Inverse Hyperbolic Functions
الدوال الزائدية العكسية
Math 111
Lecture 12

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

تعريف : معكوس الجيب الزائدي :
الدالة

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

أحادية و شاملة و لذا يوجد دالة عكسية لها ويرمز لها بالرمز

$$\sinh^{-1} x$$

تعريف : معكوس الجيب الزائدي :
الدالة

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

أحادية و شاملة و لذا يوجد دالة عكسية لها ويرمز لها بالرمز
$\sinh^{-1} x$

$$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

تعريف : معكوس الجيب الزائدي :
الدالة

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

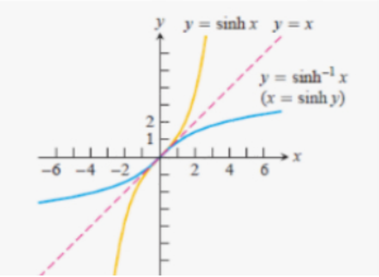
أحادية و شاملة و لذا يوجد دالة عكسية لها ويرمز لها بالرمز
$\sinh^{-1} x$

$$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

$$\sinh y = x \Leftrightarrow y = \sinh^{-1} x$$

بيان الدالة

$$y = \sinh^{-1} x$$



تعريف : معكوس جيب التمام الزائدي :

الدالة cosh ليست أحادية على مجالها $\mathbb{R}$ ولذا فليس لها معكوس ، ولكن

تعريف : معكوس جيب التمام الزائدي :

الدالة cosh ليست أحادية على مجالها $\mathbb{R}$ ولذا فليس لها معكوس ، ولكن

$$\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$$

أحادية و شاملة و لذا يوجد لها دالة عكسية ويرمز لها بالرمز

$$\cosh^{-1} x$$

تعريف : معكوس جيب التمام الزائدي :

الدالة $\cosh$ ليست أحادية على مجالها $\mathbb{R}$ ولذا فليس لها معكوس ، ولكن

$$\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$$

أحادية و شاملة و لذا يوجد لها دالة عكسية ويرمز لها بالرمز

$\cosh^{-1} x$

$$\cosh^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty).$$

تعريف : معكوس جيب التمام الزائدي :

الدالة cosh ليست أحادية على مجالها $\mathbb{R}$ ولذا فليس لها معكوس ، ولكن

$$\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$$

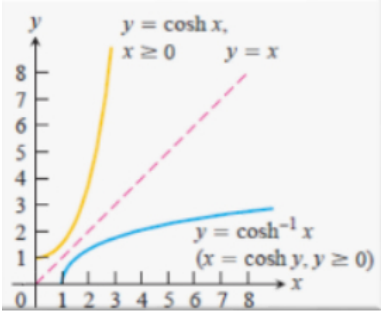
أحادية و شاملة و لذا يوجد لها دالة عكسية ويرمز لها بالرمز
$\cosh^{-1} x$

$$\cosh^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty).$$

$$\cosh y = x \Leftrightarrow y = \cosh^{-1} x$$

بيان الدالة

$$y = \cosh^{-1} x$$



تعريف : معكوس الظل الزائدي :
الدالة

$$\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

تقابلية و لذا يوجد دالة عكسية لها ويرمز لها بالرمز

$$\tanh^{-1} x$$

تعريف : معكوس الظل الزائدي :
الدالة

$$\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

تقابلية و لذا يوجد دالة عكسية لها ويرمز لها بالرمز
$\tanh^{-1} x$

$$\tanh^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}.$$

تعريف : معكوس الظل الزائدي :
الدالة

$$\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

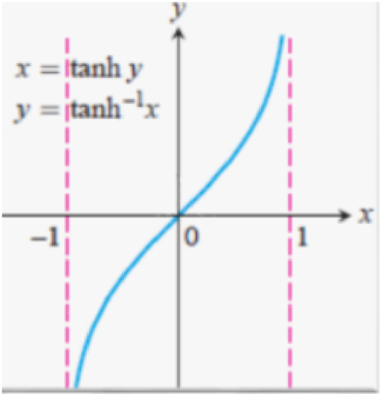
تقابلية و لذا يوجد دالة عكسية لها ويرمز لها بالرمز
$\tanh^{-1} x$

$$\tanh^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}.$$

$$\tanh y = x \Leftrightarrow y = \tanh^{-1} x$$

بيان الدالة

$$y = \tanh^{-1} x$$



معكوسات الدوال الزائدية الأخرى:

معكوسات الدوال الزائدية الأخرى:

$$\coth^{-1} : \mathbb{R} - [-1, 1] \to \mathbb{R} - \{0\}.$$

معكوسات الدوال الزائدية الأخرى:

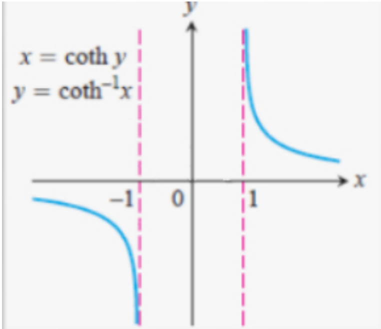
$$\coth^{-1} : \mathbb{R} - [-1,1] \to \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\coth y = x \Leftrightarrow y = \coth^{-1} x$$

