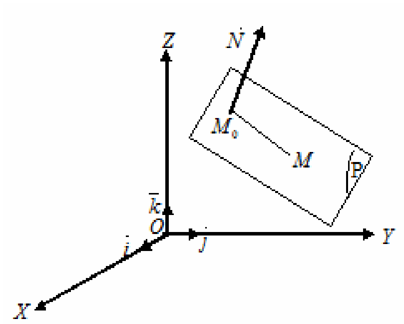
الفصل الثاني
المستوي في الفراغ

من المعلوم أنَّ المستوي في الفراغ يتعين بـــ :

1- مستقيمين متقاطعين
2- مستويين متوازيين
3- ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة
4- مستقيم ونقطة خارجة عنه

2-1- معادلة مستوٍ يمر من نقطة معلومة ويعامد شعاعاً معلوماً

لتكن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة معلومة ولنمرر منها مستوياً P يعامد الشعاع $\overrightarrow{N}(p,q,r)$ ، هذا الشعاع يسمى بالشعاع الناظم على المستوي **(أي شعاع عمودي على مستوٍ ما يسمى ناظم هذا المستوي)** ؛ حيث p,q,r أمثال توجيه أو وسطاء توجيه منحى الناظم .



الشكل (12)

لإيجاد معادلة المستوي P نختار نقطة مثل $M(x,y,z)$ متحولة على هذا المستوي (الشكل 12) . ففي جميع أوضاع النقطة Mفي هذا المستوي يكون :

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{N}$$

وبالتالي : $\overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{N} = 0$

نسمي هذه المعادلة بالمعادلة الشعاعية للمستوي الذي يمر من نقطـــة معلومـــة ويعامـــد شعاع معلوم .

بما أنَّ : $\overrightarrow{N}(p,q,r)$ و $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ فيمكننا أن نعبِّر عن هذه المعادلة تحليلياً بالشكل :

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0$$

هذه المعادلة تسمى بالشكل النموذجي للمستوي P .

بفك الأقواس نجد : $$px+qy+rz-(px_0+qy_0+rz_0)=0$$

وإذا فرضنا أنَّ : $$h=-(px_0+qy_0+rz_0)$$

يصبح لدينا : $$px+qy+rz+h=0$$

إذا رمزنا للطرف الأيسر من هذه المعادلة بـــ $P(X,Y,Z)$ فيمكننا عندئذٍ أن نكتب :

$$P(X,Y,Z)\equiv px+qy+rz+h=0$$

وهي المعادلة العامة للمستوي الذي يمر من نقطة معلومة ويعامد شعاع معلوم .

نلاحظ أنَّ المعادلة العامة للمستوي عبارة عن معادلة خطية في المتحولات x,y,z . والعكس صحيح كل معادلة خطية في المتحولات x,y,z من الشكل $px+qy+rz+h=0$ هي معادلة مستوي .

مثال 1 : اكتب معادلة المستوي الذي يمر من النقطة $M_0(1,-1,2)$ ويعامد المستقيم المار بالنقطتين $B(5,2,0)$, $A(0,1,3)$.

الحل : إنَّ منحى شعاع الناظم للمستوي معيَّن بالشعاع $\overrightarrow{AB}$ وبالتالي فوسطاء توجيهه هي :

$$p=x_2-x_1=5\ ,\ q=y_2-y_1=1\ ,\ r=z_2-z_1=-3$$

أي أنَّ : $$\vec{N}=\overrightarrow{AB}=(5,1,-3)$$

ولإيجاد معادلة المستوي المطلوب هناك طريقتان :

الطريقة الأولى : باستخدام الشكل النموذجي :

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0\Rightarrow 5(x-1)+1(y+1)-3(z-2)=0$$
$$\Rightarrow 5x+y-3z+2=0$$

الطريقة الثانية : باستخدام الشكل العام :

$$px+qy+rz+h=0\Rightarrow 5x+y-3z+h=0$$

بقي علينا إيجاد قيمة الثابت h .

بما أنَّ المستوي المطلوب يمر من النقطة $M_0(1,-1,2)$ فهذه النقطة تحقق معادلة المستوي . أي أنَّ :

$$5(1)+(-1)-3(2)+h=0 \quad\Rightarrow\quad h=2$$

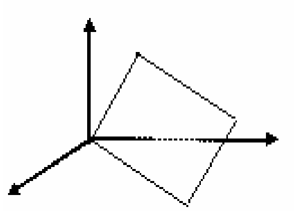
وبالتالي فالمعادلة المطلوبة تصبح بالشكل : $$5x+y-3z+2=0$$

2-2- بعض المستويات الخاصة

لقد رأينا أنَّ المعادلة العامة للمستوي هي :

$$P(X,Y.Z)\equiv px+qy+rz+h=0$$

في هذه المعادلة :

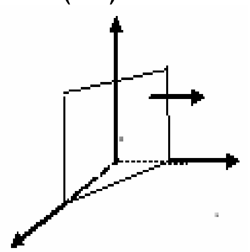


(1)

1) إذا كان $h=0$ فالمعادلة تصبح بالشكل :

$$P(X,Y.Z)\equiv px+qy+rz=0$$

وهي معادلة مستوٍ يمر من مبدأ الإحداثيات .



(2)

2) إذا كان $r=0$ فالمعادلة تصبح بالشكل :

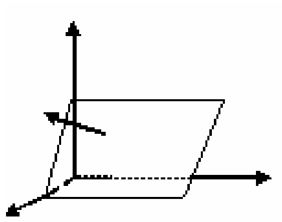
$$P(X,Y.Z)\equiv px+qy+h=0$$

وهي معادلة مستوٍ يوازي المحور OZ

(يعامد المستوي OXY) وذلك لأنَّ

وسطاء توجيه الناظم هي $\vec{N}(p,q,0)$

وبالتالي : $\vec{N}\perp OZ\Rightarrow OZ\,//\,P(X,Y,Z)$



(3)

3) إذا كان $q=0$ فالمعادلة تصبح بالشكل :

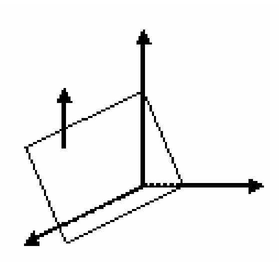
$$P(X,Y.Z)\equiv px+rz+h=0$$

وهي معادلة مستوٍ يوازي المحور OY

(يعامد المستوي OXZ) وذلك لأنَّ

وسطاء توجيه الناظم هي $\vec{N}(p,0,r)$

وبالتالي : $\vec{N}\perp OY\Rightarrow OY\,//\,P(X,Y,Z)$



(4)

4) إذا كان $p=0$ فالمعادلة تصبح بالشكل :

$$P(X,Y.Z)\equiv qy+rz+h=0$$

وهي معادلة مستوٍ يوازي المحور OX

(يعامد المستوي OYZ)وذلك لأنَّ

وسطاء توجيه الناظم هي $\vec{N}(0,q,r)$

وبالتالي : $\vec{N}\perp OX\Rightarrow OX\,//\,P(X,Y,Z)$

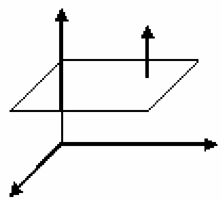
5) إذا كان $p = q = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل :

$$P(X,Y.Z) \equiv rz + h = 0 \;\Rightarrow\; z = -\frac{h}{r}$$

وهي معادلة مستوٍ يوازي المستوي OXY ويبعد عن مبدأ الإحداثيات باتجاه z بالمقدار الثابت $-\frac{h}{r}$

بالفعل فوسطاء توجيه الناظم هي $\overrightarrow{N}(0,0,r)$

وبالتالي : $\overrightarrow{N} // OZ \Rightarrow OXY // P(X,Y,Z)$



(5)

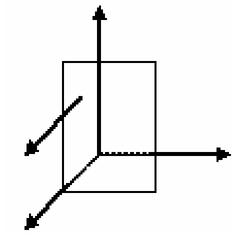
6) إذا كان $q = r = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل :

$$P(X,Y.Z) \equiv px + h = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{h}{p}$$

وهي معادلة مستوٍ يوازي المستوي OYZ ويبعد عن مبدأ الإحداثيات باتجاه x بالمقدار الثابت $-\frac{h}{p}$

بالفعل فوسطاء توجيه الناظم هي $\overrightarrow{N}(p,0,0)$

وبالتالي : $\overrightarrow{N} // OX \Rightarrow OYZ // P(X,Y,Z)$



(6)

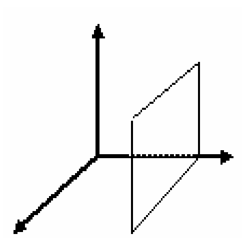
7) إذا كان $p = r = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل :

$$P(X,Y.Z) \equiv qy + h = 0 \;\Rightarrow\; y = -\frac{h}{q}$$

وهي معادلة مستوٍ يوازي المستوي OXZ ويبعد عن مبدأ الإحداثيات باتجاه x بالمقدار الثابت $-\frac{h}{q}$

بالفعل فوسطاء توجيه الناظم هي $\overrightarrow{N}(0,q,0)$

وبالتالي : $\overrightarrow{N} // OY \Rightarrow OXZ // P(X,Y,Z)$

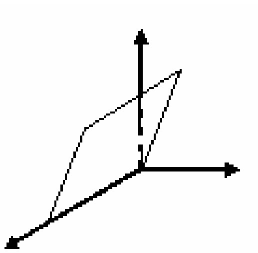


(7)

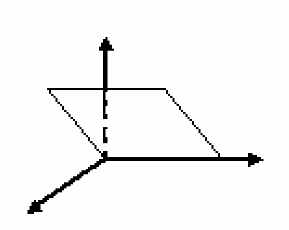
8) إذا كان $p = h = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل :

$$P(X,Y.Z) \equiv qy + rz = 0$$

وهي معادلة مستوٍ يمر من مبدأ الإحداثيات ويوازي المحور OX (ينطبق عليه) .



