). يكون التابعان $f_+ , f_-$ جمعيين وبالتالي فإن التابع $f$ يكون كذلك. وفقاً لذلك بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (5.4) نجد:

$$\left| \int_X f \; d\mu \right| = \left| \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu \right| \le$$

$$\le \int_X f_+ \, d\mu + \int_X f_- \, d\mu =$$

$$= \int_X |f| \, d\mu \; .$$

**نتيجة (5.1)**

إذا كان $f$ تابعاً قيوساً وكان $(\bmod\ \mu)\quad |f(x)| \le g(x)$، حيث $0 \le g$ تابع جمعي فإن التابع $f$ يكون جمعياً.

للبرهان على ذلك يكفي تطبيق التوطئة (4.2) والمبرهنة (5.1).

إذا كان $f$ تابعاً جمعياً وكانت $A \subset X$ مجموعة قيوسة وكان $\chi_A$ تابعها المميز فإن $\chi_A f$ يكون جمعياً وذلك لأن $|\chi_A(x) f(x)| \le |f(x)|$. ولذلك فإنه من الطبيعي أن نعطي التعريف الآتي:

**تعريف (5.2)**

إذا كانت المجموعة $A \subset X$ قيوسة . وكان التابع $\chi_A f$ جمعياً على $X$. فإن التابع $f$ يسمى جمعياً على $A$ وتكامله عليها يعرف بالمساواة:

$$\int_X f(x) \; d\mu(x) = \int_A f \;\; d\mu \overset{def}{=} \int_X \chi_A f \;\; d\mu$$

من الواضح أنه إذا كان التابع $f$ جمعياً على $X$ فإنه يكون جمعياً على أية مجموعة قيوسة $A \subset X$.

**مبرهنة (5.2) (حول خطية التكامل)**

إذا كان $f$, $g$ تابعين جمعيين و $\alpha$ و $\beta$ من $\mathbb{R}$ فإن التابع $\alpha f + \beta g$ يكون تابعاً جمعياً، كما أن:

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_X f \;\, d\mu + \beta \int_X g \; d\mu \tag{5.5}$$

## البرهان

لنثبت ذلك على مراحل

1- لنبرهن أولاً على جمعية التابع $\alpha f + \beta g$ . من الواضح أن:

$$\left|\alpha f(x)+\beta g(x)\right| \le |\alpha|\left|f(x)\right|+|\beta|\left|f(x)\right| \qquad (5.6)$$

بما أن $f$, $g$ جمعيان فإنه استناداً للمبرهنة (5.1) يكون التابعان $|f|$ , $|g|$ جمعيين . واستناداً للمبرهنة (4.1) يكون الطرف الأيمن من (5.6) تابعاً جمعياً وعندئذٍ يكون $\alpha f + \beta g$ جمعياً (المبرهنة (5.1)).

2- لنبرهن على جمعية التكامل، أي لنبرهن، أنه إذا كان $f$, $g$ جمعيين فإن:

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu \qquad (5.7)$$

بما أن $f+g=(f_+-f_-)+(g_+-g_-)$ و $f+g=(f+g)_+-(f+g)_-$

فإن:

$$(f+g)_+-(f+g)_- = f_+-f_-+g_+-g_-$$

و منه فإن :

$$(f+g)_+ + f_- + g_- = (f+g)_- + f_+ + g_+$$

استناداً إلى الخاصة الخطية لتكامل التوابع غير السالبة نجد:

$$\int_X (f+g)_+\, d\mu + \int_X f_-\, d\mu + \int_X g_-\, d\mu = \int_X (f+g)_-\, d\mu + \int_X f_+\, d\mu + \int_X g_+\, d\mu$$

أو:

$$\int_X (f+g)_+\, d\mu - \int_X (f+g)_-\, d\mu = \int_X f_+\, d\mu - \int_X f_-\, d\mu + \int_X g_+\, d\mu - \int_X g_-\, d\mu$$

3- ليكن $f$ تابعاً جمعياً و $0 \le \alpha$ عندئذٍ يكون : $(\alpha f)_+ = \alpha f_+$ و $(\alpha f)_- = \alpha f_-$.

ولذلك فإن :

$$\int_X \alpha f\, d\mu = \int_X (\alpha f)_+\, d\mu - \int_X (\alpha f)_-\, d\mu = \int_X \alpha f_+\, d\mu - \int_X \alpha f_-\, d\mu$$

بتطبيق المبرهنة $(4.1)$ نجد:

$$\int_X \alpha f \; d\mu = \alpha \int_X f_+ \, d\mu - \alpha \int_X f_- \, d\mu$$

أي أن:

$$\int_X \alpha f \; d\mu = \alpha \int_X f \; d\mu \tag{5.8}$$

4 – لإتمام البرهان يكفي أن نبرهن المساواة $(5.8)$ من أجل $\alpha = -1$ بما أن $(-f)_+ = f_-$ و $(-f)_- = f_+$ فإن:

$$\int_X (-f)\, d\mu = \int_X (-f)_+ \, d\mu - \int_X (-f)_- \, d\mu = \int_X f_- \, d\mu - \int_X f_+ \, d\mu = -\int_X f \; d\mu$$

ليكن $f$ تابعاً مثبتاً وجمعياً على $X$ . من أجل أية مجموعة قيوسة $A \subseteq X$، نضع:

$$\upsilon(A) = \int_A f \; d\mu \tag{5.9}$$

لنبين أن $\upsilon : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ هو تابع جمعي عدود ومستمر إطلاقاً.

**مبرهنة (5.3) (الخاصة الجمعية العدودة للتكامل)**

إن تابع المجموعة $\upsilon$ المعرف بالعلاقة $(5.9)$ هو تابع جمعي عدود. أي إذا كان:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad , \quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad (i \neq j) \quad , \quad A_i \in \mathfrak{R}$$

فإن:

$$\upsilon(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \upsilon(A_i)$$

إضافة إلى أن السلسلة في الطرف الأيمن تتقارب إطلاقاً.

**البرهان**

لنعرف تابعي مجموعة غير سالبين:

$$\upsilon_+(A) = \int_A f_+ \, d\mu \qquad \text{و} \qquad \upsilon_-(A) = \int_A f_- \, d\mu$$

من الواضح أن:

$$\upsilon(A) = \upsilon_+(A) - \upsilon_-(A) \tag{5.10}$$

كما بينا في المبرهنة (4.3). إنّ هذين التابعين جمعيـان عـدودان أي أنهمـا قياسان، ولذلك فإن:

$$\upsilon_-(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\upsilon_-(A_i) \quad \text{و} \quad \upsilon_+(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\upsilon_+(A_i)$$

و منه نجد:

$$\upsilon(A)=\upsilon_+(A)-\upsilon_-(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\upsilon_+(A_i)-\sum_{i=1}^{\infty}\upsilon_-(A_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\upsilon_+(A_i)-\upsilon_-(A_i)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\upsilon(A_i)$$

إضافة إلى أن السلسلة في الطرف الأيمن تتقـارب إطلاقـاً كفـرق سلـسلتين موجبتين.

**ملاحظة (5.1)**

إن المبرهنة المثبتة أعـلاه تبـين أن تـابع المجموعـة $\upsilon(A)$ هـو شـحنة والعلاقة (5.10) هي تمثيل للشحنة على شكل فرق قياسين منتهيين.

**مبرهنة (5.4) (حول الاستمرار المطلق للتكامل)**

إن تابعي المجموعة $\upsilon_+$ , $\upsilon_-$ ( المعرفان فـي المبرهنـة (5.3) ) مـستمران إطلاقاً، فإنه من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ يوجد عدد مثل $\delta>0$ بحيث إنه من أجـل أيـة مجموعة $E\in\mathfrak{R}$ محققة للشرط $\mu(E)<\delta$ يكون:

$$\upsilon_+(E)<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad \upsilon_-(E)<\frac{\varepsilon}{2}$$

باستخدام التقدير (5.3) والمساواة (5.4) نجد:

$$|\upsilon(A)|=\left|\int_A f\,d\mu\right|\le\int_A|f|\,d\mu=$$
$$=\int_A f_+\,d\mu+\int_A f_-\,d\mu=$$
$$=\upsilon_+(A)+\upsilon_-(A)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

## § 6 . الانتقال إلى النهاية في تكامل ليبيغ

***Limit Transition under the Sign of the Lebesgue Integral***

إنّ نظرية الانتقال إلى النهاية تحت إشارة التكامل في تكامل ريمان معروفة جيداً.

إذا كانت متتالية التوابع $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام إلى التابع $f$ على المجال $[a,b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

كما أن التقارب النقطي غير كافٍ للانتقال إلى النهاية إلى تحت إشارة التكامل ليس فقط في تكامل ريمان إنما أيضاً في تكامل ليبيغ . الأمر الذي يبينه المثال الآتي:

**مثال**

ليكن $\mu$ قياس ليبيغ على $\sigma$ – الجبر $\mathfrak{R}$ من المجموعات الجزئية القيوسة وفق ليبيغ من المجال $X=[0,1]$. ولنستعرض متتالية التوابع:

$$f_n(x) = n\,\chi_{[0,1/n]}(x)$$

عندئذ:

$$\int_{[0,1]} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f_n(x)dx = 1$$

إضافة إلى أن:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad ; \quad x \neq 0$$

لذا فإن $f=0 \pmod{\mu}$ وبالتالي فإن:

$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx = 0$$

لنستعرض عدداً من الأمور المتعلقة بإمكانية الانتقال إلى النهاية تحت إشارة التكامل في تكامل ليبيغ في الفضاء $\langle X,\mathfrak{R},\mu\rangle$ ذي القياس المنتهي.

## مبرهنة (6.1) (ليبيغ، حول التقارب المحدود)

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية التوابع الجمعية المتقاربة بالقياس إلى التابع $f$ ولنفـــرض أنه يوجد تابع جمعي $g \ge 0$ بحيث إن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |f_n(x)| \le g(x) \tag{6.1}$$

عندئذٍ يكون التابع $f$ جمعياً ويكون:

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \quad \cdot \tag{6.2}$$

من الطبيعي أن نسمي التابع $g$ بالتابع الجمعي الراجح للمتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

### البرهان

بما أن $f_n \xrightarrow{\mu} f$، فإنه استناداً لمبرهنة ريس توجـد متتاليـة جزئيـة $f_{n_k}$ بحيث إن $f_{n_k} \longrightarrow f \quad (\bmod \mu)$ . واستناداً إلى العلاقة (6.1)، يكون لدينا:

$$(\forall k \in \mathbb{N}) : |f_{n_k}(x)| \le g(x)$$

بالانتقال إلى النهاية في المتراجحة الأخيرة عندما $k \longrightarrow \infty$، نجد :

$$|f(x)| \le g(x) \quad (\bmod \mu)$$

وفقاً للنتيجة (5.1) يكون التابع $f$ جمعياً.

لنبرهن المساواة (6.2) . [illegible] من أجل أي $0<\sigma$.

$$E_n(\sigma) = \{ |f_n - f| \ge \sigma \} \quad \text{و} \quad F_n(\sigma) = \{ |f_n - f| < \sigma \}$$

عندئذٍ :

$$\begin{aligned} \delta_n &= \left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| \le \int_X |f_n - f| \, d\mu \\ &= \int_{E_n(\sigma)} |f_n - f| \, d\mu + \int_{F_n(\sigma)} |f_n - f| \, d\mu \end{aligned} \tag{6.3}$$

بما أن:

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x)| + |f(x)| < 2g(x) \quad (\bmod \mu)$$

فإنه من العلاقة (6.3) ينتج أن:

$$\delta_n \leq 2 \int_{E_n(\sigma)} g \, d\mu + \sigma \, \mu(X) \tag{6.4}$$

من أجل أي $\varepsilon$، لنضع $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{2\mu(x)}$ . بالتالي بالاستفادة من الاستمرار المطلق للتكامل (مبرهنة (4.2))، يوجد عدد مثل $0<\delta$ بحيث إن المتراجحة $\mu(E)<\delta$ تؤدي إلى أن:

$$\int_E g \, d\mu < \frac{\varepsilon}{4}$$

أخيراً، من حقيقة أن $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$ فإنه يوجد عدد مثل $n_0$ بحيث إنه من أجل $n_0 < n$ يكون:

$$\mu\left(E_n(\sigma)\right) = \mu\left(\left\{ \left| f_n - f \right| \geq \sigma \right\}\right) < \delta$$

وعندئذٍ من أجل $n > n_0$ نجد من (6.4) أن:

$$\delta_n < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أي أن $\delta_n \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$.

**ملاحظة**

من الواضح أن مبرهنة ليبيغ تبقى صحيحة إذا تحققت المتراجحة (6.1) بدءاً من رقم ما مثل $n_0$ .

إن المبرهنة الآتية مفيدة في كثير من الحالات:

**مبرهنة (6.2) (توطئة فاتو)**

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من التوابع القيوسة غير السالبة المتقاربة بالقياس إلى التابع $f$، عندئذٍ:

$$\int_X f \, d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \tag{6.5}$$

البرهان

لنلاحظ أولاً أننا لم نفرض أن التوابع $f_n$ جمعية، وبالتالي فإن تكاملات الطرف الأيمن من العلاقة $(6.5)$ (حتى النهاية الدنيا لها) يمكن أن تكون مساوية $+\infty$. سنقدم البرهان على مرحلتين.

**1)** لنبرهن أولاً المتراجحة

$$\int_X f \, d\mu \leq \sup_n \int_X f_n \, d\mu \tag{6.6}$$

بما أن $f_n \xrightarrow{\mu} f$، (فإنه استناداً إلى مبرهنة ريس) توجد متتالية جزئية $f_{n_k} \longrightarrow f \quad (\bmod \mu)$. وعندئذٍ باستعراض مقطع التوابع (انظر§4) من أجل أي $0 < N$، نجد أن:

$$(f_{n_k})_N \longrightarrow (f)_N \qquad (\bmod \mu)$$

إلا أنه عندئذٍ:

$$(\forall x \in X) \ \ (\forall k \in \mathbb{N}) \ : \ 0 \leq (f_{n_k}(x)) \leq N$$

بتطبيق مبرهنة ليبيغ حول التقارب المحدود نجد :

$$\lim_{k \to \infty} \int_X (f_{n_k})_N \, d\mu = \int_X (f)_N \tag{6.7}$$

بالإضافة إلى ذلك، من أجل جميع $k$ و $N$ لدينا:

$$\int_X (f_{n_k})_N \, d\mu \leq \int_X f_{n_k} \, d\mu \leq \sup_k \int_X f_{n_k} \, d\mu$$

بالانتقال إلى النهاية في هذه المتراجحة عندما $n \longrightarrow \infty$، وبالأخذ بعين الاعتبار $(6.7)$نجد:

$$\int_X (f)_N \, d\mu \leq \sup_k \int_X f_{n_k} \, d\mu$$

بالانتقال إلى النهاية عندما $N \longrightarrow \infty$، نجد:

$$\int_X f \, d\mu \leq \sup_k \int_X f_{n_k} \, d\mu$$

الأمر الذي يؤدي إلى المتراجحة المطلوبة $(6.6)$.

2) لنبرهن الآن المتراجحة $(6.5)$. إذا كانت:

$$\varliminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = +\infty$$

فإن البرهان ليس مطلوباً. لذلك سنفرض أن:

$$\varliminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = A < +\infty$$

وفقاً لخواص النهاية الدنيا، من أجل أي $\varepsilon > 0$، توجد متتالية متناقصة من الأدلة مثل $n^1 < n^2 < \ldots$ بحيث إن:

$$\int_X f_{n^j} \, d\mu < A + \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

بما أن $f_{n^j} \xrightarrow{\mu} f$ عندما $j \longrightarrow \infty$، فإنه بتطبيق المتراجحة $(6.6)$ نجد:

$$\int_X f \, d\mu \le \sup_j \int_X f_{n^j} \, d\mu < A + \varepsilon$$

بما أن المتراجحة الأخيرة صحيحة من أجل جميع $\varepsilon > 0$ فإنه بالانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \longrightarrow 0$ نجد المتراجحة المطلوبة $\int_X f \, d\mu \le A$.

**مبرهنة (6.3) (مبرهنة ليڤي)**

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية متناقصة من التوابع القيوسة غير السالبة

$$(\forall x \in X) \quad : \quad 0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots$$

وليكن $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. عندئذ:

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \qquad (6.8)$$

**البرهان**

بما أن $\left\{ \int_X f_n \, d\mu \right\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية عددية غير متناقصة، فإن نهايتها موجودة (منتهية أو غير منتهية). واستناداً إلى توطئة فاتو

$$\int_X f \, d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \qquad (6.9)$$

بالإضافة إلى ذلك، بما أن $f_n(x) \le f(x)$، يكون لدينا

$$\int_X f_n \, d\mu \le \int_X f \, d\mu$$

ومنه بالانتقال إلى النهاية عندما $n \longrightarrow \infty$ نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \le \int_X f \, d\mu \qquad (6.10)$$

من $(6.9)$ و $(6.10)$ تنتج $(6.8)$.

**ملاحظة (6.2)**

من الواضح، من شروط المبرهنة أعلاه، أن $f$ جمعي، فقط وفقط عندما تكون متتالية التكاملات $\left\{\int_X f_n \, d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة .

**نتيجة (6.1)**

إذا كانت $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية من التوابع القيوسة غير السالبة، عندئذٍ:

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X u_k \, d\mu$$

للبرهان يكفي تطبيق مبرهنة ليفي على متتالية المجاميع الجزئية $f_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ .

## § 7 . المكاملة على مجموعة ذات قياس غير منتهٍ

### *Integration over a Set of Infinite Measure*

ليكن $\langle X, \mathfrak{R}, \mu\rangle$ فضاء ذا قياس $\sigma$ – منتهٍ، بحيث إن $\mu(X) = +\infty$ استناداً إلى تعريف القياس الـ $\sigma$ – المنتهي، توجد متتالية غير متناقصة من المجموعات القيوسة $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ بحيث إن $\mu(A_n) < +\infty$ وذلك من أجل جميع $n$ و $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. ليكن $f$ تابعاً قيوساً وليكن $0 \le f(x)$ على $X$. بما أن جميع $A_n$

مجموعات قيوسة لقياس غير منته، فـإن التكـاملات $\int_{A_n} f\, d\mu \le \infty$ موجـودة. مـن الواضح أن:

$$\int_{A_1} f\, d\mu \le \int_{A_2} f\, d\mu \le \dots$$

بذلك، فإن النهاية $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\, d\mu \le +\infty$ موجودة.

**تعريف (7.1)**

إن تكامل ليبيغ للتابع غير السالب القيوس $f$ المعرف على المجموعـة $X$ مـع القياس σ − منتهٍ $\mu$ يعطى بالمساواة:

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\, d\mu \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\, d\mu \tag{7.1}$$

إذا كان $\int_X f\, d\mu < \infty$ فإن $f$ يسمى تابعاً جمعياً (أو قابلاً للمكاملة وفق ليبيـغ) على $X$. لنبين دقة هذا التعريف، أي أنـه، لا يتعلـق باختيـار المتتاليـة المتزايـدة $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. لنـستعرض متتاليـة المجموعـات $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ بحيـث إن $B_n \in \mathfrak{R}$ و $\mu(B_n) < \infty$ و $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X$.

و لنبرهن على أن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\, d\mu \tag{7.2}$$

في الواقع، من أجل أي $m \in \mathbb{N}$، لدينا:

$$B_m = B_m \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = B_m \cap \left(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots\right)$$
$$= (B_m \cap A_1) \cup (B_m \cap (A_2 \setminus A_1)) \cup \dots$$

استناداً إلى الخاصة الجمعية العدودة للتكاملات، نجد:

$$\int_{B_m} f\,d\mu = \int_{B_m\cap A_1} f\,d\mu + \int_{B_m\cap(A_2\setminus A_1)} f\,d\mu + \ldots$$

$$\le \int_{A_1} f\,d\mu + \int_{A_2\setminus A_1} f\,d\mu + \ldots$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{A_1} f\,d\mu + \int_{A_2\setminus A_1} f\,d\mu + \ldots + \int_{A_n\setminus A_{n-1}} f\,d\mu\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f\,d\mu$$

بالانتقال إلى النهاية في طرفي المتراجحة عندما $m \longrightarrow \infty$، نجد:

$$\lim_{m\to\infty}\int_{B_m} f\,d\mu \le \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f\,d\mu$$

بما أنّ المتتاليتين $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متكافئتان، فإنّ المتراجحة المعاكسة صحيحة . الأمر الذي برهن المساواة (7.2) وبالتالي دقة التعريف.

ليكن $f$ تابعاً قيوساً ذا إشارة كيفية. ( كما في§5 ) لنستعرض التابعين غير السالبين $f_-$ ، $f_+$ بحيث إنّ:

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \quad , \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

من الطبيعي الآن أن نعطي التعريف الآتي.

**تعريف (7.2)**

يسمى التابع $f$ جمعياً أو قابلاً للمكاملة وفق ليبيغ علـى $X$، إذا كـان كـلّ من $f_-$ ، $f_+$ جمعياً على $X$، في هذه الحالة ، نضع بالتعريف

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = \int_X f\,d\mu \overset{def}{=} \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu$$

(كما في §5)، فإنّه بسهولة يمكن البرهان على أنّه الشرط اللازم والكـافي كـي يكون التابع القيوس $f$ جمعياً هو أن يكون $|f|$ جمعياً.

جميع الخواص المستعرضة في(5§) تبقى محققة من أجل التكاملات على قياسات σ – منتهية . كما أنّ مبرهنات الانتقال إلى النهاية (ليبيغ ، فاتو ، ليفي) تبقى أيضاً محققة.

**ملاحظة (7.1)**

بسهولة نجد أنه إذا كان $f$ تابعاً قيوساً محدداً فإنّه يمكن ألا يكون جمعياً في حالة القياس σ – المنتهي. كحالة خاصة ، التابع الثابت غير الصفري هو تابع ليس جمعياً.

## § 8 . مكاملة التوابع ذات القيم المركبة (العقدية)

***Integration of Complex – valued Functions***

ليكن $\langle X ,\mathfrak{R},\mu \rangle$ فضاء ذا قياس ( منتهٍ أو σ – منتهٍ ) وليكن $f$ تابعاً ذا قيم عقدية معرفاً في $X$، $f :X \longrightarrow \mathbb{C}$ عندئذٍ يمكن أن نكتب:

$$f(x)=u(x)+iv(x) \quad , u(x)=\mathrm{Re}f(x), v(x)=\mathrm{Im}f(x)$$

**تعريف (8.1)**

يسمى التابع ذو القيم العقدية قيوساً إذا كان كل من قسميه الحقيقي والتخيلي قيوساً . لنستعرض التابع القيوس $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$، أي أنّ كلاً من $\mathrm{Re}f ,\mathrm{Im}f$ قيوس. من الطبيعي أن نعرف تكامل ليبيغ للتابع ذي القيم العقدية بالعلاقة:

$$\int_X f\, d\mu \overset{def}{=} \int_X \mathrm{Re}f\, d\mu + i\int_X \mathrm{Im}f\, d\mu \qquad (8.1)$$

حيث قد يكون كل من حدي الطرف الأيمن منتهياً أو غير منتهٍ.

**تعريف (8.2)**

يسمى التابع ذو القيم العقدية جمعياً إذا كان كل من قسميه الحقيقي والتخيلي جمعياً.