معكوسات الدوال الزائدية الأخرى:

$$\coth^{-1} : \mathbb{R} - [-1, 1] \to \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\coth y = x \Leftrightarrow y = \coth^{-1} x$$



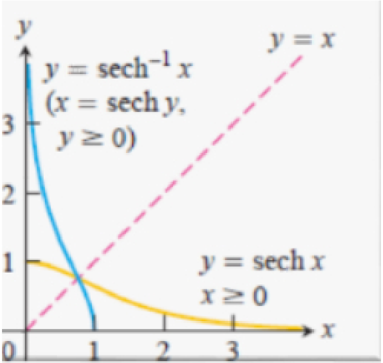
$$\operatorname{sech}^{-1} : (0, 1] \to [0, \infty).$$

$$\operatorname{sech}^{-1} : (0, 1] \to [0, \infty).$$

$$\operatorname{sech} y = x \Leftrightarrow y = \operatorname{sech}^{-1} x$$

$$\operatorname{sech}^{-1} : (0, 1] \to [0, \infty).$$

$$\operatorname{sech} y = x \Leftrightarrow y = \operatorname{sech}^{-1} x$$



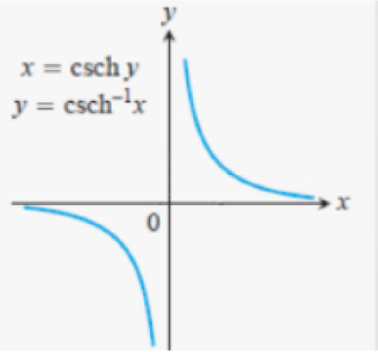
$$\operatorname{csch}^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\operatorname{csch}^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\operatorname{csch} y = x \Leftrightarrow y = \operatorname{csch}^{-1} x$$

$$\operatorname{csch}^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\operatorname{csch} y = x \Leftrightarrow y = \operatorname{csch}^{-1} x$$



مبرهنة :

$$\sinh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}),\ \forall x \in \mathbb{R}\ (١)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}),\ \forall x \in [1,\infty)\ (٢)$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ \forall x \in (-1,1)\ (٣)$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]\ (٤)$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right),\ \forall x \in (0,1]\ (٥)$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ (٦)$$

اشتقاق الدوال الزائدية العكسية:

مبرهنة:

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (١)$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ (x \in (1,\infty)) \quad (٢)$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}, \ (x \in (-1,1)) \quad (٣)$$

$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}, \ (x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]) \quad (٤)$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \ (x \in (0,1)) \quad (٥)$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}, \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (٦)$$

Examples

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

$$(1)y = \sinh^{-1}(x^3 + 4) \ ,$$

Examples

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = \sinh^{-1}(x^3 + 4) \ ,$$

$$(2) y = \ln(\cosh^{-1} x).$$

Examples

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = \sinh^{-1}(x^3 + 4) \ ,$$

$$(2) y = \ln(\cosh^{-1} x).$$

$$(3) y = \sinh^{-1}(\tan x).$$

تكامل الدوال الزائدية :

مبرهنة :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (١)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (٢)$$ حيث $x > a$.

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (٣)$$ حيث $|x| < a$.

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (٤)$$ حيث $|x| > a$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C \quad (٥)$$ حيث $|x| < a$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{-1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C \quad (٦)$$ حيث $|x| \neq 0$.

Examples

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{25+9x^2}} dx \ ,$$

Examples

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{25+9x^2}}dx \ ,$$

$$(2) \int \frac{e^x}{16-e^{2x}}dx.$$

Exercices

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = \sinh^{-1}(e^x) \ ,$$

Exercices

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = \sinh^{-1}(e^x) \ ,$$

$$(2) y = \sqrt{\cosh^{-1} x}.$$

Exercices

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = \sinh^{-1}(e^x) \ ,$$

$$(2) y = \sqrt{\cosh^{-1} x}.$$

$$(3) y = x \sinh^{-1}(\frac{1}{x}).$$

Exercices

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = \sinh^{-1}(e^x) \ ,$$

$$(2) y = \sqrt{\cosh^{-1} x}.$$

$$(3) y = x \sinh^{-1}(\frac{1}{x}).$$

$$(4) y = \cosh^{-1}(\ln(4x)).$$

Exercices

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1)\, y = \sinh^{-1}(e^x) \ ,$$

$$(2)\, y = \sqrt{\cosh^{-1} x}.$$

$$(3)\, y = x \sinh^{-1}(\frac{1}{x}).$$

$$(4)\, y = \cosh^{-1}(\ln(4x)).$$

$$(5)\, y = \frac{1}{\sinh^{-1} x^2}.$$

Exercices

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{81-16x^2}} dx \ ,$$

Exercices

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{81-16x^2}}dx \ ,$$

$$(2) \int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx.$$

Exercices

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{81-16x^2}} dx \ ,$$

$$(2) \int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx.$$

$$(3) \int \frac{2}{5-3x^2} dx \ ,$$

Exercices

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1)\int \frac{1}{\sqrt{81-16x^2}}dx \ ,$$

$$(2)\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx.$$

$$(3)\int \frac{2}{5-3x^2}dx \ ,$$

$$(4)\int \frac{1}{x\sqrt{9-x^4}}dx.$$

Thanks for listening.