(8)



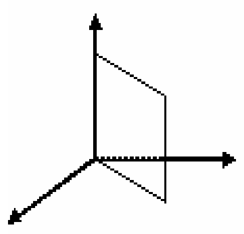
(9)

9) إذا كان $q = h = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل :

$$P(X,Y.Z) \equiv px + rz = 0$$

وهي معادلة مستوٍ يمر من مبدأ الإحداثيات

ويوازي المحور OY (ينطبق عليه) .



(10)

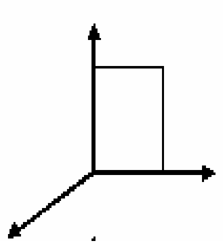
10) إذا كان $r = h = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل :

$$P(X,Y.Z) \equiv px + qy = 0$$

وهي معادلة مستوٍ يمر من مبدأ الإحداثيات

ويوازي المحور OZ (ينطبق عليه) .

11) إذا كان $q = r = h = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل :



(11)

$$P(X,Y.Z) \equiv px = 0$$

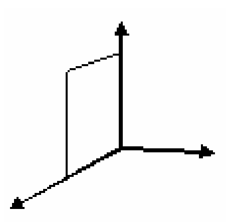
أو $x = 0$ ؛ حيث $p \neq 0$

وهي معادلة مستوً ينطبق على المستوي

المشكل من المحورين OYو OZ أي

هي معادلة المستوي OYZ .

12) إذا كان $p = r = h = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل :



(12)

$$P(X,Y.Z) \equiv qy = 0$$

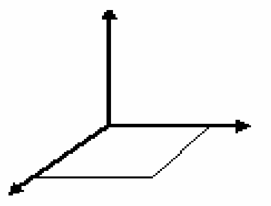
أو $y = 0$ ؛ حيث $q \neq 0$

وهي معادلة مستوٍ ينطبق على المستوي

المشكل من المحورين OXو OZ أي

هي معادلة المستوي OXZ .

13) إذا كان $p = q = h = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل :



(13)

$$P(X,Y.Z) \equiv rz = 0$$

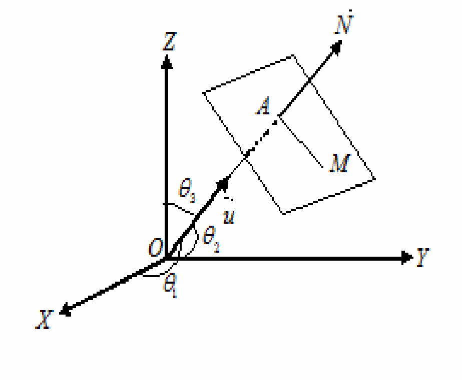
أو $z = 0$ ؛ حيث $r \neq 0$

وهي معادلة مستوٍ ينطبق على المستوي

المشكل من المحورين OXو OY أي

هي معادلة المستوي OXY .

2-3- المعادلة الناظمية لمستوٍ



الشكل (13)

لتكن النقطة A هي المسقط القائم لمبدأ الإحداثيات على المستوي P ، ولنفرض أنَّ $|\overrightarrow{OA}| = d$ وليكن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ شعاع الواحدة المحمول على شعاع الناظم $\overrightarrow{ON}$ والموجه دوماً باتجاه $\overrightarrow{OA}$ ، (الشكل 13) .

إنَّ إحداثيات النقطة A هي :

$A(d\alpha, d\beta, d\gamma)$

حيث :

$$x_0 = d\cos\theta_1 \quad , \quad y_0 = d\cos\theta_2 \quad , \quad z_0 = d\cos\theta_3$$

إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في المستوي P فإنَّ :

$$\overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$$

ونعبِّر عن هذه المعادلة تحليلياً بالشكل الآتي :

$$\alpha(x-d\alpha)+\beta(y-d\beta)+\gamma(z-d\gamma)=0$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-d=0$$

وهي المعادلة الناظمية للمستوي .

تجدر الملاحظة هنا أنَّ المعادلة الناظمية لمستوٍ لها صفتان أساسيتان هما :

1- الحد الأخير الثابت سالب حتماً .

2- مجموع مربعات أمثال المجاهيل تساوي الواحد .

والسؤال الآن : ما هي العلاقة بين المعادلة العامة والمعادلة الناظمية للمستوي ؟

إنَّ الإجابة عن هذا السؤال ينتج من العلاقة بين وسطاء توجيه منحى الناظم وجيوب تمام توجيهه ، وبالتالي إذا كانت :

$$P(X,Y.Z) \equiv px+qy+rz+h=0$$

المعادلة العامة لمستوٍ ما ، فإنه بتقسيم طرفيها على : $|\vec{N}| = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$

نحصل على :

$$\frac{px}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}+\frac{qy}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}+\frac{rz}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}+\frac{h}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=0$$

ولكن :

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\alpha \ , \ \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\beta \ , \ \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\gamma$$

بالتعويض نجد :

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\frac{h}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=0$$

لكننا نعلم أنَّ : $h=-(px_0+qy_0+rz_0)$

أي أنَّ :

$$h=-(\overrightarrow{N}.\overrightarrow{OA})=-\left|\overrightarrow{N}\right|.\left|\overrightarrow{OA}\right|=-\left|\overrightarrow{N}\right|.d$$

$$; \quad \left|\overrightarrow{N}\right|=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$$

نعوض عن h فنجد : $\alpha x+\beta y+\gamma z-d=0$

ملاحظة : بما أننا فرضنا أنَّ d هو البعد الهندسي لمبدأ الإحداثيات عن المستوي ، فهو مقدار موجب ، لكن h ليست كذلك . لذا وجب علينا عند الانتقال من المعادلة العامة للمستوي إلى معادلته الناظمية ، التقسيم على :

$$\left|\overrightarrow{N}\right|=\sqrt{p^2+q^2+r^2} \quad ; \quad h<0$$

$$-\left|\overrightarrow{N}\right|=-\sqrt{p^2+q^2+r^2} \quad ; \quad h>0$$

الخلاصة : للانتقال من الشكل العام لمعادلة مستوٍ إلى الشكل ألناظمي نقسم على $\pm\left|\overrightarrow{N}\right|$

ولحساب بعد مبدأ الإحداثيات عن المستوي P فإننا نطبق الدستور :

$$d=\frac{h}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

مثال 2 : اكتب المعادلة الناظمية للمستوي :

$$P(X,Y.Z)\equiv x-2y+2z-3=0$$

الحل : لدينا من المعادلة العامة للمستوي :

$$\left|\overrightarrow{N}\right| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$$

وبما أنَّ : $h = -3 < 0$ ، فإننا نقسم على(3) ، فنحصل على :

$$\alpha = \frac{1}{3} \ , \ \beta = \frac{-2}{3} \ , \ \gamma = \frac{2}{3} \ , \ d = \frac{3}{3} = 1$$

والمعادلة الناظمية تأخذ الشكل الآتي :

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0$$

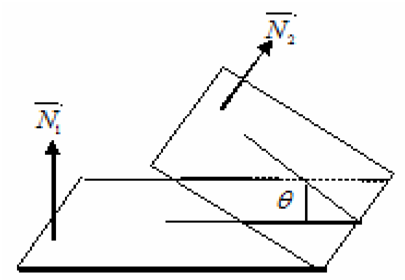
2-4- الزاوية بين مستويين

ليكن المستويان المتقاطعان :

$$P_1(X,Y,Z) \equiv p_1x + q_1y + r_1z + h_1 = 0$$
$$P_2(X,Y,Z) \equiv p_2x + q_2y + r_2z + h_2 = 0$$

ولنوجد الزاوية بينهما ،(الشكل 14) ؟

إذا كان $\overrightarrow{N_1}(p_1, q_1, r_1)$ شعاع ناظم المستوي الأول ، وكان $\overrightarrow{N_2}(p_2, q_2, r_2)$ شعاع ناظم المستوي الثاني ، فإنَّ الزاوية بين المستويين تساوي الزاوية بين ناظميهما .