من الواضح أن جميع الخواص الأساسية لتكامل ليبيغ وجمعية التوابع يمكن أن تعمم إلى حالة التوابع ذات القيم العقدية. بشكل خاص ،الشرط اللازم والكافي كي يكون التابع $f$ جمعياً هو أن يكون التابع $|f|$ جمعياً . في هذه الحالة

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu \qquad (8.2)$$

ولنبرهن صحة المتراجحة الأخيرة. لنضع $\alpha = -\arg \int_X f \, d\mu$ باستخدام العلاقة $(8.1)$نجد:

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| = e^{i\alpha} \int_X f \, d\mu = \int_X \left(e^{i\alpha} f\right) d\mu =$$

$$= \int_X \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} f\right) d\mu + i \int_X \operatorname{Im}\left(e^{i\alpha} f\right) d\mu$$

بما أن الطرف الأيمن يجب أن يكون حقيقياً، فإنّ الحد الثاني يجب أن يكون مساوياً الصفر، لذلك فإن:

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| = \int_X \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} f\right) d\mu \leq \int_X \left|\operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} f\right)\right| d\mu = \int_X |f| \, d\mu$$

## § 9 . تكامل ليبيغ – استلجس وعلاقته بتكامل ريمان – استلجس

***The Lebesgue – Stieltjes Integral and Its Relation to the Riemann – Stieltjes Integral***

ليكن $g$ تابعاً مستمراً من اليسار غير متناقص معرفاً على المجال $[a,b]$. إنّ هذا التابع كما هو معروف، يعرف قياساً منتهياً $\mu_g$ على $\sigma$ – جبر المجموعات الجزئية البوريلية من المجال $[a,b]$، والذي يسمى قياس ليبيغ – استلجس. يسمى تكامل ليبيغ، المبني بهذا القياس، بتكامل ليبيغ – استلجس ويرمز له بـ

$$\int_a^b f(x) \, d\mu_g(x) = \int_a^b f \, d\mu_g = \int_a^b f(x) \, dg(x)$$

في حالة خاصة، إذا كان $g$ تابع قفزة، فإن $\mu_g$ قياس نقطي وعندئذ تكامل ليبيغ – استلجس يعطى بالمجموع:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \sum_k f(c_k)\,\Delta_g(c_k) \qquad (9.1)$$

حيث يؤخذ المجموع فوق $c_k$ جميع نقاط انقطاع التابع $g$ و $\Delta_g(c_k)$ التي تمثل قفزات التابع $g$ عند تلك النقاط.

ليكن الآن $g$ تابعاً ذا تغير محدود مستمر من اليسار على $[a,b]$. عندئذٍ يمكن أن يمثل $g$ كفرق تابعين غير متناقصين على $[a,b]$ ومستمرين من اليسار.

$$g(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

لذا، من الطبيعي أن نعرف تكامل ليبيغ – استلجس للتابع $g$ بالمساواة:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) \overset{def}{=} \int_a^b f(x)\,d\varphi(x) - \int_a^b f(x)\,d\psi(x) \qquad (9.2)$$

لندرس العلاقة بين تكامل ليبيغ – استلجس وتكامل ريمان – استلجس المعروف جيداً في التحليل. بغية ذلك لنتذكّر بتعريفه، ليكن $g$ تابعاً ذا تغير محدود ومستمر من اليسار معرفاً على المجال $[a,b]$ و $f$ تابعاً ما. لتكن $\pi$ تجزئة للمجال $[a,b]$، أي أن:

$$\begin{aligned} &\pi : a < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \\ &\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad , \quad |\pi| = \max \Delta x_k \end{aligned} \qquad (9.3)$$

ولنختر $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$، ولنبن مجاميع تكامل ريمان– استلجس بأن نضع:

$$S(f,g,\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left[ g(x_{k+1}) - g(x_k) \right] \qquad (9.4)$$

إذا تقاربت تلك المجاميع التكاملية ( عندما $|\pi| \longrightarrow 0$ ) إلى نهاية منتهية مستقلة عن التجزئة واختيار النقاط $\xi_k$، فإن تلك النهاية تسمى بتكامل ريمان – استلجس للتابع $f$ وفق التابع $g$.

$$\lim_{|\pi|\to 0} S(f,g,\pi) = \int_a^b f(x)\,dg(x) \qquad (9.5)$$

للتمييز بين تكامل ريمان – استلجس وتكامل ليبيغ – استلجس، تسبق التكامل بحروف موافقة.

**مبرهنة (9.1)**

إذا كان $f$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$، فإن تكامل ليبيغ – استلجس للتابع $f$ على التابع $g$ موجود ويكون :

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (\mathscr{L}-S)\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

**البرهان**

لنستعرض متتالية تجزئات ما $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ من الشكل (9.3) و $|\pi_n| \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$ . لنختر، من أجل كل تجزئة، النقاط $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ ولنأخذ متتالية التوابع البسيطة

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\chi_{[x_k, x_{k+1}]}(x)$$

استناداً لتعريف تكامل ليبيغ للتابع البسيط ( انظر§1) فإنه من العلاقة (9.4) نجد:

$$S(f, g, \pi_n) = (\mathscr{L}-S)\int_a^b f_n(x)\,dg(x) \tag{9.6}$$

أضف إلى ذلك ، بما أنّ $f$ مستمر على المجال $[a,b]$، فإنّ المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب بانتظام إلى التابع $f$ على $[a,b]$ . لذلك بالانتقال إلى النهاية في طرفي العلاقة (9.6) وبالأخذ بعين الاعتبار (9.5) نجد:

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{n\to 0} S(f, g, \pi_n) =$$

$$= \lim_{n\to 0}(\mathscr{L}-S)\int_a^b f_n(x)\,dg(x) =$$

$$= (\mathscr{L}-S)\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

## § 10 . الفضاءات $L^p(\mu)$ Spaces $L^p(\mu)$

سنستعرض في هذه الفقرة تعريف وبعض الخواص الأساسية لفضاء التوابع القابلة للمكاملة من المرتبة $P$.

**تعريف (10.1)**

ليكن $(X, \Re, \mu)$ فضاء ذا قياس ، وليكن $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ تابعاً قيوساً قابلاً للمكاملة بالنسبة لقياس ليبيغ $\mu$. لنرمز لمجموعة جميع التوابع القيوسة بالنسبة للقياس $\mu$ والتي من أجلها $|f|^p$ قابلاً للمكاملة على $X$ من أجل $1 \leq P < \infty$ بالرمز $L^p(\mu)$ أو اختصاراً $L^p$ . في حالة خاصة، من أجل $P=2$ فإننا نحصل على فضاء التوابع القابلة للمكاملة بالتربيع $L^2$، أي أننا نقول إنّ التابع $f(x)$ قابلٌ للمكاملة بالتربيع على $X$ إذا كان:

$$\int_X f^2(x)\, d\mu < \infty$$

لنستعرض الآن بعض الخواص الأساسية لتلك التوابع:

1- جداء تابعين قابلين للمكاملة بالتربيع هو تابع قابل للمكاملة بالتربيع ، إنّ البرهان ينتج مباشرة من المتراجحة

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$$

ومن خواص تكامل ليبيغ

2- كل تابع $f(x)$ قابل للمكاملة بالتربيع هو تابع قابل للمكاملة.

في الواقع ، يكفي أن نضع $g(x) \equiv 1$ في الخاصة $(1)$.

3- مجموع تابعين من الفضاء $L^2$ هو أيضاً من الفضاء $L^2$. إنّ هذا الأمر ينتج من:

$$(f(x)+g(x))^2 \leq f^2(x)+2|f(x)g(x)|+g^2(x)$$

4- إذا كان $f(x) \in L^2$ وكان $\alpha$ عدداً ما ، فإنّ $\alpha f(x) \in L^2$.

إذا كان $f \in L_2$ ، فإنّ:

$$\int \left( \alpha f\left( x \right) \right)^2 d\mu = \alpha^2 \int f^2(x)\, d\mu < \infty$$

**تعريف (10.2)**

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من التوابع القيوسة والقابلة للمكاملة مــن المرتبــة $P$ (أي أنّ $f_n \in L^P$ ) وليكن $f$ تابعاً من الفضاء $L^P$. نقــول إنّ المتتاليــة $\{f_n\}$ تتقارب بالوسط من المرتبة $P$ من التابع $f$ إذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = 0$$

وتكتب

$$f_n \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{m^P} f \qquad \text{أو} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n = f \quad (m^P)$$

إذا كانت $P = 1$ فإننا نقول إنّ المتتالية $\{f_n\}$ تتقارب بالوسط من التابع $f$.

إذا كانت $P = 2$ فإننا نقول إنّ المتتالية $\{f_n\}$ تتقارب بالوسط التربيعي من $f$.

سنستعرض فيما يأتي علاقة التقارب بالوسط وبين التقاربات الأخرى.

**مبرهنة (10 .1)**

إذا كانت $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من الفضاء $L^P$ متقاربة بالوسط مــن المرتبــة $P$ إلى التابع $f$ فإنّ $\{f_n\}$ تتقارب بالقياس $\mu$ إلى التابع $f$.

**البرهان**

ليكن $0 < \sigma$ ولنستعرض المجموعات

$$E_n = \left\{ x : \left| f_n(x) - f(x) \right| \geq \sigma \right\} \quad , \forall n \geq !$$

عندئذٍ، نجد:

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \geq \int_{E_n} |f_n - f|^p d\mu \geq \sigma^p \mu(E_n)$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \leq \frac{1}{\sigma^p} \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = 0$$

أي أنّ:

$$f_n \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{\mu} f$$

**مبرهنة (10.2)**

إذا كانت $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من التوابع المتقاربة بالوسط التربيعي إلى التابع $f(x)$ ، فإنّه يمكن فصل متتالية جزئية منها $\{f_{n_k}(x)\}$ تتقارب تقريباً في كل مكان إلى التابع $f(x)$ ذاته . انظر البرهان [ 6 ]

لنستعرض الآن المثال الآتي الذي يبين طبيعة العلاقة بين التقارب بالوسط من المرتبة $P$ وبين التقارب بانتظام.

**مثال**

ليكن $X = \mathbb{R}$ وليكن $\mu$ قياس ليبيغ $\mathbb{R}$ . إنّ المتتالية $\{f_n\}$ التي

$$f_n = n^{-\frac{1}{p}} \chi_{[0,n]} \quad ; \quad n \geq 1$$

تتقارب بانتظام إلى الصفر على $\mathbb{R}$ . في الواقع لدينا:

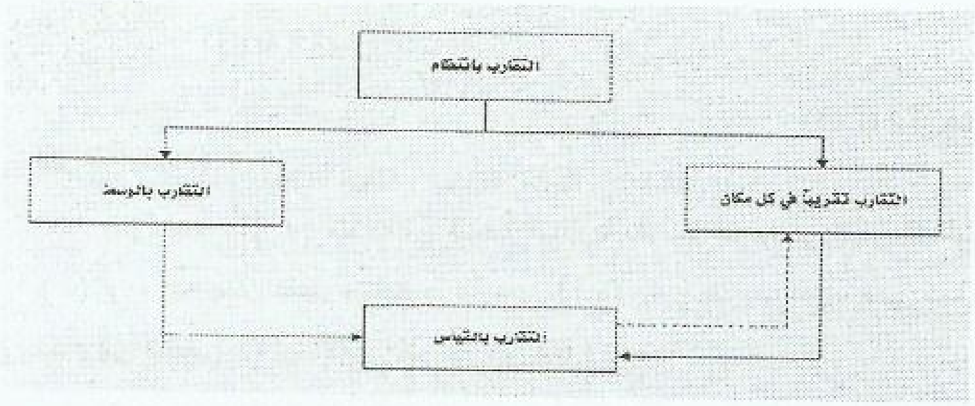
$$f_n \leq n^{-\frac{1}{p}} \quad ; \quad \forall n \geq \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

من ناحية ثانية

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n|^p d\mu = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mu([0,n]) = 1 \underset{n \to \infty}{\nrightarrow} 0$$

أي أنّ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ لا تتقارب بالوسط من المرتبة $P$ إلى التابع الصفري. إلا أنّها تتقارب بانتظام إلى ذلك التابع .

يمكن تمثيل العلاقة بين أنواع التقاربات لمتتالية من التوابع بالمخطط الآتي:




## متراجحتا هولدر ومينكوفسكي

تعتبر متراجحتا هولدر ومينكوفسكي من أهم المتراجحات في الفضاء $L^p$ .

### متراجحة هولدر

ليكن $1 < p , q < \infty$ بحيث إنّ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ، وليكن $f$ , $g$ تابعين قيوسين وليكن $| f |^p$ , $| g |^p$ قابلين للمكاملة بالنسبة للقياس $\mu$ . عندئذٍ يكون $f . g$ قابلاً للمكاملة ويكون:

$$\int_A | f . g | d\mu \leq \left( \int_A | f |^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_A | g |^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

وذلك أياً تكن المجموعة القيوسة $A$.

### البرهان

ليكن $\alpha > 0$. ولنعرف التابع $f$ على المجال $[ 0 , \infty [$ بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q} - \alpha x$$

من الواضح ، أنّ التابع $f$ يملك قيمة صغرى عند الصفر ، أي أنّ:

$$f(0) \leq f(x) \quad ; \quad \forall x \geq 0$$

وبالتالي:
$$0 = f(0) \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q} - \alpha x$$

أي أنّ:

$$\alpha x \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q} \qquad ; \forall x \geq 0$$

ليكن:

$$\gamma = \left( \int_A | g |^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \;, \; \beta = \left( \int_A | f |^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

من الواضح، أنّه إذا كان $\beta = 0$ ( أو $\gamma = 0$ ) فإنّ $f \equiv 0 \pmod{\mu}$ وبالتالي فإنّ المتراجحة تكون محققة. لنفرض أنّ $\beta, \gamma > 0$ ولنضع من أجل $A \ni y$

$$x = \frac{|f(x)|}{\beta} \qquad , \qquad \alpha = \frac{|g(y)|}{\gamma}$$

عندئذٍ نجد:

$$\frac{|f(y) . g(y)|}{\beta\gamma} \leq \frac{|f(y)|^p}{\beta^p . p} + \frac{|g(y)|^q}{\gamma^q q}$$

أي أنّ $g . f$ قابلة للمكاملة على $A$. أضف إلى أنّ:

$$\int_A \frac{|f . g|}{\beta\gamma} d\mu \leq \frac{\int_A |f|^p d\mu}{\beta^p . q} + \frac{\int_A |g|^q d\mu}{\gamma^q . q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

أي أنّ:

$$\int_A | f . g | d\mu \leq \left( \int_A |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_A |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

**ملاحظة**

من أجل $p = q = 2$ نحصل على متراجحة شوارتز

$$\left( \int_A | f . g | d\mu \right)^2 \leq \left( \int_A |f|^2 d\mu \right) \left( \int_A |g|^2 d\mu \right)$$

### ملاحظة

نسمي العددين $p$ , $q$ اللذين من أجلهما يكون:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad (p+q=pq)$$

بعددين مترافقين أسياً.

### متراجحة مينكو فسكي

إذا كان $p \geq 1$ وكان $f$ , $g$ تابعين قيوسين، وكان $|f|^p$ , $|g|^p$ تابعين قيوسين للمكاملة، فإنّ $|f+g|^p$ قابلاً للمكاملة و:

$$\left(\int_A |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_A |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

وذلك أياً تكن المجموعة القيوسة $A$.

### البرهان

من الواضح أنّه من أجل $p=1$ فإنّ المتراجحة محققــة. لنفــرض أنّ $p>1$ عندئذٍ تكون $|f+g|^p$ قابلة للمكاملة، إذا إنّه في الواقع لدينا:

$$|f(x)+g(x)|^p \leq 2\max\{|f(x)|,|g(x)|\} \quad , \quad \forall x \in X$$

أي أنّ:

$$|f(x)+g(x)|^p \leq \max_{x\in X}\left\{2^p.|f(x)|^p \,,\; 2^p|g(x)|^p\right\}$$
$$\leq 2^p\left(|f(x)|^p,|g(x)|^p\right)$$

كما أنّه من الواضح أنّ:

$$\int_A |f+g|^p d\mu = \int_A |f+g|.|f+g|^{p-1} d\mu$$
$$\leq \int_A |f|.|f+g|^{p-1} d\mu + \int_A |g|.|f+g|^{p-1} d\mu$$

استناداً إلى متراجحة هولدر نجد أنّ:

$$\int_A |f+g|^p \, d\mu \leq \left( \int_A |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_A |f+g|^{pq-q} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left( \int_A |g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_A |f+g|^{pq-q} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

بمـــا أنّ $p\,q - q = p$ . فإنّــــه بقـــسمة طرفـــي المتراجحـــة الأخيـــرة على $\left( \int_A |f+g|^{pq-q} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \neq 0$ نحصل متراجحة مينكوفسكي.

## مسائل وتمارين الفصل الثالث

1 - ليكن $X = [a, b]$، وليكن $\mathfrak{M}$ قياس ليبيغ، أوجد:

$$a) \quad \int_X \chi_{\mathbb{Q}}(x) \; dx$$

$$b) \quad \int_X e^{-[x]} \; dx$$

2 - أوجد $(\mathscr{L}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$ لكل من التابعين:

$$a) \quad f(x) = \sin x$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \; x \in \mathbb{Q} \\ \cos x & ; \; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

هل التابع الوارد في $(b)$ قابلاً للمكاملة وفق ريمان على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ؟

3 - احسب $(\mathscr{L}) \int_A f(x)\, d\mu$ لكل من التابعين:

$$a) \quad \int_{[-3,3]} sign \quad \cos \pi x \, d\mu$$

$$b) \quad \int_{[0,1]} sign \quad \sin \frac{\pi}{x} \, d\mu$$

4 - ليكن $\langle X, \mathfrak{R}, \mu \rangle$ فضاء ذا قياس منتهٍ، برهن أنّ التابع $y = f(x) \; ; \; x \in X$ قابلاً للمكاملة على $X$، إذاً وفقط إذا، تقاربت السلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \; \mu \left\{ x \in X \; \middle| \; k \leq f(x) < k+1 \right\}$$

5 - ليكن $\langle X, \mathfrak{R}, \mu \rangle$ فضاء ذا قياس منتهٍ، وليكن $y = f(x)$ حيث $x \ni X$ تابع قيوس على $X$، برهن أنّ:

$$\int_X f(x)\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} \mu \left\{ X \ni x \; \middle| \; \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \right\}$$

6 - لتكن المجموعة $A=[0,1]$ وليكن $f$ تابعاً يأخذ على $A_n=\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$ القيمة $\frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ مع $k=0,1,\ldots$ ماهي قيم $\alpha$ التي من أجلها يكون التابع $f$ قابلاً للمكاملة على $[0,1)$ بالنسبة لقياس ليبيغ $\mu$.

7 - استخدم تعريف تكامل ليبيغ في حساب:

$$\int_{[0,1]} x\ \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\ d\mu$$

# الفصل الرابع

# القياسات في فضاءات الجداء ونظرية فوبيني

***Measures in the products of Spaces***
***Fubini Theorem***

بينا في هذا الفصل كيفية تزويد الجداء الديكارتي لفضاءين أو لعدة فضاءات ذات قياس بقياس وإن النتيجة الأساسية لهذا الفصل هي مبرهنة فوبيني حول إرجاع التكامل المضاعف إلى تكامل مكرر كما ذكرت أمثلة تبين جوهر شروط مبرهنة فوبيني.

## §1. الجداء المباشر للفضاءات القيوسة

***Direct product of Measurable Spaces***

ليكن $(X, \mathfrak{M})$ و $(Y, \mathfrak{N})$ فضائين قيوسين ، أي مجموعتين زودتا بـ $\sigma$ – جبر من المجموعات الجزئية "مجموعات قيوسة". كما هو معلوم، يعرف الجداء المباشر (الديكارتي) لمجموعتين $X$ , $Y$ على أنّه مجموعة جميع الأزواج المرتبة $\langle x, y \rangle$، أي أنّ:

$$X \times Y = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in X, y \in Y \}$$

سنعرف على الجداء المباشر بنية الفضاء القيوس . لتكن $A$ , $B$ مجموعتين جزئيتين قيوستين من $X$ , $Y$، على الترتيب، أي أنّ $A \in \mathfrak{M}$ , $B \in \mathfrak{N}$. يسمى الجداء المباشر

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \in X \times Y \mid A \in \mathfrak{M} , B \in \mathfrak{N} \}$$

بمستطيل ذي الضلعين $A, B$ .

لنرمز بـ $\mathfrak{M} * \mathfrak{N}$ لجبر المجموعات الجزئية من $X \times Y$ المولّد بجملة جميع المستطيلات. إنّ $\mathfrak{M} * \mathfrak{N}$ يشكل جبراً ، بشكل عام ، ليس $\sigma$ – جبراً.

بسهولة نجد أنّ $\mathfrak{N} * \mathfrak{M}$ يتألف من جميع الاجتماعات المنتهية لمستطيلات ذات أضلاع قيوسة منفصلة مثنى مثنى.

لنرمز لـ $\sigma$ – جبر المجموعات الجزئية من $X \times Y$ المولّدة بجميع المستطيلات بالرمز $\mathfrak{N} \times \mathfrak{M}$ . ويسمى بالجداء المباشر لـ $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ .

ونسمي المجموعات الجزئية من $X \times Y$ والمنتمية إلى $\sigma$ – الجبر $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ بمجموعات قيوسة – بذلك نكون، قد زودنا الجداء المباشر $X \times Y$ ببنية فضاء قيوس. يسمى هذا الفضاء القيوس بالجداء المباشر للفضائين القيوسين، أي:

$$\langle X, \mathfrak{M} \rangle \times \langle Y, \mathfrak{N} \rangle = \langle X \times Y, \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \rangle$$

**مثال (1)**

ليكن $X = Y = \mathbb{R}$ المستقيم الحقيقي وليكن $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = \mathfrak{B}$ $\sigma$ – جبر جميع المجموعات الجزئية البوريلية من المستقيم الحقيقي . بسهولة نرى أنّه، في هذه الحالة

$$\langle \mathbb{R}, \mathfrak{B} \rangle \times \langle \mathbb{R}, \mathfrak{B} \rangle = \langle \mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2) \rangle$$

حيث $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$ $\sigma$– جبر المجموعات الجزئية البوريلية من المستوي.

**تعريف (1.1)**

لتكن $E$ مجموعة جزئية ما من الجداء المباشر $X \times Y$ ولتكن $x \in X$ نقطة ما. إنّ مقطع المجموعة $E$ بالنقطة $x$ (أو الـ $x$– مقطع لـ $E$) يعرف بالمجموعة.

$$E_x = \{ y \in Y \mid \langle x, y \rangle \in E \} \subseteq Y$$

بشكل مماثل، من أجل $y \in Y$ مثبتة ، يعرف $y$– مقطع للمجموعة $E$ والذي نرمز بـ $E^y$ بالمجموعة

$$E^y = \{ x \in X \mid \langle x, y \rangle \in E \}$$

نلاحظ أنّ مقاطع المجموعة $E \subset X \times Y$ هي مجموعات جزئية من $X$ أو $Y$ على الترتيب، إلا أنّها ليست مجموعات جزئية من $X \times Y$.

**مثال (2)**

لتكن $A \subseteq X$ , $B \subseteq Y$ . وليكن المستطيل $E = A \times B$. عندئذ:

$$E_x = \begin{cases} B & ; \ x \in A \\ \varnothing & ; \ x \notin A \end{cases} \quad , \quad E^y = \begin{cases} A & ; \ y \in B \\ \varnothing & ; \ y \notin B \end{cases}$$

**توطئة (1.1)**

كل مقطع من مجموعة قيوسة قيوس.

**البرهان**

لتكن $E$ مجموعة جزئية قيوسة من $X \times Y$، أي أنّ $E \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ .

لنبرهن أنّه من أجل جميع $x \in X$ , $y \in Y$ المجموعتان $E_x$ , $E^y$ قيوستان. أي أنّ $E^y \in \mathfrak{M}$ , $E_x \in \mathfrak{N}$ . من أجل هذا لنبرهن قيوسية $E_x$، أما قيوسية $E^y$ فتتم بشكل مماثل.

لنرمز بـ $\mathfrak{A}$ لمجموعة جميع المجموعات القيوسة $E \subseteq X \times Y$ الـ $x$- مقاطع.

بسهولة نجد أنّ $\mathfrak{A}$ يشكل $\sigma$ - جبراً. إنّ هذا الأمر ينتج من حقيقة أنّ:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)_x = \bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i)_x \quad ; \ (E_i \subseteq X \times Y), (\hat{E})_x = \hat{E}_x \ ; \ (E \subset X \times Y)$$

ليكن $E = A \times B$ مستطيلاً ما ذا ضلعين قيوسين. عندئذ المجموعة $E_x$ إما هي المجموعة $B$ أو المجموعة الخالية (انظر المثال 2). أي أنّ $E_x$ قيوسة من أجل أي $x \in X$. وبالتالي فإنّ $E \in \mathfrak{A}$.

بما أنّ $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ الـ $\sigma$ - الجبر الأصغري الحاوي لجميع المستطيلات ذات الأضلاع القيوسة ، فإننا نجد أنّ $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$ .

**تعريف (1.2)**

ليكن $f(x, y)$ تابعاً ذا قيم حقيقية معرفاً على المجموعة $E \subseteq X \times Y$ ولتكن $x \in X$ نقطة مثبتة. يسمى التابع $f_x$ المعرف على المجموعة $E_x$ بالمساواة:

$$f_x(y) = f(x,y) \qquad ; \qquad (y \in E_x)$$

بمقطع التابع $f$ بالنقطة $x$ أو الـ $x$- مقطع للتابع $f$.

بشكل مشابه يعرف $f^y$ مقطع التابع $f$ بالنقطة $y$ أو الـ $y$- مقطع للتابع $f$ بالمساواة:

$$f^y(x) = f(x,y) \qquad ; \qquad (x \in E^y)$$

**توطئة (1.2)**

كل مقطع لتابع قيوس $f$ هو تابع قيوس .

**البرهان**

ليكن $f(x,y)$ تابعاً قيوساً، أي أنّ $f$ قيوس بالنسبة لـ $\sigma$ - الجبر $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ لنبرهن على قيوسية المقطع $f_x$ بالنسبة لـ $\sigma$ - الجبر $\mathfrak{N}$ من أجل أي $x \in X$، وعلى قيوسية المقطع $f^y$ بالنسبة لـ $\sigma$ - الجبر $\mathfrak{M}$ من أجل أي $y \in Y$. لنبرهن ، على سبيل المثال ، قيوسية $f_x$.

بما أنّ قيوسية التابع $f(x,y)$ تعني أنّه من أجل جميع $a \in \mathbb{R}$:

$$\{ \langle x,y\rangle \in X\times Y \mid f(x,y) < a \} \in \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$$

لنبين أنّه من أجل أي $x \in X$ يكون $f_x$ قيوساً، أي أنّه من أجل أي $a \in \mathbb{R}$:

$$\{ y \in Y \mid f_x(y) < a \} \in \mathfrak{N}$$

إنّ هذا الأمر ينتج من المساواة :

$$\{ y \in Y \mid f_x(y) < a \} = \{ \langle x,y\rangle \in X\times Y \mid f(x,y) < a \}_x$$

استناداً للتوطئة (1.1)، ينتمي الـ $x$- مقطع لمجموعة ما من $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ إلى $\mathfrak{N}$.

## § 2 . جداء القياسات Product of Measures

ليكن $\langle X , \mathfrak{M} , \mu \rangle$ , $\langle Y , \mathfrak{N} , \upsilon \rangle$ فضائين ذوي قياس. لنبين كيف يمكن أن نعرف قياساً على الجداء المباشر $\langle X \times Y , \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \rangle$. من الطبيعي أن نفــرض أنّ $\lambda$ مستطيل قيوس معرّف بالمساواة:

$$\lambda(A \times B) = \mu(A) . \upsilon(B)$$

ولنبرهن أنّ هذا الشرط يعرف قياساً $\lambda$ وبشكل وحيــد . لنــبنِ القيــاس $\lambda$، لنعرفه أولاً على الجبر $\mathfrak{M} * \mathfrak{N}$ ولنمدده على $\sigma -$ الجبر $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.

**مبرهنة (2.1)**

ليكن $\langle X , \mathfrak{M} , \mu \rangle$ , $\langle Y , \mathfrak{N} , \upsilon \rangle$ فضائين ذوي قياسين منتهيين ، ولتكن $E$ مجموعة قيوسة ما من $X \times Y$ (أي أنّ $E \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$) عندئــذٍ يكــون التابعــان $f , g$ المعرفان على $X , Y$ على الترتيب بالعلاقتين:

$$f(x) = \upsilon(E_x) \quad , \quad g(y) = \mu(E^y)$$

قيوسين، ويكون:

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_Y g(y)\, d\upsilon(y) \tag{2.1}$$

لنرمز بـــ $\mathfrak{A}$ لمجموعة جميع المجموعات $E \subseteq X \times Y$ والمحققة لــشروط المبرهنة (2.1) . لنبرهن أولاً أنّ $\mathfrak{A}$ تحتوي على جميع المستطيلات القيوسة . لــتكن $E = A \times B$ مستطيلاً قيوساً غير خالٍ. أي أنّ، $A \in \mathfrak{M}$ و $B \in \mathfrak{N}$ عندئذٍ (انظــر المثال 2 ) يكون:

$$f = \upsilon(B)\chi_A \quad , \quad g = \mu(A)\chi_B$$

بذلك نجد أنّ $f , g$ قيوسان، وأنّ:

$$\int_X f\, d\mu = \int_X \upsilon(B)\chi_A\, d\mu = \upsilon(B) . \mu(A)$$

و

$$\int_Y g\,d\upsilon = \int_Y \mu(A)\,\chi_B\,d\upsilon = \mu(A)\,.\,\upsilon(B)$$

أي أنّ $A \times B \in \mathfrak{A}$.

لنبين الآن أنّ $\mathfrak{M} * \mathfrak{N} \in \mathfrak{A}$. ليكن $E \in \mathfrak{M} * \mathfrak{N}$، أي أنّ $E$ اجتماع منتهٍ لمستطيلات قيوسة منفصلة مثنى مثنى، $E = \bigcup_{j,k} A_j \times B_k$ عندئذ:

$$f(x) = \upsilon(E_x) = \sum_{j,k} \upsilon(B_k)\,\chi_{A_j}(x)$$

$$g(y) = \mu(E^y) = \sum_{j,k} \mu(A_j)\,\chi_{B_k}(y)$$

بذلك نجد أنّ $f$ , $g$ قيوسان وأنّ:

$$\int_X f\,d\mu = \int_Y g\,d\upsilon = \sum_{j,k} \mu(A_j)\,\upsilon(B_k)$$

أي أنّ $E \in \mathfrak{A}$ وبالتالي $\mathfrak{M} * \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$.

بملاحظة أنّ $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ هو الـ $\sigma$ – جبر المولّد بالجبر $\mathfrak{M} * \mathfrak{N}$ فإنّه استناداً للمبرهنة $(1.7)$ (الفصل الأول) نجد أنّ $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ يتطابق مع الصف المطرد الأصغري المولّد بالجبر $\mathfrak{M} * \mathfrak{N}$.

لنبرهن الآن أنّه إذا كان $\mathfrak{A}$ صفاً مطرداً، فإنّ $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$. بغية ذلك لنبين أنّه إذا كانت $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ متتالية مطردة من مجموعات الصف $\mathfrak{A}$. فإنّ $\lim_{j \to \infty} E_j \in \mathfrak{A}$. لنستعرض، على سبيل المثال، المتتالية غير المتناقصة $E_1 \subset E_2 \subset \ldots ;\ E_j \in \mathfrak{A}$ ولنبرهن أنّ $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathfrak{A}$.

لنفرض أنّ:

$$f_j(x) = \upsilon(E_{j_x}) \qquad , \qquad g_j(y) = \mu(E_j^y)$$

بما أنّ $E_j \in \mathfrak{A}$ فإنّ $f_j$ , $g_j$ قيوسة من أجل جميع $j$.

كما أنّ:

$$\int_X f_j\,d\mu = \int_Y g_j\,d\upsilon \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

استناداً إلى مبرهنة استمرار القياس نجد:

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \lim_{j\to\infty} \upsilon\left(E_{j_x}\right) = \upsilon\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{j_x}\right) = \upsilon\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)_x\right) = \upsilon(E_x) = f(x)$$

بشكل مماثل، نجد أنّ:

$$\lim_{j\to\infty} g_j(y) = g(y) = \mu\left(E^y\right)$$

وأنّ $g, f$ قيوسان كنهاية لتوابع قيوسة.

بما أنّ المتتاليتين $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ ، $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ غير متناقصتين، فإنّه باستخدام مبرهنة ليڤي وبالانتقال إلى النهاية في (2.2). نجد:

$$\int_X f\, d\mu = \int_Y g\, d y$$

أي أنّ $E^x \in \mathfrak{A}$. بشكل مشابه، يمكن أن نبرهن أنّ $\mathfrak{A}$ يحتوي على نهاية متتالية غير متناقصة من المجموعات. (انظر التمرين (3.6.4) من [2]). أي أنّ $\mathfrak{A}$ صف مطرد.

**مبرهنة (2.2)**

ليكن $\langle X, \mathfrak{M}, \mu\rangle$ و $\langle Y, \mathfrak{N}, \upsilon\rangle$ فضائين ذوي قياسين منتهيين. عندئذ يكون تابع المجموعة $\lambda$ المعرّف على المجموعة $E \in \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ بالمساواة:

$$\lambda(E) = \int_X \upsilon(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\upsilon(y) \tag{2.3}$$

قياساً منتهياً. ومن أجل أي مستطيل قيوس $A\times B$ يكون:

$$\lambda(A\times B) = \mu(A).\upsilon(B) \tag{2.4}$$

إنّ الشرط (2.4) يعرف التابع $\lambda$ بشكل وحيد.

**البرهان**

لنبرهن أنّ $\lambda$ قياس، بغية ذلك يكفي أن نبرهن أنّ $\lambda$ جمعي عدود. (من الواضح أنّ محدودية وإيجابية $\lambda$ ، $\lambda(\varnothing)=0$ محققة ).

لتكن:

$$E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \quad \text{و} \quad E_i \cap E_j = \varnothing \qquad (i \neq j)$$

عندئذٍ ، استناداً إلى الخاصة الجمعية العدودة للقياس $\upsilon$، نجد:

$$\lambda\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\dot{\bigcup}}} E_n\right) = \int_X \upsilon\left(\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\dot{\bigcup}}} E_n\right)_x\right) d\mu(x)$$

$$= \int_X \upsilon\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\dot{\bigcup}}} (E_n)_x\right) d\mu(x)$$

$$= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon\left((E_n)_x\right) d\mu(x)$$

باستخدام النتيجة (6.1) لمبرهنة ليڤي، نجد:

$$\lambda\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\dot{\bigcup}}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \upsilon(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

أي أنّ $\lambda$ تابع جمعي عدود، لذا فإنّ $\lambda$ قياس منتهٍ. لنبين أنّ المساواة (2.4) المستعرضة في المبرهنة (2.1) تعرف القياس $\lambda$ بشكل وحيد. ليكن $\lambda'$ قياساً آخر على $\sigma$ – الجبر $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ وليكن $\mu(A)\upsilon(B) = \lambda'(A \times B)$ من أجل أي مستطيل قيوس $A \times B$ الأمر الذي يمكننا من استنتاج أنّ $\lambda$ , $\lambda'$ يتطابقان على الجبر $\mathfrak{M} * \mathfrak{N}$ المولّد بجملة جميع المستطيلات القيوسة.

استناداً إلى مبرهنة وحدانية التمديد الأصغري للقياس نجد أنّ $\lambda$ , $\lambda'$ يتطابقان على $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ .

**ملاحظة (1 . 2)**

يمكن البرهان بسهولة أنّ كلاً من المبرهنتين (2.1) و (2.2) تبقى صحيحة في الحالة التي يكون فيها كل من $\mu$ , $\upsilon$ قياس $\sigma$ – منتهياً. في هذه الحالة يكون القياس $\lambda$ المعرّف بالعلاقة (2.3) $\sigma$ – منتهياً.

نترك للقارئ إثبات هذه الحقيقة.

**تعريف (2 . 1)**

ليكن $\langle X , \mathfrak{M}, \mu \rangle$ و $\langle Y , \mathfrak{N}, \upsilon \rangle$ فضائين كل منهما ذو قياس $\sigma$ – منته .

نسمي القياس $\lambda$ المعرّف على $\sigma$ – الجبر $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ بالمساواة (2.3) بجداء القياسين $\mu , \upsilon$ ويعرّف بالمساواة $\lambda = \mu \times \upsilon$

يسمى فضاء القياس $\langle X \times Y , \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} , \mu \times \upsilon \rangle$ بالجداء المباشر للفضاءين $\langle X , \mathfrak{M}, \mu \rangle , \langle Y , \mathfrak{N}, \upsilon \rangle$.

**مثال (1)**

ليكن $X = Y = \mathbb{R}$ وليكن $m$ قياس ليبيغ على $\sigma$ – الجبر $\mathfrak{B}$ من المجموعات الجزئية البوريلية من $\mathbb{R}$ . بسهولة نجد ، في هذه الحالة ، أنّ جداء القياسين $m \times m$ هو قياس ليبيغ على مجموعة جميع المجموعات الجزئية البوريلية من $\mathbb{R}^2$ (انظر (11) من الفصل الأول).

## § 3 . مبرهنة فو بيني *The Fubini Theorem*

ليكن $\langle X , \mathfrak{M}, \mu \rangle , \langle Y , \mathfrak{N}, \upsilon \rangle$ فضائين كل منهما ذي قياس $\sigma$ – منته عندئذ، كما سبق أن بينا في الفقرة السابقة، أنّ القياس $\sigma$ – منتهي $\lambda = \mu \times \upsilon$ يُعرّف على الجداء المباشر $\langle X \times Y , \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \rangle$ لتلك الفضاءات. لنستعرض تابعاً $h : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ من أجله يكون التكامل:

$$\int_{X \times Y} h(x,y)\, d(\mu \times \upsilon)(x,y) = \int_{X \times Y} h\, d(\mu \times \upsilon) \tag{3.1}$$

موجوداً على القياس $\mu \times \upsilon$ ( أي أنّ $h$ يمكن أن يكون تابعاً قيوساً غير سالب أو تابعاً جمعياً ) يسمى التكامل (3.1) بالتكامل المضاعف .

لنفرض أنّ $h$ التابع الذي من أجله يكون التكامل $f(x) = \int_Y h_x(y)\, d\upsilon(y)$ موجوداً ( $h_x$ مقطع التابع $h$ ) ومن أجله أيضاً يكون التكامل $\int_X f(x)\, d\mu(x)$ موجوداً.

في هذه الحالة، لنضع:

$$\int_X f\,d\mu=\int_X\left(\int_Y h(x,y)\,d\upsilon(y)\right)d\mu(x)=\int_X\int_Y h\,d\upsilon\,d\mu \tag{3.2}$$

بشكل مماثل ، إذا كان التكاملان:

$$g(y)=\int_X h\,\upsilon(x)\,d\mu(x) \quad , \quad \int_Y g(y)\,d\upsilon(y)$$

موجودين، فإننا نضع:

$$\int_Y g(y)\,d\upsilon(y)=\int_Y\left(\int_X h(x,y)d\mu(x)\right)d\upsilon(y)=\int_Y\int_X h\;d\mu\,d\upsilon \tag{3.3}$$

السؤال الذي يطرح هنا :ماهي الشروط التي يتطابق فيهـا التكامـل المـضاعف مـع التكاملات المكررة ؟ إنّ الجواب على هذا السؤال يُعطى بالنظريتين الآتيتين.

**مبرهنة (3.1) (مبرهنة تونيلي *Tonelli*)**

إذا كان $h=h(x,y)$ تابعاً قيوساً غير سالب على $X\times Y$، عندئذ:

$$\int_{x\times y} h\;d\,(\mu\times\upsilon)=\int_X\int_Y h\;d\upsilon\,d\mu=\int_Y\int_X h\;d\mu\,d\upsilon \tag{3.4}$$

**البرهان**

**I** - ليكن $h$ التابع المميز لمجموعة قيوسـة مـا . أي أنّ $h(x,y)=\chi_E(x,y)$ حيث $E\in\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ . عندئذ:

$$\int_{X\times Y} h\,d\,(\mu\times\upsilon)=(\mu\times\upsilon)(E)$$

أضف إلى أن:

$$\int_Y h\,d\upsilon=\int_Y\chi_E\,(x\,,y)\,d\upsilon(y)=\int_Y\chi_{E_x}(\,y\,)\,d\upsilon(y)=\upsilon(E_x)$$

وبشكل مماثل:

$$\int_X h\,d\upsilon=\mu(E^y)$$

بذلك، من المبرهنة $(2\,.\,2)$ والتعريف $(2\,.\,1)$. نجد:

$$\int_X \int_Y h \, d\upsilon \, d\mu = \int_X \upsilon(E_x) d\mu(x) = (\mu \times \upsilon)(E)$$

$$\int_Y \int_X h \, d\mu \, d\upsilon = \int_Y \mu(E^y) \, d\upsilon(y) = (\mu \times \upsilon)(E)$$

بذلك تكون المساواة (3.4) قد برهنت في هذه الحالة.

**II** - ليكن $h$ تابعاً قيوساً غير سالب ما. عندئذ توجد متتالية من التوابع البسيطة القيوسة غير السالبة $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ المتقاربة إلى التابع $h$ في كل نقطة. بما أن أي تابع بسيط هو تركيب خطي لتوابع مميزة لمجموعات قيوسة، أي أن المبرهنة تتحقق من أجل أي تابع $h_n$. في هذه الحالة، استناداً إلى مبرهنة (ليفي) نجد:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{X \times Y} h_n \, d(\mu \times \upsilon) = \int_{X \times Y} h \, d(\mu \times \upsilon) \tag{3.5}$$

لنوجد قيمة الطرف الأيسر من هذه المساواة بطريقة أخرى. بما أن المبرهنة محققة من أجل أي تابع $h_n$، يكون لدينا:

$$\int_{X \times Y} h_n \, d(\mu \times \upsilon) = \int_X \left( \int_Y h_n \, d\upsilon \right) d\mu = \int_X f_n \, d\mu \tag{3.6}$$

حيث

$$f_n(x) = \int_Y h_n(x, y) \, d\upsilon(x, y)$$

توابع قيوسة غير سالبة.

بما أن المتتالية $\{h_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$ غير متناقصة من أجل جميع $x$ مثبت وبما أن التوابع $h_n(x, y)$ قيوسة بالنسبة للقياس $\upsilon$ كمقاطع لتوابع قيوسة، فإننا نستنتج، وفقاً لمبرهنة ليفي، أن:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) = \int_Y h(x, y) \, d\upsilon(y) \qquad (\forall x \in X) \tag{3.7}$$

بشكل خاص ،إن هذا يقتضي قيوسية التابع $f$ . بتطبيق مبرهنة ( ليفي) مرة ثانية، نجد

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

أو، بالأخذ بعين الاعتبار $(3.6)$ و $(3.7)$ نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} h_n \, d(\mu\times\upsilon) = \int_X \int_Y h \, d\upsilon \, d\mu$$

بمقارنة المساواة الأخيرة مع $(3.5)$ نجد:

$$\int_{X\times Y} h \, d(\mu\times\upsilon) = \int_X \int_Y h \, d\upsilon \, d\mu$$

بشكل مشابه تبرهن المساواة:

$$\int_{X\times Y} h \, d(\mu\times\upsilon) = \int_Y \int_X h \, d\mu \, d\upsilon$$

**مبرهنة (3.2) (مبرهنة فوبيني *Fubini*)**

إذا كان $h$ تابعاً جمعياً على $X\times Y$، عندئذٍ تكون جميع مقاطعه جمعيـــة. فـــي هذه الحالة، يكون التابعان $f\,,\,g$ المعرفان بالعلاقتين:

$$f(x) = \int_Y h(x,y)\, d\upsilon(y) \quad , \quad g(y) = \int_X h(x,y)\, d\mu(x)$$

جمعيين، ويكون:

$$\int_{X\times Y} h \, d(\mu\times\upsilon) = \int_X \int_Y h \, d\upsilon \, d\mu = \int_Y \int_X h \, d\mu \, d\upsilon \qquad (3.8)$$

**البرهان**

ليكن $h(x,y) \geq 0$. عندئذٍ تنتج المساواة $(3.8)$ من المبرهنـــة الـــسابقة. بمـــا أن $h$ جمعي، فإن الطرف الأيسر من المساواة منتهٍ، وبذلك يكون كل مـــن التكـــاملين المكررين $\int_X f \, d\mu \;,\; \int_Y g \, d\upsilon$ محدوداً. الأمر الذي يعني أن التابعين $f\,,\,g$ جمعيـــان، ولذلك، فهما محدودان تقريباً في كل مكان، إلا أن هذا يعني، أن جميع مقاطع التـــابع $h$ جمعية. بذلك تكون المبرهنة قد أثبتت من أجل تابع غير سالب.

ليكن $h$ تابعاً جمعياً ذا إشارة كيفيـــة. عندئـــذٍ يمكـــن أن يمثـــل علـــى الـــشكل $h = h_+ - h_-$ حيث $h_+ , h_-$ تابعان غير سالبين. في هذه الحالـــة، تكـــون جمعيـــة $h$ مكافئة لجمعية كل من $h_+ , h_-$.

بما أن جميع تأكيدات المبرهنة $(3.2)$ محققة من أجل $h_+ , h_-$ . فهي محققة من أجل $h$ .

**ملاحظة (3.1)**

بسهولة يمكن البرهان على أن مبرهنة فوبيني تبقى محققة من أجل التوابع ذات القيم العقدية. نترك برهان هذه الحقيقة للقارئ.

**ملاحظة (3.2)**

بسهولة يمكن تعميم العلاقة$(3.8)$ إلى الحالة التي يكون فيها التكامل المضاعف ليس مأخوذاً فقط على الفضاء الصحيح $X \times Y$ وإنما على مجموعة جزئية قيوسة $A$ منه.

أي أنه، إذا كان $h$ جمعياً على $A$ ،عندئذٍ تكون جميع مقاطعه جمعية ويكون:

$$\int_A h\, d\,(\mu \times \upsilon) = \int_X \int_{A_x} h\; d\upsilon\, d\mu = \int_Y \int_{A^y} h\; d\mu\, d\upsilon \tag{3.9}$$

إن هذه العلاقة مشابهة تماماً للصيغة المستخدمة في تكاملات ريمان المضاعفة الناتجة عن التكاملات المكررة. في الواقع أنّ جمعية $h$ على $A$ تعني أن التابع $f\ \chi_A$ جمعي على $X \times Y$ . بتطبيق مبرهنة فوبيني، نجد:

$$\int_A h\, d\,(\mu \times \upsilon) = \int_{X \times Y} h\ \chi_A\, d\,(\mu \times \upsilon) = \int_X \left( \int_Y h\ \chi_A\, d\upsilon \right) d\mu = \int_X \left( \int_{A_x} h\ \ d\upsilon \right) d\mu$$

بأسلوب مشابه تبرهن المساواة الثانية.

**ملاحظة(3. 3)**

نلاحظ أن شرط جمعية التابع $h$ أساسي . في الواقع، إن حقيقة أن التكاملات المكررة منتهية وحتى مساوية لبعضها لاتؤدي إلى الجمعية، الأمر الذي يفسر بالمثال الآتي:

**مثال (1)**

ليكن $X = Y = [-1,1]$ وليكن $\mu = \upsilon = m$ قياس ليبيغ لنستعرض التابع $h(x,y) = \frac{x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ من أجل $(x,y) \neq (0,0)$ و $h(0,0) = 0$. من الواضح أن هذا التابع مستمر في $y$ من أجل أي $x \ni [-1,1]$ مثبتة. ويكون لدينا:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2} dy = 0$$

بالتالي:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \frac{x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2} dy = 0$$

بشكل مماثل:

$$\int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} \frac{x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx = 0$$

في الوقت نفسه، التابع $h(x,y)$ ليس جمعياً على $[-1,1] \times [-1,1]$. في الواقع، إذا كان جمعياً على هذا المربع، فإنه ينبغي أن يكون جمعياً أيضاً على الجزء $[0,1] \times [0,1]$. إلا أنه، وفقاً لمبرهنة فوبيني، يجب أن يكون التكامل المكرر:

$$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1} \frac{x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2} dy$$

منتهياً وهذا ليس صحيحاً إذ أنَّ:

$$\int_{0}^{1} \frac{x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2} dy = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2\left(x^2+1\right)}$$

من الواضح أنَّ تابع الطرف الأيمن ليس جمعياً على $[0,1]$.