الشكل (14)

ويكون :

$$\overrightarrow{N_1}.\overrightarrow{N_2} = \left|\overrightarrow{N_1}\right|.\left|\overrightarrow{N_2}\right|\cos\theta$$

ومنه :

$$\cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{N_1}.\overrightarrow{N_2}\right|}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|.\left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{\left|p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2\right|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}.\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}} \ ; \cos\theta \geq 0$$

وإذا كان المستويان متعامدان فإنَّ ناظميهما يكونا أيضاً متعامدين ، أي أنَّ :

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{N_1} \perp .\overrightarrow{N_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{N_1}..\overrightarrow{N_2} = 0 \Rightarrow$$

$$p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$$

وهو شرط تعامد مستويين .

أما إذا توازى مستويان فإنَّ ناظميهما يكونا أيضاً متوازيين ، أي أنَّ :

$$P_1 // P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{N_1} //.\overrightarrow{N_2} \Leftrightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \lambda$$

وهو شرط توازي مستويين ، والذي يمكن كتابته بالشكل الآتي :

$$p_1 = \lambda p_2 \ \ , \ q_1 = \lambda q_2 \ \ , \ r_1 = \lambda r_2$$

وينطبق المستويان إذا كانا متوازيين ، ولهما نقطة مشتركة .

من شروط التوازي يمكن أن نكتب معادلتي المستويين المتوازيين :

$$P_1 \equiv \lambda(p_2 x + q_2 y + r_2 z) + h_1 = 0$$
$$P_2 \equiv (p_2 x + q_2 y + r_2 z) + h_2 = 0$$

وبما أنَّ النقطة (x, y, z) مشتركة بين المستويين فإحداثياتها تحقق معادلتي المستويين .

بضرب معادلة P_2 بـــ $(-\lambda)$ وجمعها مع معادلة P_1 نجد :

$$h_1 - \lambda h_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{h_1}{h_2}$$

بالتعويض في شرط التوازي نحصل على شرط انطباق مستويين وهو :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

مثال 3 : أوجد الزاوية الكائنة بين المستويين :

$$P_1 \equiv 3x - y + z - 1 = 0$$
$$P_2 \equiv x + 2y - z + 5 = 0$$

الحل : نلاحظ أنَّ ناظم المستوي الأول هو $\overrightarrow{N_1}(3,-1,1)$ وناظم المستوي الثـــاني هو $\overrightarrow{N_2}(1,2,-1)$. لذلك :

$$\cos\theta = \frac{|3-2-1|}{\sqrt{9+1+1}.\sqrt{1+4+1}} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

هذا يعني أنَّ المستويان متعامدين .

مثال 4 : أثبت أنَّ المستويين :

$$x + 2y - 3z - 5 = 0$$
$$2x + 4y - 6z - 1 = 0$$

متوازيان ، ثمَّ أوجد البعد بينهما ؟

الحل : بما أنَّ ناظم المستوي الأول هو $\overrightarrow{N_1}(1,2,-3)$ وناظم المستوي الثاني هو $\overrightarrow{N_2}(2,4,-6)$. فإننا نلاحظ أنَّ شرط التوازي محقق ، أي أنَّ : $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}$

لإيجاد البعد ين المستويين نحسب بعد كل منهما عن مبدأ الإحداثيات ، لذلك نكتب معادلتي المستويين بالشكل ألناظمي فنحصل على :

$$\frac{1}{\sqrt{14}}x+\frac{2}{\sqrt{14}}y-\frac{3}{\sqrt{14}}z-\frac{5}{\sqrt{14}}=0 \qquad ; \; d_1=\frac{5}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{2}{2\sqrt{14}}x+\frac{4}{2\sqrt{14}}y-\frac{6}{2\sqrt{14}}z-\frac{1}{2\sqrt{14}}=0 \; ; \; d_2=\frac{1}{2\sqrt{14}}$$

وهكذا فالبعد بين المستويين هو :

$$d=|d_1-d_2|=\left|\frac{5}{\sqrt{14}}-\frac{1}{2\sqrt{14}}\right|=\frac{9}{2\sqrt{14}}$$

ملاحظة : كان بالإمكان حل المثال السابق بطريقة ثانية بأنْ نأخذ نقطة اختيارية من أحد المستويين ونحسب بعدها الهندسي عن المستوي الآخر .

ملاحظة : إذا توازى مستويان ، واختلفت إشارات جيوب تمام توجيه ناظميهما ، فإنَّ البعد بينهما يساوي مجموع بعديهما عن المبدأ . أما إذا توافقت بالإشارة ، فالبعد بينهما يساوي القيمة المطلقة للفرق بين بعديهما عن المبدأ .

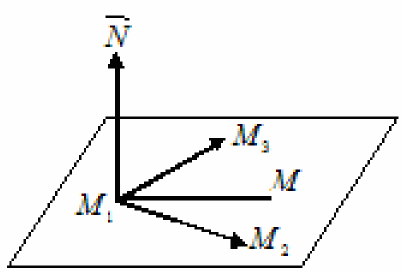
5-2- معادلة مستوٍ يمر من ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

بفرض $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة ولنوجد معادلة المستوي المار من هذه النقاط (الشكل 15).

نلاحظ أنه يمكن رد هذه الحالة إلى معادلة مستوي يمر من نقطة معلومة ويعامد شعاعاً معلوماً .

فلو فرضنا M_1 النقطة المعلومة ، إنَّ منحى الناظم يمكن تعيينه بالشعاع :

$$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{M_1M_2}\wedge\overrightarrow{M_1M_3}$$



الشكل (15)

فإذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي فإنَّ :

$$\overrightarrow{M_1M} \perp \vec{N} \Rightarrow \overrightarrow{M_1M}.\vec{N} = 0$$

$$\overrightarrow{M_1M}.(\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$$

والعلاقة الأخيرة عبارة عن جداء مختلط للأشعة الثلاثة $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$.

وبالتالي :

$$\overrightarrow{M_1M}(\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

وهي معادلة المستوي المطلوب .

مثال 2 : أوجد معادلة المستوي الذي يمر من النقاط :

$$M_3(1,2,-1) \, , M_2(2,2,3) \, , \mathrm{M}_1(1,0,-2)$$

ثمَّ احسب طول العمود النازل من نقطة المبدأ على المستوي ، وأوجـد جيـوب تمـام توجيه هذا العمود .

الحل : بتطبيق قانون معادلة مستوٍ يمر من ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

نجد :
$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

بنشر المحدد نحصل على معادلة المستوي وهي : $-8x - y + 2z + 12 = 0$

نرد هذه المعادلة إلى الشكل ألناظمي ، بتقسيم طرفيها على :

$$-\sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = -13$$

فنجد :
$$\frac{8}{13}x + \frac{1}{13}y - \frac{2}{13}z - \frac{12}{13} = 0$$

ويكون طول العمود هو : $d = \frac{12}{13}$

وجيوب تمام التوجيه هي : $\alpha = \frac{8}{13} \;\; , \;\; \beta = \frac{1}{13} \;\; , \;\; \gamma = -\frac{2}{13}$

نتيجة : الشرط اللازم والكافي كي تقع النقاط الأربعة الآتية :

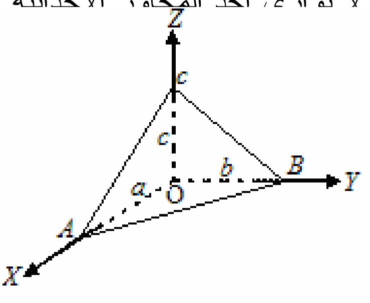
$$(x_4, y_4, z_4) \, , \, (x_3, y_3, z_3) \, , \, (x_2, y_2, z_2) \, , \, (x_1, y_1, z_1)$$

في مستو واحد هو أن يتحقق الشرط الآتي :

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0$$

2-6- نقاط تقاطع مستو مع المحاور الإحداثية :

لتكن $px+qy+rz+h=0$ معادلة مستوٍ لا يوازي أحد المحاور الاحداثية .



هذا يعني أنَّ المستوي يقطع المحاور الإحداثية .
فهو يقطع المحور OX في النقطة A
ويقطع المحور OY في النقطة B
ويقطع المحور OZ في النقطة C ؛
(الشكل 16)

الشكل (16)

حيث :

$$A\left(-\frac{h}{p},0,0\right)\ ,\ B\left(0,-\frac{h}{q},o\right)\ ,\ C\left(0,0,-\frac{h}{r}\right)$$

وذلك لأنَّ المستوي يقطع المحور OX عندما يكون : $y=z=0$ ، ويقطع المحور OY عندما يكون : $x=z=0$ ، ويقطع المحور OZ عندما يكون : $x=y=0$.