نلاحظ، في هذا المثال، أن التكاملات المكررة متساوية على الرغم من أن التابع ليس جمعياً. إن المثال الآتي، يبين أن التكاملات المكررة يمكن أن تكون منتهية وغير متساوية من أجل تابع غير جمعي.

**مثال (2)**

ليكن $X = Y = [0,1]$ وليكن $\mu = \upsilon$ قياس ليبيغ. لنستعرض على المربع $[0,1] \times [0,1]$ التابع:

$$h(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

بما أن:

$$h(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

لدينا:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = -\int_0^1 \frac{dy}{y^2 + 1} = -\frac{\pi}{4}$$

إن التكاملين المكررين غير متساويين ومنتهيين. من الواضح، أن هذا الأمر يؤدي إلى أن التابع غير جمعي.

## § 4 . جداء عدد منتهٍ من القياسات *Product of finite number of measures*

إن المفهوم المستعرض في الفقرات السابقة يمكن أن يعمم في حالة جداء عدد منتهٍ من فضاءات القياس. يعتبر الاستقراء الأسلوب الأبسط للقيام بذلك.

ليكن $\langle X_i , \mathfrak{M}_i , \mu_i \rangle$ $(i = 1,...n)$ فضاءات مع قياسات σ − منتهية ولنستعرض الجداء الديكارتي $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ ولنبن فضاءً قيوساً. تسمى المجموعة $A_1 \times ... \times A_n$ حيث $A_i \in \mathfrak{M}_i$ مستطيلٌ في $X$ . نرمز لـ σ − الجبر

المولد بجميع المستطيلات بالرمز $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\times\ldots\times\mathfrak{M}_n=\overset{n}{\underset{i=1}{X}}\mathfrak{M}_i$. يسمى الفضاء $\langle X,\mathfrak{M}\rangle=\langle X_1,\mathfrak{M}_1\rangle\times\ldots\times\langle X_n,\mathfrak{M}_n\rangle$ بالجداء المباشر للفضاءات $X_i$.

بالاستقراء الرياضي، يمكن بسهولة البرهان على أن الفضاء القيوس $\langle X,\mathfrak{M}\rangle$ يمكن أن يزود بقياس $\sigma$ – منتهٍ وحيد معرف على المستطيلات بالمساواة:

$$\mu(A_1\times\ldots\times A_n)=\mu_1(A_1)\ldots\mu_n(A_n)$$

ويسمى بالجداء المباشر للقياسات $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$ ونرمز له بـ $\mu=\mu_1\times\ldots\times\mu_n$. يسمى فضاء القياس $\langle X,\mathfrak{M},\mu\rangle$ بالجداء الديكارتي للفضاءات الأولية، أي أن:

$$\langle X,\mathfrak{M},\mu\rangle=\langle X_1,\mathfrak{M}_1,\mu_1\rangle\times\ldots\times\langle X_n,\mathfrak{M}_n,\mu_n\rangle=\overset{n}{\underset{i=1}{X}}\langle X_i,\mathfrak{M}_i,\mu_i\rangle$$

يمكن تعميم مبرهنة فوبيني إلى جداء عدد منتهٍ من الفضاءات. الأمر الذي يمكننا من استبدال $n$- تكامل (أي أن تكاملات فوق القياس $\mu$) بتكامل واحد.

# مسائل وتمارين الفصل الرابع

1 - برهن أنّه إذا كان $f(x), g(y)$ تابعين جمعيين على $X , Y$ على الترتيب، فإنّ التابع $h(x,y)=f(x).g(y)$ جمعي على $X \times Y$ وأنّ:

$$\int_{X\times y} h\, d(\mu\times \upsilon) = \int_X f\, d\mu \int_X g\, d\upsilon$$

2 - ليكن لدينا $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy} \sin x \ \sin y \ dx\, dy$ برهن أنّ التكاملات المكررة موجودة ومتساوية . هل التكامل المضاعف موجود؟

3 - ليكن $F , E$ مجموعتين قيوستين في $X \times Y$ بحيث إنّ $\upsilon(E_x) = \upsilon(F_x) \pmod{\mu}$ . برهن أنّ: $\lambda(E) = \lambda(F)$ .

4 - ليكن $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعاً قيوساً . برهن أنّه من أجل أي $P > 0$ تتحقق المساواة الآتية:

$$\int_X |f|^p\, d\mu(x) = \int_0^\infty p\, t^{p-1} F(t)\, dt$$

حيث:

$$F(t) = \mu(\{|f| > t\}) \qquad (t>0)$$

5 - ليكن $X = Y = [-1,1]$ وليكن $\mu = \upsilon = m$ قياس ليبيغ على $\mathbb{R}$ وليكن $f$ تابعاً معرفاً على $X \times Y$ بالعلاقة:

$$f(x,y) = \frac{x\, .\, y}{(x^2+y^2)^2}$$

برهن أنّ:

I) التكاملين المكررين موجودان ومتساويان.

II) $f$ غير قابل للمكاملة على $X \times Y$.

6 - لـيكن $\langle X , \Re_1 , \mu \rangle$ , $\langle X , \Re_2 , \upsilon \rangle$ فـضائين ذوي قياسـين ولـيكن $f_1$ , $f_2$ تابعين قابلين للمكاملة على $X$ , $Y$ على الترتيب.

برهن أنّه إذا كان $f$ تابعاً معرفاً على $X \times Y$ بالعلاقة:

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$$

فإنّ $f$ قابلٌ للمكاملة على $X \times Y$ وأنّ:

$$\int_{X \times y} f\, d(\mu \times \upsilon) = \int_X f_1\, d\mu \times \int_Y f_2\, d\upsilon$$

# ملحق

## I. التوابع ذات التغيرات المحدودة

سنتعرف في هذه الفقرة على صف هام من التوابع يدعى بصف التوابع ذات التغيرات المحدودة وكان جوردان أول من عرفه . سيلعب هذا الصف دوراً أساسياً في تعميم مفهوم التكامل المحدد والذي سنستعرضه في فقرة لاحقة. كما أنّه يلعب دوراً هاماً في العديد من مسائل التحليل الرياضي .

ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال المحدود والمغلق $[a,b]$ حيث $(b>a)$ . لنجزء هذا المجال بوساطة النقاط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ حيث :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$$

ولنشكل المجموع

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} \left| f(x_{i+1}) - f(x_i) \right| \qquad (1)$$

والسؤال الذي يطرح هنا : هل ستكون مجموعة جميع الأعداد الموافقة للتقسيمات المختلفة للمجال $[a,b]$ محدودة من الأعلى أم لا؟

إذا كانت المجاميع (1) محدودة من الأعلى فإننا نقول إنّ التابع $f(x)$ ذو تغير محدود على المجال $[a,b]$ ويسمى في هذه الحالة الحد الأعلى الأصغري للمجاميع (1) بالتغير الكلي للتابع $f(x)$ في المجال $[a,b]$:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) = \sup\{v\}$$

**ملاحظة**

يمكن استخدام هذا المفهوم من أجل التوابع ذات التغيرات غير المحدودة وفي هذه الحالة يكون التغير الكلي مساوياً لـ $+\infty$.

وفقاً لتعريف الحد الأعلى الأصغري يمكن ، في الحالتين، وباختيار ملائم لتقسيم المجال $[a,b]$ بلوغ أي تقريب للمجاميع $v$ إلى التغير الكلي $\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)$، بكلام آخر يمكن اختيار متتالية من التقسيمات بحيث يكون التغير الكلي نهاية متتالية المجاميع $v$ المقابلة للتقسيمات.

أحياناً يطرح التساؤل حول التغيرات المحدودة لتابع $f(x)$ في مجال غير محدود ، على سبيل المثال $[a, +\infty[$. نقول إنّ التابع $f(x)$ ذو تغير محدود في المجال $[a, +\infty[$ إذا كان ذا تغير محدود في أي مجال جزئي محدود $[a, A]$ وكانت التغيرات الكلية $\overset{A}{\underset{a}{V}} f(x)$ محدودة في مجملها . في جميع الحالات نضع:

$$\overset{+\infty}{\underset{a}{V}} f(x) = \sup_{A>a} \left\{ \overset{A}{\underset{a}{V}} f(x) \right\} \tag{2}$$

نشير هنا إلى أنّه في جميع التعاريف السابقة لا يلعب استمرار التابع أيّ دور فيها.

**مثال ( 1 )**

ليكن $f(x)$ تابعاً مطرداً ومحدوداً . إذا كان المجال $[a,b]$ محدوداً فإننا نجد:

$$v = \sum_{i=0}^{m-1} \left| f(x_{i+1}) - f(x_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{i+1}) - f(x_i) \right|$$
$$= \left| f(b) - f(a) \right|$$

وبالتالي فإنّ:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) = \left| f(b) - f(a) \right|$$

أما إذا كان المجال من الشكل $[a, +\infty[$ فإنّه من الواضح أنّ:

$$\overset{+\infty}{\underset{a}{V}} f(x) = \sup_{A>a} \left\{ \left| f(A) - f(a) \right| \right\} = \left| f(+\infty) - f(a) \right|$$

حيث إنّ:

$$f(+\infty)=\lim_{A\to+\infty} f(A)$$

لنعطِ الآن مثالاً لتابع مستمر إلا أنّه ليس ذا تغير محدود. ليكن:

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x} & ;\ x\neq 0 \\ 0 & ;\ x=0 \end{cases}$$

لنأخذ المجال $[0,1]$ وبمثابة نقاط تقسيم لهذا المجال لنأخذ النقاط

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\ldots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1$$

بسهولة يمكن التأكد من أنّ:

$$v=v_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=H_n$$

وبالتالي فإنّ:

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f(x)=\sup\{v\}=+\infty$$

**صفوف التوابع ذوات التغيرات المحدودة**

كنا قد وجدنا أنّ التابع المطرد ذو تغير محدود ويمكن توسيع صف التوابع هذا.

**تعريف (1)**

نقول إنّ التابع $f(x)$ المعرّف على $[a,b]$ مطـرد جزئيـاً علـى هـذا المجال إذا أمكن تقسيم هذا المجال إلى عدد منته من المجالات الجزئية

$$[a_k, a_{k+1}] \qquad (k=0,1,2,\ldots,m-1 \quad a_0=a\ ,\ a_m=b)$$

بحيث يكون $f(x)$ مطرداً على كل منها.

**ملاحظة**

بإضافة نقاط جديدة إلى نقاط تجزئة المجال $[a,b]$ نحصل على تغير للتـابع $\overline{V}$ لا يقل عن التغير الموافق للتجزئة الأصلية. وذلك لأنّه بإضافة النقطة $x'$ بـين النقطتين $x_i$ , $x_{i+1}$ فإنّ الحد $|f(x_{i+1})-f(x_i)|$ يستبدل بالمجموع

$$|f(x_{i+1})-f(x')|+|f(x')-f(x_i)| \geq |f(x_{i+1})-f(x_i)|$$

**مبرهنة (1)**

إذا كان $f(x)$ مطرداً جزئياً على المجال $[a,b]$ فإنّه يكون محدود التغير على المجال $[a,b]$.

**البرهان**

لنقسم المجال $[a,b]$ بشكل كيفي إلى مجالات جزئية ولنشكل المجموع $v$.

بما أنّ المجموع $v$ يمكن له أن يتزايد فقط بنتيجة إضافة نقطة جديدة لنقاط التقسيم السابقة فإنّه بإضافة جميع النقاط $a_k$ الواردة في التعريف (1) . نحصل على مجموع $v \le \bar{v}$. لنختر الآن من المجموع $\bar{v}$ تلك الحدود المنسوبة للمجالات $[a_k , a_{k+1}]$ ولنرمز لها بـ $\bar{v}^k$ حيث:

$$\bar{v}^{(k)} = | f(a_{k+1}) - f(a_k) |$$

وبالتالي فإنّ:

$$\bar{V} = \sum_{k=0}^{m-1} | f(a_{k+1}) - f(a_k) |$$

وبما أنّ أي مجموع $v$ لا يزيد عن هذا العدد فإنّ هذا العدد يكون هو التغير الكلي للتابع.

**تعريف (2)**

نقول إنّ التابع $f(x)$ يحقق شرط ليبشتس على المجال $[a,b]$:

$$| f(\bar{x}) - f(x) | \le \mathscr{L} \, | \bar{x} - x | \qquad (3)$$

حيث $0 < \mathscr{L} = const$ و $x$ , $\bar{x}$ نقطتان كيفيتان من $[a,b]$.

**مبرهنة (2)**

إذا حقق التابع $f(x)$ شرط ليبشتس (3) على المجال $[a,b]$ فإنّه يكون ذا تغير محدود على ذلك المجال.

**البرهان**

بما أنّ:

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} \left| f(x_{i+1}) - f(x_i) \right| \le \sum_{i=0}^{n-1} \mathscr{L}(x_{i+1} - x_i) = \mathscr{L}(b-a)$$

في حالة خاصة ، إذا كان التابع قابلاً للاشتقاق في المجال $[a,b]$ وكان مشتقه محدوداً $\left| f(x') \right| \le \mathscr{L}$ $(\mathscr{L} = const)$ فإنّه يكون ذا تغير محدود على ذلك المجال.

**البرهان**

استناداً إلى نظرية القيمة الوسطى لدينا:

$$\left| f(\bar{x}) - f(x) \right| = \left| f'(\xi)\ (\bar{x} - x) \right| \le \mathscr{L} \left| \bar{x} - x \right|$$

حيث $(\bar{x} \le \xi \le x)$

أي أنّ التابع يحقق شرط ليبشتس واستناداً إلى (2) يكون $f(x)$ ذا تغير محدود.

**مثال (2)**

اعتماداً على ما سبق يمكننا التأكيد على أنّ التابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{\pi}{x} & ; \ x \ne 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \end{cases}$$

ذو تغير محدود في أي مجال محدود وذلك لأنّ المشتق:

$f'(x) = 2x \sin\dfrac{\pi}{x} - \pi \cos\dfrac{\pi}{x} \quad (x \ne 0)$ و $f'(0) = 0$ محدود.

من الطريف أن نلاحظ أنّه في كل مجال يحتوي على نقطة الصفر يهتز هذا التابع عدداً غير منتهٍ من المرات أي إنّه عدد غير منتهٍ من المرات ينتقل من التزايد إلى التناقص وبالعكس .

لنوسع صف التوابع ذوات التغيرات المحدودة .

مبرهنة ( 3 )

إذا كان التابع $f(x)$ ممثلاً في المجال المحدود $[a,b]$ ( أو غير المحدود) في شكل تكامل تابع لحده الأعلى

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\, dt \qquad (4)$$

حيث $\varphi(t)$ تابع قابل للاستكمال إطلاقاً (*) فـإنّ $f(x)$ يكـون ذا تغيـر محدود. وتبعاً لذلك يكون:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) \le \int_a^b |\varphi(t)|\, dt$$

البرهان

لنفرض أنّ $[a,b]$ محدود، عندئذٍ

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t)\, dt \right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\varphi(t)|\, dt = \int_a^b |\varphi(t)|\, dt$$

وبالتالي فإنّ:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) \le \int_a^b |\varphi(t)|\, dt$$

أمّا إذا كان المجال غير محدود من الشكل $[a, +\infty]$ فإنّه يكفـي أن نلاحـظ بأنّ:

$$\overset{A}{\underset{a}{V}} f(x) \le \int_a^A |\varphi(t)|\, dt \le \int_a^{+\infty} |\varphi(t)|\, dt$$

---

(*) $\int_a^b |\varphi(t)|\, dt$ متقارب (حتى بمفهوم التكامل غير الذاتي) .

ملاحظة

من الممكن البرهان، سواءً في حالة المجال المحدود أو المجال غير المحـــدود، على أنّ:

$$\overset{A}{\underset{a}{V}} f(x) = \int_a^b |\varphi(t)|\, dt$$

كما أنّه إذا كان التابع $\varphi(t)$ قابلاً للاستكمال إلا إنّه ليس إطلاقاً فـــإنّ التغيـــر الكلي لــ $f(x)$ يكون، في الحالة العامة، غير محدود ولن نتوقف عنـــد ذلـــك إنّمـــا سنورد مثالاً على ذلك.

ليكن:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{\pi}{x^2} & ;\ x \neq 0 \\ 0 & ;\ x = 0 \end{cases}$$

وبالتالي فإنّ

$$f'(x) = \varphi(x) = 2x \sin\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2} \qquad (x \neq 0)$$

$$f'(0) = \varphi(0) = 0$$

على سبيل المثال، من أجل $0 \leq x \leq 2$

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt$$

يبرهن على أنّ التابع $\varphi(t)$ غير قابل للاستكمال إطلاقاً.

لنأخذ نقاط التقسيم التالية:

$$0, \frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{\frac{2}{2n-1}}, \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \sqrt{\frac{2}{2n-3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1, \sqrt{2}, 2$$

ويكون:

$$v > \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\sqrt{\frac{2}{2k-1}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_k$$

ومنه:

$$\overset{2}{\underset{0}{V}} f(x) = +\infty$$

## خواص التوابع ذوات التغيرات المحدودة

سنقتصر هنا على المجالات المحدودة $[a,b]$.

1) كل تابع ذو تغير محدود هو تابع محدود.

**البرهان**

في الحقيقة ، من أجل $0 < x' \le b$ لدينا:

$$v' = |f(x') - f(a)| + |f(b) - f(x')| \le \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)$$

ومنه:

$$f(x') \le |f(x') - f(a)| + |f(a)| \le |f(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)$$

2) مجموع وفرق وجداء تابعين $f(x), g(x)$ ذوي تغيرين محدودين هي توابع ذوات تغيرات محدودة.

**البرهان**

لنضع $S(x) = f(x) \pm g(x)$ عندئذ:

$$|S(x_{i+1}) - S(x_i)| \le |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |g(x_{i+1}) - g(x_i)|$$

وبالجمع بالنسبة للدليل $i$ يكون:

$$\sum_i |S(x_{i+1}) - S(x_i)| \le \sum_i |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \sum_i |g(x_{i+1}) - g(x_i)|$$

$$\le \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) + \overset{b}{\underset{a}{V}} g(x)$$

ومنه ينتج أن:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} S(x) \le \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) + \overset{b}{\underset{a}{V}} g(x)$$

لنضع الآن $p(x) = f(x)\ g(x)$ ولنفرض أنه من أجل $a \le x \le b$

$$|f(x)| \le K \quad ; \quad |g(x)| \le \mathscr{L} \quad , \quad (K, \mathscr{L} = const)$$

من الواضح أن:

$$\begin{aligned}
|p(x_{i+1}) - p(x_i)| &= |f(x_{i+1})\, g(x_{i+1}) - f(x_i)\, g(x_i)| = \\
&= |f(x_{i+1})\, g(x_{i+1}) - f(x_{i+1})\, g(x_i) + f(x_{i+1})\, g(x_i) - f(x_i)\, g(x_i)| \le \\
&\le |f(x_{i+1})\,[g(x_{i+1}) - g(x_i)] + g(x_i)\,[f(x_{i+1}) - f(x_i)]| \le \\
&\le |f(x_{i+1})|\,|g(x_{i+1}) - g(x_i)| + |g(x_i)|\,|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \le \\
&\le K\,|g(x_{i+1}) - g(x_i)| + \mathscr{L}\,|f(x_{i+1}) - f(x_i)|
\end{aligned}$$

و بسهولة نجد أن:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\, p(x) \le K \overset{b}{\underset{a}{V}}\, g(x) + \mathscr{L} \overset{b}{\underset{a}{V}}\, f(x)$$

3) إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ تابعين ذوي تغيرين محدودين وكان $|g(x)| \ge \sigma > 0$ فإن: القسمة $\frac{f(x)}{g(x)}$ تكون تابعاً ذا تغير محدود.

**البرهان**

استناداً إلى الخاصة (2) يكفي البرهان على أن $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ تابع ذو تغيرمحدود. لدينا:

$$|h(x_{i+1}) - h(x_i)| = \left| \frac{g(x_{i+1}) - g(x_i)}{g(x_i)\, g(x_{i+1})} \right| \le \frac{1}{\sigma^2} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|$$

وبالتالي فإن:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\, h(x) \le \frac{1}{\sigma^2} \overset{b}{\underset{a}{V}}\, g(x)$$

4) إذا كان التابع $f(x)$ معرفاً في المجال $[a,b]$ و $a<c<b$ وكان التابع $f(x)$ ذا تغير محدود في المجال $[a,b]$ فإنه يكون ذا تغير محدود في كل من المجالين $[a,c]$ و $[c,b]$ وبالعكس وفقاً لذلك يكون:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) = \overset{c}{\underset{a}{V}} f(x) + \overset{b}{\underset{c}{V}} f(x) \tag{5}$$

**البرهان**

ليكن $f(x)$ تابعاً ذا تغير محدود في المجال $[a,b]$ . لنقسم كلاً من المجالين $[a,c]$ و $[c,b]$ على حدة:

$$\begin{aligned} y_0 = a < y_1 < \ldots < y_m = c \\ z_0 = c < z_1 < \ldots < z_n = b \end{aligned} \tag{6}$$

وبذلك يكون قد تقسم المجال $[a,b]$ . لنشكل بشكل منفصل المجاميع من أجل كل مجال $[a,c]$ و $[c,b]$.

$$v_1 = \sum_k \left| f(y_{k+1}) - f(y_k) \right|$$

$$v_2 = \sum_i \left| f(z_{i+1}) - f(z_i) \right|$$

كما أن المجموع الموافق للمجال $[a,b]$ يكون:

$$v = v_1 + v_2$$

و بذلك نجد أن:

$$v_1 + v_2 \le \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)$$

و بالتالي أي من المجموعين $v_1$ و $v_2$ كلاً على حدة يكون محدوداً أي أن $f(x)$ محدود التغير على كل من المجالين $[a,c]$ و $[c,b]$.

لنختر التقسيم (6) بحيث يسعى المجموعان $v_1$ و $v_2$ إلى التغير الكلي الموافق وبالانتقال إلى النهاية نجد:

$$\overset{c}{\underset{a}{V}} f(x) + \overset{b}{\underset{c}{V}} f(x) \le \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) \tag{7}$$

لنفرض الآن أن للتابع $f(x)$ تغيراً محدوداً في كل من المجالين $[a,c]$ و $[c,b]$. لنجرِ تقسيماً كيفياً للمجال $[a,b]$ فإذا لم تدخل النقطة $c$ في عداد نقاط

التقسيم فإننا نضيف هذه النقطة إلى نقاط التقسيم الأمر الذي يؤدي كما نعلم إلى تزايـد في المجموع $v$. بالمحافظة على الترميز السابق نجد:

$$v \le v_1 + v_2 \le \overset{c}{\underset{a}{V}} f(x) + \overset{b}{\underset{c}{V}} f(x)$$

ومن ذلك ينتج التغير المحدود للتابع $f(x)$ في المجال $[a,b]$ وبالتالي فإن:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) \le \overset{c}{\underset{a}{V}} f(x) + \overset{b}{\underset{c}{V}} f(x) \qquad (8)$$

من العلاقتين $(8)$ و $(7)$ تنتج العلاقة $(5)$ .

5) إذا كان للتابع $f(x)$ في المجال $[a,b]$ تغيراً محدوداً فإنه من أجـل $a \le x \le b$ يكون التغير الكلي:

$$g(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f(t)$$

تابع متزايد باطراد ( ومحدود ) في $x$.