2-7- معادلة مستو بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية

بفرض P مستوي يقطع من المحاور الإحداثية الأجزاء a,b,c . عندئذٍ تكون نقاط تقاطع هذا المستوي مع هذه المحاور هي :

$$A(a,0,0)\ ,\ B(0,b,o)\ ,\ C(0,0,c)$$

لإيجاد معادلة هذا المستوي نكتب معادلة مستوٍ يمر من ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة وهذه المعادلة عبارة عن المحدد :

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0$$

بنشر هذا المحدد نجد :

$$(x-a)bc+yac+zab=0$$
$$xbc+yac+zab=abc$$

بتقسيم الطرفين على abc ، نحصل على المعادلة :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

والتي تسمى معادلة المستوي بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية .

مثال 3 : اكتب معادلة المستوي المعيَّن بالمعادلة : $x-2y+4z-8=0$ بدلالة الأجزاء المقتطعة من المحاور الإحداثية .

الحل : نفتش أولاً عن نقاط تقاطع هذا المستوي مع المحاور الإحداثية .

المستوي يقطع المحور OX عندما $y=z=0$ وبالتالي : $x=8=a$

المستوي يقطع المحور OY عندما $x=z=0$ وبالتالي : $x=-4=b$

المستوي يقطع المحور OZ عندما $x=y=0$ وبالتالي : $z=2=c$

بالتعويض في معادلة مستوٍ بدلالة الأجزاء المقطوعة نحصل على المعادلة المطلوبة وهي : $\frac{x}{8}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{2}=1$

2-8- معادلة مستوٍ يمر من نقطة معلومة ويوازي منحيين معلومين

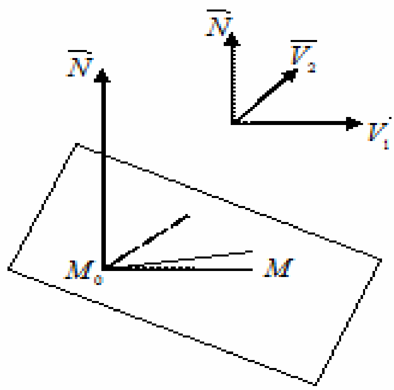
بفرض P مستوي يمر من النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ويوازي المنحيين المحددين بالشعاعين $\overrightarrow{V_1}(p_1,q_1,r_1)$, $\overrightarrow{V_2}(p_2,q_2,r_2)$ ،

والمطلوب إيجاد معادلة هذا المستوي .

إذا رسمنا من M_0 موازٍ للمنحى الأول $\overrightarrow{V_1}$ ، وموازياً للمنحى الثاني $\overrightarrow{V_2}$ فإننا نلاحظ أنَّ منحى ناظم المستوي له نفس منحى الشعاع :

$$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}$$

فإذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في المستوي فإنَّ (الشكل 16) :



الشكل (16)

$$\overrightarrow{M_0M}\perp\overrightarrow{N}\Leftrightarrow\overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{N}=0\Rightarrow\overrightarrow{M_0M}.(\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2})=0$$

وهي المعادلة الشعاعية للمستوي المطلوب .

أما المعادلة التحليلية لهذا المستوي فيعبّر عنها بالمحدد الآتي :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

مثال 4 : أوجد معادلة مستوٍ يمر من النقطة $A(2,1,0)$ ويعامد المستويين :

$$x+2y+z-4=0$$
$$3x+y+3z+5=0$$

الحل : بما أنَّ المستوي المطلوب يتعامد مع المستويين المفروضين فهو يــوازي ناظميهما وبالتالي هذه حالة معادلة مستوٍ يمر من نقطة معلومــة ويــوازي منحيــين ، وبالتالي :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر المحدد نجد أنَّ المعادلة المطلوبة هي :

$$5x-5z-10=0$$

مثال 5 : أوجد معادلة مستوٍ يمر من النقطتين $A(1,2,3)$, $B(4,1,2)$ ويعامد المستوي : $2x-4y+z-6=0$

الحل : إنَّ منحى ناظم المستوي هو $\overrightarrow{N}(2,-4,1)$.

نعيِّن منحى الشعاع $\overrightarrow{AB}$ فيكون $\overrightarrow{AB}(3,-1,-1)$. إنَّ المستوي المطلوب هــو عبــارة عن مستوٍ يمر من نقطة معلومة (يمكن أخذها بشكل اختيــاري مــن بــين النقطتــين المفروضتين) ، ولتكن مثلاً النقطة $A(1,2,3)$ ويوازي منحيي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{N}$. وبالتالي فالمعادلة تعطى بالشكل :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

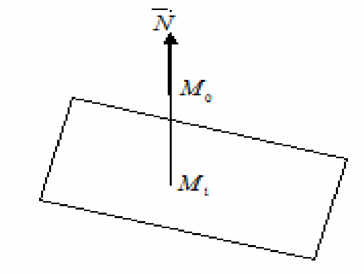
وبنشر المحدد نجد : $x+y+2z+9=0$

2-9- بعد نقطة عن مستوٍ معلوم

بفرض $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة معلومة و $P \equiv px + qy + rz + h = 0$ مستوٍ معلوم ولنوجد بعد هذه النقطة M_0 عن المستوي P ، (الشكل 17) .

إذا كانت النقطة M_1 هي المسقط القائم لـــ M_0 على المستوي ، وبفرض $\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \delta$ ؛ حيث الشعاع $\overrightarrow{M_1M_0}$ محمول على شعاع ناظم المستوي $\vec{N}$.

فإنَّ :



الشكل (17)

$$\overrightarrow{M_1M_0}.\vec{N} = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|.\left|\vec{N}\right|.1 = \delta\left|\vec{N}\right|$$

ومنه :

$$\delta = \frac{\overrightarrow{M_1M_0}.\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{p(x_0 - x_1) + q(y_0 - y_1) + r(z_0 - z_1)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

بفك الأقواس نجد :

$$\delta = \frac{px_0 + qy_0 + rz_0 - (px_1 + qy_1 + rz_1)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

وبما أنَّ M_1 تقع في المستوي P فإحداثياتها تحقق معادلته ، أي :

$$px_1 + qy_1 + rz_1 + h = 0 \Rightarrow h = -(px_1 + qy_1 + rz_1)$$

بالتعويض في علاقة δ يمكن أن نكتب :

$$\delta = \frac{px_0 + qy_0 + rz_0 + h}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{P(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

أما إذا أردنا حساب البعد الهندسي لـــ M_0 عن المستوي P بغض النظر عن وضعها بالنسبة له فنكتب :

$$d = |\delta| = \frac{|P(x_0, y_0, z_0)|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

ملاحظة : إذا كان المستوي P معيناً بالمعادلة الناظمية :

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-d=0$$

فإنَّ دستور بعد النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ عن هذا المستوي يعطى بالعلاقة :

$$|\delta|=|\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0-d|$$

حيث تمثل d بعد مبدأ الإحداثيات عن المستوي .

مثال 6 : أوجد بعد النقطة $A(0,2,8)$ ، ثمَّ أوجد بعد مبدأ الإحداثيات عن المستوي

$$2x-2y+z+6=0$$

الحل : بتطبيق قانون بعد نقطة عن مستوي نجد :

$$d=\frac{|P(2,0,8)|}{\sqrt{9}}=\frac{18}{3}=6$$

أما لحساب بعد مبدأ الإحداثيات عن المستوي فنكتب :

$$d=\frac{|h|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\frac{6}{3}=2$$

10-2- معادلة المستوي المنصف لزاوية مستويين معلومين

ليكن لدينا المستويان :

$$P_1(X,Y,Z)\equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0$$
$$P_2(X,Y,Z)\equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0$$

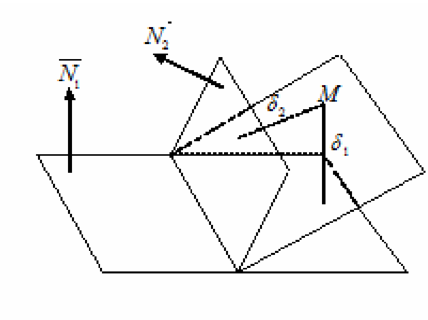
والمطلوب إيجاد معادلة المستوي المنصف لزاوية هذين المستويين .

إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المنصف فإنَّ :

$$|\delta_1|=|\delta_2|$$

أي أنَّ :

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}}=\frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$



الشكل (18)

أو :

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}}=\pm\frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

المساواة الأخيرة تمثل معادلتا المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية مستويين معلومين .

لتعيين نوع المنصف نحسب إشارة الجداء $\overrightarrow{N_1}.\overrightarrow{N_2}$. إنَّ هذه الإشارة تعطى للمنصف الخارجي وعكسها تعطى للمنصف الداخلي .

ويمكننا أن نلخص ذلك بالحالات الآتية :

1) إذا كان $\overrightarrow{N_1}.\overrightarrow{N_2}>0$ ، فإنَّ الإشارة (+) توافق المستوي المنصف الخـــارجي ، والإشارة (−) توافق المستوي المنصف الداخلي .

2) إذا كان $\overrightarrow{N_1}.\overrightarrow{N_2}<0$ ، فإنَّ الإشارة (−) توافق المستوي المنصف الخـــارجي ، والإشارة (+) توافق المستوي المنصف الداخلي .

3) إذا كان $\overrightarrow{N_1}.\overrightarrow{N_2}=0$ فالمستويان متعامدان ولا يمكن التمييز بين المستويين المنصفين .

مثال 7 : أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والمنصف الخارجي لزاوية المستويين :

$$P_1\equiv 2x-y+2z+4=0$$
$$P_2\equiv -2x+2y-z+5=0$$

الحل : إنَّ ناظم المستوي الأول هو $\overrightarrow{N_1}(2,-1,2)$ ، وناظم المستوي الثاني هـــو $\overrightarrow{N_2}(-2,2,-1)$. وبالتالي :

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}}=\pm\frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$
$$\frac{2x-y+2z+4}{3}=\pm\frac{-2x+2y-z+5}{3}\quad\Rightarrow$$
$$2x-y+2z+4=\pm(-2x+2y-z+5)$$

وبما أنَّ : $\overrightarrow{N_1}.\overrightarrow{N_2}=-4-2-2=-8<0$

فالإشارة (+) تعطى للمنصف الداخلي والإشارة (−) تعطى للمنصف الخارجي .

أي أنَّ معادلة المستوي المنصف الداخلي تكون بالشكل :

$$2x - y + 2z + 4 = -2x + 2y - z + 5 \quad \Rightarrow$$
$$4x - 3y + 3z - 1 = 0$$

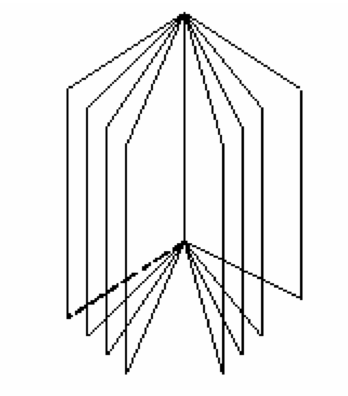
ومعادلة المستوي المنصف الخارجي تكون بالشكل :

$$2x - y + 2z + 4 = 2x - 2y + z - 5 \quad \Rightarrow$$
$$y + z + 9 = 0$$

2-11- حزمة مستويات

ليكن لدينا المستويان :

$$P_1(X,Y,Z) \equiv p_1x + q_1y + r_1z + h_1 = 0$$
$$P_2(X,Y,Z) \equiv p_2x + q_2y + r_2z + h_2 = 0$$



الشكل (19)

تعرَّف حزمة مستويات بأنها مجموعة المستويات المارة من الفصل المشترك للمستويين المتقاطعين P_2, P_1 ، هذان المستويان يسميان قاعدة الحزمة .

إنَّ الشكل العام لمعادلة حزمة مستويات قاعدتها المستويان P_2, P_1 ، هو :

$$P(\lambda) \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0$$

حيث λ وسيط متحول .

هذه المعادلة تكتب بالشكل :

$$p_1x + q_1y + r_1z + h_1 + \lambda(p_2x + q_2y + r_2z + h_2) = 0$$

إنَّ كل نقطة من نقاط الفصل المشترك للمستويين P_2, P_1 تقع في المستوي $P(\lambda)$ ، لأنها تحقق في آن واحد $P_2 = 0 \, , \, P_1 = 0$ فهي تحقق $P(\lambda) = 0$. إذاً هذا المستوي يمر من هذا الفصل المشترك وبالتالي يكون من مستويات الحزمة .

وبالعكس سنبرهن أنَّ كل مستوٍ P من حزمة المستويات المعيَّنة بـ P_2, P_1 يمكن كتابته بالشكل :

$$P(\lambda) \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0$$

بالفعل ، ليكن : $P \equiv px + qy + rz + h = 0$

أحد مستويات هذه الحزمة . بما أنَّ P_2, P_1, P تشترك بنفس الفصل المشترك فإنَّ نواظمها $\overrightarrow{N_2}, \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N}$ يجب أنْ تقع في مستوٍ واحد لأنَّ كلاً منها يعامد هذا الفصل المشترك . وبالتالي يمكن أنْ نكتب :

$$\overrightarrow{N} = \lambda_1 \overrightarrow{N_1} + \lambda_2 \overrightarrow{N_2}$$

أي :

$$p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \quad , \quad q = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \quad , \quad r = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$$

حيث λ_1, λ_2 كميتان سلميتان . إذاً يمكن كتابة P بالشكل الآتي :

$$P \equiv \lambda_1 (p_1 x + q_1 y + r_1 z) + \lambda_2 (p_2 x + q_2 y + r_2 z) + h = 0$$

وبما أنَّ أي نقطة من الفصل المشترك ولتكن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ يجب أن تحقق في آن واحد معادلات P_2, P_1, P لذلك يجب أن يكون : $h = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$

وبالتالي فإنَّ معادلة P تكتب على الشكل : $P \equiv \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 0$

وبوضع $\lambda_1 \neq 0 \; ; \; \lambda = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ، تصبح المعادلة :

$$P \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0$$

أما إذا كان $\lambda_1 = 0$ فإنَّ المستوي P يكون منطبقاً على P_2 ويمكن أن نعتبره مقابلاً للقيمة $\lambda = \infty$ لأنَّ المعادلة $P(\lambda) \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0$ ، تكتب أيضاً بالشكل :

$$P(\lambda) \equiv \frac{1}{\lambda} P_1 + P_2 = 0$$

مثال 8 : لدينا المستويان المتقاطعان :

$$P_1 \equiv x - y + z + 1 = 0$$
$$P_2 \equiv 2x + y - 2z + 3 = 0$$

والمطلوب : 1− اكتب معادلة حزمة المستويات التي قاعدتها المستويان P_2, P_1 .

2− عين من هذه الحزمة مستوياً يعامد المستوي : $Q \equiv -x + 2y - 5z + 1 = 0$

3− عين من هذه الحزمة مستوياً يمر من النقطة $A(1,1,0)$.

الحل : إنَّ معادلة الحزمة تكتب بالشكل :

$$P(\lambda) \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0$$
$$(1 + 2\lambda)x + (-1 + \lambda)y + (1 - 2\lambda)z + 1 + 3\lambda = 0$$

إنَّ أمثال توجيه ناظم مستوي الحزمة هي :

$$\overrightarrow{N}(\lambda):(1+2\lambda,-1+\lambda,1-2\lambda)$$

$$P(\lambda)\perp Q \Leftrightarrow \overrightarrow{N(\lambda)}.\overrightarrow{N(Q)}=0 \Rightarrow$$

$$-1(1+2\lambda)+2(-1+\lambda)-5(1-2\lambda)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{4}{5}$$

نعوض قيمة λ بمعادلة الحزمة فنجد أنَّ المستوي الذي يعامد المستوي Q هو :

$$13x-y-3z+17=0$$

أما لإيجاد المستوي الذي يمر بالنقطة A ، فإننا نعوض إحداثيات النقطة A بمعادلة الحزمة على اعتبار أنها تحقق معادلة الحزمة فنجد أنَّ : $\lambda=-\frac{1}{6}$

والمستوي المطلوب الذي يمر من هذه النقطة هو : $4x-7y+8z+3=0$.

مثال 9 : أوجد معادلة المستوي الذي يمر من الفصل المشترك لتقاطع المستويين الآتيين :

$$P_1 \equiv 2x-y+3z-5=0$$

$$P_2 \equiv x+2y-z+2=0$$

والموازي للشعاع : $\overrightarrow{A}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

الحل : إنَّ المستوي المطلوب هو أحد مستويات الحزمة التي قاعدتها المستويين P_2, P_1 . نكتب معادلة الحزمة :

$$P(\lambda)\equiv P_1+\lambda P_2=0$$

$$(2+\lambda)x+(-1+2\lambda)y+(3-\lambda)z-5+2\lambda=0$$

بما أنَّ المستوي المطلوب يوازي الشعاع $\overrightarrow{A}$ ، فإنَّ ناظم الحزمة $\overrightarrow{N}(\lambda)$ يعامد الشعاع $\overrightarrow{A}$ أي : $\overrightarrow{N}(\lambda).\overrightarrow{A}=0$

حيث : $\overrightarrow{N}(\lambda):(2+\lambda,-1+2\lambda,3-\lambda) \ , \ \overrightarrow{A}(2,-1,-2)$

$$\overrightarrow{N}(\lambda).\overrightarrow{A}=0 \ \Rightarrow \ 2(2+\lambda)-1(-1+2\lambda)-2(3-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

نعوض قيمة λ بمعادلة الحزمة فنجد أنَّ المستوي المطلوب هو :

$$P\left(\frac{1}{2}\right)\equiv 5x+5z-8=0$$

12-2- شروط تقاطع ثلاث مستويات في مستقيم واحد

لتكن المستويات الثلاثة :

$$P_1(X,Y,Z) \equiv p_1x + q_1y + r_1z + h_1 = 0$$
$$P_2(X,Y,Z) \equiv p_2x + q_2y + r_2z + h_2 = 0$$
$$P_3(X,Y,Z) \equiv p_3x + q_3y + r_3z + h_3 = 0$$