في الواقع إذا كان $a \le x' < x'' \le b$ فإن:

$$\overset{x''}{\underset{a}{V}} f(t) = \overset{x'}{\underset{a}{V}} f(t) + \overset{x''}{\underset{x'}{V}} f(t)$$

وبالتالي فإن:

$$g(x'') - g(x') = \overset{x''}{\underset{x'}{V}} f(t) \ge 0 \qquad (9)$$

وذلك لكون التغير الكلي لتابع لا يمكن أن يكون سالباً.

ويتضح الآن تعريف التغير الكلي في مجال غير محدود $[a,+\infty]$ بـدلاً مـن العلاقة $(2)$ يمكن أن نكتب العلاقة:

$$\overset{+\infty}{\underset{a}{V}} f(x) = \lim_{A \to +\infty} \overset{A}{\underset{a}{V}} f(x) \qquad (2')$$

### اختبارات التوابع ذوات التغيرات المحدودة

ليكن التابع $f(x)$ معرفاً في المجال المحدود أو غير المحدود $[a,b]$.

6) **مبرهنة ( 4 )**

الشرط اللازم والكافي كي يكون التـــابع $f(x)$ ذا تغيــرات محــدودة فـــي المجال $[a,b]$ هو أن يوجد من أجله تابع مطرد ومتزايد ومحدود في ذلك المجال مثـــل $F(x)$ وبحيث إنه في أي مجال جزئـــي $[x',x'']$ ، $(x'<x'')$ مـــن $[a,b]$ تتحقق المتراجحة:

$$\left| f(x'') - f(x') \right| \leq F(x'') - F(x')$$

( يسمى التابع $F(x)$ المتمتع بهذه الخاصة بتابع راجح للتابع $f(x)$ )

**لزوم الشرط:**

ينتج من أنّ دور التابع الراجح للتابع $f(x)$ ذي التغير المحدود يمكن أن يلعبه التابع

$$g(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f(t)$$

المحدود والمطرد بازدياد وفقاً للخاصة (5). إنّ المتراجحة

$$\left| f(x'') - f(x') \right| \leq g(x'') - g(x') = \overset{x''}{\underset{x'}{V}} f(t)$$

تنتج من تعريف التغير الكلي للتابع.

**كفاية الشرط:**

من أجل المجال المحدود يتضح مباشرة أنّ المتراجحة

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} \left| f(x_{i+1}) - f(x_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left[ F(x_{i+1}) - F(x_i) \right] = F(b) - F(a)$$

وأما من أجل مجال غير محدود فيمكن الانتقال إلى النهاية.

إنّ الاختبار التالي يعتبر من أهم اختبارات التوابع ذوات التغيرات المحدودة.

7) **مبرهنة (5)**

الشرط اللازم والكافي لكي يكون للتابع $f(x)$ فـــي المجـــال $[a,b]$ تغيـــراً محدوداً هو أن يمثل في ذلك المجال كفرق تابعين مطردين ومتزايدين ومحدودين.

$$f(x) = g(x) - h(x) \tag{10}$$

**لزوم الشرط:**

استناداً للخاصة (6) يوجد من أجل التابع $f(x)$ ذي التغير المحدود تابع مطرد ومتزايد ومحدود $F(x)$. لنضع

$$g(x) = F(x) \qquad ; \quad h(x) = F(x) - f(x)$$

عندئذٍ تتحقق العلاقة $(10)$ ويبقى علينا أن نتأكد من اطراد التابع $h(x)$. من أجل $x'' > x'$ لدينا:

$$h(x'') - h(x') = [F(x'') - F(x')] - [f(x'') - f(x'')] \geq 0$$

وفقاً لتعريف التابع الراجح. $\phi$

**كفاية الشرط:**

من تحقق العلاقة $(10)$ ينتج أن التابع:

$$F(x) = g(x) + h(x)$$

هو تابع راجح لـ $f(x)$ وذلك لأنّ:

$$\begin{aligned} |f(x'') - f(x')| &\leq [g(x'') - g(x')] + [h(x'') - h(x')] \\ &= F(x'') - F(x') \end{aligned}$$

كتمارين للطالب نترك البرهان على :

I) بالاعتماد على هذين الاختبارين برهن الخواص 1) – 4) المذكورة أعلاه.

II) من أجل التوابع المطردة جزئياً وذوات التغيرات المحدودة يطلب إيجاد التوابع الراجحة المطردة وإمكانية تمثيلها كفرق تابعين مطردين.

**ملاحظة إضافية متعلقة بالمبرهنة (5)**

بما أنّ التابعين $h$ , $g$ محدودان فإنّه بإضافة ثابت (الثابت نفسه) لهما يمكن جعلهما موجبين وبالمثل أيضاً وبإضافة تابع متزايد تماماً ومحدود (على سبيل المثال

$arctgx$) إلى التابعين $h$ , $g$ نأتي إلى التمثيل (10) حيث إنّ التابعين فيه يكونان متزايدين تماماً .

إنّ ما حدّد في 7) حول إرجاع التوابع ذوات التغيرات المحدودة إلى توابع مطردة يجب ألاّ يعطي للقارئ انطباعاً حول « سهولة » سلوك التوابع ذوات التغيرات المحدودة . إذ إنّ التابع المهتز عدداً لا نهائياً من المرات.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{\pi}{x} & ; \ x\neq 0 \\ 0 & ; \ x=0 \end{cases}$$

أيضاً يمكن تمثيله كفرق لتابعين مطردين.

بنتيجة التمثيل (10) يمكن نقل بعض خواص التوابع المطردة إلى التوابع ذوات التغيرات المحدودة، فإذا تذكرنا أنّه من أجل تابع مطرد $f(x)$ ومن أجل أية نقطة $x=x_0$ تكون النهايتان من اليسار ومن اليمين موجودتين

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x) \ ; f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x) \qquad (11)$$

فإنّه بتطبيق هذه الخاصة على $h$ , $g$ نأتي إلى الخاصة.

8) من أجل التابع $f(x)$ ذي التغير المحدود في المجال $[a,b]$ تكون النهايتان من اليمين ومن اليسار موجودتين ومحدودتين في أية نقطة $x=x_0$ من المجال.

**التوابع المستمرة ذوات التغيرات المحدودة**

9) ليكن التابع $f(x)$ معرفاً في المجال $[a,b]$ وذا تغير محدود. إذا كان هذا التابع مستمراً في نقطة مثل $x=x_0$ فإنّ التابع $g(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}} f(t)$ يكون مستمراً في تلك النقطة.

**البرهان**

لنفرض أنّ $b>x_0$ ولنبرهن على أنّ $g(x)$ مستمر في $x_0$ من اليمين.

ليكن $\varepsilon>0$ كيفياً ولنقسم المجال $[x_0,b]$ بالنقاط:

$$x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

إلى أجزاء بحيث يكون:

$$\nu = \sum_{i=0}^{n-1} \left| f(x_{i+1}) - f(x_i) \right| > \overset{b}{\underset{x_0}{V}} f(t) - \varepsilon \tag{12}$$

بنتيجة استمرار التابع $f(x)$ يمكننا أن نفرض أنّ النقطة $x_1$ قريبة إلى $x_0$ بحيث تتحقق المتراجحة

$$\left| f(x_1) - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

( في الحالة المغايرة نأخذ نقطة تقسيم أخرى ونتيجة ذلك يزداد المجموع). من العلاقة (12) ينتج أنّ:

$$\overset{b}{\underset{x_0}{V}} f(t) < \varepsilon + \sum_{i=0}^{n-1} \left| f(x_{i+1}) - f(x_i) \right| <$$

$$< 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{n-1} \left| f(x_{i+1}) - f(x_i) \right| \leq 2\varepsilon + \overset{b}{\underset{x_1}{V}} f(t)$$

ومنه ينتج:

$$\overset{x_1}{\underset{x_0}{V}} f(t) < 2\varepsilon$$

أو أخيراً

$$g(x_1) - g(x_0) < 2\varepsilon$$

من هذا ينتج أنّ:

$$0 \leq g(x_0 + 0) - g(x_0) < 2\varepsilon$$

وبما أنّ $\varepsilon$ كيفي فإننا نجد:

$$g(x_0 + 0) = g(x_0)$$

وبالمثل يبرهن (على أنّه من أجل $a < x_0$)

$$g(x_0 - 0) = g(x_0)$$

أي أنّ التابع $g(x)$ مستمر من اليسار في النقطة $x_0$ .

من هذه المبرهنة تنتج الخاصة التالية.

10) التابع المستمر ذو التغير المحدود يمكن تمثيله كفرق تابعين مستمرين ومتزايدين.

في الواقع بالعودة إلى برهان اللزوم في الخاصة 7) وبمثابة تابع راجح مطرد يمكننا أخذ التابع $g(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}f(t)$ المستمر (تبعاً لـ 9)) وبذلك نحصل على التمثيل المطلوب.

لنبرهن أخيراً على أنّه من أجل التوابع المستمرة وفي تعريف التغير الكلي

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}f(x)=\sup\{v\}$$

يمكن استبدال sup بالنهاية كما في تلك الحالة عندما يكون التغير الكلي محدوداً.

11) ليكن $f(x)$ مستمراً في المجال المحدود $[a,b]$، ولتكن نقاط التقسيم $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$ ولنشكل المجموع

$$v=\sum_{i=0}^{n-1}\left|f(x_{i+1})-f(x_i)\right|$$

عندئذٍ يكون لدينا:

$$\lim_{\lambda\to 0}v=\overset{b}{\underset{a}{V}}f(x) \tag{13}$$

حيث $\lambda=\max(x_{i+1}-x_i)$.

**البرهان**

كنا قد ذكرنا أنه بإضافة نقاط تقسيم إلى نقاط التجزئة يمكن للمجموع $v$ أن يتزايد فقط. من ناحية أخرى إذا وقعت النقطة الجديدة بين $x_k$ و $x_{k+1}$ فإنّ ازدياد المجموع $v$ الناتج عن ظهور تلك النقطة لا يزيد عن ضعف اهتزاز التابع في المجال $[x_k\,,x_{k+1}]$. بملاحظة ذلك وبأخذ أي عدد $A<\overset{b}{\underset{a}{V}}f(x)$ نوجد مجموعاً $v^*$ بحيث يكون:

$$v^*>A \tag{14}$$

ليكن ذلك المجموع موافقاً للتقسيم

$$x_0^* = a < x_1^* < \ldots < x_n^* = b$$

لنختر $\delta > 0$ صغيراً بحيث يكون:

$$\left| f(x'') - f(x') \right| < \frac{v^* - A}{4m}$$

فقط من أجل $\left| x'' - x' \right| < \delta$ ( هذا الأمر يمكن تحقيقه بنتيجة الاستمرار المنتظم للتابع $f(x)$ ) لنبرهن على أنّه من أجل أي تجزئة للمجال موافقة لـ $\delta > \lambda$ يكون

$$v > A \tag{15}$$

في الواقع ، ليكن لدينا تقسيم ما (I) ولنشكل تقسيماً جديداً (II) ناتجاً من (I)، بإضافة جميع نقاط التقسيم $x_k^*$ إلى نقاط التقسيم (I) نحصل على التقسيم (II) فإذا كان المجموع $v_0$ هو الموافق للتقسيم (II) فإنّ:

$$v_0 \geq v^* \tag{16}$$

من ناحية ثانية إنّ التقسيم (II) ناتج عن التقسيم (I) بإضافة نقطة واحدة (على الأكثر) $m$ مرة. وبما أنّ كل إضافة تسبب تزايداً للمجموع $v$ أصغر من $\dfrac{v^* - A}{2m}$ فإنّ:

$$v_0 - v < \frac{v^* - A}{2}$$

من هنا ومن العلاقتين (16) و (14) ينتج أنّ:

$$v > v_0 - \frac{v^* - A}{2} \geq \frac{A + v^0}{2} > A$$

وهكذا فإنّه من أجل $\delta > \lambda$ تتحقق (15)، وطالما أنّه بشكل دائم.

$$v \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)$$

فإنّ (13) محققة وهو المطلوب.

## 12) مبرهنة (6)

لتكن $\{g_n(x)\}$ متتالية توابع ذات تغيرات محدودة على المجـــال $[a,b]$ ولنفرض أنّ:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\ g_n(x) \le \mathscr{L} \qquad (\forall n \ge 1)$$

إذا كانت المتتالية $\{g_n(x)\}$ متقاربة في كل نقطة من نقاط المجـــال $[a,b]$ إلى تابع $g(x)$ فإنّ $g(x)$ يكون تابعاً ذا تغير محدود أيضاً.

### البرهان

لنأخذ التجزئة التالية للمجال $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_m = b$$

عندئذٍ يكون لدينا

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left| g_n(x_{i+1}) - g_n(x_i) \right| \le \overset{b}{\underset{a}{V}}\ g_n(x) \le \mathscr{L} \qquad (\forall n \ge 1)$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $n \longrightarrow \infty$ نجد :

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left| g(x_{i+1}) - g(x_i) \right| \le \mathscr{L}$$

وذلك من أجل أية تجزئة للمجال $[a,b]$ وبذلك نجد:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\ g(x) \le \mathscr{L}$$

## 13) مبرهنة (7)

ليكن $f$ تابعاً حقيقياً ذا تغير محدود على المجال $[a,b]$ عندئذٍ يوجد علـــى هـــذا المجـــال تابعـــان $q(x)$ , $p(x)$ متزايـــدان بـــاطراد بحيـــث إنّ $p(a) = q(a) = 0$ و

$$f(x) - f(a) = p(x) - q(x) \qquad (17)$$

$$\overset{x}{\underset{a}{V}} f = p(x) + q(x) \qquad (18)$$

حيث $a \le x \le b$،

**البرهان**

لنعرف التابعين $q$ , $p$ على النحو التالي:

$$2p(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f + f(x) - f(a)$$

$$2q(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f - f(x) + f(a)$$

من الواضح أنّ $q(a) = p(a) = 0$ وكذلك فـإنّ المـساويتين (17) و(18) محققتان إذا كان $a \le x \le y \le b$ فإنّه من كون التغير الكلي جمعياً نجد:

$$2p(y) - 2p(x) = \overset{y}{\underset{x}{V}} f + [f(y) - f(x)]$$

$$2q(y) - 2q(x) = \overset{y}{\underset{x}{V}} f - [f(y) - f(x)]$$

وبما أنّ $|f(y) - f(x)| \le \overset{y}{\underset{x}{V}} f$ فإنّه من العلاقتين الأخيرتين نـستنتج أنّ كلاً من التابعين $q$ , $p$ هو تابع متزايد.

**نتيجة (1)**

إذا كان، إضافة لما ذكر، $f(x)$ تابعاً مستمراً على المجـال $[a,b]$ فـإنّ التابعين $q$ , $p$ يكونان مستمرين كذلك.

**نتيجة (2)**

إذا كان التابع $f(x)$ ذا تغير محدود على $[a,b]$ فإنّ القيمـة $f(x+0)$ موجودة من أجل $a \le x < b$ و $f(x-0)$ موجودة من أجل $a < x \le b$ وتكون مجموعة نقاط انقطاع التابع $f(x)$ على الأكثر مجموعة قابلة للعد.

**ملاحظة (3)**

يدعى التابعان $q(x)$ , $p(x)$ على الترتيب بتابعي التغيرات الموجبة والسالبة للتابع $f(x)$. إنّ المساواة (17) تبين أنّ $f(x)$ يكتب كفرق تابعين متزايـدين. إنّ هذا التمثيل ليس وحيداً لأنّه بإضافة تابع تزايد إلى كل مـن التـابعين $q(x)$ , $p(x)$

نحصل على تابعين $p_1(x)$ , $q_1(x)$ ويكــون $f(x)-f(a)=p_1(x)-q_1(x)$ إلا أن التمثيل (17) يتمتع بإحدى خواص الأصغرية والتي تميزه عن غيره من الفروقــات المماثلة.

## المنحنيات القابلة للإصلاح

يستخدم مفهوم التابع ذي التغيرات المحدودة في إصلاح المنحنيات هذا المفهــوم ( الإصلاح ) قد استخدم لأول مرة من قبل جوردان.

ليكن $K$ منحنياً معرفاً وسطياً بالمعادلتين:

$$x=\varphi(t) \quad , \quad y=\psi(t) \tag{19}$$

حيث إنّ التابعين $\varphi(t)$ , $\psi(t)$ مستمران ولنفرض أنّه لا توجد للمنحني نقــاط مضاعفة.

بأخذ الرؤوس للخط المنكسر المرسوم في المنحني في نقاط المنحنــي الموافقــة لقيم الوسيط

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$$

يكون لدينا من أجل طول الخط المنكسر العلاقة:

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)\right]^2 + \left[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)\right]^2}$$

كما نعلم أنّ $S$ طول المنحني يتعرف بالحد الأعلى الأصغري لمجموعة أطوال الخطوط المنكسرة المرسومة في المنحني $\{p\}$. فإذا كان الحد الأعلــى الأصــغري محدوداً فإنّ المنحني يسمى بمنحنٍ قابل للإصلاح. (طول المنحني محدود).

## نظرية جوردان

الشرط اللازم والكافي كي يكون المنحني (19) قابلاً للإصلاح هــو أن يكــون التابعان $\varphi(t)$ , $\psi(t)$ ذوي تغيرين محدودين في المجال $[t_0, T]$.

**البرهان**

**لزوم الشرط:**

إذا كان المنحني قابلاً للإصلاح وكان طوله $S$ فإنّه من أجل أي تقسيم للمجال $[t_0, T]$ يكون:

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\right]^2 + \left[\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)\right]^2} \le S$$

وبما أنّ:

$$\left|\psi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\right| \le \sqrt{\left[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\right]^2 + \left[\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)\right]^2}$$

فإنّ:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left|\psi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\right| \le S$$

أي أنّ $\varphi(t)$ ذو تغير محدود وبالمثل نجد أنّ $\psi(t)$ كذلك.

**كفاية الشرط:**

لنفرض أنّ $\psi(t), \varphi(t)$ ذوا تغيرين محدودين . عندئذ نجد:

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\right]^2 + \left[\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)\right]^2} \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} \left|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\right| + \sum_{i=0}^{n-1} \left|\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)\right|$$

وبالتالي فإنّ $p$ محدود من الأعلى على سبيل المثال

$$\overset{T}{\underset{t_0}{V}} \varphi(t) + \overset{T}{\underset{t_0}{V}} \psi(t)$$

ووفقاً لما برهنا أعلاه يكون $K$ قابلاً للإصلاح.

## II. تكامل ستيلتجس *Stieltjes Integral*

يعتبر تكامل ستيلتجس تعميماً غير مباشر لتكامل ريمان العادي المحدد ويعـرف على الشكل الآتي: ليكن $g(x), f(x)$ تابعين محدودين في المجال $[a, b]$. لنقسم المجال $[a, b]$ بالنقاط

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \qquad (20)$$

ولنضع $\lambda = \max_i \Delta x_i$ ولنختر في كل جزء $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ نقطة $\xi_i$ ولنحسب القيمة $f(\xi_i)$ للتابع $f(x)$ ثم نشكل جداء هذه القيمة بتزايد التابع $g(x)$ في المجال الموافق $[x_i, x_{i+1}]$ :

$$\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i)$$

وأخيراً نشكل المجموع لجميع تلك الجداءات:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta g(x_i) \qquad (21)$$

ويعرف هذا المجموع بمجموع ستيلتجس التكاملي. ويسمى المجموع المحدود لمجموع ستيلتجس التكاملي $\sigma$ عندما تسعى $\lambda = \max \Delta x_i$ إلى الصفر بتكامل ستيلتجس للتابع $f(x)$ بالنسبة للتابع $g(x)$ ونرمز لذلك على النحو:

$$I = \int_a^b f(x)\, d\, g(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta g(x_i) \qquad (22)$$

حيث إنّ النهاية هنا تفهم بذلك المعنى تماماً كما في حالة التكامل المحدد. وعلى وجه التحديد يقال إنّ العدد I هو تكامل ستيلتجس إذا وجد من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ عدد يوجد مثل $\delta > 0$ بحيث إنّه من أجل أي تقسيم للمجال $[a, b]$ إلى أقسام يكون من أجلها $\lambda < \delta$ فتتحقق العلاقة:

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

بغض النظر عن اختيار النقاط $\xi_i$ في المجالات المقابلة. في حالة وجود التكامل (22)فلنا أن نقول أيضاً إنّ التابع $f(x)$ قابل للمكاملة في المجال $[a, b]$ وفق التابع $g(x)$، يمكن للطالب أن يلاحظ أنّ الخلاف الوحيد (إلا أنّه الجوهري) للتعريف المعطى أعلاه عن التعريف المعلوم لتكامل ريمان ينحصر في أنّ $f(\xi_i)$ تضرب بـ $\Delta x_i$ وليس بالتزايد $\Delta g(x_i)$ وبذلك يتضح أنّ تكامل ريمان هو حالة خاصة من تكامل ستيلتجس وذلك عندما نأخذ بمثابة التابع $g(x)$ المتغير المستقل $x$:

$$g(x) = x$$

## الحالات العامة لوجود تكامل ستيلتجس

لنبين الشروط العامة لوجود تكامل ستيلتجس، مقتصرين على الحالة الي يكون فيها $g(x)$ متزايداً باطراد. من هنا ينتج أنه من أجل $b > a$ تكون جميع التزايدات $0 < \Delta g(x_i)$ وبإعادة الخطوات نفسها المتبعة في تكامل ريمان ومن أجل $0 < \Delta x_i$ وباستبدالها بـــ $\Delta g(x_i)$ نجد أنّ المجموعين:

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta g(x_i) \quad , \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta g(x_i)$$

حيث إن $M_i , m_i$ هما الحدان الأدنى الأعظمي والأعلى الأصغري للتابع $f(x)$ في المجال $[x_i , x_{i+1}]$ ويسمى هذان المجموعان بمجموعي داربو – ستيلتجس الأدنى والأعلى على الترتيب.

من الواضح أنه من أجل تقسيم ما يكون $s \le \sigma \le S$.

إضافة إلى أن $S, s$ يكونان حدوداً لمجاميع ستيلتجس $\sigma$. إن مجاميع داربو – ستيلتجس تتمتع بالخواص الآتية:

1) إنّ إضافة نقاط جديدة إلى نقاط تجزئة المجال $[a , b]$ تؤدي لتزايد مجموع داربو – ستيلتجس الأدنى وتناقص مجموع داربو – ستيلتجس الأعلى.

في الواقع، إن الحد المقابل للمجال $[x_i , x_{i+1}]$ في المجموع $s$ هو:

$$m_i \left[ g(x_{i+1}) - g(x_i) \right]$$

لتكن $c$ نقطة من المجال $[x_i , x_{i+1}]$، $x_i < c < x_{i+1}$ وبالتالي نجد أنّه بالمقابل يكون لدينا:

$$m_{i1} \left[ g(c) - g(x_i) \right] + m_{i2} \left[ g(x_{i+1}) - g(c) \right]$$

حيث

$$m_{i1} = \inf f(x) \quad ; \quad x_i \le x \le c$$
$$m_{i2} = \inf f(x) \quad ; \quad c \le x \le x_{i+1}$$

و بما أن $m_i \le m_{i1}$ و $m_i \le m_{i2}$ فإننا نجد:

$$m_{i1}\left[g(c)-g(x_i)\right]+m_{i2}\left[g(x_{i+1})-g(c)\right]\geq$$
$$\geq m_i\left[g(c)-g(x_i)\right]+m_i\left[g(x_{i+1})-g(c)\right]=$$
$$=m_i\left[g(x_{i+1})-g(x_i)\right]$$

وبالطريقة نفسها نبرهن على أن $S$ يتناقص.

**2)** إنّ مجموع داربو – ستيلتجس الأدنى لا يمكن أن يزيد عن أي مجموع أعلى ولو قابل ذلك تقسيماً آخر للمجال.

لنعرف تكاملي ستيلتجس الأدنى والأعلى على الشكل:

$$I_* = \sup\{s\} \quad , \quad I^* = \inf\{S\}$$

تبعاً لذلك فإننا نجد أن : $s \leq I_* \leq I^* \leq S$

أخيراً وبوساطة مجاميع داربو – ستيلتجس يسهل من أجل الحالة المدروسة إضافة الاختبار الرئيسي لوجود تكلمل ستيلتجس.

**مبرهنة ( 8 )**

الشرط اللازم والكافي لوجود تكامل ستيلتجس هو أن يكون

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0 \qquad (23)$$

أو

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} w_i \Delta g(x_i) = 0 \qquad (22')$$

**البرهان**

**لزوم الشرط :**

لنفرض أن التكامل $(22)$ موجود، عندئذٍ من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ وبحيث إنه من أجل $\lambda < \delta$ يكون $|\sigma - I| < \varepsilon$ أو $I-\varepsilon < \sigma < I+\varepsilon$ وذلك مهما تكن النقاط الكيفية $\xi_i$ من المجالات $[x_i, x_{i+1}]$. وبما أن المجموعين $s, S$ يمثلان من أجل التقسيم المعطى للمجال كما بينا الحدين الأدنى والأعلى للمجاميع التكاملية ولذلك فإنه من أجلهما يكون:

$$I-\varepsilon \leq s \leq S \leq I+\varepsilon$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{\lambda \to 0} s = I \quad , \quad \lim_{\lambda \to 0} S = I$$

وهو ما يبرهن (23).

**كفاية الشرط:**

لنفرض أن (23) محققة عندئذٍ من العلاقة $s \leq I_* \leq I^* \leq S$ ينتج أن $I_* = I^*$ وإذا رمزنا للقيمة المشتركة لها بـ $I$ لوجدنا أن : $s \leq I \leq S$.

وجدنا أنه من أجل أي تجزئة للمجال $[a, b]$ يكون : $s \leq \sigma \leq S$.

ووفقاً للعلاقة (23) وبفرض أن $\lambda = \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$ صغير بقدرٍ كافٍ يكون الفرق $(S-s)$أصغر من أي عدد $\varepsilon > 0$ مفروض وهذه الحالة تتحقق من أجل العددين المحصورين بينهما $I$ , $\sigma$ العلاقة:

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

أي أن $I$ نهاية لـ $\sigma$ وهو التكامل (21).

إذا رمزنا لاهتزاز (تذبذب) التابع في المجال $[x_i, x_{i+1}]$ بـ $w_i$ حيث:

$$w_i = M_i - m_i$$

فإنه يكون لدينا:

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta g(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i \Delta g(x_i)$$

و بالتالي فإن شرط وجود تكامل ستيلتجس يصبح $(22')$ بدلاً من (23) أي إنّ:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} w_i \Delta g(x_i) = 0$$

**صفوف حالات وجود تكامل ستيلتجس**

I – إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً وكان التابع $g(x)$ ذا تغير محدود على المجال $[a,b]$ فإن تكامل ستيلتجس.

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) \qquad (24)$$

يكون موجوداً.

**البرهان**

لنفرض أولاً أن التابع $g(x)$ متزايد باطراد عندئذٍ بتطبيق اختبار البند السابق فإنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ واستناداً للاستمرار المنتظم للتابع $f(x)$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث إنه في أي مجال مغلق ذي طول أقل من $\delta$ يكون اهتزاز التابع $f(x)$ أصغر من $\dfrac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$ و

$$\left|f(x_{i+1})-f(x_i)\right| < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \qquad \forall\ \left|x_{i+1}-x_i\right| < \delta$$

لنفرض أن المجال $[a,b]$ قد قسم كيفياً إلى أجزاء وبحيث إن $\lambda = \max\limits_{0\le i\le n-1} \Delta x_i < \delta$ عندئذٍ يكون جميع $w_i < \dfrac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$ و

$$\sum_{i=0} w_i\,\Delta g(x_i) < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \sum_i \left[g(x_{i+1})-g(x_i)\right] = \varepsilon$$

وهذا بدوره يؤدي إلى تحقق الشرط $(22')$ وبالتالي فإن التكامل موجود.

في الحالة العامة [illegible] $g(x)$ ذا تغير محدود فإنه يمثل في شكل فرق لتابعين متزايدين

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x)$$

وعندئذٍ وبالمقابل مع ذلك يتغير مجموع ستيلتجس الموافق للتابع $g(x)$:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g_1(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g_2(x_i) = \sigma_1 - \sigma_2$$

وتبعاً لما برهن أعلاه فإن $\sigma_1$ و $\sigma_2$ يسعيان إلى نهايتين محدودتين عندما $\lambda \longrightarrow 0$ وهو ما يتحقق بالنسبة لـ $\sigma$.

من الممكن تخفيف الشروط المفروضة على $f(x)$ إذا قوينا بالمقابل الشروط المفروضة على $g(x)$.

**II** – إذا كان التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة على المجال $[a, b]$ حسب ريمان وكان التابع $g(x)$ محققاً لشرط ليبيشتس

$$\left|g\left(\overline{x}\right)-g(x)\right| \leq \mathscr{L}\left(\overline{x}-x\right) \quad \left(\mathscr{L}=const\ , a \leq x < \overline{x} \leq b\right) \tag{25}$$

فإن التكامل (24) موجود.

من أجل أن تكون هناك إمكانية لتطبيق الاختبار الذي ذكرناه (السابق) سنفرض أولاً أن $g(x)$ لا يحقق الشرط (25) إلا أنه مطرد ( متزايد ) أيضاً.

استناداً إلى (25) من الواضح أن $\Delta g(x_i) \leq \mathscr{L}\ \Delta x_i$ وبالتالي فإن:

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i\ \Delta g(x_i) \leq \mathscr{L} \sum_{i=0}^{n-1} w_i\ \Delta x_i$$

و بالتالي فإن المجموع الأخير ينتهي إلى الصفر عندما $\lambda \longrightarrow 0$ لكون $f(x)$ قابلاً للمكاملة وفق ريمان وبالتالي فإن الطرف الأيسر يسعى إلى الصفر والشرط $(22')$ محقق والتكامل موجود.

في الحالة العامة إن التابع $g(x)$ المحقق لشرط ليبشتس (25) يمكننا أن نكتبه على الشكل:

$$g(x) = \mathscr{L} x - \left[\mathscr{L} x - g(x)\right] = g_1(x) - g_2(x)$$

من الواضح أن التابع $g_1(x) = \mathscr{L} x$ يحقق شرط ليبشتس وفي الوقت نفسه متزايد وكذلك الأمر بالنسبة لـ $g_2(x)$ و $g_2(x) = \mathscr{L} x - g(x)$ وذلك لأنه استناداً إلى (25) ومن أجل $a \leq x < \overline{x} \leq b$ لدينا:

$$g_2\left(\overline{x}\right) - g_2(x) = L\left(\overline{x}-x\right) - \left[g\left(\overline{x}\right) - g(x)\right] \geq 0$$

و

$$\left|g_2\left(\overline{x}\right) - g_2(x)\right| < \mathscr{L}\left(\overline{x}-x\right) + \left[g\left(\overline{x}\right) - g(x)\right] \leq 2\mathscr{L}\left(\overline{x}-x\right)$$

وبالتالي استنادا لما برهنا أعلاه يكون تكامل ستيلتجس موجودا.

III – إذا كان التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة بمفهوم ريمان وكان $g(x)$ ممثلاً في شكل تكامل تابع لحده الأعلى

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\, dt \tag{26}$$

حيث $\varphi(t)$ تابع قابل للمكاملة إطلاقاً في المجال $[a, b]$ . فإنّ التكامل (24) يكون موجوداً.

**البرهان**

ليكن $0 \le \varphi(t)$ عندئذٍ يكون $g(x)$ مطرداً ومتزايداً. إذا كان $\varphi(t)$ قابلاً للمكاملة بالمفهوم الذاتي (الخاص) وبالتالي فهو محدود:

$$|\varphi(t)| \le \mathscr{L}$$

فإنّه من أجل $a \le x \le \bar{x} \le b$ يكون لدينا:

$$|g(\bar{x}) - g(x)| = \left| \int_x^{\bar{x}} \varphi(t) dt \right| \le L(\bar{x} - x)$$

بهذا نجد أنّه في هذه الحالة يحقق التابع $g(x)$ شرط ليبشتس وبالتالي فإنّ التكامل موجود استناداً إلى (II).

لنفرض الآن انّ $\varphi(t)$ قابلٌ للمكاملة بالمفهوم غير الذاتي وسنقتصر على الحالة التي يكون فيها له نقطة شاذة وحيدة ولتكن $b$. قبل كل شيء مقابل كل عدد موجب $\varepsilon > 0$ نختار عدداً $\eta > 0$ بحيث يكون:

$$\int_{b-\eta}^{b} \varphi(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{2\Omega} \tag{27}$$

حيث $\Omega$ الاهتزاز ( التذبذب ) العام للتابع $f(x)$ في المجال المدروس.

لنقسم المجال $[a, b]$ كيفياً إلى أجزاء ولنشكل المجموع:

$$\sum = \sum_{i=0}^{n-1} w_i \ \Delta g(x_i)$$

لنقسم هذا المجموع إلى المجموعين $\sum = \sum' + \sum''$ الأول منهما يقابل المجالات المغلقة الواقعة كلياً في المجال المغلق $\left[a, b-\frac{\eta}{2}\right]$ وأما المجموع الثاني فيقابل المجالات المغلقة المتبقية وهي محتواة في المجال $[b-\eta, b]$.

إذا كان $\lambda = \max \Delta x_i < \frac{\eta}{2}$ وعندئذٍ واستناداً إلى (27) نجد:

$$\sum'' < \Omega \int_{b-\eta}^{b} \varphi(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

من ناحية أخرى وبما أنه في المجال المغلق $\left[a, b-\frac{\eta}{2}\right]$ يكون التابع $\varphi(t)$ قابلاً للمكاملة بالمفهوم الخاص ( الذاتي ) فإنه وفقاً لما برهنا أعلاه ومن أجل $\lambda$ صغير بقدرٍ كافٍ يكون المجموع $\sum'$ أصغر من $\frac{\varepsilon}{2}$ ومن هنا نستنتج $(22')$ وهو المطلوب.

في الحالة العامة عندما يكون التابع $\varphi(t)$ قابلاً للمكاملة إطلاقاً في المجال $[a, b]$ فإننا نستعرض التابعين

$$\varphi_1(t) = \frac{|\varphi(t)| + \varphi(t)}{2} \quad , \quad \varphi_2(t) = \frac{|\varphi(t)| - \varphi(t)}{2}$$

من الواضح أنّ هذين التابعين موجبان (ليسا سالبين) وقابلين للمكاملة في المجال $[a, b]$ كما أنّ:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$$

وبذلك تؤول هذه الحالة إلى الحالة المدروسة أعلاه.

**ملاحظة**

إذا كان التابع $g(x)$ مستمراً في المجال $[a, b]$ وكان مشتقه موجوداً في هذا المجال باستثناء عدد منتهٍ من النقاط إضافة إلى أن هذا المشتق قابلٌ للمكاملة (بالمفهوم الذاتي أو غير الذاتي) من $a$ إلى $b$ فإنه كما هو معلوم تتحقق العلاقة (26):

$$g(x)=g(a)+\int_a^b g'(t)\,dt$$

وإذا كان $g'(x)$ قابلاً للمكاملة فإنّه يمكننا تطبيق ما برهناه على التـابع $g(x)$ في (III).

**خواص تكامل ستيلتجس**

من تعريف تكامل ستيلتجس تنتج مباشرة الخواص التالية:

(1 $$\int_a^b dg(x)=g(b)-g(a)$$

(2 $$\int_a^b [f_1(x)\pm f_1(x)]\,dg(x)=\int_a^b f_1(x)\,dg(x)+\int_a^b f_2(x)\,dg(x)$$

(3 $$\int_a^b f(x)\,d[g_1(x)+g_2(x)]=\int_a^b f(x)\,dg_1(x)\pm\int_a^b f(x)\,dg_2(x)$$

(4 $$\int_a^b k\,f(x)\,d[\ell g(x)]=k\,\ell\int_a^b f(x)\,dg(x)\qquad (k,\ell=const)$$

وفقاً لهذا في الحالات 2) ,3) ,4) من وجود التكاملات في الطرف الأيمن ينتج وجود التكامل في الطرف الأيسر.

(5 $$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\int_a^c f(x)\,dg(x)+\int_c^b f(x)\,dg(x)$$

بفرض أن $a<c<b$ وأن التكاملات الثلاثة موجودة.

لبرهان هذه العلاقة يكفي فقط الاهتمام بتضمين النقطة $c$ في عداد نقاط تجزئة المجال $[a,b]$ وذلك عند تشكيل مجموع ستيلتجس التكاملي للتكامل $\int_a^b f\,dg$

سنذكر أولاً عدداً من الملاحظات المتعلقة بهذه العلاقة.

من وجود التكامل $\int_a^b f\,dg$: ينتج وجود التكـاملين $\int_a^c f\,dg$ و $\int_c^b f\,dg$ .

من أجل الانتقال إلى النهاية والتي بوَاسطتها ينـتج تكامـل سـتيلتجس مـن مجمـوع ستيلتجس يتحقق مبدأ التقارب لبولزانور كوشي. بهذه الـصورة مـن أجـل أي عـدد

$0 < \varepsilon$ معطى وتبعاً لوجود التكامل $\int_a^b f\, dg$ يمكن إيجاد عدد $0 < \delta$ بحيث إنّ أي مجموعين $\sigma$ و $\overline{\sigma}$ لستيلتجس والموافقين لـ $\delta > \overline{\lambda}, \lambda$ يكون فرقهما أصغر من $\varepsilon$ . إذا أقحمنا وفقاً لذلك النقطة $c$ في نقاط التقسيم وأخذنا نقاط التقسيم المتعلقة بالمجال $[c, b]$ نفسها في الحالتين فإنّ الفرق $\sigma - \overline{\sigma}$ يؤول إلى الفرق $\sigma_1 - \overline{\sigma_1}$ بين مجموعي ستيلتجس والمتعلقين بالمجال $[a, c]$ وذلك لأنّ الحدود الأخرى تختصر مع بعضها. بتطبيق هذا على المجال $[a, c]$ وعلى مجموعي ستيلتجس الموافقين له مبدأ التقارب نفسه نستنتج وجود التكامل $\int_a^c f\, dg$ . وبالمثل نتأكد من وجود التكامل $\int_b^c f\, dg$.

من الجدير بالذكر هنا الحقيقة التالية وهي أنه من وجود التكاملين $\int_a^c f\, dg$ و $\int_c^b f\, dg$ بشكل عام لا ينتج وجود التكامل $\int_a^b f\, dg$.

للتحقق من ذلك يكفي أن نسوق هنا مثالاً على ذلك. لنفرض أن التابعين $f(x)$ و $g(x)$ معرفان في المجال $[-1,1]$ بالعلاقتين:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad -1 \le x \le 0 \\ 1 & ; \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad -1 \le x < 0 \\ 1 & ; \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

بسهولة نجد أن التكاملين:

$$\int_{-1}^{0} f(x)\, dg(x) \qquad , \qquad \int_0^1 f(x)\, dg(x)$$

موجودان وكل منهما يساوي الصفر وذلك لأن مجاميع ستيلتجس المقابلة لها جميعها تساوي الصفر. من أجل التكامل الأول ينتج ذلك من كون $f(x)=0$ وأما من أجل التكامل الثاني فينتج ذلك من كون $g(x)$ ثابتاً وبالتالي فإن $\Delta g(x_i)=0$ في نفس الوقت التكامل

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dg(x)$$

غير موجود. في الواقع لنقسم المجال $[-1,1]$ إلى أقسام بحيث لا تكون نقطة الصفر نقطة من نقاط التقسيم ولنشكل المجموع:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta g(x_i)$$

إذا وقعت النقطة صفر في المجال $[x_k, x_{k+1}]$ بحيث إنّ $x_k < 0 < x_{k+1}$، فإنه في المجموع $\sigma$ يبقى حد واحد هو الحد $k$ وأما الحدود الأخرى فتكون أصفاراً ولهذا فإنّ: $\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i) = 0$ من أجل $i \neq k$ وهكذا فإنّ:

$$\sigma = f(\xi_k)\left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right] = f(\xi_k)$$

تبعاً لكون $\xi_k \geq 0$ أو $\xi_k > 0$ تكون $\sigma = 0$ أو $\sigma = 1$ وبالتالي فإنّه لا توجد نهاية لــ $\sigma$.

**التكامل بالتجزئة:**

من أجل تكاملات ستيلتجس تتحقق العلاقة:

$$\int_a^b f(x)\, d\, g(x) = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)\, d f(x) \qquad (28)$$

وذلك بفرض أنّ واحداً من التكاملين موجود الأمر الذي يؤدي إلى وجود التكامل الآخر.

وتحمل هذه العلاقة اسم علاقة التكامل بالتجزئة.

**البرهان**

لنفرض أنّ التكامل $\int_a^b g\, d f$ موجود. ولنقسم المجال $[a, b]$ إلى المجالات الجزئية $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ ولنختر بشكل كيفي في كل مجال جزئي نقطة $\xi_i$ بحيث إنّ:

$$a = x_0 \leq \xi_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{i-1} \leq \xi_{i-1} \leq x_i \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq \xi_{n-1} \leq x_n = b$$

إنّ مجموع ستيلتجس من أجل التكامل $\int_a^b f\,d\,g$ :

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\left[g(x_{i+1})-g(x_i)\right]$$

يمكن كتابته على الشكل:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i-1})g(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(x_i) =$$

$$= -\left\{ g(a)\,f(\xi_0) + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\left[f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})\right] - g(b)f(\xi_{n-1})\right\}$$

بإضافة وطرح العبارة

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)$$

من الطرف الأيمن نجد أنّ $\sigma$ تكتب على الشكل:

$$\sigma = f(x)g(x)\Big|_a^b - \{\, g(a)[f(\xi_0)-f(a)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\left[f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})\right] + g(b)[f(b)-f(\xi_{n-1})]\,\}$$

إنّ العبارة في القوسين الكبيرين تمثل مجموع ستيلتجس للتكامل $\int_a^b g\,d\,f$

(الذي فرضنا وجوده). وهذا المجموع يقابل تقسيم المجال $[a, b]$ بالنقاط.

$$a \le \xi_0 \le \xi_1 \le \ldots \le \xi_{i-1} \le \xi_i \le \ldots \le \xi_{n-1} \le b \qquad (29)$$

إذا أخذنا النقاط $x_i$ بمثابة نقاط مختارة في المجالات $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ $(i=1,\ldots,n-1)$ ومن أجل المجالين $[a, \xi_0]$ , $[\xi_{n-1}, b]$ أخذنا النقطتين $a$ , $b$ وإذا وضعنا كما هو معروف $\lambda = \max(x_{i+1}-x_i)$ فإنه من الواضح أن أطوال جميع المجالات الجزئية في (29) لا يزيد عن $2\lambda$. ومن أجل $\lambda \longrightarrow 0$ يسعى المجموع في القوسين المتوسطين إلى التكامل $\int_a^b g\,d\,f$

وبالتالي تكون نهاية $\sigma$ موجودة أي التكامل $\int_a^b f\,d\,g$ وهذا التكامل يعرف بالعلاقة (28).

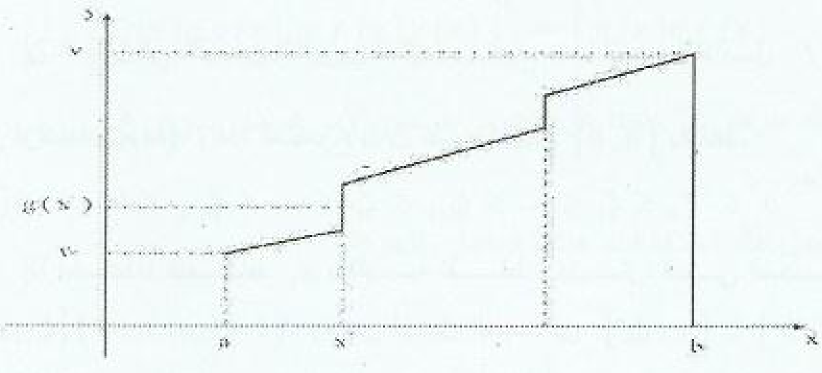
لنذكر هنا بشكل خاص الحقيقة المهمة التالية وهي إذا كان التابع $g(x)$ قابلاً للمكاملة في المجال $[a,b]$ بالنسبة للتابع $f(x)$ فإنّ التابع $f(x)$ يكون قابلاً للمكاملة بالنسبة لـ $g(x)$.

هذه الملاحظة تمكننا من إضافة سلسلة من الحالات الجديدة لوجود تكامل ستيلتجس إلى الحالات المدروسة سابقاً. وذلك بمبادلة الأدوار بين $f$ و $g$.

**إرجاع تكامل ستيلتجس إلى تكامل ريمان:**

لنفرض أنّ التابع $f(x)$ مستمر في المجال $[a,b]$ وأنّ $g(x)$ مطرد ومتزايد في هذا المجال عندئذٍ، وكما بيّن ليبيغ ، يؤول تكامل ستيلتجس $(S)\int_a^b f(x)\,d\,g(x)$ بوساطة التحويل $v=g(x)$ إلى تكامل ريمان.

في الشكل رسم منحني التابع $v=g(x)$.




في النقاط $x=x'$ التي يعاني فيها التابع $g(x)$ انقطاعاً ( لأننا لم نشترط في جميع الأمكنة أن $g(x)$ مستمر) نضيف إلى منحني التابع القطعة المستقيمة الشاقولية واصلين النقطتين $(x',g(x'-0))$ , $(x',g(x'+0))$ مشكلين منحنياً

مستمراً الذي يقابل كل قيمة لـ $v$ واقعة بين $v_0=g(a)$ و $V=g(b)$ بنقطة واحدة $x$ واقعة بين $a$ , $b$.

من الواضح أنّ التابع $x=g^{-1}(v)$ سيكون مستمراً ومطرداً متزايداً بالمعنى الواسع، ويمكننا النظر إليه كأنّه تابع عكسي للتابع $V=g(b)$.

على وجه التحديد ، إذا اقتصرنا فقط على تلك القيم لـ $v$ التي يأخذها التابع $v=g(x)$ من أجل تغير $x$ بين $a$ , $b$ فإنّ $x=g^{-1}(v)$ يكون تابعاً عكسياً له بالمفهوم العادي. أي أنّه تقابل $v$ بتلك القيمة لـ $x$ التي من أجلها $v=g(x)$.
لكن من مجال قيم $v$ $[g(x'-0)\ ,\ g(x'+0)]$:

المرتبط بانقطاع التابع $g(x)$، توجد فقط قيمة واحدة $v=v'=g(x')$ تقابل النقطة $x=x'$، وأما قيم $v$ في المجال المذكور فإنها لا تقابل أية قيم لـ $x$. إلا إننا أضفنا شرطياً لها القيمة $x=x'$ ، وهندسياً عُبّر عن ذلك بإضافة القطعة المستقيمة الشاقولية إلى منحني التابع $y=g(x)$.

**لنبرهن الآن على أنّ**

$$(S)\int_a^b f(x)\,d\,g(x)=(R)\int_{v_0}^{V} f\left(g^{-1}(v)\right)\,dv \qquad (30)$$

حيث إنّ التكامل الأخير يؤخذ بالمفهوم العادي والذي وجوده مضمون وذلك لأنّ التابع $g^{-1}(v)$ والتابع المركب $f\left(g^{-1}(v)\right)$ تابعان مستمران.