إنَّ معادلة حزمة المستويات التي قاعدتها المستويان P_2, P_1 هي :

$$P(\lambda) \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0$$
$$P(\lambda) \equiv (p_1 + \lambda p_2)x + (q_1 + \lambda q_2)y + (r_1 + \lambda r_2)z + h_1 + \lambda h_2 = 0$$

إذا كان المستوي الثالث P_3 يمر من الفصل المشترك للمستويان P_2, P_1 فهو واحد من مستويات الحزمة $P(\lambda)$ أي أنه ينطبق على واحد من مستويات هذه الحزمة . لذلك نطبق شرط التطابق :

$$\frac{p_1 + \lambda p_2}{p_3} = \frac{q_1 + \lambda q_2}{q_3} = \frac{r_1 + \lambda r_2}{r_3} = \frac{h_1 + \lambda h_2}{h_3}$$

وهي عبارة عن ثلاث معادلات خطية بالنسبة للمجهول λ . إحدى هذه المعادلات تكفي لتعيين قيمة λ وهذه القيمة يجب أن تحقق المعادلتين الباقيتين حتى تتلاقى المستويات الثلاثة في خط مستقيم واحد .

ملاحظة : تتقاطع المستويات الثلاثة P_3, P_2, P_1 في نقطة واحدة عندما يكون محـــدد الأمثال لا يساوي الصفر أي أنَّ :

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

مثال 10 : عيِّن قيمة كل من الثابتين a, b حتى تتلاقى المستويات الثلاثة الآتية في مستقيم واحد :

$$P_1 \equiv 2x + y - z + 3 = 0$$
$$P_2 \equiv x - 3y + 5 = 0$$
$$P_3 \equiv ax + y - 2z + b = 0$$

الحل : نوجد معادلة حزمة المستويات التي قاعدتها المستويين P_2, P_1 :

$$P(\lambda) \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0$$

$$P(\lambda) \equiv (2+\lambda)x + (1-3\lambda)y + (-1)z + 3 + 5\lambda = 0$$

وحتى يمر المستوي الثالث بالفصل المشترك لتقاطع المستويين P_2, P_1 يجب أن يتحقق شرط التطابق ، أي يجب أن تتحقق النسب :

$$\frac{2+\lambda}{a} = \frac{1-3\lambda}{1} = \frac{-1}{-2} = \frac{3+5\lambda}{b}$$

من النسبتين الثانية والثالثة نجد :

$$1-3\lambda = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{1}{6}$$

ومن النسبتين الأولى والثالثة نجد :

$$\frac{2+\lambda}{a} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a = \frac{13}{3}$$

ومن النسبتين الثالثة والرابعة نجد :

$$\frac{3+5\lambda}{b} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b = \frac{23}{3}$$

تمارين محلولة

1) اكتب المعادلة الناظمية لكلٍ من المستويات الآتية :

$$A)\quad x+2y-2z-6=0$$

$$B)\quad 2x-3y+z+6=0$$

الحل : بما أنَّ : $h=-6<0$ في المعادلة الأولى ، فإننا نقسم على :

$$\left|\overrightarrow{N}\right|=\sqrt{p^2+q^2+r^2}=\sqrt{1+4+4}=3$$

وبالتالي :

$$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-2=0$$

وبما أنَّ : $h=6>0$ في المعادلة الثانية ، فإننا نقسم على :

$$-\left|\overrightarrow{N}\right|=-\sqrt{p^2+q^2+r^2}=-\sqrt{4+9+1}=-\sqrt{14}$$

وبالتالي :

$$-\frac{2}{\sqrt{14}}x+\frac{3}{\sqrt{14}}y-\frac{1}{\sqrt{14}}z-\frac{6}{\sqrt{14}}=0$$

2) أوجد الزاوية الكائنة بين المستويين :

$$x+y+2z-4=0$$

$$-x-z+5=0$$

الحل : نلاحظ أنَّ ناظم المستوي الأول هو $\overrightarrow{N_1}(1,1,2)$ وناظم المستوي الثاني هو $\overrightarrow{N_2}(-1,0,-1)$. لذلك :

$$\cos\theta=\frac{|-1-2|}{\sqrt{1+1+4}.\sqrt{1+0+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}.\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta=arc\cos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$$

3) عيِّن قيمة الثابتين a,b حتى يتوازى المستويان :

$$P_1\equiv ax-6y-6z+2=0$$

$$P_2\equiv 2x+by+3z-15=0$$

الحل : لدينا من شرط توازي مستويين أنَّ :

$$\frac{a}{2}=\frac{-6}{b}=\frac{-6}{3}$$

وبالتالي :

$$\frac{a}{2}=\frac{-6}{3} \Rightarrow a=-4$$

$$\frac{6}{b}=\frac{6}{3} \Rightarrow b=3$$

4) أوجد معادلة المستوي الذي يمر من النقاط :

$$M_3(-1,3,2)\,,M_2(2,3,-4)\,,\mathrm{M}_1(-4,0,6)$$

ثمَّ احسب طول العمود النازل من نقطة المبدأ على المستوي ، وأوجد جيوب تمام توجيه هذا العمود .

الحل : بتطبيق معادلة مستوٍ يمر من ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة نجد :

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-2 \\ 3 & 0 & -6 \\ -3 & -3 & 4 \end{vmatrix}=0$$

بنشر المحدد نحصل على معادلة المستوي وهي : $6x+2y+3z+6=0$

نرد هذه المعادلة إلى الشكل ألناظمي بتقسيم طرفيها على : (-7)

فنجد : $-\frac{6}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{3}{7}z-\frac{6}{7}=0$

ويكون طول العمود : $d=\frac{6}{7}$

وجيوب تمام التوجيه هي : $\alpha=-\frac{8}{7}\ ,\ \beta=\frac{2}{7}\ ,\ \gamma=-\frac{3}{7}$

5) احسب بعد النقطة $(2,1,-1)$ ، ثمَّ أوجد بعد مبدأ الإحداثيات ، عن المستوي :

$$x+2y-3z+4=0$$

الحل : بتطبيق قانون بعد نقطة عن مستوي نجد :

$$d=\frac{|2+2+3+4|}{\sqrt{14}}=\frac{11}{\sqrt{14}}$$

ولو أردنا حساب بعد مبدأ الإحداثيات عن المستوي لوجدنا :

$$d=\frac{|h|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\frac{4}{\sqrt{14}}$$

6) أوجد معادلة المستوي الذي يمر بـــالنقطتين : $A(1,2,3)\,,\mathrm{B}(4,1,2)$ ويعامــد المستوي :

$$P\equiv 2x-4y+z-6=0$$

الحل : واضح أنَّ $\overrightarrow{A\mathrm{B}}(3,-1,-1)$ ومنحى ناظم المستوي هو $\overrightarrow{N}(2,-4,1)$.

وبالتالي فالمستوي المطلوب يوازي الشعاعين $\overrightarrow{N}$ و $\overrightarrow{A\mathrm{B}}$ ويمر من النقطة $(1,2,3)$.

ومعادلته تعطى بالعلاقة :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

بنشر المحدد نجد المطلوب وهو : $x+y+2z-9=0$

7) أوجد معادلة المستوي الذي يمر بـــالنقطتين : $A(2,-1,3)\,,\mathrm{B}(3,1,2)$ ويـــوازي الشعاع : $\overrightarrow{V}(3,-1,4)$ ؟

الحل : لدينا $\overrightarrow{A\mathrm{B}}(1,2,-1)$ ، والشعاع الناظم للمستوي المطلوب يحسب بالشكل :

$$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{V}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=7\vec{i}-7\vec{j}-7\vec{k}$$

وبالتالي تؤول المسألة إلى إيجاد معادلة مستوٍ يمر من نقطة معلومـــة ويعامـــد شـــعاع معلوم . أي أنَّ :

$$7(x-2)-7(y+1)-7(z-3)=0$$

ومعادلة المستوي المطلوب هي : $x-y-z=0$.

8) أثبت أنَّ النقاط $A(1,2,3)\,,\mathrm{B}(2,1,2)\;,\;C(3,3,1)$ ليست على استقامة واحدة ، ثمَّ اكتب معادلة المستوي المعيَّن بهذه النقاط ؟

الحل : لدينا $\overrightarrow{AC}(2,1,-2)$ و $\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)$.

نلاحظ أنَّ أمثال توجيه الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير متناسبة ، وبالتالي فإنَّ الشعاعين

غير متوازيين . وهذا يعني أنَّ النقاط A, B, C ليست على استقامة واحـــدة ، وهـــي تعيِّن مستوٍ وحيد تعطى معادلته بالعلاقة :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

والتي تأخذ الشكل النهائي : $x + z - 4 = 0$.