بغية البرهان على ذلك لنقسم المجال $[a,b]$ إلى أقسام بوساطة نقاط التقسيم

$$a=x_0\le x_1\le \ldots \le x_i\le x_{i+1}\le \ldots \le x_n=b$$

ولنشكل مجموع ستيلتجس

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left[g(x_{i+1})-g(x_i)\right]\ (*)$$

إذا وضعنا $v_i=g(x_i)$ $(i=0,1,\ldots,n)$ فإنّه سيكون لدينا:

---

(*) بغية السهولة نختار في المجال $[x_i,x_{i+1}]$ النقطة $x_i$.

$$v_0 < v_1 < \dots < v_i < v_{i+1} < \dots < v_n = V$$

وبما أنّ $x_i = g^{-1}(v_i)$ فإنّ $\sigma$ تكتب على الشكل:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} f\left(g^{-1}(v_i)\right) \Delta v_i \qquad (\Delta v_i = v_{i+1} - v_i)$$

ولهذه العبارة شكل مجموع ريمان للتكامل $\int_{v_0}^{V} f\left(g^{-1}(v)\right) dv$ لنلاحظ أنّه هنا لا يمكننا استنتاج المساواة (30) مباشرة وذلك لأنّه بالانتقال إلى النهاية وبالرغم من أنّه من أجل $\Delta x_i \longrightarrow 0$ $(\lambda \longrightarrow 0) \Leftarrow$ فإنّه يمكن ألاّ يسعى $\Delta v_i$ إلى الصفر، على سبيل المثال، إذا وجد بين الحدين $x_i$ , $x_{i+1}$ قيمة $x = x'$ (حيث يعاني التابع $g(x)$ انقطاعاً) قفزة لـ $g(x)$ ولذلك سنأتي إلى ذلك بشكل مغاير.

لدينا:

$$\int_{v_0}^{V} f\left(g^{-1}(v)\right) dv = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} f\left(g^{-1}(v)\right) dv$$

و

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} f(x_i)\, dv$$

ومنه نجد:

$$\sigma - \int_{v_0}^{V} f\left(g^{-1}(v)\right) dv = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} \left[f(x_i) - f\left(g^{-1}(v)\right)\right] dv$$

لنفرض الآن أنّ $\Delta x_i$ صغيرة بقدر كافٍ بحيث إنّ اهتزاز التابع $f(x)$ في جميع المجالات $[x_i, x_{i+1}]$ يكون أصغر من عدد موجب معطى $\varepsilon > 0$. بما أنه من أجل

$$v_i \le v \le v_{i+1}$$

يتضح أن

$$x_i \le g^{-1}(v) \le x_{i+1}$$

فإنّه في الوقت نفسه يكون:

$$\left| f(x_i) - f\left(g^{-1}(v)\right) \right| < \varepsilon$$

وفي هذه الحالة يكون:

$$\left| \sigma - \int_{v_0}^{V} f\left(g^{-1}(v)\right) dv \right| < \varepsilon \ (V - v_0)$$

بذلك نكون قد برهنا على أنّ:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_{v_0}^{V} f\left(g^{-1}(v)\right) dv$$

ومنه تنتج المساواة (30).

بغض النظر عن الأهمية النظرية للنتيجة التي توصلنا إليها إلا أنّها لا تعطينا طريقة عملية لحساب تكامل ستيلتجس.

**حساب تكامل ستيلتجس**

1- إذا كان التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة بمفهوم ريمان في المجال $[a, b]$ وكان التابع $g(x)$ ممثلاً بالتكامل

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\, dt$$

حيث إنّ التابع $\varphi(t)$ قابل للمكاملة إطلاقاً في المجال $[a, b]$ فإنّ:

$$(S)\int_a^b f(x)\ d\,g(x) = (R)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\, d(x) \qquad (31)$$

إنّ التكامل الأيمن (موجود) أما وجود تكامل ستيلتجس من أجل الفرض المذكور أعلاه فقد برهن في الفقرة السابقة. بذلك يتبقى علينا أن نحقق المساواة (31).

دون المس بعمومية المسألة يمكننا اعتبار التابع $\varphi(x)$ موجباً. لنشكل مجموع ستيلتجس

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\left[g(x_{i+1}) - g(x_i)\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i)\,\varphi(x)\,dx$$

وبما أنّه، من جهة ثانية، يمكننا أن نكتب:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

فإنّه يكون لدينا:

$$\sigma - \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(\xi_i) - f(x)\right]\varphi(x)\,dx$$

من الواضح أنّه من أجل $x_i \le x \le x_{i+1}$ تكون $\left| f(\xi_i) - f(x) \right| \le w_i$ حيث $w_i$ تذبذب التابع $f(x)$ في المجال $[x_i , x_{i+1}]$. من هذا ينتج التقدير التالي للفرق المذكور أعلاه.

$$\left| \sigma - \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \right| \le \sum_{i=0}^{n-1} w_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} w_i\,\Delta g(x_i)$$

بما أنّه من أجل $\lambda \longrightarrow 0$ يسعى المجموع الأخير إلى الصفر وبالتالي فإنّ:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

وهو ما يبرهن العلاقة (31).

2 - إذا كان التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة وفق مفهوم ريمان على المجال $[a, b]$ وكان $g(x)$ مستمراً في جميع نقاط المجال وقابلاً للاشتقاق هناك باستثناء عدد منته من النقاط وكان مشتقه $g'(x)$ قابلاً للمكاملة إطلاقاً في $[a, b]$ فإنّ:(*)

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx \qquad (32)$$

من المهم أن نلاحظ أنّ التكامل الأيمن في العلاقة (32) ينتج شكلياً من التكامل الأيسر إذا فهمنا الرمز $d\,g(x)$ حرفياً كتفاضل واستبدلناه بالعبارة $g'(x)\,dx$.

(*) نختار قيمة في النقاط التي لا يكون فيها موجوداً كيفية.

نأتي إلى الحالة التي يعاني فيها التابع $g(x)$ من انقطاعات (الحالة ذات الأهمية في التطبيقات العملية كما سنرى) لنستعرض تابع الانقطاع القياسي $\rho(x)$ المعرف بالعلاقة:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le 0 \\ 1 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

وهذا التابع يعاني من انقطاع من النوع الأول في النقطة $x = 0$ وإنّ قفزته تساوي $\rho(+0) - \rho(0) = 1$ ، كما أنّه في النقطة $x = 0$ مستمر من اليسار وفي باقي النقاط يكون مستمراً. إن للتابع $\rho(x - c)$ الانقطاع نفسه في النقطة $x = c$ من اليمين كما أنّ التابع $\rho(c - x)$ يعاني من انقطاع في النقطة $x = c$ من اليسار وقفزته فيها تساوي $(-1)$. لنفرض أنّ التابع $f(x)$ مستمر في النقطة $x = c$ ولنحسب التكامل:

$$(S)\int_a^b f(x)\, d\rho(x - c)\,;\, a \le c \le b \quad (c = b \Rightarrow (s)\int_a^b f(x)\, d\rho(x - c) = 0)$$

لنشكل مجموع ستيلتجس

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta\rho(x_i - c)$$

لنفرض أنّ النقطة $c$ واقعة في المجال $k$ : $x_k \le c < x_{k+1}$ وعندئذ $\Delta\rho(x_k - c) = 1$ ومن أجل $i \ne k$ من الواضح أنّ $\Delta\rho(x_i - c) = 0$ بذلك يؤول المجموع كلياً إلى حدٍ واحد $\sigma = f(\xi_k)$. ليكن الآن $\lambda \longrightarrow 0$ عندئذٍ وتبعاً لاستمرار التابع $f(x)$ يكون $f(\xi_k) \longrightarrow f(c)$ وبالتالي يوجد من أجل $(a \le c \le b)$

$$(S)\int_a^b f(x)\, d\rho(x - c) = \lim_{\lambda \to 0}(\sigma) = f(c) \qquad (33)$$

وبالمثل يمكن التأكد من أنّه من أجل $(a < c \le b)$ يكون:

$$(S)\int_a^b f(x)\, d\rho(c - x) = -f(c) \qquad (34)$$

من أجل $c=a$ يؤول التكامل إلى الصفر.

الآن أصبحنا قادرين على برهان نظرية أكثر شمولية مما ذكرناه في 2).

إذ إننا لن نفرض هنا أنّ التابع $g(x)$ مستمر.

**3 -** ليكن التابع $f(x)$ مستمراً في المجال $[a,b]$ ولنفرض أنّ للتابع $g(x)$ مشتقاً في هذا المجال باستثناء عدد منتهٍ من النقاط وهذا المشتق قابل للاستكمال إطلاقاً في $[a,b]$ ، وليكن للتابع $g(x)$ في مجموعة النقاط المنتهية العدد

$$a=c_0<c_1<\ldots<c_k<\ldots<c_m=b$$

انقطاعات من النوع الأول . عندئذٍ يكون تكامل ستيلتجس موجوداً ويعبر عنه بالعلاقة:

$$(S)\int_a^b f(x)\,d\,g(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx+f(a)[g(a+0)-g(a)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+f(b)[g(b)-g(b-0)] \quad (35)$$

لتبسيط الكتابة نضع ترميزاً لقفزات التابع $g(x)$ من اليمين إلى اليسار:

$$\alpha_k^+=g(c_k+0)-g(c_k) \qquad (k=0,1,\ldots,m-1)$$
$$\alpha_k^-=g(c_k)-g(c_k-0) \qquad (k=1,2,\ldots,m)$$

من الواضح أنّه من أجل $1\le k\le m-1$ يكون:

$$g(c_k+0)-g(c_k-0)=\alpha_k^++\alpha_k^-$$

لنشكل التابع المساعد

$$g_1(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+\,\rho(x-c_k)-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^-\,\rho(c_k-x)$$

الذي يتضمن في عبارته جميع انقطاعات التابع $g(x)$ وبذلك يكون الفرق $g_2(x)=g(x)-g_1(x)$ ، كما سنبين ، تابعاً مستمراً.

من أجل قيم $x$ المختلفة عن جميع $c_k$ استمرار التابع $g_2(x)$ لا يشكل شكاً وذلك لكون التابعان $g(x)$ و $g_1(x)$ مستمرين.

لنبرهن الآن على استمرار التابع $g_2(x)$ في النقطة $c_k$ $(k<m)$من اليمين.

إن جميع حدود المجموع $g_1(x)$ باستثناء الحد $\alpha_k^+ \rho(x-c_k)$ مستمر من أجل $x=c_k$ من اليمين ولهذا فإنه يكفي دراسة سلوك العبارة $g(x)-\alpha_k^+ \rho(x-c_k)$ من أجل $x=x_k$. هذه العبارة تأخذ القيمة $g(c_k)$ وهذه هي النهاية عندما $x \longrightarrow c_k+0$:

$$\lim_{x\to c_k+0}\left[g(x)-\alpha_k^+ \rho(x-c_k)\right]=g(c_k+0)-\alpha_k^+=g(c_k)$$

بالمثل نتأكد من استمرار التابع$g_2(x)$ في النقطة $c_k$ $(0<k)$ من اليسار.

بالتالي، إذا أخذنا النقطة $x$ (مختلفة عن جميع $c_k$) حيث للتابع $g(x)$ مشتق فيها فإنه بالقرب من هذه النقطة يحافظ$g_1(x)$ على قيمه ثابتة وبالتالي فإن للتابع $g_2(x)$ مشتقاً في تلك النقطة. إضافة إلى أن:

$$g_2'(x)=g'(x)$$

من أجل التابع المستمر $g_2(x)$ واستناداً إلى النظرية السابقة يكون تكامل ستيلتجس موجوداً

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg_2(x)=(R)\int_a^b f(x)\,dg_2'(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

بالمثل تماماً وبسهولة يمكن حساب التكامل ( انظر (33) و (31) )

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg_1(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+ .(S)\int_a^b f(x)\,d\rho(x-c_k)-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^- .(S)\int_a^b f(x)\,d\rho(c_k-x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+ f(c_k)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^- f(c_k)=$$

$$=f(a)\left[g(a+0)-g(a)\right]+\sum_{k=1}^{m-1}f(c_k)\left[g(c_k+0)-g(c_k-0)\right]+$$

$$+f(b)\left[g(b)-g(a)\right]$$

بجمع هاتين المساويتين نأتي إلى العلاقة (35). من البرهان نكون قد وجدنا تكامل ستيلتجس للتابع $f(x)$ وفق التابع

$$g(x)=g_1(x)+g_2(x)$$

**أمثلة**

**1-** باستخدام العلاقة (32) احسب التكاملات الآتية:

$$a)\ (S)\int_0^2 x^2 d\ln(1+x)=(R)\int_0^2 \frac{x^2}{1+x}dx==\left(\tfrac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)\right)\Big|_0^2=\ln 3$$

$$b)\ (S)\int_0^{\pi/2} x\,d\sin x=(R)\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-(R)\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

$$c)\ (S)\int_{-1}^{1} x\ d\,arc\,tgx=(R)\int_{-1}^{1} x\,\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-1}^{1}=0$$

**2 -** باستخدام العلاقة (35) احسب التكاملات الآتية:

$$a)\ \ (S)\int_{-1}^{3} x\,d\,g(x)\quad ;\quad g(x)=\begin{cases}0 & ;\ x=-1\\ 1 & ;\ -1<x<2\\ -1 & ;\ 2\le x\le 3\end{cases}$$

**الحل :**

التابع $g(x)$ يعاني من انقطاع بقفزة تساوي الواحد في النقطة $x=-1$ وبقفزة تساوي $(-2)$ في النقطة $x=2$ وفي باقي النقاط $g'(x)=0$ ولذلك فإنّ:

$$(S)\int_{-1}^{3} x\,dg(x)=(-1).1+2.(-2)=-5$$

$$b)\ \ (S)\int_0^2 x^2 dg(x)\quad ,\quad g(x)=\begin{cases}-1 & ;\ 0<x<\frac{1}{2}\\ 0 & ;\ \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\\ 2 & ;\ x=\frac{3}{2}\\ -2 & ;\ \frac{3}{2}<x\le 2\end{cases}$$

**الحل:**

في النقطة $x=\frac{1}{2}$ القفزة تساوي 1 وفي النقطة $\frac{3}{2}$ القفـزة تـساوي $(-2)$ (قيمة التابع $g$ في النقطـة $x=\frac{3}{2}$ لا تـؤثر فـي النتيجـة) وفـي بـاقي النقـاط $g'(x)=0$ ولذلك فإن:

$$(S)\int_{0}^{2} x^2 d\, g(x) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 . 1 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 . (-2) = -\frac{17}{4}$$

3 - باستخدام العلاقة (35) احسب التكاملات الآتية :

$$a)\ (S)\int_{-2}^{2} x\, dg(x)$$

$$b)\ (S)\int_{-2}^{2} x^2 dg(x)$$

$$c)\ (S)\int_{-2}^{2} \left(x^3+1\right) dg(x)$$

حيث:

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & ; \quad -2 \le x \le -1 \\ 2 & ; \quad -1 < x < 0 \\ x^2+3 & ; \quad 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

**الحل:**

للتابع $g(x)$ قفزتان في النقطة $x=-1$ و $x=0$ وكل منهما تـساوي (1) ومشتقه يعطى بالعلاقة:

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad -2 \le x < -1 \\ 0 & ; \quad -1 < x < 0 \\ 2x & ; \quad 0 < x \le 2 \end{cases}$$

ولذلك فإن:

$$a)\ (S)\int_{-2}^{2} x\, dg(x) = (R)\int_{-2}^{-1} x\, dx + (R)\int_{-2}^{-1} 2x^2\, dx + (-1).1 + 0.1 = \frac{17}{6}$$

و بالمثل نجد:

$$b)\ (S)\int_{-2}^{2} x^2\, dg(x) = \frac{34}{3} \qquad , \qquad c)\ (S)\int_{-2}^{2} \left(x^3+1\right) dg(x) = \frac{301}{20}$$

**التوضيح الهندسي لتكامل ستيلتجس**

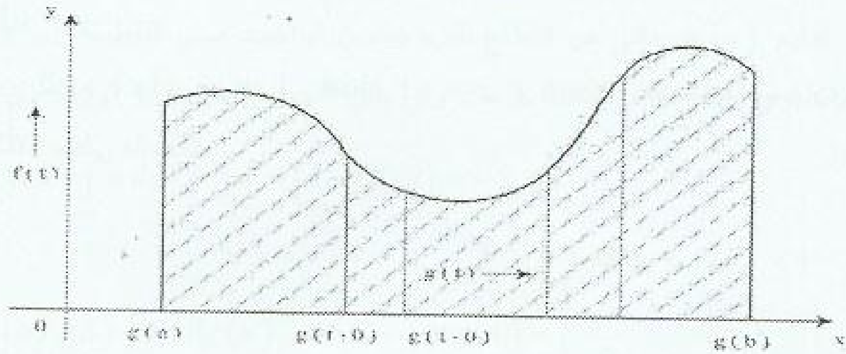
لنستعرض التكامل:

$$I = (S)\int_{a}^{b} f(t)\,dg(t) \tag{36}$$

مفترضين أن $f(t)$ تابع مستمر وموجب أما $g(t)$ فهو مطرد ومتزايد فقط (بالمعنى القوي)، ويمكن للتابع $g(t)$ أن يكون له انقطاعات (قفزات). إن جملة المعادلتين الوسيطيتين

$$x = g(t) \quad , \quad y = f(t) \quad ; \quad a \le t \le b \tag{37}$$

تمثلان منحنياً ما $(K)$ بشكل عام منقطع الشكل ( 2 ) إذا كان من أجل $t = t_0$ للتابع $g(t)$ قفزة بحيث إن $g(t_0-0) < g(t_0+0)$ فإن القيمتين النهائيتين هاتين لـ $x = g(t)$ يقابلهما قيمة نهائية واحدة لـ $y = f(t)$ هي $f(t_0)$. لنتمم المنحني $K$ بمجالات أفقية تصل زوج النقاط $\left(g(t_0-0), f(t_0)\right)$ و $\left(g(t_0+0), f(t_0)\right)$ المقابلة جميع قفزات التابع $g(t)$ انظر الشكل المجاور.



بذلك نحصل على منحنٍ مستمر $\mathscr{L}$. لنبين أن التكامل (36) يمثل مساحة الشكل المحصور بين ذلك المنحني $\mathscr{L}$ والمحور $ox$ والمستقيمين الشاقوليين $g(a)$ و $g(b)$ بغية هذا الأمر لنقسم المجال $[a,b]$ إلى أقسام بالنقاط:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b$$

وفي المقابل لهذه الأقسام نحصل على تجزئة للمجال $\left[g(a), g(b)\right]$ من المحور $ox$:

$$g(a) < g(t_1) < \ldots < g(t_i) < g(t_{i+1}) < \ldots g(b)$$

لنرمز بـ $m_i$ و $M_i$ للقيمتين الأصغرية والأعظمية للتابع $f(t)$ في المجال $[t_i, t_{i+1}]$، ولنشكل مجموعي ستيلتجس – داربو العلوي والسفلي:

$$s = \sum_i m_i \, \Delta g(t_i)$$

$$S = \sum_i M_i \, \Delta g(t_i)$$

بسهولة نرى أن المجموعين يمثلان مساحة الشكلين المؤلفين من مساحة المستطيلات داخل وخارج الشكل المظلل المحصور بينهما والذي يمثل المساحة المطلوبة.

بما أنه عندما تنتهي جميع $\Delta t_i$ إلى الصفر ينتهي المجموعان إلى نهاية مشتركة هي (36).

**حول القيمة الوسطى وبعض التقديرات**

**1)** لنفرض أنّ التابع $f(x)$ محدود في المجال $[a,b]$:

$$m \le f(x) \le M$$

وأنّ $g(x)$ تابع مطرد ومتزايد. إذا كان $\mathrm{I}$ هو تكامل ستيلتجس للتابع $f(x)$ وفق $g(x)$ فإنّه تتحقق العلاقة

$$\mathrm{I} = (S)\int_a^b f(x)\, d\, g(x) = \mu\left[g(b) - g(a)\right] \qquad (38)$$

حيث $m \le \mu \le M$

والتي تعرف باسم نظرية القيمة الوسطى لتكامل ستيلتجس.

للبرهان سننطلق من المتراجحتين الواضحتين من أجل مجموع ستيلتجس التكاملي $\sigma$:

$$m\left[g(b)-g(a)\right] \le \sigma \le M\left[g(b)-g(a)\right]$$

بالانتقال إلى النهاية نجد:

$$m\left[g(b)-g(a)\right] \le \mathrm{I} \le M\left[g(b)-g(a)\right] \qquad (39)$$

أو (*)

$$m \le \frac{\mathrm{I}}{g(b)-g(a)} \le M$$

لنرمز للنسبة بـ $\mu$ فنحصل على العلاقة المطلوبة.

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً في المجال $[a,b]$ فإننا نجد أنّ $\mu$ تمثل قيمة التابع في نقطة من نقاط ذلك المجال وتأخذ العلاقة (38) الشكل:

$$(S)\int_a^b f(x)\,d\,g(x)=f(\xi)\left[g(b)-g(a)\right] \;;\; a \le \xi \le b \qquad (40)$$

2) في التطبيقات العملية لتكامل ستيلتجس تعتبر الحالة الأكثر أهمية تلك الحالة التي يكون فيها $f(x)$ مستمراً أما التابع $g(x)$ فذو تغيرات محدودة. من أجل هذه الحالة يتحقق التقدير التالي لتكامل ستيلتجس.

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\,g(x)\right| \le MV \qquad (41)$$

حيث $M=\max\left|f(x)\right| \; a \le x \le b \qquad , \qquad V=\overset{b}{\underset{a}{V}}\, g(x)$

في الواقع من أجل مجموع ستيلتجس $\sigma$ يكون لدينا:

---

(*) نفرض أنّ $g(a)<g(b)$ وذلك لأنّ الحالة $g(b)=g(a)$ [ أي أنّ $g(x)=const$ ] ليست بذي أهمية: ويكون طرفا العلاقة (38) أصفاراً.

$$|\sigma| = \left| \sum_i f(\xi_i)\Delta g(x_i) \right| \le \sum_i |f(\xi_i)||\Delta g(x_i)| \le$$
$$\le M \sum_i |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \le MV$$

وبالانتقال إلى النهاية نأتي إلى العلاقة المطلوبة.

3) من هنا وفي حالة خاصة ينتج التقدير لمدى اقتراب المجموع $\sigma$ من تكامل ستيلتجس نفسه $\mathrm{I}$ (من أجل الافتراضات السابقة بالنسبة لـ $f$ و $g$). بتمثيل $\mathrm{I}, \sigma$ على الشكل:

$$\sigma = \sum_i f(\xi_i)\Delta g(x_i) = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i)\, dg(x)$$

$$\mathrm{I} = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dg(x)$$

بالطرح نجد:

$$\sigma - I = \sum_i \int_{x_i}^{x_i+1} \left[ f(\xi_i) - f(x) \right] d\, g(x)$$

وإذا رمزنا كما هو معتاد بـ $w_i$ لتذبذب التابع $f(x)$ في المجال $[x_i, x_{i+1}]$ نجد أن:

$$|f(\xi_i) - f(x)| \le w_i \quad ; x_i \le x \le x_{i+1}$$

وبتطبيق التقدير (41) على كل تكامل $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$ على انفراد سيكون لدينا:

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ f(\xi_i) - f(x) \right] d\, g(x) \right| \le w_i \overset{x_{i+1}}{\underset{x_i}{V}} g(x)$$

وإذا كان المجال $[a,b]$ مقسماً إلى أجزاء صغيرة بقدرٍ كافٍ بحيث إنّ جميع $\varepsilon > w_i$ حيث $0<\varepsilon$ معطى سابقاً فإننا نستنتج أنّ:

$$|\sigma - \mathrm{I}| \le \varepsilon \overset{b}{\underset{a}{V}} g(x) \tag{42}$$

1) لتكن التوابع $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\dots)$ مستمرة في المجال $[a,b]$ إضافة إلى أنّه من أجل $n \longrightarrow \infty$ تتقارب المتتالية بانتظام إلى نهايتها $f(x)$ : ( $f(x)$ مستمر أيضاً ):

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

وليكن التابع $g(x)$ تابعاً ذا تغيرات محدودة عندئذٍ يكون :

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,d\,g(x)=\int_a^b f(x)\,d\,g(x)$$

**البرهان**

من أجل أي عدد موجب $\varepsilon>0$ معطى يوجد عدد $N$ بحيث إنّه من أجل $N<n$ يكون من أجل جميع النقاط $x$:

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$$

واستناداً إلى (41) نجد من أجل $N<n$:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,d\,g(x)-\int_a^b f(x)\,d\,g(x)\right|=\left|\int_a^b\left[f_n(x)-f(x)\right]d\,g(x)\right|$$
$$\leq\ \varepsilon\ \overset{b}{\underset{a}{V}}\,g(x)$$

وبما أنّ $\varepsilon$ كيفي فإننا نجد المطلوب.