9) ما هو الوضع النسبي للمستويين الآتيين :

$$P_1 \equiv 2x - y - 2z + 7 = 0$$
$$P_2 \equiv 2x - y - 2z - 5 = 0$$

ثمَّ أوجد البعد بينهما ؟

الحل : نلاحظ أنَّ المستويين P_1, P_2 متوازيان ، لأنَّ :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = 1$$

لحساب البعد بينهما ، نحسب بعد مبدأ الإحداثيات عن المستوي الأول فنجد : $d_1 = \frac{7}{3}$

ونحسب بعد مبدأ الإحداثيات عن المستوي الثاني فنجد : $d_2 = \frac{-5}{3}$.

والمستويان يقعان بجهتين مختلفتين بالنسبة لمبدأ الإحداثيات ، لذلك فالبعد بينهما هو :

$$d = |d_1| + |d_2| = \frac{7}{3} + \frac{5}{3} = 4$$

ملاحظـــة : هناك طريقة أخرى لحساب البعد بين المستويين بـــأن نختـــار نقطـــة مـــن المستوي الأول ، وذلك بفرض أنَّ $x = 0 , z = 0$ فنجد $y = 7$ والنقطـــة $(0,7,0)$، ونحسب بعد هذه النقطة عن المستوي الثاني فنجد الناتج ذاته .

10) عيِّن أوضاع المستويات الآتية :

$$1)\begin{cases} 2x - 4y + 5z - 21 = 0 \\ x - 3z + 18 = 0 \\ 6x + y + z - 30 = 0 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 3x+6y-9z+10=0 \\ 2x+4y-6z-1=0 \end{cases}$$

الحل : إنَّ المستويات الثلاثة في (1) تحقق :

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 19 \end{vmatrix} = -(-76-1) = 77 \neq 0$$

وللجملة حل مشترك وبالتالي المستويات الثلاثة متقاطعة في نقطة واحدة .

أما المستويات الثلاثة في (2) فهي متوازية فيما بينها ، لأنها تحقق :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{0}{-1} \quad , \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} \neq \frac{0}{10}$$

11) ادرس الأوضاع النسبية لأزواج المستويات الآتية :

$$1)\begin{cases} x-2y+5z-1=0 \\ 33x+4y-5z-63=0 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ x-y+z-5=0 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x-2y+2z-2=0 \end{cases}$$

الحل : المستويان في (1) متقاطعان لأنَّ : $\frac{1}{33} \neq \frac{-2}{4}$

المستويان في (2) متوازيان لأنَّ : $\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1} \neq \frac{+1}{-5}$

المستويان في (3) متطابقان لأنَّ : $\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2}$

12) عيِّن الزوايا التي يصنعها العمود النازل من مبدأ الإحداثيات على المستوي : $x-2y+z-1=0$ مع المحاور الإحداثية ؟

الحل : إنَّ العمود النازل من مبدأ الإحداثيات على المستوي لــه منحــى نــاظم المستوي والذي يتعيَّن بالشعاع $\overrightarrow{N}(1,-2,1)$. وبالتالي جيوب تمام توجيهه هي :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad , \quad \beta = \frac{-2}{\sqrt{6}} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

فإذا كانت: $\theta_1 , \theta_2 , \theta_3$ هي الزوايا التي يصنعها العمود النازل من المبدأ على هذا المستوي ، فإنّ :

$$\cos\theta_1 = \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad , \quad \cos\theta_2 = \beta = \frac{-2}{\sqrt{6}} \quad , \quad \cos\theta_3 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

13) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي لزاوية المستويين :

$$P_1 \equiv 3x - 2y + z - 1 = 0$$

$$P_2 \equiv x + y - 4z + 5 = 0$$

الحل : لدينا : $\overrightarrow{N_1}(3,-2,1)$ و $\overrightarrow{N_2}(1,1,-4)$.

نحسب الجداء : $\overrightarrow{N_1}.\overrightarrow{N_2} = 3 - 2 - 4 = -3 < 0$

وبالتالي تعطى معادلة المستوي المنصف الداخلي بالشكل الآتي :

$$\frac{3x - 2y + z - 1}{\sqrt{14}} = \frac{x + y - 4z + 5}{\sqrt{14}} \Rightarrow$$

$$2x - 3y + 5z - 6 = 0$$

14) أوجد معادلة المستوي الذي يمر بالفصل المشترك للمستويين :

$$P_1 \equiv 2x + 3y - z - 5 = 0$$

$$P_2 \equiv x - 2y - 4z + 9 = 0$$

ويمر بالنقطة $A(-1,1,2)$.

الحل : نكتب معادلة حزمة المستويات التي تمر بالمستويين P_1 , P_2 ، أي :

$$P(\lambda) \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0$$

$$P(\lambda) \equiv (2+\lambda)x + (3-2\lambda)y + (-1-4\lambda)z - 5 + 9\lambda = 0$$

بما أنّ مستوي الحزمة يمر بالنقطة $A(-1,1,2)$ فهذه النقطة تحقق معادلة الحزمة . أي أنّ :

$$-(2+\lambda) + (3-2\lambda) + 2(-1-4\lambda) - 5 + 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -3$$

وبالتالي فالمعادلة المطلوبة هي :

$$P(-3) \equiv x + 9y + 11z - 32 = 0$$

15) أوجد معادلة المستوي الذي يمر بالفصل المشترك للمستويين :

$$P_1 \equiv x + 2y + z + 1 = 0$$
$$P_2 \equiv x - 2y - z + 3 = 0$$

ويعامد المستوي P_1 .

الحل : نكتب معادلة حزمة المستويات التي تمر بالمستويين P_1 , P_2 ، أي :

$$P(\lambda) \equiv P_1 + \lambda P_2 = 0$$
$$P(\lambda) \equiv (1+\lambda)x + (2-2\lambda)y + (1-\lambda)z + 1 + 3\lambda = 0$$

إنَّ ناظم الحزمة معيَّن بالشعاع : $\overrightarrow{N}(\lambda) : (1+\lambda, 2-2\lambda, 1-\lambda)$ ، وناظم المستوي P_1 معيَّن بالشعاع $\overrightarrow{N_1}(1,2,1)$. وبالتالي :

$$P(\lambda) \perp P_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{N}(\lambda) \perp \overrightarrow{N_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{N}(\lambda).\overrightarrow{N_1} = 0 \Rightarrow$$
$$1 + \lambda + 4 - 4\lambda + 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

نعوض في معادلة الحزمة فنحصل على معادلة المستوي المطلوبة :

$$P\left(\frac{3}{2}\right) \equiv 5x - 2y - z + 11 = 0$$

16) أوجد معادلة المستوي الذي يمر بالفصل المشترك للمستويين :

$$P_1 \equiv 3x + 2y + 5z + 6 = 0$$
$$P_2 \equiv x + 4y + 3z + 4 = 0$$

ويوازي المستقيم : $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3}$ (يوازي الشعاع $\vec{V}(3,2,-3)$) ؟

الحل :المستوي المطلوب هو أحد مستويات الحزمة التـي قاعـدتها المـستويان P_1 , P_2 . لذلك نكتب معادلة الحزمة :

$$P(\lambda) \equiv (3+\lambda)x + (2+4\lambda)y + (6+3\lambda)z + 6 + 4\lambda = 0$$

إنَّ ناظم الحزمة معيَّن بالشعاع : $\overrightarrow{N}(\lambda) : (3+\lambda, 2+4\lambda, 5+3\lambda)$ ولـدينا الـشعاع $\vec{V}(3,2,-3)$ ، وبالتالي :

$$\overrightarrow{N}(\lambda) \perp \vec{V} \Leftrightarrow \overrightarrow{N}(\lambda).\vec{V} = 0 \Rightarrow$$
$$3(3+\lambda) + 2(2+4\lambda) - 3(5+3\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

نعوض في معادلة الحزمة فنحصل على معادلة المستوي المطلوبة :

$$P(1) \equiv 4x + 6y + 8z + 10 = 0$$

تمارين غير محلولة

1) أوجد معادلة مستوٍ يمر من النقطة $A(1,4,6)$ ، ويوازي الشعاعين :
$\vec{a}(3,1,-1)\ ,\ \vec{b}(0,2,3)$

الجواب : $5x-9y+6z-5=0$

2) أوجد معادلة المستوي الذي يمر بالنقطتين : $A(2,2,2)\,,\mathrm{B}(1,1,1)$ ، ويعامد المستوي :

$$x+y-z=0$$

الجواب : $x-y=0$

3) أوجد معادلة المستوي الذي يمر بالنقطتين : $A(1,-1,-2)\,,\mathrm{B}(3,1,1)$ ، ويعامد المستوي :

$$x-2y+3z-5=0$$

الجواب : $4x-y-2z-9=0$

4) أوجد معادلة المستوي الذي يمر من النقطة M_1 ويعامد الشعاع $\overrightarrow{M_1M_2}$ ؛ حيث $M_1(3,-1,2)\ ,\ M_2(4,-2,-1)$.

الجواب : $x-y-3z+2=0$

5) أوجد معادلة المستوي الذي يمر بالنقطتين : $A(2,-1,3)\,,\mathrm{B}(3,1,2)$ ، ويوازي الشعاع : $\vec{a}(3,-1,4)$ ؟

الجواب : $x-y-z=0$

6) أوجد معادلة مستوٍ يمر من النقطة $A(1,-1,1)$ ، ويعامد المستويين :

$$x-y+z-1=0$$
$$2x+y+z+1=0$$

الجواب : $-2x+y+3z=0$

7) أوجد معادلة مستوٍ يمر من مبدأ الإحداثيات ويعامد المستويين :

$$2x-y+3z-1=0\ ,\ x+2y+z=0$$

الجواب : $7x-y-5z=0$

8) عيِّن قيمة الوسيط λ ، حتى يتعامد المستويان :

$$2\lambda x + y - z - 2 = 0$$

$$x - \lambda y + z + 3 = 0$$

ثمَّ احسب بعد النقطة $A(1,1,1)$ عن الفصل المشترك لهما ؟

الجواب : $\lambda = 1$ ، $\delta = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

9) ليكن المستويان : $P_1 \equiv 3x+2y-z-5=0$, $P_2 \equiv x+4y-z+1=0$

والمطلوب : آ) أوجد الزاوية بين هذين المستويين ؟

ب) أوجد معادلة المستوي الذي يمر من مبدأ الإحداثيات والعمود على الفصل المشترك لهذين المستويين ؟

ج) أوجد معادلة المستوي الذي يمر من مبدأ الإحداثيات وامن الفصل المشترك لهذين المستويين؟

الجواب : آ) $\theta = \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$ ، **ب)** $x + y + 5z = 0$ ، **ج)** $4x + 11y - 3z = 0$

10) أوجد معادلة المستوي الذي يمر من النقاط :

$A)$ $(0,0,4)\,,(0,-3,0)\,,(2,0,0)$

$B)$ $(3,-1,2),(4,-1,-1),(2,0,2)$

الجواب : $A)$ $6x - 4y + 3z - 12 = 0$, $B)$ $3x + 3y + z - 8 = 0$

11) أوجد الزاوية الكائنة بين المستويين :

$A)$ $x + y + 2z - 4 = 0$, $-x - z + 5 = 0$

$B)$ $x + y + z - 1 = 0$, $x - 2y + 3z - 1 = 0$

$C)$ $3x + 2y - 5z = 4$, $2x - 3y + 5z = 8$

الجواب : $A)$ $\theta = \frac{\pi}{6}$, $B)$ $\theta = 72^\circ$, $C)$ $\theta = 48.5^\circ$

12) حدد أي من أزواج المعادلات الآتية تحدد مستويين متوازيين :

$A)$ $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$

$B)$ $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$

$C)$ $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$

الجواب : A و C .

13) حدد أي من أزواج المعادلات الآتية تحدد مستويين متوازيين :

$A)\ \ 3x-y-2z-5=0\ \ ,\ \ x+9y-3z+2=0$

$B)\ \ 2x+3y-z-3=0\ \ ,\ \ x-y-z+5=0$

$C)\ \ 2x-5y+z=0\ \ \ \ \ ,\ \ x+2z-3=0$

الجواب : A و B .

14) عيِّن قيم m,l التي تحدد عندها أزواج المعادلات الآتية مستويات متوازية :

$A)\ \ 2x+ly+3z-5=0\ \ ,\ \ mx-6y-6z+2=0$

$B)\ \ 3x-y+lz-9=0\ \ ,\ \ 2x+my+2z-3=0$

$C)\ \ mx+3y-2z-1=0\ \ ,\ \ 2x-5y-lz=0$

الجواب : $A)\ m=-4\ ,\ l=3$ و $B)\ m=-\dfrac{2}{3}\ ,\ l=3$ و $C)\ m=-1\dfrac{1}{5}\ ,\ l=-3\dfrac{1}{3}$

15) عيِّن قيمة l التي تحدد عندها أزواج المعادلات الآتية ، مستويات متعامدة :

$A)\ \ 3x-5y+lz-3=0\ \ ,\ \ x+3y+2z+5=0$

$B)\ \ 5x+y-3z-3=0\ \ ,\ \ 2x+ly-3z+1=0$

$C)\ \ 7x-2y-z=0\ \ ,\ \ lx+y-3z-1=0$

الجواب : $A)l=6$ و $B)\ l=-19$ و $C)\ l=-\dfrac{1}{7}$

16) أوجد معادلة المستوي الذي يمر من مبدأ الإحداثيات ويوازي المستوي :

$$5x-3y+2z-3=0$$

الجواب : $5x-3y+2z=0$

17) أوجد معادلة المستوي الذ يمر بالنقطة $(3,-2,-7)$ ويوازي المستوي :

$$2x-3z+5=0$$

الجواب : $2x-3z-27=0$

18) أوجد معادلة المستوي الذي يمر :

آ) بالنقطة $(2,-3,3)$ موازياً للمستوي OXY ؟

ب) بالنقطة $(1,-2,4)$ موازياً للمستوي OXZ ؟

ج) بالنقطة $(-5,2,-1)$ موازياً للمستوي OYZ ؟

الجواب : آ) $z-3=0$ ، ب) $y+2=0$ ، ج) $x+5=0$

19) أوجد معادلة المستوي الذي يمر :

آ) بالنقطتين $(7,2,-3)$, $(5,6,-4)$ موازياً للمحور OX ؟

ب) بالنقطتين $(2,-1,1)$, $(3,1,2)$ موازياً للمحور OY ؟

ج) بالنقطتين $(3,-2,5)$,$(2,3,1)$ موازياً للمحور OZ ؟

الجواب : آ) $y+4z+10=0$ ، ب) $x-z-1=0$ ، ج) $5x+y-13=0$

20) احسب البعد بين النقطة $(-1,1,-2)$ ، والمستوي الذي يمر بالنقاط الثلاثة الآتية : $(4,-5,-2)$, $(-2,1,3)$, $(1,-1,1)$. الجواب : 4

21) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي لزاوية المستويين :

$$P_1 \equiv 2x-2y+z-1=0 \quad , \quad P_2 \equiv x-2y+2z+5=0$$

الجواب : $3x-4y+3z+4=0$

22) اكتب معادلة المستوي الذي ينتمي إلى حزمة المستويات :

$$\alpha(x-3y+7z+36)+\beta(2x+y-z-15)=0$$

ويبعد عن مبدأ الإحداثيات مسافة $3\ Cm$ ؟

الجواب : $3x-2y+6z+21=0$, $189x+28y+48z-591=0$

23) حدد من حزمة المستويات :

$$2x-3y+z-3+\lambda(x+3y+2z+1)=0$$

ذلك المستوي الذي : آ) يمر من النقطة $A(1,-1,3)$ ؟ ب) يوازي المحور OX ؟

الجواب : آ) $-2x-15y-7z-7=0$ ، ب) $-9y-3z-5=0$

24) أوجد معادلة المستوي الذي يمر بالفصل المشترك للمستويين :

$$P_1 \equiv x+y+z=0$$
$$P_2 \equiv 2x-y+3z=0$$

ويوازي المستقيم $x=2y=3z$ (يوازي الشعاع $\vec{V}(6,3,2)$)

الجواب : $7x-26y+18z=0$

25) أوجد معادلة المستوي الذي يمر بالفصل المشترك للمستويين :

$$x+2y-z+2=0 \ , \ 2x-y+3z-5=0$$

ويوازي الشعاع $\vec{V}(2,-1,-2)$ ؟ الجواب : $5x+5z-8=0$

26) أوجد معادلة المستوي الذي يمر بالفصل المشترك للمستويين :

$x-2z=0 \quad , \quad 3x-2y+z-3=0$

ويعامد لمستوي : $x-2y+z+5=0$ ؟

الجواب : $11x-2y-15z-3=0$

27) تحقق من أنَّ للمستويات الثلاثة :

$x-2y+z-7=0 \; , \; 2x+y-z+2=0 \; , \; x-3y+2z-11=0$

نقطة واحدة مشتركة ، ثمَّ احسب إحداثياتها ؟

الجواب : $(1,-2,2)$

28) أثبت أنَّ المستويات الثلاثة :

$7x+4y+7z+1=0 \; , \; 2x-y-z+2=0 \; , \; x+2y+3z-1=0$

تمر بمستقيم واحد ؟

29) عيِّن قيم b,a ؛ بحيث تكون المستويات :

$2x-y+3z-1=0 \; , \; x+2y-z+b=0 \; , \; x+ay-6z+10=0$

عندها : 1) متقاطعة في نقطة واحدة فقط ، 2) مارة بمستقيم واحد ، 3) متقاطعة في ثلاثة مستقيمات مختلفة متوازية .

الجواب : 1) $a\neq 7$ ، 2) $b=3,a=7$ ، 3) $b\neq 3,a=7$

انتهى الفصل الثاني

من القسم الثاني