2) ليكن الآن التابع $f(x)$ مستمراً في المجال $[a,b]$ ولتكن جميع التوابع $g_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ ذات تغيرات محدودة في ذلك المجال إذا كانت التغيرات الكلية لهذه التوابع محدودة في مجموعتها:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\ g_n(x)\leq V\qquad (n=1,2,\dots)$$

وكانت $\{g_n(x)\}$ متقاربة إلى $g(x)$

$$g(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

فإنَّ :

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,d\,g_n(x) = \int_a^b f(x)\,d\,g(x)$$

**البرهان**

لنتأكد أولاً من أنّ التابع $g(x)$ هو أيضاً تابع ذو تغيرات محدودة . لنقسم المجال $[a,b]$ بصورة كيفية إلى أقسام بالنقاط:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_m = b$$

عندئذٍ سيكون لدينا (مهما يكن $n$)

$$\sum_i \left| g_n(x_{i+1}) - g_n(x_i) \right| \le \overset{b}{\underset{a}{V}} g_n(x) \le V$$

بالانتقال إلى النهاية هنا عندما $n \longrightarrow \infty$ نجد:

$$\sum_i \left| g(x_{i+1}) - g(x_i) \right| \le V$$

ومنه نجد أنّ:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} g(x) \le V$$

لنشكل مجاميع ستيلتجس

$$\sigma = \sum_i f(x_i)\Delta g(x_i) \quad , \quad \sigma_n = \sum_i f(x_i)\Delta g_n(x_i)$$

إذا فرضنا أنّ المجال $[a,b]$ مقسم إلى أقسام صغيرة بقدرٍ كافٍ بحيث إنّ تذبذب التابع $f(x)$ في كل قسم منها يكون أصغر من عدد معطى سابقاً $\varepsilon > 0$.
فإنّه استناداً إلى التقدير (42) ومن أجل جميع $n$ يكون:

$$\left| \sigma_n - \int_a^b f(x)\,d\,g_n(x) \right| \le \varepsilon V \quad ; \quad \left| \sigma - \int_a^b f(x)\,d\,g(x) \right| \le \varepsilon V \qquad (43)$$

من ناحية ثانية وبتثبيت التقسيم المختارتحت الشروط المذكورة فإنّه من الواضح أنّ $\sigma_n \to \sigma$ عندما $n \to \infty$ وهكذا فإنّه يوجدعدد $N$ بحيث أنّـــه مـــن أجـــل جميـــع $N < n$ يكون:

$$\left| \sigma_n - \sigma \right| < \varepsilon \tag{44}$$

ومن أجل تلك القيم لـــ $n$ سيكون لدينا استناداً إلى (43) و (44):

$$\left| \int_a^b f\, dg_n - \int_a^b f\, dg \right| \le \left| \int_a^b f\, dg_n - \sigma_n \right| + \left| \sigma_n - \sigma \right| + \left| \sigma - \int_a^b f\, dg \right| < (2V+1)\varepsilon$$

وهذا بدوره يؤدي إلى المطلوب.

**أمثلة وإضافات:**

**1)** بفرض أن التابع $g(x)$ مطرد ومتزايد ( بالمعنى القوي ) يمكن البرهان بالنـــسبة للأعداد $\xi$ الواردة في العلاقة (40) أنّه يمكن الحصول على متراجحة أكثـــر دقـــة $a < \xi < b$

في الواقع، لنرمز بـــ $m$ و $M$ لقيمتي التابع $f(x)$ الأعظم والأصـــغر فـــي المجال $[a,b]$ وباعتبار أن $M > m$ (*) بسهولة نجد مجالاً جزئياً مثـــل $[\alpha,\beta]$ مـــن ذلك المجال يكون فيها حدا التابع $f(x)$ هما $m < m'$ و $M' < M$ وبالتالي فإن:

$$m\left[g(\beta)-g(\alpha)\right] < m'\left[g(\beta)-g(\alpha)\right] \le (S)\int_\alpha^\beta f\, dg \le$$
$$\le M'\left[g(\beta)-g(\alpha)\right] < M\left[g(\beta)-g(\alpha)\right]$$

بكتابة متراجحة مماثلـــة لـــــ (39) مـــن أجـــل المجـــالين $[a,\beta]$ و $[\beta,b]$ وبجمعهما مع ما سبق نحصل على علاقة بديلة لـــ (39) ومتراجحة أكثر دقة:

$$m\left[g(b)-g(a)\right] < I < M\left[g(b)-g(a)\right]$$

---

(*) من أجل $m = M$ التابع $f(x)$ يؤول إلى ثابت ويمكن أخذ القيمة كيفية.

وبحيث إن العدد $\mu=\dfrac{I}{g(b)-g(a)}$ يقع بالتأكيد بين $m$ و $M$ وعندئذٍ يوجد عدد مثل $\xi$ تأكيداً بين $a$ و $b$ ومن أجله يكون $\mu=f(\xi)$. وهو المطلوب.

2) باستخدام العلاقة

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x)=(R)\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \quad ; \quad g(x)=c+\int_a^x \varphi(t)\,dt$$

وعلاقة التكامل بالتجزئة ونظرية القيمة الوسطى من أجل تكاملات ستيلتجس فإنه بسهولة يمكن إيجاد نظرية القيمة الوسطى الثانية للتكاملات العادية.

هكذا ليكن $f(x)$ قابلاً للمكاملة بمفهوم ريمان و $g(x)$ مطرد ومتزايد في المجال $[a,b]$ (*) لنعرف التابع:

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx \qquad (a\le x\le b)$$

وهو تابع مستمرّ والآن يكون لدينا على التتالي:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &=\int_a^b g(x)\,dF(x)=g(x)F(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\,dg(x)=\\ &=g(b)F(b)-F(\xi)\left[g(b)-g(a)\right]=\\ &=g(a)F(\xi)+g(b)\left[F(b)-F(\xi)\right]=\\ &=g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx \qquad (a\le\xi\le b)\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

إذا كان $g(x)$ مطرداً ومتزايداً (بالمعنى القوي) فإنه استناداً إلى ما برهن في 1) فإنه من أجل القيم $\xi$ يمكن التأكد من أن $a<\xi<b$.

3) لنبرهن على أنه إذا كان في النقطة $x=c$ أحد التابعين $f$ أو $g$ مستمراً في تلك النقطة وفي الوقت نفسه كان التابع الآخر في جوار لتلك النقطة محدوداً فإن وجود

---

(*) الحالة التي يكون فيها $g(x)$ متناقصا بسهولة يمكن إرجاعها إلى الحالة المدروسة.

التكاملين $(S)\int_a^c f(x)\,dx$ و $(S)\int_c^b f(x)\,dx$ يـؤدي إلـى وجـود التكامـل $(S)\int_a^b f(x)dx$.

بغية هذا الأمر لنلاحظ أنه عند تشكيل مجموع ستيلتجس $\sigma$ إذا ضُمنت النقطة $c$ في عداد نقاط التقسيم فإن المجموع $\sigma$ يكون تجمع مجموعين متماثلين مـن أجـل المجالين الجـزئيين $[a,c]$ و $[c,b]$ مـن أجـل $\lambda = \max \Delta x_i \longrightarrow 0$ ينتهـي المجموع إلى مجموع التكاملين $\int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg$.

لتكن الآن النقطة $c$ ليست في عداد نقاط التقسيم . بإضافة هذه النقطة إلى نقاط التقسيم ننتقل من المجموع $\sigma$ إلى مجموع جديد $\overline{\sigma}$ والذي من أجله نعلم أن من أجل $\lambda \longrightarrow 0$ يكون له النهاية المذكورة بهذا الشكل يكفـي البرهـان علـى أن الفـرق $\sigma - \overline{\sigma}$ يسعى إلى الصفر عندما $\lambda \longrightarrow 0$.

لنفرض أنَ النقطة $c$ واقعة في المجال $[x_k, x_{k+1}]$ عندئذٍ يختلف المجموع $\overline{\sigma}$ عن المجموع $\sigma$ فقط بأنه بدلاً من الحد $f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$ يأتي الحدان

$$f(\xi')[g(c) - g(x_k)] + f(\xi'')[g(x_{k+1}) - g(c)]$$

حيـث إن $\xi'$ و $\xi''$ نقطتـان كيفيتـان محققتـان للـشروط : $x_k \le \xi' \le c$ و $c \le \xi'' \le x_{k+1}$. بغية التبسيط نضع $\xi' = \xi'' = c$ فنجد أن العبـارة الأخيـرة تأخـذ الشكل:

$$f(c)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

و بالتالي فإن:

$$\sigma - \overline{\sigma} = [f(\xi_k) - f(c)][g(x_{k+1}) - g(x_k)] \qquad (45)$$

و عندما $\lambda \longrightarrow 0$ فإن واحداً من الحدين في الطرف الأيمن لا متناهي إلـى الصفر أما الثاني فمحدود وبالتالي $\sigma - \overline{\sigma} \longrightarrow 0$ وهو المطلوب.

4) إذا كان للتابعين $f(x)$ و $g(x)$ انقطاعان في النقطة نفسها $x=c$ $(a \le c \le b)$ فإن تكامل ستيلتجس

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) \qquad (46)$$

لا يكون موجوداً.

للبرهان على ذلك سنميز حالتين:

أولاً : ليكن $a<c<b$ والنهايتان $g(c-0)$ و $g(c+0)$ غير متساويتين، عندئذٍ حين تشكيل مجموع ستيلتجس لن نعتبر النقطة $c$ في عداد نقاط التقسيم ولنفرض أن $x_k<c<x_{k+1}$ باختيار مرة $\xi_k \ne c$ وفي المرة الأخرى تأخذ $c$ بمثابة $\xi_k$ ولنشكل المجموعين $\sigma$ و $\overline{\sigma}$ اللذين فرقاهما يؤول إلى (45). بتقريب نقاط التقسيم سيكون لدينا

$$g(x_{k+1})-g(x_k) \longrightarrow g(c+0)-g(c-0) \ne 0$$

بالإضافة إلى ذلك يمكن اختيار $\xi_k$ بحيث يكون الفرق $f(\xi_k)-f(c)$ بالقيمة المطلقة أكبر من ثابت موجب . وعندئذٍ إن الفرق $\sigma-\overline{\sigma}$ لا يسعى للصفر وبالتالي فإن التكامل لا يمكن أن يكون موجوداً.

إذا كان $g(c-0)=g(c+0)$ إلا أن القيمتين مختلفتان عن $g(c)$ ( انقطاع قابل للإصلاح ) (*) فإننا نضمن النقطة $c$ في عداد نقاط التقسيم. لتكن $c=x_k$. إذا كان للتابع $f(x)$ على سبيل المثال، انقطاع في النقطة $x=c$ من اليمين، فإننا نشكل كما سبق المجموعين $\sigma$ و $\overline{\sigma}$ اللذين يختلفان فقط باختيار $\xi_k$: من أجل $\sigma$ النقطة $\xi_k$ تأخذ كيفية بين $x_k=c$ و $x_{k+1}$، وأما بالنسبة $\overline{\sigma}$ فإنه بمثابة $\xi_k$ نأخذ $c$ وكما سبق تكون لدينا العلاقة (45).

5) ليكن التابع $f(x)$ مستمراً و $g(x)$ ذو تغيرات محدودة في المجال $[a,b]$.

---

(*) إلى هذه الحالة تنسب الحالة إما $c=a$ و $g(a+0)$ مختلف عن $g(a)$، وأما $c=b$ و $g(b-a)$ مختلف عن $g(b)$.

بالاستناد إلى التقدير (25) يُبرهن استمرار تكامل ستيلتجس:

$$I(x)=\int_{a}^{x} f(x)\,dg(x)$$

بالنسبة للحد الأعلى المتغير $x$ في النقطة $x_0$ حيث $g(x)$ مستمر.

هذا ينتج مباشرة من المتراجحة:

$$\left|I(x_0+\Delta x)-I(x_0)\right|=\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f\,dg\right|\le \max_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|.\overset{x_0+\Delta x}{\underset{x_0}{V}} g(x)$$

إذا أخذنا بعين الاعتبار أن التغير $\overset{x}{\underset{a}{V}} g(x)$ مستمر في النقطة $x_0$.

# مسائل وتمارين الملحق

1- ليكن كل من التابعين $G\,,F$ ذوي تغير محدود على المجال $[a,b]$ .

I ) برهن أنّ التابع $FG$ ذو تغير محدود على $[a,b]$ وأنّ

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}[FG] \le \sup_{a\le x\le b}|G(x)|\,.\,\overset{b}{\underset{a}{V}}[F] + \sup_{a\le x\le b}|F(x)|\,.\,\overset{b}{\underset{a}{V}}[G]$$

II ) برهن على أنّه إذا وجد عدد موجب مثل $\alpha$ وبحيث إنّ $|G(x)| \ge \alpha$ من أجل جميع $x\in[a,b]$ فإنّ حاصل القسمة $\dfrac{F}{G}$ يكون تابعاً ذا تغير محدود على المجال $[a,b]$.

2- احسب التغير الكلي للتابع $F$ على المجال الموافق إذا كان:

I ) $F(x) = \sin x \quad , \quad 0\le x\le 2\pi$

II ) $F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x=0 \\ 1-x & ; \quad x\in(0,1) \\ 4 & ; \quad x=1 \end{cases}$

3- اكتب على شكل فرق تابعين مطردين غير متناقصين:

I ) $F(x) = x^4 \quad ; \; x\in[-1,1]$

II ) $F(x) = |\cos x| \quad ; \; x\in[0\,,2\pi]$

4 -

I ) برهن على أنّه إذا كان التابع مشتقاً محدوداً على المجال $[a,b]$ فإنّه يكون تابعاً ذا تغير محدود.

II) برهن أنّ التابع

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x=0 \\ x^2\sin\dfrac{1}{x} & ; \quad x\neq 0 \end{cases}$$

ذو تغير محدود على المجال $[0,1]$.

-5 برهن أنّ التابع

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = 0 \\ x \sin\dfrac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \end{cases}$$

ليس ذا تغير محدود على المجال $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$.

6 - ليكن $F$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$ وأنّه قابل للاشتقاق على $[a,b]$ باستثناء عدد منتهٍ من النقاط وليكن $F'$ قابلاً للمكاملة وفق ريمان على $[a,b]$. برهن أنّ $F$ ذو تغير محدود على المجال $[a,b]$ وأنّ:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}[F] = \int_a^b |F'(x)|\,dx$$

-7 ليكن التابع

$$y = \begin{cases} 0 & ; \quad x = 0 \\ x^2 \sin\dfrac{1}{x^2} & ; \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

برهن أنّ هذا التابع قابل للاشتقاق على المجال $[0,1]$ إلا أنّ مشتقه غير قابل للمكاملة وفق ليبيغ على ذلك المجال.

8 - احسب التكامل: $\int_a^b f(x)\,dF(x)$ إذا كان:

1) $f(x) = x \quad , \quad F(x) = \cos x \quad ; \quad x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

2) $f(x) = \sin x \quad , \quad F(x) = |x| \quad ; \quad x \in [-1,1]$

3) $f(x) = x^3 + 1 \quad , \quad F(x) = \begin{cases} x+2 & ; \quad x \in [-2,-1] \\ 2 & ; \quad x \in [-1,0] \\ x^2+3 & ; \quad x \in [-1,0] \end{cases}$

4) $$f(x)=x \quad , \quad F(x)=\begin{cases} 1 & ; \quad x=1 \\ n & ; \quad x\in(n-1,n] \end{cases}$$

حيث $a=1\,,\,b=N\in\mathbb{N}$ .

9 - ليكن $F$ تابعاً مطرداً غير متناقص على $[0,1]$ احسب النهايتين:

1) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-nx^2}\,dF(x)$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^n x+\sin^n x\right)dF(x)$$

# *References* المراجع العلمية


1- Aleksandrov P. SIntroduction to Set Theory and General Topology, Moscow. NAUKA 1977 367 PP (Rssian).

2- Berezansky, Y. M, Sheftel, Z, G, Us. G. F. Functional Analysis, Vol I Translated from the Russian. Birkhauser verlay 1990; 432 p p

3- Halmos, P. R., Measure Theary, Springer – verlag 1974. 308 p p.

4- Barra G. de. Measure Theory and Integration. wiley Eastern Limited. London 1991; 239 p p .

5- Kolomogorov. A. N, Fomin. S. V., Measure, Lebesgue, Integrals, and Hilbert Space. Moscow, Translated from Russian, New York and London 1961, 147 p p .

6- Kolmogorov, A.N., Fomin, S. V. Elements of the theory of Functious and Functional Analysis,(Russian ). Moscow.1989.712 p p.

7- Nathanson, M. E. Introduction to Measure and Integration. New York: Addison – Wesley , 1953

8- Soo B.C,Lebesgue Integration.2 ed.Springer – verlag. 1994. 264 p p.

# جدول المصطلحات العلميّة

A

| | |
|---|---|
| absolute convergence | التقارب المطلق |
| algebra of sets | جبر المجموعات |
| $\sigma$ – algebra | □ - الجبر |
| almost every where (a . e) | تقريباً في كل مكان |
| almost uniform convergence | تقارب منتظم في كل مكان |

B

| | |
|---|---|
| Borel | بوريل |
| measurable function | تابع قيوس بوريلي |
| measure | قياس بوريلي |
| set | مجموعة بوريلية |

C

| | |
|---|---|
| Cantor | كانتور |
| set | مجموعة كانتور |
| function | تابع كانتور |
| Cartesian product | جداء ديكارتي |
| Complete measure | قياس تام |
| Completion of a measure | إتمام القياس |
| Convergence | تقارب |
| almost every where | تقريباً في كل مكان |
| in measure | بالقياس |
| in the mean of order p | بالوسط من المرتبة |
| Countable set | مجموعة عدودة |
| Countable subadditivity | نصف جمعية عدودة |
| Countably additive | جمعية عدودة |

D

| | |
|---|---|
| De Morgan's Laws | قانون دي مورغان |
| Darboux sums | مجاميع داربو |
| De composition | نشر |
| in Hahn's Sense | بمفهوم هان |

| | |
|---|---|
| of a charge in Jordan's sense | للشحنة بمفهوم جوردان |
| Direct integral | تكامل مباشر |
| Direct product of | جداء مباشر |
| measurable spaces | لفضاءات قيوسة |
| measure spaces | لفضاءات ذات قياس |
| **E** | |
| Egorov's Theorem | مبرهنة إيغوروف |
| Euclidean space | الفضاء الإقليدي |
| Extended real number | المحور الحقيقي الممدد |
| Extension of a funtion | ممدد تابع |
| of a measure | قياس |
| **F** | |
| Fatou's Lemma | توطئة فاتو |
| Fubini's theorem | مبرهنة فوبيني |
| Function | تابع |
| Cantor's - | كانتور |
| Integrable - | كمول |
| Lebesgue - | ليبيغي |
| measurable - | قيوس |
| of bounded variation | ذو تغير محدود |
| simple - | بسيط |
| step - | خطوة |
| subadditive - | نصف جمعي |
| Fundamental seguences | متتالية أساسية |
| Fundamental in measure | أساسية بالقياس |
| **G** | |
| Generated algebra | الجبر المولّد |
| $\sigma -$ algebra | □- الجبر |
| algebra ring | الحلقة |
| $\sigma -$ ring | □- الحلقة |

H

| | |
|---|---|
| Hölder inequality | متراجحة هولدر |

I

| | |
|---|---|
| Indefinite integral | تكامل غير محدد |
| In fimum | الحد الأدنى الأعظمي |
| Integrable | كمول |
| Intervals | مجال |
| Iterated limit | نهاية مكررة |
| Iterated integral | تكامل |

J

| | |
|---|---|
| Jump Function | تابع قفزة |
| Jordan decomposition | نشر جوردان |

L

| | |
|---|---|
| Lebesgue | ليبيغ |
| - stieltjes integral | تكامل ليبيغ - استيلتجس |
| - stieltjes measure | قياس ليبيغ – استيلتجس |
| Integrable function | تابع كمول وفق ليبيغ |
| measurable Function | تابع قيوس وفق ليبيغ |
| summable Function | تابع جمعي وفق ليبيغ |
| Theorem | مبرهنة |
| convergence | تقارب وفق ليبيغ |
| Limiting point of a set | نقطة النهاية لمجموعة |
| Lower Darboux Sum | مجموع داربو الأدنى |
| Luzin's theorem | مبرهنة لوزين |

M

| | |
|---|---|
| Measurable | قيوس - |
| - function | تابع |
| - rectangle | مستطيل |
| - space | فضاء |
| Measure space | فضاء ذو قياس |
| Measure of set | قيلس مجموعة |
| Measure of charge | قياس شحنة |

| | |
|---|---|
| Minkowski's ineguality | متراجحة مينوفسكي |
| Monotone class of sets | صف مطرد من المجموعات |

N

| | |
|---|---|
| Negative part of a function | القسم السالب لتابع |
| Non - measurable set | مجموعة غير قيوسة |
| Negative varittion of charge | تغير سالب للشحنة |

O

| | |
|---|---|
| Open set | مجموعة مفتوحة |
| Outer measure | القياس الخارجي |

P

| | |
|---|---|
| Partitions | تجزئات |
| Positive part of a function | القسم الموجب لتابع |
| Positive variation of a function | تغير موجب لتابع |
| Product measure | قياس جداء |
| Product of measurable spaces | جداء فضاءات قيوسة |
| Product space | فضاء جداء |

R

| | |
|---|---|
| Rectangle | مستطيل |
| Riemann's theorem | مبرهنة ريمان |
| Rieszs theorem | مبرهنة ريس |
| Ring of sets | حلقة من المجموعات |

S

| | |
|---|---|
| Scalar product | جداء سلمي |
| Section of set | مقطع مجموعة |
| Sequence | متتالية |
| Cauchy | كوشي |
| Monotone decreasing | متناقصة باطراد |
| Montone increasing | متزايدة باطراد |
| Set | مجموعة |
| Borel - | بوريلية |
| Closed - | مغلقة |

| | |
|---|---|
| Summable Function | تابع جمعي |

T

| | |
|---|---|
| Total variation of a Function | تغير كلي للتابع |
| of a measure | للقياس |

U

| | |
|---|---|
| Uniform convergence | تقارب منظم |
| Upper Darboux sum | مجموع داربو الأعلى |

V

| | |
|---|---|
| Variation of a bounded function | تغيّر تابع محدود |
| a negative function | تابع سالب |
| a positive Function | تابع موجب |

Z

| | |
|---|---|
| Zorn's Lemma | توطئة زورن |

تم تدقيق الكتاب علمياً من قبل:

الدكتور شحادة الأسدي

الدكتور حسن نقار

الدكتور محمد خير أحمد

المدقق اللغوي

الدكتور ظافر اليوسف

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة

لمديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

University of Aleppo Puplication
Faculty of Science

# Measure Theory

Prof. Dr. SHAHADEH AL-ASSADI
*Department of Mathematics*
*University of Aleppo*

Dr. GHADA ALI JOUJA
*Department of Mathematics*
*University of Damascus*

*Academic Year*

*2009 - 2010*

1220382

سعر المبيع للطلاب
١٧٥ ل.س